BULLETIN DE LA S. M. F.

H. VON KOCH

Sur un théorème de Stieltjes et sur les fonctions définies par des fractions continues

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 33-40
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__33_0>

SUR UN THÉORÈME DE STIELTJES ET SUR LES FONCTIONS DÉFINIES PAR DES FRACTIONS CONTINUES;

Par M. H. von Koch.

I.

Je me propose de démontrer d'abord ce théorème :

Si $h_1, h_2, \ldots$ *sont des fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, *holomorphes dans un domaine donné* T, *si la série*

$$\sum_{\nu} |h_\nu| \tag{1}$$

converge uniformément dans ce domaine, et si

$$\frac{P_n(x_1, \ldots, x_k)}{Q_n(x_1, \ldots, x_k)}$$

désigne la $n^{\text{ième}}$ *réduite de la fraction continue*

$$\cfrac{1}{h_1 + \cfrac{1}{h_2 + \cfrac{1}{h_3 + \ldots}}}, \tag{2}$$

on a, pour tout le domaine T,

$$\begin{aligned}
\lim P_{2n}(x_1, \ldots, x_k) &= P(x_1, \ldots, x_k),\\
\lim Q_{2n}(x_1, \ldots, x_k) &= Q(x_1, \ldots, x_k),\\
\lim P_{2n+1}(x_1, \ldots, x_k) &= P_1(x_1, \ldots, x_k),\\
\lim Q_{2n+1}(x_1, \ldots, x_k) &= Q_1(x_1, \ldots, x_k),
\end{aligned}$$

P, Q, P_1, Q_1 *désignant des fonctions holomorphes dans* T *qui satisfont à la relation*

$$Q(x_1, \ldots, x_k)\, P_1(x_1, \ldots, x_k) - Q_1(x_1, \ldots, x_k)\, P(x_1, \ldots, x_k) = 1.$$

On voit que ce théorème embrasse comme cas particulier le théorème de Stieltjes [1] relatif à l'oscillation de la fraction con-

---

[1] Stieltjes, *Recherches sur les fractions continues* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse,* t. VIII, 1894).

tinue (2) dans le cas où l'on a

$$h_{2n} = a_{2n}, \qquad h_{2n+1} = a_{2n+1}\, z,$$

les a_i étant des constantes réelles et positives et z une variable complexe.

Pour la démonstration, remarquons que les formules de récurrence

$$(3) \qquad \begin{cases} Q_\rho = h_\rho Q_{\rho-1} + Q_{\rho-2} \qquad (Q_0 = 1,\ Q_{-1} = 0) \\ \qquad\qquad (\rho = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

mettent en évidence que $Q_{\rho+2p}$ se réduit identiquement à Q_ρ, quand on y fait

$$h_{\rho+2p} = h_{\rho+2p-1} = \ldots = h_{\rho+1} = 0.$$

Or, dans le développement du produit

$$\prod_{\nu=1}^{\rho+2p} (1 + h_\nu),$$

on retrouve tous les termes du polynôme $Q_{\rho+2p}$. Donc, puisque ce produit se réduit à

$$\prod_{\nu=1}^{\rho} (1 + h_\nu),$$

quand on y fait $h_{\rho+2p} = \ldots = h_{\rho+1} = 0$, on aura nécessairement

$$(4) \qquad Q'_{\rho+2p} - Q'_\rho \leqq \prod_{\nu=1}^{\rho+2p} (1 + |h_\nu|) - \prod_{\nu=1}^{\rho} (1 + |h_\nu|),$$

Q'_ν désignant ce que devient le polynôme Q_ν quand on y remplace chaque terme par sa valeur absolue. Or, puisque la série $\Sigma_\nu |h_\nu|$ est supposée uniformément convergente dans le domaine T, à tout nombre positif ε correspondra un entier positif ρ' tel que le second membre de la formule (4) devienne moindre que ε dès que l'on a $\rho \geqq \rho'$, et cela pour tout le domaine T et pour des valeurs quelconques de p; on aura donc *a fortiori*

$$|Q_{\rho+2p} - Q_\rho| \leqq Q'_{\rho+2p} - Q'_\rho < \varepsilon;$$

donc les deux séries

$$1+\sum_{\nu=1}^{+\infty}(Q_{2\nu}-Q_{2\nu-2}),\qquad \sum_{\nu=0}^{+\infty}(Q_{2\nu+1}-Q_{2\nu-1})$$

convergent uniformément dans T et représentent, par suite, certaines fonctions $Q(x_1, \ldots, x_k)$ et $Q_1(x_1, \ldots, x_k)$ holomorphes dans ce domaine, ce qui prouve bien que les limites

$$\lim Q_{2n} = Q, \qquad \lim Q_{2n+1} = Q_1$$

sont des fonctions holomorphes dans T.

