BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur une équation fonctionnelle

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 102-106
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__102_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE;

Par M. L. Lecornu.

Soit $X = f(x)$ une fonction uniforme de x. Considérons la substitution (x, y) définie par l'équation à coefficients constants

$$\varphi(x, y) = axy + b(x + y) + c = 0, \tag{1}$$

et cherchons si la fonction $f(x)$ peut être déterminée de manière à vérifier l'équation de même forme

$$\Phi(X, Y) = AXY + B(X + Y) + C = 0. \tag{2}$$

Supposons d'abord A différent de zéro. On peut écrire

$$(AX + B)(AY + B) = B^2 - AC.$$

Si donc on pose $X_1 = \dfrac{AX + B}{\sqrt{B^2 - AC}}$, $Y_1 = \dfrac{AY + B}{\sqrt{B^2 - AC}}$, il vient

$$X_1 Y_1 = 1, \tag{3}$$

ou, ce qui revient au même,

$$X_1 = \frac{1 + X_1}{1 + Y_1}.$$

Sous cette dernière forme, on voit que la fonction X_1 est le quotient d'une fonction de x par la même fonction de y.

Réciproquement, le quotient $\frac{\psi(x)}{\psi(y)}$, quelle que soit la fonction uniforme $\psi(x)$, vérifie identiquement l'équation (3), dont il constitue par suite la solution générale. On en déduit la solution générale de (2), qui est

$$(5) \qquad AX + B = \sqrt{B^2 - AC}\,\frac{\psi(x)}{\psi(y)}.$$

Un cas particulier de ce problème a été proposé comme question, sous le n° 474 de l'*Intermédiaire,* dans les termes suivants :

« Trouver les fonctions $f(x)$ telles que $f(x) = \dfrac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$.

» Louis Rossel. »

On peut se demander à quelles conditions, x et y étant réels, ainsi que les coefficients des équations (1) et (2), il existe des solutions également réelles. Si $B^2 - AC$ est positif, aucune difficulté : l'on n'a qu'à prendre pour $\psi(x)$ une fonction réelle. Quand $B^2 - AC$ est négatif, le résultat ne peut être réel que si le quotient $\frac{\psi(x)}{\psi(y)}$ est purement imaginaire. Or, ceci est impossible, attendu que si l'on avait, par exemple,

$$\text{Arg.}\,\psi(x) - \text{Arg.}\,\psi(y) = \frac{\pi}{2},$$

la permutation de x avec y donnerait, puisque la fonction $\psi(x)$ est supposée uniforme,

$$\text{Arg.}\,\psi(y) - \text{Arg.}\,\psi(x) = \frac{\pi}{2},$$

équation incompatible avec la précédente. Il faut donc que $B^2 - AC$ soit positif. Si $B^2 - AC = 0$, la fonction X se réduit à une constante déterminée par l'équation $AX + B = 0$.

Supposons maintenant que A soit nul. L'équation (2) devient

$$B(X + Y) + C = 0.$$

ce que nous écrirons

$$\left(X+\frac{C}{2B}\right)+\left(Y+\frac{C}{2B}\right)=0;$$

d'où

$$e^{X+\frac{C}{2B}}e^{Y+\frac{C}{2B}}=1.$$

La fonction $e^{X+\frac{C}{2B}}$ vérifie donc l'équation (3), et l'on en déduit immédiatement

$$e^{X+\frac{C}{2B}}=\frac{\psi(x)}{\psi(y)};$$

d'où

$$X+\frac{C}{2B}=\log\psi(x)-\log\psi(y),$$

ou bien

$$X=\chi(x)-\chi(y)-\frac{C}{2B}, \tag{6}$$

en posant $\chi(x)=\log\psi(x)$. Réciproquement, quelle que soit la fonction $\chi(x)$, la relation (6) répond à la question; il faut seulement avoir soin de choisir cette fonction de telle façon qu'elle soit uniforme tout au moins dans le domaine (x,y) que l'on veut considérer, sans quoi l'on ne serait pas en droit de dire que la permutation de x avec y change le signe de la différence $\chi(x)-\chi(y)$ sans changer sa valeur.

