Bull. Soc. math. France
131 (4), 2003, p. 465–482

REPRÉSENTATIONS DE DIMENSION FINIE DE L'ALGÈBRE DE CHEREDNIK RATIONNELLE

PAR CHARLOTTE DEZÉLÉE

RÉSUMÉ. — On donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de modules de dimension finie sur l'algèbre de Cherednik rationnelle associée à un système de racines.

ABSTRACT (*Finite dimensional representations of the rational Cherednik algebra*)

We give a necessary and sufficient condition for the existence of finite dimensional modules on the rational Cherednik algebra associated to a root system.

1. Introduction et notations

Soient $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $\ell \geq 1$, $R \subset \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^*$ un système de racines réduit, W le groupe de Weyl correspondant et $\mathfrak{a} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$. On note r_α la réflexion associée à la racine α et $\alpha^\vee \in \mathfrak{a}$ la coracine de α. On fixe une fonction de multiplicité $k : R \to \mathbb{C}$ sur l'ensemble des racines, donc $k_{w(\alpha)} = k_\alpha$ pour tous $\alpha \in R$, $w \in W$. Soit

$$\mathcal{P} = S(\mathfrak{a}^*) = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}_n,$$

où $\mathcal{P}_n = S^n(\mathfrak{a}^*)$, l'algèbre symétrique de $\mathfrak{a}^*$. On pose $\mathcal{P}_+ = \oplus_{n \geq 1} \mathcal{P}_n$. Un élément $f \in \mathcal{P}$ peut être identifié à la multiplication par f dans $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})$ et

Texte reçu le 7 mars 2002, révisé le 10 juin 2002, accepté le 11 avril 2002

CHARLOTTE DEZÉLÉE, Département de mathématiques, Université de Brest, 29285 Brest Cedex (France) • *E-mail :* `Charlotte.Dezelee@univ-brest.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 16Sxx, 33Dxx, 17Bxx.

Mots clefs. — Opérateur de Dunkl, racine, groupe de Weyl.

l'on fait opérer W de façon naturelle sur $\mathcal{P}$. Si ∂_y est le champ de vecteurs associé à $y \in \mathfrak{a}$ on définit alors l'opérateur de Dunkl $T_y = T_y(k) \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})$ par

$$T_y(k) = \partial_y + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R} k_\alpha \frac{\langle \alpha, y\rangle}{\alpha}(1-r_\alpha) = \partial_y + \sum_{\alpha\in R^+} k_\alpha \frac{\langle \alpha, y\rangle}{\alpha}(1-r_\alpha),$$

où $R^+ \subset R$ est un système de racines positives. On sait que $T : y \mapsto T_y$ s'étend en un isomorphisme d'algèbres de $S(\mathfrak{a})$ sur

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(k) = \mathbb{C}[T_y : y \in \mathfrak{a}]$$

(*cf.* [7, th. 1.5] ou [5, th. 2.12]). On posera

$$\mathcal{S}_n = T\big(S^n(\mathfrak{a})\big),$$

de sorte que $\mathcal{S} = \mathbb{C} \oplus \mathcal{S}_+$ avec $\mathcal{S}_+ = \oplus_{n\geq 1}\mathcal{S}_n$.

L'algèbre de Cherednik rationnelle (*cf.* [6]), notée $\mathcal{H}(k)$ ou $\mathcal{H}$, est la sous-algèbre de $\operatorname{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{P})$ engendrée par les $w \in W$, $x \in \mathfrak{a}^*$ et les T_y, $y \in \mathfrak{a}$. Ces générateurs sont liés par les relations suivantes :

1) $[T_y, x] = \langle y, x\rangle + \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in R} k_\alpha \langle y, \alpha\rangle\langle \alpha^\vee, x\rangle r_\alpha$;
2) $wxw^{-1} = w(x)$;
3) $wT_yw^{-1} = T_{w(y)}$.

