

BULLETIN DE LA S. M. F.

MAURICE D'OCAGNE

**Sur les systèmes de péninvariants principaux
d'une forme binaire**

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 183-187

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__183_1

© Bulletin de la S. M. F., 1888, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur les systèmes de péninvariants principaux d'une forme
binaire; par M. MAURICE D'OCAGNE.*

(Séance du 5 décembre 1888.)

Je commencerai par définir la notation suivante :

Etant donnée une suite de quantités affectées d'indices $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n \dots$, je désignerai par *la même lettre dépourvue d'in-*

dice une variable fictive par rapport à laquelle, dans la suite précédente, chaque quantité aurait pour dérivée celle qui vient immédiatement après elle, c'est-à-dire telle que

$$\frac{du_0}{du} = u_1, \quad \frac{du_1}{du} = u_2, \quad \dots, \quad \frac{du_n}{du} = u_{n+1}, \quad \dots$$

Dès lors, on voit quelle est l'opération à effectuer sur une fonction quelconque de u_0, u_1, u_2, \dots , que symbolise la notation $\frac{d}{du}$.

Cette définition posée, je rappellerai un théorème que j'ai obtenu jadis (1) et qui a été depuis considérablement généralisé d'abord par moi-même (2), puis par M. Perrin (3). Voici ce théorème :

Pour p au moins égal à 2, l'expression

$$\zeta_p = a_0^p \frac{d^p a_0}{da^p}$$

est un péninvariant de la forme binaire représentée symboliquement par $(x + ay)^n$.

J'ai fait observer (4); en outre, que les $n - 1$ péninvariants fournis par cette expression, dans laquelle on fait $p = 2, 3, 4, \dots, n$, constituent un système de péninvariants principaux de la forme de degré n considérée. En d'autres termes, ils peuvent servir à exprimer tous les péninvariants de cette forme.

Or on sait que le système des péninvariants principaux ordinaires v_2, v_3, \dots, v_n est défini par les formules

$$(1) \quad \begin{cases} v_{2p} = a_0 a_{2p} - 2pa_1 a_{2p-1} + \frac{2p(2p-1)}{1 \cdot 2} a_2 a_{2p-2} - \dots \\ \pm \frac{1}{2} \frac{2p(2p-1) \dots (p+1)}{1 \cdot 2 \dots p} a_p^2. \end{cases}$$

$$(2) \quad v_{2p+1} = a_0 \frac{dv_{2p}}{da} - 2a_1 v_{2p}.$$

(1) *Comptes rendus*, t. CII, p. 916.

(2) *Ibid.*, t. CIV, p. 961 et 1364.

(3) *Ibid.*, t. CIV, p. 1097 et 1258.

(4) *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XI, p. 316.

Un problème se posait donc tout naturellement : *passer du système de péninvariants principaux* (φ) *au système* (v) *et réciproquement*. Ce problème présentait une réelle difficulté en raison de la discontinuité de la loi de formation des péninvariants v , et pourtant des formules ⁽¹⁾, obtenues par un calcul de proche en proche, assez laborieux, faisaient soupçonner des formules générales fort élégantes.

Ces formules générales viennent, *pour le cas des indices pairs*, d'être établies par M. E. Cesaro, avec une remarquable habileté ⁽²⁾.

Représentant par $\sum_p^i \varepsilon_r$ la somme de tous les produits analogues à $\varepsilon_{r_1} \varepsilon_{r_2} \dots, \varepsilon_{r_i}$, où $r_1 + r_2 + \dots + r_i = p$, en nombres entiers et positifs (algorithme isobarique), M. Cesaro a démontré que

$$(3) \quad v_{2p} = \frac{(2p)!}{\alpha_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \sum_p^i \left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!} \right] \right\}.$$

$$(4) \quad \varphi_{2p} = (2p)! \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ (-2)^{i-1} \frac{\alpha_0^{2p-2i}}{i} \sum_p^i \left[\frac{v_{2r}}{(2r)!} \right] \right\}.$$

Il restait à trouver les formules générales correspondant au cas des *indices impairs*. J'ai été assez heureux pour y parvenir en partant des résultats mêmes de M. Cesaro. En supposant v_{2p} et φ_{2p} remplacés par leurs expressions (3) et (4) et faisant usage de la notation symbolique définie en commençant, j'écris ces formules

$$(5) \quad v_{2p+1} = \frac{dv_{2p}}{d\varphi},$$

$$(6) \quad \varphi_{2p+1} = \frac{d\varphi_{2p}}{dv}.$$

Leur similitude est tout à fait frappante, étant donnée la différence qui existe entre les lois de formation des systèmes (v) et (φ). Leurs démonstrations présentent aussi une grande analogie. Je me bornerai à indiquer celle de la formule (5).

