BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LEMOINE

Des systèmes de coordonnées qui déterminent le plus simplement un point par une construction

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 162-172
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__162_1>

Des systèmes des coordonnées qui déterminent le plus simplement un point par une construction; par M. E. Lemoine.

(Séance du 18 juillet 1888.)

A la suite de la Communication que j'ai faite au Congrès d'Oran, cette année, sur la *mesure* de la simplicité dans les Sciences mathématiques et, en particulier, sur la *mesure* de la simplicité dans les constructions géométriques, je me suis demandé quel était, au point de vue graphique, le système le plus simple de coordonnées, c'est-à-dire quel était le moyen le plus simple de déterminer un point par une construction.

Si un point M est déterminé par ses coordonnées x', y', relatives à deux axes donnés ox, oy, l'expression de la construction de ce point s'obtient ainsi : prendre la longueur x' avec le compas, $2C_1$; porter cette longueur en m à partir de o sur ox, $C_1 + C_3$; par le point m mener une parallèle à oy ; si les axes sont obliques,

$$2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3,$$

ou s'ils sont rectangulaires, mener par ce point une perpendiculaire à ox,

$$4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3,$$

prendre avec le compas la longueur y', $2C_1$, porter cette longueur à partir de m sur la parallèle à oy,

$$C_1 + C_3.$$

En résumé, axes obliques :

$$2R_1 + R_2 + 11C_1 + 5C_3;$$

simplicité, 19.

Axes rectangulaires :

$$4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_3;$$

simplicité, 16 (1).

Soit maintenant un point M déterminé par ses coordonnées normales, c'est à-dire par les lignes α, β, γ qui représentent

---

(1) Nous rappelons que nous désignons par :

R_1 l'opération qui consiste à faire passer le bord de la règle par un point donné ;

R_2 l'opération du tracé de la droite, quelle que soit sa longueur ;

C_1 c'est mettre une pointe du compas en un point donné ;

C_2 c'est mettre une pointe du compas en un point indéterminé d'un ligne donnée ;

C_3 c'est tracer le cercle complètement ou en partie.

Pour calculer la simplicité nous admettons à chacune de ces opérations une valeur égale à l'unité et nous faisons la somme du nombre d'opérations ; rien n'empècherait du reste de leur donner des coefficients particuliers déterminés expérimentalement.

les rapports de ses distances aux trois côtés BC, CA, AB d'un triangle de référence ABC.

Voici la construction la plus simple qui en résulte pour obtenir le point M :

J'élève une perpendiculaire sur AC et une sur AB en me servant pour cela d'une seule circonférence passant par A.

Ce cercle mené par A coupe AB en B', AC en C' et BC en A' et A_1 ; soit o son centre.

L'extrémité du diamètre opposé à A est A',

B'A' est perpendiculaire sur BA,
C'A' » » AC.

Cela exige

$$6R_1 + 3R_2 + C_1 + C_3.$$

J'élève une perpendiculaire sur BC en A' en me servant du même cercle que précédemment :

$$4R_1 + 2R_2.$$

Je prends avec le compas la longueur α, $2C_1$.

Je la porte à partir de A' en A'' sur la perpendiculaire à BC,

$$C_1 + C_3;$$

par A'' je mène une perpendiculaire à A'A'', c'est-à-dire une parallèle à BC :

$$4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3;$$

en résumant ces différentes opérations, depuis que j'ai élevé une perpendiculaire sur BC en A', cela fait

$$8R_1 + 4R_2 + 4C_1 + 2C_3.$$

Il en faut autant pour mener une parallèle à AC à la distance β, et autant pour mener une parallèle à AB à la distance γ, c'est-à-dire qu'il y a à ajouter

$$16R_1 + 8R_2 + 8C_1 + 4C_3.$$

La parallèle à CB à la distance α coupe en N la parallèle à AC à la distance β et en M la parallèle à AB à la distance γ.

Je trace CL :

$$2R_1 + R_2;$$

je trace BM :

$$2R_1 + R_2.$$

Ces deux droites se coupent en M, qui est ainsi déterminé. La construction est donc exprimée par

$$34R_1 + 17R_2 + 13C_1 + 7C_3,$$

la simplicité par 71.