Rappelons [6, cor. 4.4] que $\mathcal{H}$ vérifie un théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW). En effet, si l'on pose pour tout $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{H}_n = \bigoplus_{\substack{j-i=n,\\ w\in W}} \mathcal{S}_i w \mathcal{P}_j = \bigoplus_{\substack{j-i=n,\\ w\in W}} \mathcal{P}_j w \mathcal{S}_i,$$

on a alors

$$\mathcal{H} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{H}_n = \mathcal{P} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathcal{S} = \mathcal{S} \otimes \mathbb{C}W \otimes \mathcal{P}.$$

Il résulte de [1, th. 2.2] que pour des valeurs génériques de la fonction k, l'algèbre $\mathcal{H}(k)$ ne possède pas de représentation de dimension finie. L'objet de ce travail est de chercher des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe des $\mathcal{H}$-modules de dimension finie et de déterminer certaines de leurs propriétés. Les principaux résultats obtenus sont les suivants. Dans la section 4 on montre (théorème 4.1) que tout $\mathcal{H}(k)$-module irréductible de dimension finie est isomorphe à l'unique quotient simple d'un module de Verma généralisé (*cf.* [5]) ; on en déduit à la section 5 une caractérisation des multiplicités k pour lesquelles des $\mathcal{H}(k)$-modules de dimension finie existent et une description de ces derniers (théorème 5.4, remarque 5.5 et proposition 5.6). La section 6 est consacrée à des exemples, notamment le cas d'un groupe de Weyl en rang 2 y est (presque) complètement traité.

2. Propriétés de $\mathcal{H}$

On définit [2, p. 144] une forme bilinéaire symétrique définie positive W-invariante sur $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}^*$ (que l'on étend à $\mathfrak{a}^*$) en posant

$$B^*(x,z) = \sum_{\alpha\in R} \langle \alpha^\vee, x\rangle\langle \alpha^\vee, z\rangle.$$

On peut alors identifier $\mathfrak{a}^*$ à $\mathfrak{a}$ via $x \mapsto B(x)$, où $B(x)$ est caractérisé par

$$B^*(x,z) = \big\langle B(x), z\big\rangle.$$

Ainsi B est un isomorphisme W-linéaire et l'on a

$$B(\alpha) = \frac{1}{2}B^*(\alpha,\alpha)\alpha^\vee, \quad \big\langle B(x), B^{-1}(y)\big\rangle = \langle y, x\rangle,$$

pour tous $\alpha \in R$ et $(x,y) \in \mathfrak{a}^* \times \mathfrak{a}$. On en déduit que

$$\sum_{\alpha\in R} k_\alpha \langle y,\alpha\rangle\langle \alpha^\vee, x\rangle r_\alpha = \sum_{\alpha\in R} k_\alpha \big\langle B(x), \alpha\big\rangle\big\langle \alpha^\vee, B^{-1}(y)\big\rangle r_\alpha.$$

En utilisant cette relation on montre que l'on peut définir un anti-automorphisme involutif σ de $\mathcal{H}$ par

$$\sigma(x) = T_{B(x)}, \quad \sigma(T_y) = B^{-1}(y), \quad \sigma(w) = w^{-1},$$

pour tous $x \in \mathfrak{a}^*$, $y \in \mathfrak{a}$, $w \in W$. On peut aussi définir un automorphisme ϕ de $\mathcal{H}$ (d'ordre 4) en posant

$$\phi(x) = -T_{B(x)}, \quad \phi(T_y) = B^{-1}(y), \quad \phi(w) = w.$$

On remarquera que ϕ et σ échangent $\mathcal{H}_n$ et $\mathcal{H}_{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Une application bilinéaire sur $\mathcal{H}$. — Grâce à PBW, il vient :

$$\mathcal{H} = \mathbb{C}W \oplus (\mathcal{P}_+\mathcal{H} + \mathcal{H}\mathcal{S}_+).$$

On peut donc définir la projection $\pi : \mathcal{H} \to \mathbb{C}W$ parallèlement à $\mathcal{P}_+\mathcal{H} + \mathcal{H}\mathcal{S}_+$. Comme W laisse stables $\mathcal{P}_+$ et $\mathcal{S}_+$, π est un morphisme de W-modules pour l'action par multiplication à gauche, ou à droite de W, *i.e.* $\pi(wh) = w\pi(h)$ et $\pi(hw) = \pi(h)w$, $h \in \mathcal{H}$, $w \in W$; observons également que $\pi(\sigma(h)) = \sigma(\pi(h))$. Définissons une application bilinéaire $\beta : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}W$ par

$$\forall a, b \in \mathcal{H}, \quad \beta(a,b) = \pi\big(\sigma(a)b\big).$$

Les assertions du lemme suivant résultent de calculs immédiats.