Puisque les P_ρ satisfont à des formules de récurrence de la même forme

$$P_\rho = h_\rho P_{\rho-1} + P_{\rho-2} \qquad (P_0 = 0,\ P_{-1} = 1)$$
$$(\rho = 1, 2, 3, \ldots),$$

on voit de la même manière que l'on a, pour tout le domaine T,

$$\lim P_{2n} = P, \qquad \lim P_{2n+1} = P_1,$$

P et P_1 étant des fonctions de $x_1, \ldots, x_k$ holomorphes dans T.

Vu que les fonctions Q_{2n}, P_{2n}, Q_{2n+1}, P_{2n+1} sont liées par l'identité

$$Q_{2n}P_{2n+1} - Q_{2n+1}P_{2n} = 1,$$

il est clair que leurs limites Q, P, Q_1, P_1 y satisfont également :

$$QP_1 - Q_1P = 1.$$

Le théorème est donc démontré.

Remarquons enfin que le polynôme Q_ρ, écrit sous la forme d'un déterminant d'ordre ρ

$$Q_\rho = \begin{vmatrix} h_1 & 1 & & & \\ -1 & h_2 & 1 & & \\ & -1 & h_3 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & h_\rho \end{vmatrix}$$

fournit le premier exemple d'un déterminant infini qui prend deux valeurs différentes Q et Q_1 selon que son ordre indéfiniment croissant ρ est assujetti à rester pair ou impair.

II.

Dans une lettre à M. Poincaré, dont un extrait a été publié récemment (¹), j'ai démontré, entre autres, deux théorèmes, qui pourront être énoncés en ces termes :

I. *Si* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ *sont des fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables indépendantes* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, *si ces fonctions sont holomorphes dans un domaine continu donné* T, *et si la série*

$$\sum_\nu |\varphi_\nu \tag{5}$$

converge uniformément dans ce domaine, la fraction continue

$$\cfrac{\varphi_1}{1+\cfrac{\varphi_2}{1+\cfrac{\varphi_3}{1+\ldots}}} \tag{6}$$

représente une fonction $\Theta(x_1, \ldots, x_k)$ *qui, dans tout le domaine* T, *reste méromorphe et peut s'exprimer par le quotient de deux fonctions* $\varphi_1\Delta'$ *et* Δ *holomorphes dans* T.

II. *Soit* T_1 *un domaine continu quelconque situé tout entier en dedans de* T *et tel que la somme* S *de la série*

$$S = \sum_{\nu=2}^{+\infty} |\varphi_\nu| \tag{7}$$

y satisfasse à la condition

$$S < \rho, \tag{8}$$

ρ *désignant un nombre positif suffisamment petit. Dans tout ce domaine* T_1, *la fonction* $\Theta(x_1, \ldots, x_k)$, *définie par la fraction continue* (6), *restera nécessairement holomorphe.*

(¹) *Sur la convergence des déterminants d'ordre infini et des fractions continues.* Extrait d'une lettre de M. H. von Koch à M. Poincaré. (*Comptes rendus*, 21 janvier 1895.)

Dans l'énoncé précédent, Δ désigne le déterminant infini

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ -\varphi_2 & 1 & 1 & & \\ & -\varphi_3 & 1 & 1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & \cdot & \cdot \end{vmatrix},$$

et Δ' ce que devient Δ quand on y supprime la première ligne et la première colonne; ces déterminants infinis Δ et Δ' convergent absolument et uniformément en dedans du domaine T, d'après deux lemmes que j'ai énoncés dans la Note citée plus haut et dont j'ai donné les démonstrations, d'ailleurs très simples, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences de Stockholm, le 13 février 1895.

Dans la première Note, j'ai montré que le théorème II reste certainement vrai si l'on pose, dans l'inégalité (8), $\rho = \frac{1}{2}$; dans la seconde, j'ai remplacé cette limite par la suivante :

$$\rho = \log 2 = 0,69314718\ldots.$$

Je me propose maintenant d'étendre ces résultats en démontrant que le théorème II reste encore vrai si l'on pose, dans l'inégalité (8),

$$\rho = 1.$$

Pour cela, il faut d'abord démontrer le lemme suivant :

Si $b_2, b_3, \ldots$ sont des nombres positifs quelconques, la fraction continue d'ordre ν

$$\frac{1}{1-\cfrac{tb_2}{1-\cfrac{tb_3}{1-\ddots\, 1-\cfrac{tb_{\nu-1}}{1-tb_\nu}}}} \tag{9}$$

représente une fonction $f(t)$ développable sous la forme

$$f(t) = 1 + f_1 t + f_2 t^2 + \ldots,$$

f_ν désignant un certain polynôme homogène, à coefficients en-

tiers et positifs, et de degré ν *par rapport à* $b_2, \ldots, b_\nu$, *qui satisfait à l'inégalité*

$$f_\lambda < (b_2 + b_3 + \ldots + b_\nu)^\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

En effet, supposons ce théorème valable pour une fraction de la forme (9) d'ordre $\nu - 1$; nous aurons

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{tb_3}{1 - \cfrac{tb_4}{1 - \ddots \; 1 - \cfrac{tb_{\nu-1}}{1 - tb_\nu}}}} = \psi(t) = 1 + \psi_1 t + \psi_2 t^2 + \ldots,$$

ψ_λ étant un polynôme homogène, à coefficients entiers et positifs et de degré λ par rapport à $b_3, b_4, \ldots, b_\nu$.