Nous ne multiplierons pas les exemples : nous dirons seulement que la manière la plus simple que nous ayons trouvée de déterminer un point M, c'est de donner ses distances λ, λ' à deux points fixes F et F'.

La construction du point M est exprimée alors par

$$6C_1 + 2C_3 \quad \text{ou par} \quad 8.$$

La manière la plus simple ensuite est celle-ci : je prends deux axes fixes CA, CB :

A est un point fixe sur CA,
B » » CB.

Je joins AM qui coupe CB en A' et BM qui coupe CA en B'.
Soient

$$CA' = x, \qquad CB' = y.$$

Si je donne x et y, le point M est déterminé par la construction

$$4R_1 + 2R_2 + 6C_1 + 2C_3,$$

dont la simplicité est 14.

Le système de coordonnées le plus simple pour la détermination du point est donc celui où le point est déterminé par ses distances à deux points fixes; il est fort connu, malheureusement il se prête *en général* assez mal aux études analytiques; celui que nous signalons ensuite l'est beaucoup moins; nous ne savons même pas s'il a été remarqué et c'est de lui que nous allons dire quelques mots, parce que les coordonnées cartésiennes usuelles en sont un cas particulier.

Généralisation du système cartésien de coordonnées.

Soient (*fig.* 1)

CA et CB deux droites fixes;
A point fixe sur CA, soit $CA = b$;

B point fixe sur CB, soit $CB = a$;
M un point quelconque;
AM coupant CB en X;
BM coupant CA en Y;

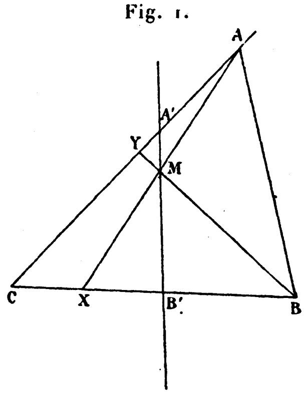
CX et CY peuvent être considérées comme les coordonnées de M;

CX sera l'x du point M;
CY sera l'y du point M.

Le sens positif des x est le sens CB, le sens positif des y est le sens CA.

Si A et B s'éloignent à l'infini respectivement sur CA et sur CB,

Fig. 1.



CX et CY deviennent les coordonnées cartésiennes ordinaires.

Cherchons, dans le système que nous considérons, l'équation générale de la droite.

Soit A'B' une droite quelconque déterminée par $CB' = a'$,

B' est sur CB,

et par $CA' = b'$,

A' est sur CA.

Soit M un point quelconque de A'B'.

Le triangle A'CB' coupé par la transversale AMX donne

$$\frac{CX}{XB'}\,\frac{B'M}{MA'}\,\frac{AA'}{AC} = 1; \tag{1}$$

de même A'CB', coupé par BMY, donne

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{B'B}}{\mathrm{CB}}\frac{\mathrm{MA'}}{\mathrm{B'M}}\frac{\mathrm{YC}}{\mathrm{A'Y}} = 1;$$

multipliant (1) et (2) membre à membre, on a

$$\frac{\mathrm{CX}}{\mathrm{XB'}}\frac{\mathrm{AA'}}{\mathrm{AC}}\frac{\mathrm{B'B}}{\mathrm{CB}}\frac{\mathrm{YC}}{\mathrm{A'Y}} = 1$$

ou

$$\frac{x}{a'-x}\,\frac{-(b-b')}{-b}\,\frac{a-a'}{a}\,\frac{-y}{-(b'-y)} = 1$$

ou

$$(3) \qquad \frac{xy}{(a'-x)(b'-y)} = \frac{ab}{(a-a')(b-b')}$$

ou

$$xy(a'b'-ab'-a'b)+aa'by+abb'x-aa'bb' = 0 \; :$$

c'est l'équation de A'B', elle est du second degré et de la forme

$$\mathrm{A}xy+\mathrm{B}y+\mathrm{C}x+\mathrm{D} = 0.$$

Remarquons qu'elle est toujours satisfaite par $x = a$, $y = b$, coordonnées qui représentent un point quelconque de la droite AB et par suite le point d'intersection de AB et de A'B'.