La relation (6) doit nécessairement se déduire de la relation (5) par l'hypothèse $A=0$. Voici comment l'on passe de l'une à l'autre. Si A est infiniment petit, B et C demeurant constants, la relation (5) peut s'écrire

$$X=-\frac{B}{A}+\frac{B}{A}\left(1-\frac{AC}{2B^2}\right)\frac{\psi(x)}{\psi(y)}=-\frac{C}{2B}\frac{\psi(x)}{\psi(y)}+\frac{B}{A}\frac{\psi(x)-\psi(y)}{\psi(y)}.$$

Pour que la valeur de X reste finie, il faut que $\frac{\psi(x)-\psi(y)}{A\psi(y)}$ soit également fini. Désignons ce quotient par $\theta(x)$, après en avoir fait disparaître y au moyen de l'équation (1). Nous aurons

$$\frac{\psi(x)}{\psi(y)}=1+A\theta(x),$$

et, par permutation de x avec y,

$$\frac{\psi(x)}{\psi(y)}=\frac{1}{1+A\theta(y)}=1-A\theta(y)+A\varepsilon \qquad (\lim\varepsilon=0).$$

On en déduit, en ajoutant,

$$\frac{\psi(x)}{\psi(y)} - 1 = A\,\frac{\theta(x) - \theta(y) + \varepsilon}{2},$$

et, par suite,

$$X = -\frac{C}{2B}\left(1 + A\,\frac{\theta(x) - \theta(y) + \varepsilon}{2}\right) + B\,\frac{\theta(x) - \theta(y) + \varepsilon}{2}.$$

Si maintenant on annule A et par conséquent ε, il reste

$$X = -\frac{C}{2B} + B\,\frac{\theta(x) - \theta(y)}{2},$$

ce qui concorde avec l'équation (6).

Il est naturel d'étendre la recherche précédente au système d'équations

$$(1)^{bis} \qquad \varphi(x, y) = axy + bx + b'y + c = 0,$$

$$(2)^{bis} \qquad \Phi(X, Y) = AXY + BX + B'Y + C = 0,$$

dans lequel les deux valeurs x, y de la variable n'interviennent plus d'une manière symétrique, non plus que les valeurs correspondantes, X et Y, de la fonction inconnue. Si la symétrie subsiste par rapport à la variable, le problème est généralement impossible, car la permutation de x avec y fournit le système d'équations simultanées

$$AXY + B\,X + B'Y + C = 0,$$
$$AXY + B'X + B\,Y + C = 0,$$

d'où, par soustraction,

$$(B - B')(X - Y) = 0,$$

et par suite, puisque B diffère de B',

$$X = Y.$$

Alors l'équation

$$AX^2 + (B + B')X + C = 0$$

fournit pour X une valeur constante, ce qui ne peut être regardé comme une solution. Il n'y a d'exception que si l'on a à la fois

$$A = C = 0, \qquad B + B' = 0.$$

Dans ce cas, l'équation à vérifier est

$$X - Y = 0, \tag{7}$$

et il est facile d'y satisfaire. Si l'on pose, en effet, $X = 2\psi(x)$, et, par suite, $Y = 2\psi(y)$, on a

$$X + Y = 2[\psi(x) + \psi(y)].$$

Combinant avec l'équation précédente, on trouve

$$X = \psi(x) + \psi(y). \tag{8}$$

Réciproquement, quelle que soit la fonction uniforme $\psi(x)$, il est clair que la relation (8) fournit une solution de l'équation (7).

Quand la relation entre x et y devient dissymétrique, le problème change de face. Il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer que l'étude de la substitution $(1)^{bis}$ a été précisément l'origine des découvertes de M. Poincaré sur les fonctions fuchsiennes et kleinéennes. La simplicité des résultats consignés dans la présente Note tient entièrement à ce que la symétrie de l'équation (1) réduit le groupe fondamental de la substitution au type le plus élémentaire, savoir un couple de points.