BULLETIN DE LA S. M. F.

DE PRESLE

Développement du quotient de deux fonctions holomorphes théorie des séries récurrentes

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 114-118
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__114_0>

Développement du quotient de deux fonctions holomorphes, théorie des séries récurrentes [1] ; par M. DE PRESLE.

1. *Quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances croissantes de la variable.* — Soient le dividende, le diviseur, le quotient

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots,$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots,$$
$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots.$$

On a, en égalant les coefficients de x^p dans le dividende et dans le produit du diviseur par le quotient,

$$(1) \qquad a_p = b_p c_0 + b_{p-1} c_1 + b_{p-2} c_2 + \ldots + b_{p-q} c_q + \ldots + b_0 c_p,$$

relation permettant de calculer, de proche en proche, les coefficients du quotient. On pourrait, par là, obtenir la formule donnant un coefficient quelconque; nous préférons employer une autre méthode.

Remarquons que, si l'on connaissait les coefficients l du quotient, dans le cas où le dividende serait l'unité, on aurait

$$(2) \qquad c_p = a_p l_0 + a_{p-1} l_1 + a_{p-2} l_2 + \ldots + a_{p-q} l_q + \ldots + a_0 l_p.$$

Nous sommes ramené à ce dernier cas, et nous allons d'abord chercher la formule des coefficients l dans le cas où b_0 est l'unité.

2. *Inverse d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et dont le premier terme est l'unité.* — De la relation (1) dans laquelle nous supposons a_0 et b_0 égaux à l'unité et tous les autres a nuls, nous déduisons

$$\begin{aligned}
l_0 &= 1,\\
b_1 + l_1 &= 0,\\
b_2 + b_1 l_1 + l_2 &= 0,\\
b_3 + b_2 l_1 + b_1 l_2 + l_3 &= 0,\\
b_4 + b_3 l_1 + b_2 l_2 + b_1 l_3 + l_4 &= 0,\\
b_5 + b_4 l_1 + b_3 l_2 + b_2 l_3 + b_1 l_4 + l_5 &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots
\end{aligned}$$

[1] L'équation servant de base à cette théorie est la même que celle donnée par M. Désiré André dans sa thèse *Sur le terme général d'une série déterminée à la façon des séries récurrentes.*

Le calcul des valeurs de l donne

$$
\begin{aligned}
l_1 &= -b_1,\\
l_2 &= -b_2 + b_1^2,\\
l_3 &= -b_3 + 2b_2b_1 - b_1^3,\\
l_4 &= -b_4 + 2b_3b_1 + b_2^2 - 3b_2b_1^2 + b_1^4,\\
l_5 &= -b_5 + 2b_4b_1 + 2b_3b_2 - 3b_3b_1^2 - 3b_2^2b_1 + 4b_2b_1^3 - b_1^5,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

On reconnaît les lois suivantes de formation :

1° *l_p se compose de tous les termes de poids p que l'on peut former avec les b jusqu'à b_p inclusivement ;*

2° *Ces termes sont positifs ou négatifs, selon que le nombre de leurs facteurs est pair ou impair ;*

3° *Le coefficient de chaque terme est le coefficient polynomial qu'il aurait, eu égard au nombre des facteurs et à leurs exposants.*

L'exactitude de ces lois se démontre en faisant voir que, si elles ont lieu jusqu'à un certain indice, elles auront encore lieu pour l'indice suivant. Aucune difficulté pour les deux premières.

Pour la troisième, nous allons raisonner sur un cas particulier; mais il sera évident que la conclusion est générale.

Considérons le terme $b_3^4 b_2^3 b_1^5$ de degré 12 et de poids 23 ; il appartient à l_{23}. Le coefficient de ce terme est égal à la somme des coefficients des trois termes suivants de degré 11 :

$b_3^4 b_2^3 b_1^4$	de poids	22	appartenant à	l_{22},
$b_3^4 b_2^2 b_1^5$	»	21	»	l_{21},
$b_3^3 b_2^3 b_1^5$	»	20	»	l_{20}.

Les coefficients de ces derniers termes, suivant la loi polynomiale, sont

$$\frac{11!}{4!\,3!\,4!},\qquad \frac{11!}{4!\,2!\,5!},\qquad \frac{11!}{3!\,3!\,5!}$$

ou

$$\frac{11!}{3!\,2!\,4!}\,\frac{1}{4.3}\qquad \frac{11!}{3!\,2!\,4!}\,\frac{1}{4.5},\qquad \frac{11!}{3!\,2!\,4!}\,\frac{1}{3.5},$$

dont la somme est

$$\frac{11!}{3!\,2!\,4!}\left(\frac{1}{4.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{3.5}\right)=\frac{11!\,(5+3+4)}{3!\,2!\,4!\,5.3.4}=\frac{12!}{4!\,3!\,5!},$$

ce qu'il fallait démontrer.

