CH. BIOCHE

Sur les lignes de courbure de certaines surfaces gauches

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 119-124
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__119_1>

Sur les lignes de courbure de certaines surfaces gauches;

par M. Ch. Bioche, professeur au Lycée de Douai.

(Séance du 18 janvier 1888.)

I.

On sait que, si la ligne de striction d'une surface gauche est ligne de courbure et si le paramètre de distribution des plans tangents est constant (ce qui arrive pour la surface gauche de révolution), le système des lignes de courbure auquel appartient la ligne de striction divise les génératrices en segments de longueur constante, et l'autre système détermine sur les génératrices des divisions homographiques (¹).

Je me propose de faire voir que *ces surfaces sont les seules dont les lignes de courbure divisent les génératrices en segments égaux ou, plus généralement, en segments homographiques.*

Si l'on appelle s l'arc de la ligne de striction d'une surface

(¹) Paul Serret, *Théorie géométrique et mécanique des lignes à double courbure*, p. 157.

gauche, r le segment de génératrice compris entre un point de la surface et le point central correspondaut, une relation entre r et s définit une courbe sur la surface. Si l'on désigne par θ l'angle d'une génératrice avec la ligne de striction, par k le paramètre de distribution correspondant, par Ω la courbure de la section normale tangente à la ligne de striction (ces trois quantités étant fonctions de l'arc s), l'équation différentielle des lignes de courbure peut s'écrire

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} & k\sin\theta\frac{dr^2}{ds^2}+\left[k^2(\Omega-k\sin\theta\cos\theta)r^2+\sin\theta\frac{dk}{ds}r+\Omega\right]\frac{dr}{ds}\\ &\qquad +(1+k^2r^2)(\Omega\cos\theta-k\sin\theta)+\cos\theta\sin\theta\frac{dk}{ds}r=0.\end{aligned}\right.$$

Cherchons dans quels cas les génératrices d'une surface gauche sont divisées en segments de longueur constante par des lignes de courbure, ou, autrement dit, dans quels cas des solutions de l'équation (1) ne diffèrent que d'une constante.

Le premier membre de l'équation (1) est un trinôme du second degré en r dont les coefficients sont fonctions de s et de $\frac{dr}{ds}$, et par suite ne changent pas si l'on augmente r d'une constante. Pour que l'équation, étant vérifiée par $r=r'$, le soit par $r=r'+c$, quelle que soit la valeur de c, il faut et il suffit qu'elle soit vérifiée pour deux valeurs de c. On a ainsi les trois équations

$$(2)\qquad (\Omega-k\sin\theta\cos\theta)\frac{dr}{ds}+\Omega\cos\theta-k\sin\theta=0,$$

$$(3)\qquad \frac{dk}{ds}\sin\theta\left(\frac{dr}{ds}+\cos\theta\right)=0,$$

$$(4)\qquad k\sin\theta\frac{dr^2}{ds^2}+\Omega\frac{dr}{ds}+\Omega\cos\theta-k\sin\theta=0.$$

Pour une surface gauche $\theta\neq 0$, et les lignes de courbure ne pouvant pas être trajectoires orthogonales des génératrices, tout le long d'une de ces lignes $\frac{dr}{ds}+\cos\theta$ est différent de 0, de sorte que l'équation (3) ne peut être vérifiée que si $k=$ const.

De plus, en combinant par soustraction les équations (2) et (4), on a

$$k\sin\theta\left(\frac{dr}{ds}+\cos\theta\right)\frac{dr}{ds}=0;$$

les trois premiers facteurs étant différents de o, dans les conditions du problème, les équations considérées ne peuvent être vérifiées en même temps que si $\frac{dr}{ds} = 0$, c'est-à-dire si l'on a, avec $k = \text{const.}$,

$$\Omega \cos\theta - k \sin\theta = 0.$$

D'autre part, il est évident, si l'on se reporte à l'équation (1), que ces conditions sont suffisantes. Donc, *si les lignes de courbure d'un système divisent les génératrices d'une surface gauche en segments de longueur constante, la ligne de striction est ligne de courbure et le paramètre de distribution est constant.* Alors le système de lignes de courbure auquel appartient la ligne de striction étant donné par $\frac{dr}{ds} = 0$, l'autre est donné par une équation de Riccati et, par suite, d'après un théorème connu, détermine sur les génératrices des divisions homographiques.

