BULLETIN DE LA S. M. F.

DE PRESLE

Au sujet du développement de $\cot z$ en série de fractions

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 143-144
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__143_0>

Au sujet du développement de cot z *en série de fractions;*

par M. DE PRESLE.

(Séance du 18 avril 1888.)

L'application du théorème de M. Mittag-Leffler donne

$$\cot z = \mathrm{G}(z) + \frac{1}{z} + \sum \frac{z}{n\pi(z - n\pi)},$$
$$n = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots,$$

$\mathrm{G}(z)$ étant une fonction holomorphe de z, dont la détermination est le but de la présente Note.

Nous avons

$$\mathrm{G}(z) = \cot z - \frac{1}{z} - \sum \frac{z}{n\pi(z - n\pi)}.$$

Proposons-nous de démontrer que $\mathrm{G}(z)$ ne tend vers l'infini pour aucune valeur de z dont le module tende vers l'infini.

1° Remplaçons z par $x + yi$, en supposant que y ne soit pas nul,

$$\mathrm{G}(x + yi) = \frac{\cot x \cot(yi) - 1}{\cot x + \cot(yi)} - \frac{1}{x + yi} - \sum \frac{x + yi}{n\pi(x + yi - n\pi)}.$$

Le premier terme du second membre ne tend jamais vers l'infini; en effet, si y tend vers l'infini, $\cot(yi)$ tend vers i, d'ailleurs, $\cot(yi)$ ne tend vers l'infini que si y tend vers zéro, et, si $\cot x$ tend vers l'infini, la limite de ce terme est $\cot(yi)$.

Le second terme du second membre ne tend jamais vers l'infini.

La somme qui constitue le troisième terme du second membre ne tend jamais vers l'infini, car les dénominateurs ne contiennent, comme facteur, aucune discontinuité de la fonction.

2° Il ne nous reste donc qu'à considérer le cas de y nul; on a

$$\mathrm{G}(x) = \cot x - \frac{1}{x} - \sum \frac{x}{n\pi(x - n\pi)}.$$

Le premier terme du second membre tend vers l'infini pour toutes les valeurs de x tendant vers $m\pi$, m étant un nombre entier, positif ou négatif, et pour celles-ci seulement.

Le second terme est fini pour toutes les valeurs de x ne tendant pas vers zéro.

La somme qui constitue le troisième terme ne tend vers l'infini que pour les valeurs de x tendant vers $m\pi$; et, même pour ces valeurs, cette somme est finie, abstraction faite du terme correspondant à la discontinuité. Pour ce terme, remplaçons x par $x' + m\pi$ et considérons la différence

$$\cot(x' + m\pi) - \frac{x' + m\pi}{m\pi x'}.$$

Nous pouvons écrire cette différence

$$\cot x' - \frac{1}{x'} - \frac{1}{m\pi}.$$

Si x' tend vers zéro et m vers l'infini, cette différence tend vers zéro.

3° Ainsi $G(z)$ ne tend vers l'infini pour aucune valeur de z dont le module tend vers l'infini et, par suite, est une constante.

4° Cette constante est nulle, car pour des valeurs de x égales et de signe contraire, $G(x)$ doit avoir des valeurs égales et de signe contraire : donc

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum \frac{z}{n\pi(z - n\pi)},$$
$$n = \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots.$$