3. *Inverse d'une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable et dont le premier terme est quelconque.* — Mêmes notations que précédemment, seulement b_0 et l_0 sont différents de l'unité ; nous ramènerons ce cas au précédent en remplaçant b_q par $\frac{b_q}{b_0}$ et divisant par b_0 le résultat obtenu ; donc :

l_0 est égal $\frac{1}{b_0}$ et l_p s'obtient en formant la même expression que précédemment, en la rendant de degré p à l'aide de facteurs b_0 et en la divisant ensuite par b_0^{p+1}.

Par exemple, on aura

$$l_5 = \frac{-b_5 b_0^4 + 2b_4 b_1 b_0^3 + 2b_3 b_2 b_0^3 - 3b_3 b_1^2 b_0^2 - 3b_2^2 b_1 b_0^2 + 4b_2 b_1^3 b_0 - b_1^5}{b_0^6}.$$

4. *Développement de fonctions.* — La question de convergence réservée, les relations précédentes donnent les coefficients des fonctions qui sont les quotients de fonctions dont on connaît la loi de développement, telles que

$$\operatorname{tang} x, \quad \cot x, \quad \operatorname{séc} x, \quad \operatorname{coséc} x.$$

Les mêmes relations donnent également les coefficients du développement des fonctions rationnelles. Si l'on désigne par n et m les plus forts exposants du numérateur et du dénominateur, d'après la relation (1), on aura, si n n'est pas moindre que m,

$$(3) \qquad b_m c_{n-m+1} + b_{m-1} c_{n-m+2} + \ldots + b_0 c_{n+1} = 0,$$

et, si n est moindre que m,

$$(4) \qquad b_m c_0 + b_{m-1} c_1 + \ldots + b_0 c_m = 0.$$

Les mêmes relations auront lieu en augmentant d'un même nombre les indices des coefficients du quotient à partir des limites précédentes. De là, une nouvelle notion, celle de la *récurrence des séries.*

5. *Définition des séries récurrentes.* — Une série

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

est dite *récurrente,* lorsque, pour toutes les valeurs de p supérieures à une certaine limite, le coefficient de x^p peut s'exprimer, quel que soit p, par une même fonction linéaire des coefficients des puissances inférieures pris en nombre fixe.

En d'autres termes, la série considérée sera récurrente si, pour toutes les valeurs de p qui surpassent une certaine limite, on a identiquement

$$b_m c_{p-m} + b_{m-1} c_{p-m+1} + \ldots + b_0 c_p = 0,$$

p étant un entier quelconque, et $b_m, b_{m-1}, \ldots, b_0$ des quantités constantes, dont la suite est l'échelle de relation de la série récurrente.

6. *Quand une fraction rationnelle peut se développer en une série convergente suivant les puissances croissantes de la variable, cette série est récurrente.* (Nous supposons un terme indépendant de la variable au numérateur et au dénominateur). — Les constantes de l'échelle de relation sont les coefficients du dénominateur placés par ordre d'indices décroissants. Si le degré du numérateur est moindre que le degré du dénominateur, la première relation de récurrence contient les coefficients du quotient dont les indices sont les exposants de la variable au dénominateur, placés par ordre d'indices décroissants. Si le degré du numérateur n'est pas moindre que le degré du dénominateur, les indices des coefficients du quotient seront augmentés d'un même nombre, de telle sorte que l'indice le plus fort soit égal au degré du numérateur augmenté d'une unité.

Démonstration donnée au n° 4.

7. *Quand une série ordonnée suivant les puissances croissantes de la variable est à la fois convergente et récurrente, elle a pour somme une fraction rationnelle.* (Nous supposons que la série contient un terme indépendant de la variable.) — Le dénominateur s'obtient en faisant la somme des produits des constantes de l'échelle de relation, placées en ordre inverse, par des puissances de la variable croissant à partir de l'exposant zéro. Si, dans la première relation de récurrence, le plus faible des indices des coefficients de la série n'est pas nul, le degré du numérateur est égal au plus fort de ces indices diminué d'une unité.

En effet, si l'on forme une fraction rationnelle, dont le dénominateur satisfasse à la règle énoncée, et si l'on calcule les termes du numérateur d'après la relation (1), le développement de cette fraction rationnelle sera identique à la série proposée.