BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CAHEN

Sur une généralisation de la formule qui donne la constante d'Euler

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 227-229
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__227_1>

SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE QUI DONNE LA CONSTANTE D'EULER;

Par M. E. Cahen.

On sait que la constante d'Euler est définie par la formule

$$C = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right). \tag{1}$$

Considérons l'expression

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s} - 1}{1 - s} \tag{2}$$

où nous supposerons que s est une quantité dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Cette expression se réduit à

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

pour $s = 1$.

On démontre facilement que l'expression (2) a une limite pour $n = \infty$; nous allons voir de plus que cette limite est

$$\zeta(s) + \frac{1}{1-s},$$

$\zeta(s)$ étant la fonction bien connue de Riemann.

Plus simplement, la limite de

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s}$$

est $\zeta(s)$.

En effet, soit

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \ldots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} = \zeta_n(s).$$

Alors

$$\begin{aligned} \zeta_n(s) - \zeta_{n-1}(s) &= \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s} - (n-1)^{1-s}}{1-s} \\ &= -\left(\frac{s}{1.2}\,\frac{1}{n^{s+1}} + \frac{s(s+1)}{1.2.3}\,\frac{1}{n^{s+2}} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Faisons dans cette égalité $n = 2, 3, \ldots, n$ et ajoutons; puis faisons croître n indéfiniment. Nous obtenons, en remarquant que la partie réelle de s est plus grande que zéro, par hypothèse,

$$\lim \zeta_n(s) = 1 - \frac{1}{1-s} - \left\{\frac{s}{1.2}\,[\zeta(s+1) - 1] + \frac{s(s+1)}{1.2.3}\,[\zeta(s+2) - 1] + \ldots\right\}.$$

Or

$$1 - \frac{1}{1-s} + \frac{s}{1.2} + \frac{s(s+1)}{1.2.3} + \ldots$$

est nul, comme on le voit en développant $(1-1)^{1-s}$ d'après la formule du binôme.

Il reste donc

$$\lim \zeta_n(s) = -\sum_{p=1}^{\infty} \frac{s(s+1)\ldots(s+p-1)}{1.2\ldots p(p+1)}\,\zeta(s+p).$$

Donc, pour démontrer que $\lim \zeta_n(s) = \zeta(s)$, il suffit de démontrer que

$$(3) \qquad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{s(s+1)\ldots(s+p-1)}{1.2\ldots p(p+1)}\,\zeta(s+p) = 0.$$

Pour démontrer cette formule, on peut se servir de l'expression suivante de $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_c \frac{x^{s-1}\,dx}{e^{-x}-1},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant l'origine, mais aucun autre zéro de la fonction $e^{-x}-1$, et s'étendant à l'infini du côté des x négatifs.

La formule (3) à démontrer devient alors

$$0 = \frac{1}{2i\pi}\int_c \frac{dx}{e^{-x}-1}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{s(s+1)\dots(s+p-1)}{1.2\dots p(p+1)}\Gamma(1-s-p)x^{s+p-1}.$$

Or

$$\sum_{p=0}^{\infty}\frac{s(s+1)\dots(s+p-1)}{1.2\dots p(p+1)}\Gamma(1-s-p)x^{s+p-1} = -x^{s-2}\Gamma(1-s)(e^{-x}-1);$$

donc la formule à démontrer se réduit à

$$0 = \frac{-\Gamma(1-s)}{2i\pi}\int_c x^{s-2}\,dx.$$

Elle est alors évidente, puisque la partie réelle de s est plus petite que 1.

Remarquons que la formule

$$\zeta(s) = \lim_{n=\infty}\left(\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\dots+\frac{1}{n^s}-\frac{n^{1-s}}{1-s}\right)$$

que nous venons de démontrer pour les valeurs de s, dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1, est d'ailleurs évidente pour celles dont la partie réelle est plus grande que 1.

Pour $s=1$, elle donne la formule (1), car on sait que

$$\zeta(s) = C + \frac{1}{1-s} + A(s-1) + B(s-1)^2 + \dots.$$