

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. E. PELLET

Sur la rectification approximative d'un arc de courbe

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 5-8

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__5_1

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur la rectification approximative d'un arc de courbe;
par M. A.-E. PELLET.

1. Sur la tangente en un point M d'une courbe, prenons des longueurs égales de part et d'autre du point M, ML, ML'; puis sur la normale au point M et du côté du centre de courbure, une longueur égale à trois fois le rayon de courbure MC; joignons le point C aux points L et L'; soient P et P' les points de rencontre de LC, L'C avec la courbe; la différence de l'arc PP' et de la ligne LL' est un infiniment petit du 5^e ordre.

En effet, soit

$$y = ax^2 + a_1x^3 + a_2x^4 + \dots$$

l'équation de la courbe. Son arc, compté à partir du point M,

aura pour longueur

$$S = x + 2a^2 \frac{x^3}{3} + 3aa_1 \frac{x^4}{2} + (9a_1^2 + 16aa_2 - 4a^4) \frac{x^5}{10} + \dots$$

La ligne ML' est égale à

$$\frac{x}{1 - \frac{2ay}{3}} = x + \frac{2a^2}{3} x^3 + \frac{2aa_1}{3} x^4 + \left(\frac{2aa_2}{3} + \frac{4a^4}{9} \right) x^5 + \dots$$

et enfin la différence d de l'arc PP' et de la droite LL' est égale à

$$d = \frac{81a_1^2 + 84aa_3 - 76a^4}{45} x^5 + \dots;$$

d est une fonction impaire de x .

2. Pour la conique $y = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$, il vient

$$y = Ax^2 + 2BAx^3 + (4B^2A + CA^2)x^4 + \dots$$

et

$$d = \frac{660B^2A^2 + 84CA^3 - 76A^4}{45} x^5 + \dots$$

Cherchons les points pour lesquels cette différence est un infiniment petit du septième ordre. Il faut qu'on ait

$$165B^2 + 21CA - 19A^2 = 0.$$

Soit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

l'équation de la conique rapportée à son centre et à ses axes, on a

$$B^2 - AC = \frac{-1}{a^2 b^2}, \quad A + C = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$$

et la relation précédente devient

$$205A^2 - 186 \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} A + \frac{165}{a^2 b^2} = 0.$$

Les points cherchés sont à l'intersection de la conique avec le diamètre conjugué de l'axe nouveau des x ; ρ^2 étant le carré de leur distance au centre, on a par le théorème d'Apollonius

$$\frac{1}{A} + \rho^2 = a^2 + b^2;$$

d'où, pour l'équation en ρ^2 ,

$$165\rho^4 - 144(a^2 + b^2)\rho^2 + 205a^2b^2 - 21(a^2 + b^2)^2 = 0.$$

Pour une ellipse $a^2 > b^2 > 0$, les valeurs de ρ^2 comprises entre a^2 et b^2 seules donneront des points réels. Pour $\rho^2 = b^2$, le premier membre de l'équation prend la valeur $(19b^2 - 21a^2)a^2$, quantité négative; pour $\rho^2 = a^2$, $(19a^2 - 21b^2)b^2$; il faut qu'elle soit positive pour qu'il y ait une racine comprise entre b^2 et a^2 .

Pour l'hyperbole $a^2 > 0$, $b^2 = -b'^2$, b' étant réel, les racines de l'équation en ρ^2 sont de signes contraires; et la racine positive est supérieure à a^2 , puisque pour $\rho^2 = a^2$, le premier membre de l'équation devient $-(19a^2 + 21b'^2)b'^2$, quantité négative.

Pour la parabole

$$(x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2 = 2p(x \cos \varphi - y \sin \varphi),$$

on a $B^2 = AC$; la relation devient

$$186C - 19A = 0,$$

ou, par rapport à l'angle φ ,

$$186 \cos^2 \varphi - 19 \sin^2 \varphi = 0.$$

On a donc toujours deux points pour lesquels la différence d est un infiniment petit du septième ordre.

3. Soit

$$z = \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + z_3 + \dots$$

l'équation d'une surface en un point ordinaire. L'élément dS de cette surface a pour valeur $dx dy$ multiplié par

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = 1 + \frac{x^2}{2R_1} + \frac{y^2}{2R_2} + \left(\frac{R_1}{x z_{3x}} + \frac{R_2}{y z_{3y}} \right) + \dots$$

Prenons sur la normale, à cette surface, un point situé à une distance R de l'origine et joignons-le au point x, y de la surface; la ligne obtenue perce le plan tangent au point dont les coordonnées sont

$$X = \frac{Rx}{R-z}, \quad Y = \frac{Ry}{R-z}.$$

La projection conique de l'élément de la surface aura pour va-

leur

$$d\sigma = \left| \begin{array}{cc} X'_x & X'_y \\ Y'_x & Y'_y \end{array} \right| dx dy = \frac{\mathfrak{R} + z_2 + 2z_3 + \dots + (i-1)z_i + \dots}{\mathfrak{R} \left(1 - \frac{z}{\mathfrak{R}}\right)^3}$$

ou

$$d\sigma = 1 + \frac{4z_2}{\mathfrak{R}} + \frac{5z_3}{\mathfrak{R}} + \dots$$

La différence $dS - d\sigma$ est égale à $D dx dy$,

$$D = \frac{x^2}{2R_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{4}{\mathfrak{R}} \right) + \frac{y^2}{2R_2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{4}{\mathfrak{R}} \right) + \frac{xz'_{3x}}{R_1} + \frac{yz'_{3y}}{R_2} - \frac{5z_3}{\mathfrak{R}} + \dots$$

Pour un ombilic $R_1 = R_2$, et si l'on fait $\mathfrak{R} = 4R_1$, il vient

$$D = \frac{7}{4} \frac{z_3}{R_1} + \dots$$

à cause de la relation

$$xz'_{3x} + yz'_{3y} = 3z_3.$$

Pour un point parabolique $\frac{1}{R_2} = 0$, et si l'on fait $\mathfrak{R} = 4R_1$, il vient

$$D = \frac{4xz'_{3x} - 5z_3}{4R_1} + \dots$$

Dans l'intégrale double $\iint D dx dy$ étendue à tous les points de l'aire située dans une courbe fermée symétrique par rapport à l'origine, un cercle, par exemple, de rayon r , les termes de degré impair de D disparaissent, et, dans le cas où l'origine est un ombilic ou un point parabolique, cette intégrale ou la différence $S - \sigma$ est un infiniment petit du sixième ordre par rapport à r .