BULLETIN DE LA S. M. F.

G. KOENIGS

Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux coniques tracées sur une surface de Steiner est une autre surface de Steiner

Bulletin de la S. M. F., tome 16 (1888), p. 15-18

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1888__16__15_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Le lieu des pôles d'un plan fixe par rapport aux coniques tracées sur une surface de Steiner est une autre surface de Steiner; par M. G. Koenigs, maître de conférences à l'École Normale supérieure.

(Séance du 5 novembre 1887).

1. Les coordonnées homogènes x, y, z, t d'un point d'une surface de Steiner sont, comme on sait, proportionnelles à des formes quadratiques de trois variables indépendantes,

$$(1) \qquad \begin{cases} \rho x = \varphi(\xi, \eta, \zeta) = a_{11}\xi^2 + 2a_{12}\eta\xi + \ldots, \\ \rho y = \psi(\xi, \eta, \zeta) = b_{11}\xi^2 + 2b_{12}\eta\xi + \ldots, \\ \rho z = \chi(\xi, \eta, \zeta) = c_{11}\xi^2 + 2c_{12}\eta\xi + \ldots, \\ \rho t = \omega(\xi, \eta, \zeta) = e_{11}\xi^2 + 2e_{12}\eta\xi + \ldots. \end{cases}$$

La section de la surface par le plan

$$(2) \qquad \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{E}t = 0$$

est représentée par l'équation

$$(3) \qquad f(\xi, \eta, \zeta) = \mathrm{A}\varphi(\xi, \eta, \zeta) + \mathrm{B}\psi + \mathrm{C}\chi + \mathrm{E}\omega = 0.$$

Si le plan n'est pas tangent, une transformation linéaire des variables ξ, η, ζ permet toujours de ramener f à la forme

$$(f_1) \qquad \xi^2 - \eta\zeta = 0;$$

si le plan est tangent, on peut ramener f à la forme

$$(f_2) \qquad \eta\zeta = 0,$$

et, enfin, si le plan est un des quatre qui sont tangents en chaque point d'une conique, à la forme

$$(f_3) \qquad \zeta^2 = 0.$$

Je rappelle encore que, lorsque les équations d'une conique ont été mises sous la forme

$$\rho x_i = \alpha_i \lambda^2 + \beta_i \lambda + \gamma_i,$$

où λ est un paramètre qui fixe chaque point de la conique, les points α, β, γ, dont les coordonnées sont α_1, α_2, α_3, α_4; β_1, β_2, β_3, β_4; γ_1, γ_2, γ_3, γ_4, offrent la disposition suivante : α et γ sont deux points de la conique et β est le pôle de la droite $\alpha\gamma$.

Ajoutons aussi que les équations (1) réalisent une représentation de la surface de Steiner sur un plan où ξ, η, ζ seraient des coordonnées ponctuelles, et que les droites de ce plan et les coniques de la surface se correspondent.

2. Ceci posé, soient α, γ les points où une conique C de la surface coupe le plan (2),

α	correspondra	à des valeurs	ξ', η', ζ',
β	»	»	ξ'', η'', ζ''

des paramètres ξ, η, ζ, et, par suite, si, dans les formules (1), on pose

$$\xi = \xi'\lambda + \xi'',$$
$$\eta = \eta'\lambda + \eta'',$$
$$\zeta = \zeta'\lambda + \zeta'',$$

ces équations (1) représenteront précisément la conique C de la surface qui passe par α, γ; nous aurons donc la représentation de C

$$\rho x = \varphi(\xi', \eta', \zeta')\lambda^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi'}\xi'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'}\eta'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta'}\zeta''\right)\lambda + \varphi(\xi'', \eta'', \zeta''),$$

et de même pour y, z, t.

D'après la remarque déjà faite, le pôle de $\alpha\gamma$ par rapport à cette conique, ou le pôle du plan (2), a pour coordonnées

$$(4)\qquad 2\rho x = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi'}\xi'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'}\eta'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta'}\zeta'',$$

et de même pour y, z, t, en prenant ψ, χ, ω au lieu de φ.