L'équation (3) peut s'écrire

$$\frac{xy}{(a'-x)(b'-y)} = \frac{1}{\left(1-\frac{a'}{a}\right)\left(1-\frac{b'}{b}\right)};$$

si a et b deviennent infinis, l'équation devient

$$\frac{xy}{(a'-x)(b'-y)} = 1$$

ou

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'} = 1,$$

ce qui est en effet la forme connue de l'équation cartésienne ordinaire de la droite.

Si A'B' passe en C, l'équation (3) devient une identité, puisque $a' = b' = 0$.

Voici alors l'équation d'une droite passant par l'origine.

Soit (*fig.* 2) N le point où CM coupe AB, soit

$$\widehat{BCM} = \alpha,$$

$$\widehat{BCA} = \theta.$$

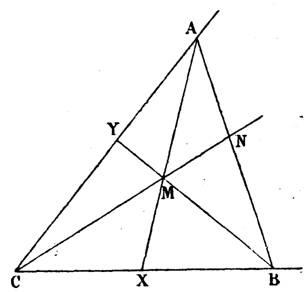
On a

$$(4) \qquad \frac{CX}{XB}\,\frac{BN}{NA}\,\frac{AY}{YC} = 1,$$

$$\frac{BN}{\sin\alpha} = \frac{a}{\sin CNB},$$

$$\frac{NA}{\sin(\theta-\alpha)} = \frac{b}{\sin CNA};$$

Fig. 2.



mais $\sin CNB = \sin CNA$: donc

$$\frac{BN}{NA} = \frac{a}{b}\,\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin\alpha};$$

l'équation (4) devient donc

$$\frac{x}{a-x}\,\frac{b-y}{y} = \frac{b}{a}\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}$$

ou

$$(5) \qquad \frac{x}{y}\,\frac{b-y}{a-x} = \frac{b}{a}\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},$$

ce qui est l'équation cherchée d'une droite passant par l'origine.

L'équation (5) peut s'écrire

$$\frac{x}{y}\,\frac{1-\dfrac{y}{b}}{1-\dfrac{x}{a}} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)};$$

si a et b s'éloignent à ∞, elle devient

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta - \alpha)},$$

ce qui est bien la forme de l'équation d'une droite passant à l'origine dans le système cartésien ordinaire.

Point d'intersection de deux droites. — Soient les deux droites

$$\frac{xy}{(a' - x)(b' - y)} = \frac{ab}{(a - a')(b - b')},$$
$$\frac{xy}{(a'' - x)(b'' - y)} = \frac{ab}{(a - a'')(b - b'')},$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$ab(a'b' - b'x) = y[(a'b' - ab' - a'b)x + aa'b],$$
$$ab(a''b'' - b''x) = y[(a''b'' - ab'' - a''b)x + aa''b];$$

on tire de là

$$\begin{aligned} &x^2[a'b''(b' - b) - a''b(b'' - b)] \\ &\quad + x[a'a''b(b'' - b' - aa'b''(b' - b) + aa''b'(b'' - b)] \\ &\qquad\qquad - aa'a''b(b'' - b') = 0. \end{aligned}$$

Si l'on résout cette équation, on voit que la quantité sous le radical est un carré parfait; on trouve que l'une des deux valeurs de x qui annulent cette équation est $x = a$, et la valeur correspondante de y est b, ainsi que nous devions nous y attendre, puisque l'équation générale d'une droite est toujours satisfaite par

$$x = a, \qquad y = b.$$

Cette solution ne donne pas les coordonnées de l'intersection de AB et de A'B'.

L'autre valeur de x qui annule l'équation est

$$x = \frac{a'a''b(b' - b'')}{a'b''(b' - b) - a''b'(b'' - b)}, \tag{6}$$

la valeur correspondante de y est

$$y = \frac{ab'b''(a' - a'')}{a''b'(a' - a) - a'b''(a'' - a)}, \tag{7}$$

l'x et l'y ne dépendent, l'x que de a, l'y que de b.

