Bulletin de la S. M. F.

E. Lemoine

# Quelques propriétés des parallèles et des antiparallèles aux côtés d'un triangle

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 12 (1884), p. 72-78

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1884__12__72_0>

*Quelques propriétés des parallèles et des anti-parallèles aux côtés d'un triangle;* par M. Émile Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique.

(Séance du 6 juin 1884).

Nous avons signalé pour la première fois (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1873), puis au Congrès de l'*Association scientifique pour l'avancement des Sciences,* et depuis dans divers journaux de Mathématiques, les propriétés d'un certain point et de certaines droites du plan d'un triangle; nous avons nommé le point : *centre des médianes anti-parallèles,* et les droites : *médianes anti-parallèles;* comme les travaux sur les questions qui s'y rapportent se sont multipliés de tous côtés, et que de nombreux géomètres : en France, MM. Brocard, Morel, d'Ocagne, G. Tarry, etc.; en Allemagne, MM. Stoll, Kiehl, Furhmann et divers collaborateurs de la *Zeitschrift;* en Belgique, MM. Neuberg, Cesáro, etc.; en Angleterre, M. Tucker, etc., se sont occupés du même sujet, nous croyons, quoique ces considérations soient élémentaires, pouvoir intéresser encore en donnant ici quelques résultats qui nous semblent nouveaux (¹).

## NOTATIONS.

(ABC, un triangle; O, un point du plan.)

Par O, nous menons l'anti-parallèle :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° à BC, | qui coupe BC en | $1_1$, | AC en | $1_2$, | AB en | $1_3$; |
| 2° à CA, | » | $2_1$, | » | $2_2$, | » | $2_3$; |
| 3° à AB, | » | $3_1$, | » | $3_2$, | » | $3_3$. |

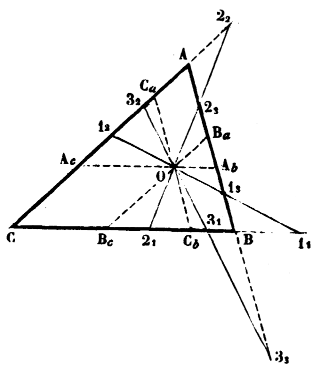
(¹) Nous venons de recevoir un Mémoire fort étendu et fort intéressant de M. Neuberg, Mémoire lu le 2 février 1884 à l'Académie de Belgique, et imprimé *in extenso* dans les Mémoires de l'Académie. Dans ce travail, où sont généralisés de la façon la plus élégante et étendue au tétraèdre une foule de théorèmes se rapportant au triangle, M. Neuberg nous fait l'honneur d'appeler *point de Lemoine* le centre des médianes anti-parallèles. Le titre du Mémoire est : *Memoire sur le tétraèdre.*

Par O, nous menons une parallèle :

1° à BC, qui coupe BA en $A_b$, AC en $A_c$;
2° à CA, » CB en $B_c$, BA en $B_a$;
3° à AB, » AC en $C_a$, CB en $C_b$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nous appellerons | $\xi$, $\eta$, $\zeta$ | les trois longueurs | $2_1 3_1$, $3_2 1_2$, $1_3 2_3$; |
| » | Z, Y, Z | » | $B_c C_b$, $C_a A_c$, $A_b B_a$; |
| » | $X_1$, $Y_1$, $Z_1$ | » | $A_c A_b$, $B_a B_c$, $C_b C_a$; |
| » | $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ | » | $1_2 1_3$, $2_3 2_1$, $3_1 3_2$. |

Nous rappellerons que le centre des médianes anti-parallèles est le point de concours des trois droites, qui joignent chaque sommet du triangle aux milieux des anti-parallèles à ce côté. Chacune des droites divisant l'anti-parallèle en deux parties égales s'appelle *médiane anti-parallèle.*




On a, pour tout point O du plan :

1° $$\frac{X_1}{a} + \frac{Y_1}{b} + \frac{Z_1}{c} = 2.$$

2° $$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} + \frac{Z}{c} = 1.$$

La première relation est fort connue, et la seconde s'en déduit immédiatement.

3° $$\frac{\xi a^2}{\cos A} + \frac{\eta b^2}{\cos B} + \frac{\zeta c^2}{\cos C} = 2abc;$$

4° $$\frac{X_2 \cos A}{a} + \frac{Y_2 \cos B}{b} + \frac{Z_2 \cos C}{c} = 1.$$

5° *Si* O *se trouve sur la médiane anti-parallèle partant de* C, *la droite* $1_2 2_1$ *est parallèle à* AB.

*Si* O *se trouve sur la parallèle à* AB *menée par* C, *la droite* $1_2 2_1$ *est parallèle à la médiane anti-parallèle partant de* C.

*Si* O *se trouve sur la hauteur partant de* C, *la droite* $1_2 2_1$ *est anti-parallèle à* AB.