⁽¹⁾ *Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. XI, p. 317.

⁽²⁾ *Nouvelles Annales*, 3^e série, t. VII, p. 464.

Appliquant à l'expression (3) de v_{2p} l'opération désignée symboliquement par $\frac{d}{da}$, on a, en écrivant \sum_p^i pour $\sum_p^i \left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!} \right]$,

$$(7) \quad \frac{dv_{2p}}{da} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-1}} \sum_{i=1}^{i=p} \left\{ \frac{2^{i-1}}{i!} \left[a_0 \frac{d^i}{da^i} - (2p-2)a_1 \sum_p^i \right] \right\}.$$

Si l'on porte les valeurs (3) et (7) de v_{2p} et $\frac{dv_{2p}}{da}$ dans (2), il vient

$$(8) \quad v_{2p+1} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left[\frac{2^{i-1}}{i!} \left(a_0 \frac{d^i}{da^i} - 2p a_1 \sum_p^i \right) \right].$$

Si nous écrivons $\sum_p^i \left[\frac{\varphi_{2r}}{(2r)!} \right]$ sous la forme

$$\sum_p \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1} \varphi_{2r_2} \dots \varphi_{2r_i}}{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_i)!},$$

nous voyons que

$$\frac{d^i}{da^i} = \sum_p \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1} \varphi_{2r_2} \dots \frac{d^{\varphi_{2r_k}}}{da} \dots \varphi_{2r_i}}{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_k)! \dots (2r_i)!}.$$

Mais de la définition même des φ on déduit

$$(9) \quad \frac{d\varphi_{2r_k}}{da} = \frac{\varphi_{2r_{k+1}} + 2r_k a_1 \varphi_{2r_k}}{a_0}.$$

Transformant la formule précédente au moyen de celle-ci et tenant compte de la condition $r_1 + r_2 + \dots + r_i = p$, on voit que

$$\frac{d^i}{da^i} = \frac{1}{a_0} \sum_p \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1} \varphi_{2r_2} \dots \varphi_{2r_{k+1}} \dots \varphi_{2r_i}}{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_k)! \dots (2r_i)!} + \frac{2p a_1}{a_0} \sum_p^i,$$

d'où

$$a_0 \frac{d^i}{da^i} - 2p a_1 \sum_p^i = \frac{\sum_{k=1}^{k=i} \varphi_{2r_1} \varphi_{2r_2} \dots \varphi_{2r_{k+1}} \dots \varphi_{2r_i}}{(2r_1)! (2r_2)! \dots (2r_k)! \dots (2r_i)!}.$$

Or le second membre de cette expression n'est autre chose, avec notre notation, que $\frac{d^i \mathcal{S}}{da}$. La formule (8) devient donc

$$v_{2p+1} = \frac{(2p)!}{a_0^{2p-2}} \sum_{i=1}^{i=p} \left(\frac{2^{i-1}}{i!} \frac{d^i \mathcal{S}}{da} \right),$$

ou, en rapprochant de (3),

$$v_{2p+1} = \frac{dv_{2p}}{da}.$$

La formule (5) se trouve ainsi établie. La démonstration de la formule (6) est analogue, avec cette différence que c'est la formule (2) qui y joue le rôle rempli ci-dessus par la formule (9).

Exemple d'application. — Les formules (3) et (4) de M. Cesaro donnent

$$v_6 = \frac{\varphi_6 + 30\varphi_2\varphi_4 + 60\varphi_2^2}{a_0^4}, \quad \varphi_6 = a_0^4 v_6 - 30a_0^2 v_2 v_4 + 120v_2^2.$$

Au moyen de mes formules (5) et (6), j'en déduis immédiatement

$$v_7 = \frac{\varphi_7 + 30(\varphi_2\varphi_5 + \varphi_3\varphi_4) + 180\varphi_2^2\varphi_3}{a_0^4},$$

$$\varphi_7 = a_0^4 v_7 - 30a_0^2(v_2 v_5 + v_3 v_4) + 360v_2^2 v_3.$$