Si l'on met ces valeurs sous la forme

$$x = \frac{a'a''(b'-b'')}{a'b''\left(\frac{b'}{b}-1\right)-a''b'\left(\frac{b''}{b}-1\right)},$$

$$y = \frac{b'b''(a'-a'')}{a''b'\left(\frac{a'}{a}-1\right)-a'b''\left(\frac{a''}{a}-1\right)},$$

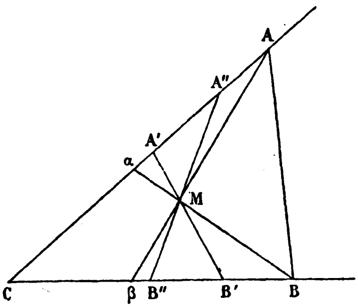
et que l'on fasse a et b infinis, on retrouve l'expression dans le système cartésien ordinaire de l'intersection des deux droites

$$\frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}=1,$$

$$\frac{x}{a''}+\frac{z}{b''}=1.$$

Les expressions (6) et (7) peuvent s'écrire, en appelant α et β les points (*fig.* 3) où les droites AM, BM coupent respectivement

Fig. 3.



CA et CB, M étant le point commun des droites A′B′, A″B″,

$$C\beta = \frac{CA.CB'.CB''.A'A''}{CB''.CA'.AA''-CB'.CA''.AA'},$$

$$C\alpha = \frac{CB.CA'.CA''.B'B''}{CA''.CB'.BB''-CA'.CB''.BB'},$$

relations métriques remarquables.

La même extension du système de coordonnées cartésiennes a lieu dans l'espace.

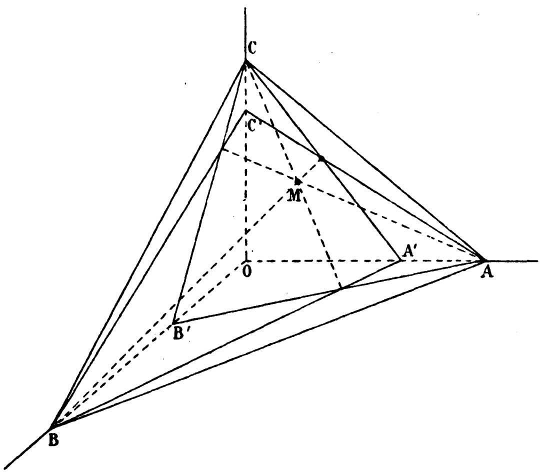
Soient trois points fixes (*fig.* 4) A, B, C, pris sur trois axes fixes OA, OB, OC; soit M un point quelconque de l'espace :

Le plan MBC coupe OA en A′,
» MAC » OB » B′,
» MBA » OC » C′;

OA′, OB′, OC′ sont en grandeur et en signe les coordonnées x, y, z du point M.

Il est clair que, si les droites BC, CA, AB s'éloignent à l'infini

Fig. 4.



respectivement dans les plans BOC, COA, AOB, le système de coordonnées devient le système cartésien ordinaire.

Si l'on pose

$$\mathrm{OA} = a, \qquad \mathrm{OB} = b, \qquad \mathrm{OC} = \mathrm{C},$$
$$\mathrm{OA}' = a', \qquad \mathrm{OB}' = b', \qquad \mathrm{OC}' = \mathrm{C}',$$

l'équation du plan A′B′C′ sera

$$xyz(\Sigma ac'b' - 2a'b'c') + \Sigma aa'yz(b'c' - bc' - cb') \\ + abc\,\Sigma xb'c' - abc\,a'b'c' = 0;$$

elle est toujours satisfaite par

$$x = a,$$
$$y = b,$$
$$z = c,$$

comme il est facile de le prévoir.

Si l'on fait tendre a, b, c vers ∞, cette équation devient

$$\frac{x}{a'} + \frac{y}{b'} + \frac{z}{c'} = 1,$$

ce qui est l'équation du plan dans le système cartésien ordinaire.

Nous ne nous étendrons pas davantage ; nous n'avons même fait ces très simples observations que parce que cette généralisation du système cartésien ne nous semble pas avoir été remarquée et qu'elle peut être utile dans certaines questions.