*Si* O *se trouve sur l'anti-parallèle à* AB *menée par* C, *la droite* $1_2 2_1$ *sera parallèle à la hauteur partant de* C, etc.

Ces théorèmes et d'autres analogues sur les directions des droites $A_c B_c$ sont des corollaires de la proposition générale suivante :

*Par deux points* O *et* O', *je mène :*

1° OA, O'A' *parallèles entre elles et coupant en* A *et en* A' *une droite* $\omega$AA';

2° OB, O'B' *parallèles entre elles et coupant en* B *et en* B' *une droite* $\omega$BB'.

*Si* A'B' et $\omega$O' *sont parallèles,* AB *et* $\omega$O *le seront aussi.*

Cette proposition se généralise encore d'une façon intéressante par projection conique.

6° Le lieu des points O, pour lesquels on a

$$\xi + \eta + \zeta = \text{const.},$$

est une droite.

7° Le lieu des points O, pour lesquels on a

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \text{const.},$$

est une ellipse qui a pour centre le point dont les coordonnées homogènes sont

$$\frac{a^3}{\cos^2 A}, \frac{b^3}{\cos^2 B}, \frac{c^3}{\cos^2 C},$$

et pour lequel cette somme est un minimum.

8° Le lieu des points O, pour lesquels on a

$$\xi X_1 + \eta Y_1 + \zeta Z_1 = K^2,$$

est un cercle concentrique au cercle circonscrit; K est maximum lorsque O est au centre de ce cercle, nul pour tout point de la circonférence.

9° Le lieu des points O, pour lesquels on a

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z = \text{const.},$$

est un cercle qui a pour centre le point de concours des hauteurs.

10° Le lieu des points O, pour lesquels

$$YZ + XZ + XY = \text{const.},$$

est une ellipse qui a pour centre le point dont les coordonnées homogènes sont

$$\frac{1}{a}\left(b + c - \frac{bc}{a}\right), \quad \frac{1}{b}\left(a + c - \frac{ac}{b}\right), \quad \frac{1}{c}\left(a + b - \frac{ab}{c}\right);$$

pour ce point, la constante a un minimum.

11° Les longueurs $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ sont proportionnelles à $a$, $b$, $c$, pour le point dont les coordonnées homogènes sont

$$\frac{1}{r_a h_a}, \quad \frac{1}{r_b h_b}, \quad \frac{1}{r_c h_c},$$

$r_a$, $r_b$, $r_c$, $h_a$, $h_b$, $h_c$ étant les rayons des cercles exinscrits et les hauteurs, et aussi pour les points

$$\begin{array}{ccc} -\dfrac{1}{rh_a}, & \dfrac{1}{r_c h_b}, & \dfrac{1}{r_b h_c}; \\[2ex] \dfrac{1}{r_c h_a}, & -\dfrac{1}{rh_b}, & \dfrac{1}{r_a h_c}; \\[2ex] \dfrac{1}{r_b h_a}, & \dfrac{1}{r_a h_b}, & -\dfrac{1}{rh_c}. \end{array}$$

12° Si, par le centre d'un des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle, on mène une parallèle à un côté et l'anti-parallèle à ce même côté, la partie de la parallèle comprise entre les deux autres côtés est égale à la partie de l'anti-parallèle comprise entre ces deux mêmes côtés, c'est-à-dire que, pour le centre du cercle inscrit, on a

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = Y_2, \quad Z_1 = Z_2.$$

Pour le centre du cercle exinscrit tangent au côté BC,

$$X_1 = X_2, \quad Y_1 = -Y_2, \quad Z_1 = -Z_2, \quad \ldots.$$

13° Le lieu des points, pour lesquels on a

$$X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2 = \text{const.}$$

est une ellipse qui a pour centre le point pour lequel $X_2$, $Y_2$, $Z_2$ sont proportionnels à

$$\frac{\cos A}{a}, \quad \frac{\cos B}{b}, \quad \frac{\cos C}{c}, \quad \text{ou} \quad \cot A, \ \cot B, \ \cot C,$$

et pour lequel les coordonnées homogènes sont

$$a(c^3 + b^2 - 3a^2), \quad b(a^2 + c^2 - 3b^2), \quad c(a^2 + b^2 - 3c^2),$$

point pour lequel $X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2$ est un minimum.

14° Pour le centre de gravité, $\xi$, $\eta$, $\zeta$ sont proportionnels à

$$\frac{\cos A}{a^2}, \quad \frac{\cos B}{b^2}, \quad \frac{\cos C}{c^2};$$

pour les points dont les coordonnées homogènes sont

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{tang} A, & \operatorname{tang} B, & \operatorname{tang} C; \\ -\operatorname{tang} A, & \operatorname{tang} B, & \operatorname{tang} C; \\ \operatorname{tang} A, & -\operatorname{tang} B, & \operatorname{tang} C; \\ \operatorname{tang} A, & \operatorname{tang} B, & -\operatorname{tang} C: \end{array}$$

on a en valeur absolue

$$\xi = \eta = \zeta;$$

il est facile d'étudier de même le lieu des points pour lesquels

$$X_2^2 + Y_2^2 - Z_2^2, \quad X_1^2 + Y_1^2 - Z_1^2, \quad X^2 + Y^2 - Z^2$$

ont une valeur constante, etc., etc.