Cherchons maintenant à déterminer toutes les surfaces caractérisées par ce seul fait, d'avoir leurs génératrices divisées homographiquement par un système de lignes de courbure. On sait que si un système de lignes de courbure possède cette propriété, il doit être déterminé par une équation de Riccati

$$\frac{dr}{ds} + Mr^2 + Nr + P = 0.$$

On voit alors que l'équation (1), considérée comme une équation du second degré en $\frac{dr}{ds}$, donne pour $\frac{dr}{ds}$ deux expressions rationnelles et entières en r. Donc, si l'on résout l'équation (1), la quantité sous radical, qui est du quatrième degré en r, devra être carré parfait. La considération des termes du quatrième et du troisième degré montre immédiatement que sa racine est de la forme

$$(5) \qquad k^2(\Omega - k \sin\theta \cos\theta) r^2 + \sin\theta \frac{dk}{ds} r + R,$$

R étant fonction de s seulement et devant vérifier simultanément trois équations de condition. On peut éviter la discussion de ce système d'équations en remarquant que le trinôme (5) ne diffère du coefficient de $\frac{dr}{ds}$ que par le terme indépendant R; de sorte que l'une des valeurs de $\frac{dr}{ds}$ serait

$$\frac{dr}{ds} = \frac{\mathrm{R} - \Omega}{k \sin\theta}.$$

Le système de lignes de courbure diviserait les génératrices en segments égaux; or on a vu plus haut que cela ne peut arriver que si ce système est donné par $r = \text{const.}$ On retrouve les surfaces déjà obtenues. Donc, *si les lignes de courbure d'un système divisent homographiquement les génératrices d'une surface gauche, les autres divisent les génératrices en segments de longueur constante, et inversement* (¹).

On peut voir facilement que la division homographique ne peut pas se réduire à une division en segments proportionnels.

II.

On obtient des résultats qui me semblent intéressants si l'on exprime les conditions pour qu'une courbe soit à la fois ligne de courbure et ligne de striction d'une surface gauche, au moyen des éléments géométriques qui définissent cette courbe et la position de la génératrice qui s'appuie sur elle en chaque point.

Une ligne c est définie par ses deux courbures ω et ϖ; la position d'une droite qui s'appuie sur c, par les cosinus λ, μ, ν des angles qu'elle fait avec la tangente, la normale principale et la binormale. Pour réduire au minimum le nombre des paramètres, on peut poser

$$\lambda = \cos\theta, \qquad \mu = \sin\theta\cos\varphi, \qquad \nu = \sin\theta\sin\varphi.$$

Avec ces notations, la condition pour que c soit ligne de striction est

$$(1) \qquad \frac{d\theta}{ds} + \omega\cos\varphi = 0;$$

(¹) Ce résultat a été énoncé par M. Lelieuvre dans une Note parue dans les *Comptes rendus* (16 janvier 1888) au moment où je venais de terminer la rédaction de ce travail.

la condition pour que c soit ligne de courbure est

$$\pi - \frac{d\varphi}{ds} = 0. \tag{2}$$

Enfin, lorsque c est ligne de striction, le paramètre de distribution est donné par

$$k = \pi - \frac{d\varphi}{ds} + \omega \cot\theta \sin\varphi. \tag{3}$$

Des cinq quantités k, θ, φ, ω, π, fonctions de l'arc s qui entrent dans ces relations, les deux premières restent invariables lorsqu'on déforme une surface gauche. Si θ n'est pas un angle droit, les trois équations donnent φ, ω et π, autrement dit, déterminent les éléments nécessaires pour définir une surface gauche sur laquelle sont applicables toutes les surfaces (k, θ) correspondant à un système donné de fonctions k et θ, cette surface ayant sa ligne de striction pour ligne de courbure.

En effet, si $\frac{d\theta}{ds} \neq 0$, les équations peuvent s'écrire

$$\frac{d\theta}{ds} \operatorname{tang}\varphi + k \operatorname{tang}\theta = 0, \qquad \frac{d\theta}{ds} + \omega \cos\varphi = 0, \qquad \pi - \frac{d\varphi}{ds} = 0,$$

équations qui donnent un système unique de valeurs pour les trois inconnues.

Si $\frac{d\theta}{ds} = 0$, θ n'étant pas droit, les équations prises sous leur première forme donnent

$$\varphi = 90^\circ, \qquad \pi = 0, \qquad k = \omega \cot\theta\,;$$

les surfaces (k, θ) sont alors applicables sur une surface dont la ligne de striction est plane. En particulier, si $k = \text{const.}$, cette ligne est un cercle et la surface correspondante la surface gauche de révolution.

Si $\theta = 90^\circ$, c'est-à-dire si les surfaces (k, θ) sont des surfaces de binormales ou des conoïdes droits, les équations ne pourraient pas avoir lieu simultanément, et d'ailleurs il est évident, *a priori*, que la ligne de striction, étant orthogonale aux génératrices, ne peut devenir ligne de courbure par suite d'une déformation de la surface.

Donc, *toute surface gauche qui n'est pas une surface de* *binormales ou un conoïde droit peut être appliquée sur une surface gauche dont la ligne de striction est ligne de courbure,* et le problème n'a qu'une solution.

Si, dans les équations (1) et (2), on considère ω et π comme connus, φ et θ se déterminent par des quadratures; ce qui montre qu'on peut toujours faire mouvoir une droite s'appuyant sur une courbe, de façon que cette courbe soit ligne de striction et ligne de courbure de la surface engendrée; on peut prendre arbitrairement une position de cette droite et alors la surface est complètement déterminée.