BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FOURET

Sur une généralisation du théorème de Koenig, concernant la force vive d'un système matériel

Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886), p. 142-146
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1886__14__142_1>

Sur une généralisation du théorème de Kœnig, concernant la force vive d'un système matériel; par M. G. Fouret.

(Séance du 6 janvier 1886.)

1. A l'occasion d'une Communication de M. Gilbert sur la force vive des systèmes matériels, M. Resal rappelait récemment [1] les élégants théorèmes donnés sur ce sujet, il y a quelques années, par M. O. Bonnet, dans les Mémoires de l'Académie de Montpellier [2]. L'un de ces théorèmes, retrouvé et démontré d'une manière un peu différente par M. Gilbert [3], est une généralisa-

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CI, p. 1140.
[2] *Mémoires de la section des Sciences,* t. Ier, p. 142.
[3] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. CI, p. 1054.

tion d'un théorème bien connu dû à Kœnig, dont l'application est très fréquente dans la dynamique des systèmes.

Le théorème de M. Bonnet peut s'énoncer de la manière suivante :

Pour que la force vive d'un système matériel soit égale à la force vive de la masse totale, supposée concentrée en un certain point du système, augmentée de la force vive due au mouvement relatif du système autour de ce point, il faut et il suffit que la vitesse de ce dernier point soit égale à la projection, sur sa direction, de la vitesse absolue du centre de gravité du système.

Je me propose, dans cette Note, de démontrer un théorème très général sur le déplacement d'un système matériel qui conduit immédiatement, entre autres conséquences, au théorème de M. Bonnet, et qui comprend comme cas particulier une propriété relative à deux systèmes matériels, que j'ai exposée précédemment dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1).

2. La proposition qu'il s'agit d'établir peut s'énoncer comme il suit :

Lorsqu'un système, composé de points en nombre et de masses quelconques (2), *se déplace, en subissant ou non une déformation quelconque, la somme des produits obtenus, en multipliant la masse de chaque point par le carré de son déplacement, est égale au produit de la masse totale du système, multipliée par le carré de la projection du déplacement du centre de gravité sur une direction arbitrairement choisie, augmenté de la somme des produits obtenus, en multipliant les masses des divers points respectivement par les carrés des déplacements qu'il faut leur imprimer, pour les amener dans leur position finale, après leur avoir fait subir, dans la direction déjà choisie, une translation commune, égale à la projection, sur cette direction, du déplacement du centre de gravité.*

---

(1) T. XI, p. 53.

(2) Les masses peuvent, en partie, être supposées négatives, lorsqu'on se place à un point de vue géométrique.

La démonstration de ce théorème se déduirait facilement de l'analyse dont j'ai fait usage dans mon précédent Mémoire; mais il sera plus intéressant de l'établir par des considérations basées sur les notions les plus élémentaires de Géométrie.

3. Soient $m_1, m_2, \ldots, m_n$ les masses, affectées de signes quelconques, de n points composant le système, et occupant respectivement les positions primitives $A_1, A_2, \ldots, A_n$ et les positions finales $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$.

Soient G et G' les positions primitive et finale du centre de gravité du système, dont la masse totale sera désignée par M, et GX une direction arbitrairement choisie. Projetons G' orthogonalement sur GX en G'', et donnons aux divers points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ une même translation, identique à GG'', en grandeur, direction et sens, laquelle amènera ces points respectivement en $A''_1, A''_2, \ldots, A''_n$, de manière que l'on ait

$$(1) \qquad A_1A''_1 = A_2A''_2 = \ldots = A_nA''_n = GG''.$$

Projetons enfin $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ respectivement en $B_1, B_2, \ldots, B_n$, sur les droites $A_1A''_1, A_2A''_2, \ldots, A_nA''_n$. En vertu d'un théorème de Géométrie élémentaire des plus classiques, on a, dans l'un quelconque des triangles $A_1A'_1A''_1, A_2A'_2A''_2, \ldots, A_nA'_nA''_n$,

$$(2) \qquad \overline{A_iA'_i}^2 = \overline{A_iA''_i}^2 + \overline{A'_iA''_i}^2 + 2\overline{A_iA''_i} \times \overline{A''_iB_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

en ayant soin, toutefois, de considérer les segments, tels que A''_iB_i, comme positifs ou négatifs, suivant qu'ils ont le sens de la translation, c'est-à-dire le sens de GG'', ou le sens opposé. Ajoutons les n relations (2), après les avoir multipliées respectivement par $m_1, m_2, \ldots, m_n$: nous obtenons, en tenant compte des égalités (1),

$$(3) \qquad \Sigma m_i\overline{A_iA'_i}^2 = M\overline{GG''}^2 + \Sigma m_i\overline{A'_iA''_i}^2 + 2\,GG'' \times \Sigma m_i\overline{A''_iB_i}.$$