Lemme 2.1. — *On a, pour tous $a, b, h \in \mathcal{H}$ et $w, s \in W$:*

1) $\beta(a,b) = \sigma(\beta(b,a))$;
2) $R(\beta) = \{a \in \mathcal{H} : \forall b \in \mathcal{H},\ \beta(a,b) = 0\} = \{a \in \mathcal{H} : \forall b \in \mathcal{H},\ \beta(b,a) = 0\}$;
3) $\beta(aw, bs) = w^{-1}\beta(a,b)s$ *(on dira que β est σ-linéaire)* ;
4) $\beta(ha, b) = \beta(a, \sigma(h)b)$ *(on dira que β est σ-symétrique)* ;
5) $R(\beta)$ *contient* $\mathcal{H}\mathcal{S}_+$ *et* $\sigma(\mathcal{H}\mathcal{S}_+) = \mathcal{P}_+\mathcal{H}$.

On a $\mathcal{H}_n\mathcal{H}_m \subset \mathcal{H}_{n+m}$ et il découle de PBW que $\mathcal{H}_p \subset \mathcal{P}_+\mathcal{H} + \mathcal{H}\mathcal{S}_+$ lorsque $p \neq 0$; on en déduit que, pour tous $m \neq n$,

$$\beta(\mathcal{H}_m, \mathcal{H}_n) = \pi\big(\sigma(\mathcal{H}_m)\mathcal{H}_n\big) = \pi(\mathcal{H}_{-m}\mathcal{H}_n) \subset \pi(\mathcal{H}_{n-m}) = 0.$$

Comme $\mathcal{H} = (\mathcal{P} \otimes \mathbb{C}W) \bigoplus \mathcal{H}\mathcal{S}_+$, on peut considérer β comme une application bilinéaire σ-symétrique sur $\mathcal{H}/\mathcal{H}\mathcal{S}_+ \simeq \mathcal{P} \otimes \mathbb{C}W$ en posant :

$$\forall p, q \in \mathcal{P}, \ \ \forall w, s \in \mathbb{C}W, \quad \beta(p \otimes w, q \otimes s) = \sigma(w)\beta(p, q)s.$$

On remarquera que $\beta(\mathcal{P}_n \otimes \mathbb{C}W, \mathcal{P}_m \otimes \mathbb{C}W) = 0$ si $n \neq m$. Donc β est déterminée par ses restrictions aux espaces vectoriels de dimension finie $\mathcal{P}_n \otimes \mathbb{C}W$.

Équivalence de catégories. — Soit $\tau : W \to \{\pm 1\}$ une représentation de dimension 1. Définissons une fonction de multiplicité $k^\tau : R \to \mathbb{C}$ par

$$k^\tau(\alpha) = \tau(r_\alpha)k_\alpha.$$

Il résulte des relations 1), 2), 3) entre les générateurs de $\mathcal{H}(k)$ (*cf.* §1) que l'on peut définir un morphisme d'algèbre $\epsilon_\tau : \mathcal{H}(k) \to \mathcal{H}(k^\tau)$ en posant

$$\epsilon_\tau(x) = x, \quad \epsilon_\tau\big(T_y(k)\big) = T_y(k^\tau), \quad \epsilon_\tau(w) = \tau(w)w$$

pour tous $x \in \mathfrak{a}^*$, $y \in \mathfrak{a}$, $w \in W$. Il est clair que ϵ_τ est un isomorphisme dont on notera encore ϵ_τ l'inverse. Si M est un $\mathcal{H}(k^\tau)$-module, on peut alors définir un $\mathcal{H}(k)$-module M^{ϵ_τ} en munissant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de l'action

$$h \cdot v = \epsilon_\tau(h)v \ \text{ pour tous } h \in \mathcal{H}(k), \, v \in M.$$

On en déduit ainsi une équivalence de catégories, $M \mapsto M^{\epsilon_\tau}$, entre $\mathcal{H}(k^\tau)$-mod et $\mathcal{H}(k)$-mod (on a $\mathrm{Hom}(M^{\epsilon_\tau}, N^{\epsilon_\tau}) = \mathrm{Hom}(M, N)$).

Remarque 2.2. — Si V est un W-module on notera également V^{ϵ_τ} le W-module obtenu en munissant le $\mathbb{C}$-espace vectoriel V de l'action $w \cdot v = \epsilon_\tau(w)v$. Le W-module V^{ϵ_τ} est alors isomorphe à $V \otimes_{\mathbb{C}W} V_\tau$, où V_τ désigne un W-module irréductible de type τ ; en particulier si V_χ est un W-module irréductible de type χ, alors $V_\chi^{\epsilon_\tau}$ est un W-module irréductible de type $\chi \otimes \tau$.

