BULLETIN DE LA S. M. F.

P. E. TOUCHE

Transformation des équations générales du mouvement des fluides

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 72-75

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__72_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Transformation des équations générales du mouvement des fluides; par M. Touche.

Si nous considérons un élément ds de trajectoire fluide et si nous le projetons sur trois axes rectangulaires, nous obtenons les trois équations bien connues du mouvement des fluides

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dx} = X - \dfrac{du}{dt} - u\dfrac{du}{dx} - v\dfrac{du}{dy} - w\dfrac{du}{dz}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dy} = Y - \dfrac{dv}{dt} - u\dfrac{dv}{dx} - v\dfrac{dv}{dy} - w\dfrac{dv}{dz}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dz} = Z - \dfrac{dw}{dt} - u\dfrac{dw}{dx} - v\dfrac{dw}{dy} - w\dfrac{dw}{dz}. \end{cases}$$

Appelons v_1 la vitesse suivant la trajectoire et a, a', a'' les cosinus directeurs de la tangente à la trajectoire. Dans les équations (1) remplaçons u, v, w et leurs dérivées par leurs valeurs en fonction de v_1, a, a', a'' et de leurs dérivées; multiplions les termes de la première équation par a, ceux de la deuxième par a', ceux de la troisième par a'' et ajoutons membre à membre.

L'équation que l'on obtient ainsi a pour premier membre

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}\frac{dx}{ds} + \frac{dp}{dy}\frac{dy}{ds} + \frac{dp}{dz}\frac{dz}{ds}\right) = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds}.$$

Au second membre figure la résultante U des forces extérieures suivant la trajectoire.

Les termes qui contiennent les dérivées prises par rapport au temps se réduisent à $-\dfrac{dv_1}{dt}$.

Il reste encore au second membre dix-huit termes dont neuf, qui contiennent les dérivées des cosinus directeurs, ont une somme nulle; l'ensemble des neuf autres se réduit à $-v_1\dfrac{dv_1}{ds}$. On arrive ainsi à l'équation

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds} = U - \frac{dv_1}{dt} - v_1\frac{dv_1}{ds}.$$

Pour obtenir la deuxième équation, nous considérons comme précédemment, à un instant donné, un élément ds de trajectoire fluide et nous projetons toujours cet élément sur les trois axes rectangulaires, mais nous considérons, en ce même instant, un élément de la normale principale à la trajectoire, de longueur ds' égale à ds, et nous projetons ds' sur les trois axes. Nous considérons ainsi deux petits parallélépipèdes rectangles différents, ayant un sommet commun A, les deux diagonales ds et ds' égales, le premier de ces parallélépipèdes ayant pour arêtes dx, dy, dz et le second dx', dy', dz'.

Nous considérons d'abord le premier qui nous donne les équations connues du mouvement des fluides. Désignant ensuite par b, b', b'' les cosinus directeurs de la normale principale à la trajectoire, remplaçons dans les équations du mouvement u, v, w et leurs dérivées par rapport à x, y, z, t, par leurs valeurs en fonction de v_1, a, a', a'' et de leurs dérivées; multiplions les termes de la première équation par b, ceux de la deuxième par b', ceux de la troisième par b'' et ajoutons membre à membre.

L'équation ainsi obtenue a pour premier membre

$$\frac{1}{\rho}\left(\frac{dp}{dx}\frac{dx'}{ds'}+\frac{dp}{dy}\frac{dv'}{ds}+\frac{dp}{dz}\frac{dz'}{ds'}\right)=\frac{1}{\rho}\frac{dp}{ds'}.$$

Au second membre figure la résultante U' des forces extérieures suivant la normale principale à la trajectoire.

Les termes en $\frac{dv_1}{dt}$ ont une somme nulle. Pour calculer les termes en v_1, considérons l'élément de trajectoire $d\sigma$ qui passe au bout du temps dt par le point A, ainsi que l'élément de trajectoire ds qui passe par le même point A au commencement du temps dt. Projetons $d\sigma$ sur le plan osculateur de la trajectoire considérée au commencement du temps dt, appelons $d\alpha_1$ l'angle de cette projection avec l'élément ds et $d\alpha_2$ l'angle de l'élément $d\sigma$ avec sa projection sur le plan osculateur. Désignons enfin par c, c', c'' les cosinus directeurs de la binormale à la trajectoire. La considération de triangles sphériques nous donne

$$\left\{\begin{aligned}
-\,bv_1\frac{da}{dt} &= b^2v_1\frac{d\alpha_1}{dt}+bcv_1\frac{d\alpha_2}{dt},\\
-\,b'v_1\frac{da'}{dt} &= b'^2v_1\frac{d\alpha_1}{dt}+b'c'v_1\frac{d\alpha_2}{dt},\\
-\,bv_1\frac{da''}{dt} &= b''^2v_1\frac{d\alpha_1}{dt}+b''c''v_1\frac{d\alpha_2}{dt},
\end{aligned}\right.$$

ce qui réduit l'ensemble des termes en v_1 à $v_1\frac{d\alpha_1}{dt}$.

Il reste encore au second membre dix-huit termes dont neuf contiennent v_1^2 en facteur. Pour les calculer, portons à partir du point A une longueur ds sur la trajectoire; la tangente à la trajectoire qui part de l'extrémité de cet arc fait avec la tangente à la trajectoire en A un angle infiniment petit $d\alpha$, et la Trigonométrie sphérique donne

$$- b v_1^2 \frac{da}{ds} = b^2 v_1^2 \frac{d\alpha}{ds},$$

$$- b' v_1^2 \frac{da'}{ds} = b'^2 v_1^2 \frac{d\alpha}{ds},$$

$$- b'' v_1^2 \frac{da''}{ds} = b''^2 v_1^2 \frac{d\alpha}{ds},$$

en sorte que les termes en v_1^2 ont pour somme $v_1^2 \frac{d\alpha}{ds}$. Les neuf termes qui restent ont une somme nulle; il vient ainsi

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds'} = \mathrm{U}' + v_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + v_1^2 \frac{d\alpha}{ds}.$$

Pour obtenir la troisième équation, nous considérons comme précédemment, à un instant donné, un élément ds de trajectoire fluide et nous projetons toujours cet élément sur les trois axes; mais nous considérons en ce même instant un élément de la binormale à la trajectoire, de longueur ds'' égale à ds et nous projetons ds'' sur les mêmes axes rectangulaires. Nous considérons ainsi deux petits parallélépipèdes rectangles différents, ayant un sommet commun A, les deux diagonales ds et ds'' égales, le premier de ces parallélépipèdes ayant pour arêtes dx, dy, dz et le second dx'', dy'', dz''.

Le premier parallélépipède donne les équations du mouvement des fluides. Remplaçons encore u, v, w et leurs dérivées en fonction de v_1, a, a', a'' et de leurs dérivées; multiplions les termes de la première équation par c, ceux de la deuxième par c', ceux de la troisième par c'' et ajoutons membre à membre.

La considération du second parallélépipède montre que le premier membre de l'équation ainsi obtenue équivaut à $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds''}$. Au second membre figure la résultante U″ des forces extérieures suivant la binormale à la trajectoire. Les termes qui contiennent les dérivées prises par rapport au temps se réduisent à $v_1 \frac{d\alpha_2}{dt}$.

Les dix-huit autres termes ont une somme nulle; d'où résulte l'équation

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{ds''} = \mathrm{U}'' + v_1 \frac{d\alpha_2}{dt},$$

qui complète la transformation que nous avions en vue.