15° Pour tous les points d'une même anti-parallèle à AB, on a

$$a\xi + b\eta - c\zeta = \text{const.}$$

16° Appelons, avec M. de Longchamps, *points réciproques* deux points O et $O_1$, tels que, si l'on joint ces points aux trois sommets, les droites ainsi obtenues coupent le côté opposé en deux points symétriques par rapport au milieu de ce côté.

*Si, par le point réciproque de l'un des centres des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle, on mène des parallèles aux trois côtés, la longueur que deux de ces parallèles interceptent sur le troisième est la même pour les trois côtés.*

C'est-à-dire que, pour ces points, on a

$$X = Y = Z.$$

Les coordonnées homogènes de ces points sont

$$\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}; \quad -\frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}; \quad \frac{1}{a^2}, -\frac{1}{b^2}, \frac{1}{c^2}; \quad \frac{1}{a^2}, \frac{1}{b^2}, -\frac{1}{c^2}.$$

Si l'on a : $bc + ac = ab$, l'un de ces quatre points disparaît à $\infty$.

Remarquons que, si l'on prend les arguésiens (¹) de ces points, arguésiens dont les coordonnées sont

$$a^2, b^2, c^2; \quad -a^2, b^2, c^2; \quad a^2, -b^2, c^2; \quad a^2, b^2, -c^2;$$

la ligne qui joint l'un d'eux à un sommet divise le côté opposé en deux segments proportionnels aux cubes des côtés adjacents.

Ces théorèmes sont des cas particuliers intéressants de la proposition suivante, qui pourrait à volonté en fournir d'autres pour ainsi dire à l'infini :

17° *Si* $\varphi(X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2, \xi, \eta, \zeta) = 0$ *est une fonction de degré n des diverses quantités qui entrent dans la parenthèse, le lieu des points* O, *pour lesquels on a* $\varphi = 0$, *sera* en général *une courbe du* $n^{\text{ième}}$ *degré*.

La proposition est presque évidente; car, si l'on considère que, les distances du point O aux trois côtés étant $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on a

$$X_1 = \frac{a(b\beta + c\gamma)}{2S}, \quad X = \frac{a^2\alpha}{2S}, \quad X_2 = \frac{a(b\gamma + c\beta)}{2S};$$

$$Y_1 = \frac{b(a\alpha + a\gamma)}{2S}, \quad Y = \frac{b^2\beta}{2S}, \quad Y_2 = \frac{b(a\gamma + c\alpha)}{2S};$$

$$Z_1 = \frac{c(a\alpha + b\beta)}{2S}, \quad Z = \frac{c^2\gamma}{2S}, \quad Z_2 = \frac{c(a\beta + b\alpha)}{2S};$$

$$\xi = \frac{\alpha bc \cos A}{S},$$

$$\eta = \frac{\beta ac \cos B}{S},$$

$$\zeta = \frac{\gamma ab \cos C}{S}.$$

(¹) L'arguésien d'un point O est ici le second foyer de la conique inscrite au triangle et qui a pour foyer ce point O.

Le lieu du point O, pour lequel la relation $\varphi = 0$ est satisfaite, sera, en coordonnées homogènes, généralement du $n^{\text{ième}}$ degré, puisque ces quantités sont des fonctions linéaires de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, qui peuvent être prises comme coordonnées homogènes. Nous avons dit *généralement* du $n^{\text{ième}}$ degré, car la fonction $\varphi$ pourrait être constante : c'est le cas des théorèmes 1°, 2°, 3°, 4° (*voir* plus haut).

Le degré pourrait aussi s'abaisser si le coefficient de la plus haute puissance s'annulait identiquement, etc.

Ainsi le lieu des points O, pour lesquels on a

$$X_1 Y_1 Z_1 + XYZ = K^3,$$

représente une ellipse concentrique à l'ellipse minima circonscrite au triangle et homothétique avec elle, c'est-à-dire que le lieu est l'ellipse

$$\frac{\beta\gamma}{a} + \frac{\alpha\gamma}{b} + \frac{\alpha\beta}{c} = H^3,$$

et non une courbe du troisième degré.

Il est clair qu'en prenant, dans le triangle, d'autres éléments $x$, $y$, $z$ s'exprimant linéairement en fonction de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on pourrait les ajouter, dans la fonction $\varphi$, aux éléments examinés dans cette étude et faire à leur sujet les recherches analogues.