Maintenant, si nous nous plaçons dans le cas (f_1), nous devons avoir

$$\xi'^2 - \eta'\zeta' = 0,$$
$$\xi''^2 - \eta''\zeta'' = 0;$$

c'est-à-dire qu'on peut poser, p, q étant deux paramètres,

$$\xi' = p, \qquad \eta' = 1, \qquad \zeta' = p^2,$$
$$\xi'' = q, \qquad \eta'' = 1, \qquad \zeta'' = q^2;$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\rho x &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi'}\xi'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta'}\eta'' + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta'}\zeta''\right)\\ &= a_{11}\xi'\xi'' + a_{22}\eta'\eta'' + a_{33}\zeta'\zeta'' + a_{12}(\xi'\eta'' + \xi''\eta')\\ &\qquad + a_{13}(\xi'\zeta'' + \xi''\zeta') + a_{23}(\eta'\zeta'' + \eta''\zeta')\\ &= a_{11}pq + a_{22} + a_{33}p^2q^2 + a_{12}(p+q) + a_{13}(p+q)pq + a_{23}(p^2+q^2).\end{aligned}$$

Posons alors

$$pq = \frac{Z}{H}, \qquad p + q = \frac{2\Xi}{H};$$

il viendra, en chassant H^2 et le faisant rentrer dans ρ,

$$\rho x = 4a_{23}\Xi^2 + a_{22}H^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}\Xi H + 2a_{13}\Xi Z + (a_{11} - 2a_{23})HZ.$$

Le lieu du pôle est donc la surface de Steiner (1) représentée

---

(1) En supposant que le plan (2) soit pris pour plan de l'infini, on peut donner à ce théorème la forme suivante :

Le lieu des centres des coniques tracées sur une surface de Steiner est une surface de Steiner.

J'ajoute que les quatre plans tangents doubles de la surface (1) sont des plans tangents simples de la surface (5). Si, en effet, $x = 0$ est un plan tangent double de (1), φ est un carré parfait, et peut être réduit à ξ^2; tous les a_{ik} sont nuls sauf a_{11}, et la première des formules (5) donne

$$\rho x = a_{11}Z\Xi,$$

ce qui prouve bien que le plan $x = 0$ est tangent à la surface (5).

Les deux surfaces coupent le plan considéré (2) suivant la même courbe du quatrième ordre, etc.

par les équations suivantes, où Ξ, H, Z sont les paramètres

$$(5)\quad \begin{cases} \rho x = 4a_{23}\Xi^2 + a_{22}H^2 + a_{33}Z^2 + 2a_{12}\Xi H + 2a_{13}\Xi Z + (a_{11} - 2a_{23})HZ, \\ \rho y = 4b_{23}\Xi^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \rho z = 4c_{23}\Xi^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \rho t = 4e_{23}\Xi^2 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

3. Supposons maintenant que le plan (2) soit tangent à la surface. Dans les formules (4) il faudra supposer que

$$\eta'\zeta' = 0, \qquad \eta''\zeta'' = 0.$$

On ne peut avoir en même temps $\eta' = 0$, $\eta'' = 0$ (ou $\zeta' = 0$, $\zeta'' = 0$), car deux coniques d'une surface de Steiner n'ont qu'un seul point commun, à moins d'être dans un même plan tangent, ce qui n'est pas le cas. Soit donc $\eta' = 0$, $\zeta'' = 0$, il vient

$$\rho x = a_{11}\xi'\xi'' + a_{12}\xi'\eta'' + a_{13}\xi''\zeta' + a_{23}\eta''\zeta',$$

ou, en divisant par $\eta''\zeta'$, posant $\frac{\xi'}{\zeta'} = \frac{p}{r}$, $\frac{\xi''}{\eta'} = \frac{q}{r}$ et faisant rentrer $\frac{r^2}{\zeta'\eta}$ dans ρ,

$$\rho x = a_1\, pq + a_{12}pr + a_{13}qr + a_{23}r^2.$$

On trouve donc ici une surface représentée par les équations

$$\begin{aligned} \rho x &= a_{11}pq + a_{13}qr + a_{12}pr + a_{23}r^2, \\ \rho y &= b_{11}pq + \dots\dots\dots\dots, \\ \rho z &= c_{11}pq + \dots\dots\dots\dots, \\ \rho t &= e_{11}pq + \dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

et qui n'est autre qu'une quadrique.

4. Le cas où le plan considéré est un plan tangent double ne donne rien d'intéressant, car les coniques de la surface lui sont toutes tangentes au point où chacune vient rencontrer la conique de contact.