De là on conclut qu'en posant

$$f(t) = \frac{1}{1 - tb_2\psi(t)} = 1 + f_1 t + f_2 t^2 + \ldots$$

les f_λ seront de pareils polynômes par rapport à $b_2, b_3, \ldots, b_\nu$. Il reste seulement à démontrer l'inégalité (10).

Par hypothèse, les ψ_λ satisfont aux conditions

$$\psi_\lambda < B^\lambda,$$

où l'on a posé $B = b_3 + b_4 + \ldots + b_\nu$. Donc les coefficients dans le développement de la fonction $f(t)$ seront moindres que les coefficients correspondants dans le développement de la fonction

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{tb_2}{1 - tB}} = \frac{1 - tB}{1 - t(b_2 + B)};$$

donc, *a fortiori*, ils seront moindres que les coefficients dans le développement de

$$\frac{1}{1 - t(b_2 + B)},$$

ce qui conduit bien à l'inégalité (10).

Le lemme, étant visiblement vrai pour une fraction d'ordre 3, se trouve donc démontré dans le cas général.

Revenons à l'étude de la fraction (6), les φ_ν étant des fonctions de $x_1, \ldots, x_k$ telles que la série $\Sigma|\varphi_\nu|$ converge uniformément dans T; supposons de plus

$$S = \sum_{\nu=2}^{+\infty} |\varphi_\nu| < 1 \tag{11}$$

dans tout le domaine T_1.

Au lieu de (6), considérons pour un instant la fraction suivante (t désignant une variable auxiliaire)

$$F(t) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{t\varphi_2}{1 - \cfrac{t\varphi_3}{1 - \ddots}}},$$

et désignons la $\nu^{\text{ième}}$ réduite de cette fraction par $F_\nu(t)$; d'après ce que nous savons, $F(t)$ et $F_\nu(t)$ sont des fonctions holomorphes dans un cercle ayant l'origine pour centre et un rayon R suffisamment petit. Or la relation

$$F(t) - F_\nu(t) = t^\nu \frac{\varphi_2\varphi_3\ldots\varphi_{\nu+1}}{N_\nu[N_{\nu+1} + N_\nu F^{(\nu+2)}]},$$

où l'on a posé

$$F^{(\nu+2)} = -\cfrac{t\varphi_{\nu+2}}{1 - \cfrac{t\varphi_{\nu+3}}{1 - \ddots}}, \qquad N_\nu = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ t\varphi_2 & 1 & 1 & & \\ & t\varphi_3 & 1 & 1 & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & t\varphi_\nu & 1 \end{vmatrix},$$

montre que le développement de $F(t) - F_\nu(t)$ commence par un terme en t^ν; en d'autres termes, si l'on pose

$$F(t) = 1 + A_1 t + A_2 t + \ldots,$$
$$F_\nu(t) = 1 + A_1^{(\nu)} t + A_2^{(\nu)} t + \ldots,$$

on a

$$A_1 = A_1^{(\nu)}, \qquad A_2 = A_2^{(\nu)}, \qquad \ldots, \qquad A_{\nu-1} = A_{\nu-1}^{(\nu)}.$$

Mais, d'après le lemme démontré tout à l'heure, on a

$$|A_\lambda^{(\nu)}| < (|\varphi_2| + |\varphi_3| + \ldots + |\varphi_\nu|)^\lambda.$$

On a donc, d'une manière générale,

$$|A_\lambda| < S^\lambda \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots).$$

Désignons maintenant par $\Theta_\nu(x_1, \ldots, x_k)$ la $\nu^{\text{ième}}$ réduite de la fraction (6). Nous aurons

$$\Theta_\nu(x_1, \ldots, x_k) = \varphi_1 F_\nu(-1),$$

d'où, en vertu de ce qui vient d'être établi et de l'inégalité (11),

$$|\Theta_{\nu+p}(x_1, \ldots, x_k) - \Theta_\nu(x_1, \ldots, x_k)| < 2|\varphi_1| \frac{S^\nu}{1-S},$$

p désignant un entier positif quelconque. Par là on voit donc que, tant que les variables $x_1, \ldots, x_k$ restent dans le domaine T_1 satisfaisant à la condition (11), la réduite $\Theta_\nu(x_1, \ldots, x_k)$ tendra uniformément vers une limite $\Theta(x_1, \ldots, x_k)$ et que cette limite représente, dans tout le domaine T_1, une fonction *holomorphe* de $x_1, \ldots, x_k$.