Considérons le plan perpendiculaire en G'' à GX : ce plan contient G', dont G'' est la projection orthogonale sur GX. En désignant par $C_1, C_2, \ldots, C_n$ les points d'intersection respectifs de $A_1A''_1, A_2A''_2, \ldots, A_nA''_n$ avec ce plan, on a, en tenant compte des signes, les deux égalités

$$(4) \qquad \Sigma m_i\overline{B_iC_i} = 0, \qquad \Sigma m_i\overline{A''_iC_i} = 0,$$

qui expriment, la première, que G' est le centre de gravité du système $(A'_1, A'_2, \ldots, A'_n)$; la seconde, que G'' est le centre de gravité du système $(A''_1, A''_2, \ldots, A''_n)$.

Or des relations (4) on déduit par soustraction

$$\Sigma m_i \overline{A''_i B_i} = o.$$

Par suite, la relation (3) se réduit à

$$(5) \qquad \Sigma m_i \overline{A_i A'_i}^2 = M.\overline{GG''}^2 + \Sigma m_i \overline{A'_i A''_i}^2$$

C'est l'expression même du théorème qu'il s'agissait de démontrer [1].

4. En supposant, comme cas particulier, que la droite GX, dont la direction a été laissée jusqu'ici arbitraire, coïncide avec GG', on retrouve immédiatement un théorème que j'ai établi dans le Mémoire déjà rappelé, et dont j'ai déduit très simplement plusieurs propriétés connues des moments d'inertie relatifs à un point, à une droite, à un plan, et le théorème de Kœnig sur la force vive d'un système matériel. Je ne reviens pas sur ces conséquences. Je vais seulement faire voir comment le théorème de M. Bonnet se déduit avec la plus grande facilité de celui qui vient d'être démontré.

Supposons qu'il existe un point O du système matériel, dont le déplacement total OO' soit égal et parallèle à GG'', et dans le même sens. Le déplacement total du système matériel peut alors être considéré comme résultant d'une translation égale et parallèle à OO', qui amène A_i en A''_i, et d'un déplacement relatif par rapport à O', qui amène A''_i en A'_i. La relation (5) peut, en conséquence, s'écrire

$$(6) \qquad \Sigma m_i \overline{A_i A'_i}^2 = M.\overline{OO'}^2 + \Sigma m_i \overline{A'_i A''_i}^2.$$

En divisant par le carré du temps Δt que dure le déplacement,

---

[1] Il est facile de voir, en modifiant légèrement la marche de la démonstration, que la relation (3) ne se réduit à la relation (5), par suite de l'annulation de son dernier terme, que dans le cas où GG'' est la projection orthogonale de GG' sur GX.

et faisant tendre Δt vers zéro, on conclut de la relation (6) une relation qui ne contient que des forces vives, et qui est précisément l'expression du théorème de M. Bonnet.

Sur un mode de transformation des déterminants; par M. G. Fouret.

(Séance du 17 novembre 1886.)

Avant d'arriver à la transformation qui fait l'objet de cette Note, nous allons démontrer trois théorèmes préliminaires, qui nous seront utiles et qui présentent d'ailleurs quelque intérêt en eux-mêmes.

Théorème I. — *Le déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre* ([1])

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n,$$

dont tous les éléments sont égaux à l'unité, sauf les $n-1$ derniers éléments de la diagonale principale, qui sont nuls, est égal à $(-1)^{n-1}$.

En effet, en retranchant la seconde colonne de la première, on obtient

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_n = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}_{n-1} = - A_{n-1}.$$

([1]) Nous indiquerons, dans ce qui va suivre, l'ordre de chaque déterminant par un indice placé en bas et à la droite de ce déterminant.