On note sgn le caractère $w \mapsto \det(w)$ de $W \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{a})$.

La construction précédente s'applique à $\tau = \mathrm{sgn}$ et (pour simplifier) on posera $\varepsilon = \epsilon_{\mathrm{sgn}}$. Le foncteur $M \mapsto M^\varepsilon$ établit donc une équivalence de catégories entre $\mathcal{H}(-k)$-mod et $\mathcal{H}(k)$-mod.

3. Modules de Verma sur $\mathcal{H}$

On note $W^\wedge$ l'ensemble des caractères irréductibles de W. Tout $\mathcal{H}$-module M étant un W-module, il se décompose en $M = \bigoplus M[\chi]$ où $M[\chi]$ est la composante isotypique de type χ de M. Soient $\chi \in W^\wedge$ et V_χ un W-module irréductible de type χ. Rappelons la définition d'un module de Verma de plus bas poids χ

introduite dans [5, (25)]. On munit V_χ d'une structure de $\mathcal{S}\otimes\mathbb{C}W$-module en posant $\mathcal{S}_+\cdot V_\chi = 0$.

Définition 3.1. — On appelle *module de Verma de plus bas poids* χ, noté $M(\chi)=M(\chi,k)$, le module induit par V_χ de $\mathcal{S}\otimes\mathbb{C}W$ à $\mathcal{H}$:

$$M(\chi)=\mathrm{ind}_{\mathcal{S}\otimes\mathbb{C}W}^{\mathcal{H}}(V_\chi)=\mathcal{H}\otimes_{\mathcal{S}\otimes\mathbb{C}W}V_\chi.$$

Il résulte de $\mathcal{H}=\mathcal{P}\otimes\mathbb{C}W\oplus\mathcal{H}\mathcal{S}_+$ que $M(\chi)$ s'identifie à $\mathcal{P}\otimes V_\chi$ comme $\mathcal{P}$-module. Les propriétés énoncées dans la proposition qui suit découlent de [5, 2.5]. Rappelons que $\mathcal{P}$ possède une structure naturelle de $\mathcal{H}$-module.

Proposition 3.2. — (a) *Si* $\chi=\mathrm{triv}$ *est le caractère trivial,* $M(\mathrm{triv})$ *s'identifie au* $\mathcal{H}$*-module* $\mathcal{P}$.

(b) *Si* $v_\chi\in V_\chi\smallsetminus\{0\}$ *et* I_χ *est l'annulateur de* v_χ *dans* $\mathbb{C}W$, *on a*

$$M(\chi)\simeq\mathcal{H}\cdot v_\chi\simeq\mathcal{H}/(\mathcal{H}\mathcal{S}_++\mathcal{H}I_\chi).$$

(c) *Tout sous-module* M *de* $M(\chi)$ *est gradué :* $M=\bigoplus_{n\geq 0}M_n$ *où* $M_n=(\mathcal{P}_n\otimes V_\chi)\cap M$ *(cf.* [5, prop. 2.27]*).*

(d) *Un sous-module* M *de* $M(\chi)$ *est propre si et seulement si* $M\cap V_\chi=0$.

(e) $M(\chi)$ *admet un unique sous-module maximal, et donc un unique quotient simple que l'on note* $L(\chi)=L(\chi,k)$.

(f) *Soit* V *un* $\mathcal{H}$*-module engendré par* v *tel que* $\mathbb{C}W\cdot v\simeq V_\chi$ *et* $\mathcal{S}_+\cdot v=0$. *Il existe alors un morphisme surjectif de* $\mathcal{H}$*-modules* $M(\chi)\to V$ *; si* V *est irréductible on a* $V\simeq L(\chi)$. □

Signalons le corollaire :

Corollaire 3.3. — *Soit* τ *une représentation de dimension* 1 *de* W. *Il existe un isomorphisme naturel de* $\mathcal{H}(k)$*-modules*

$$M(\chi,k)\simeq M(\chi\otimes\tau,k^\tau)^{\epsilon_\tau}.$$

Démonstration. — On applique le (b) la proposition précédente, dont on adopte les notations. Remarquons que si J est un idéal à gauche de $\mathcal{H}(k^\tau)$ et $M=\mathcal{H}(k^\tau)/J$, alors M^{ϵ_τ} est isomorphe au $\mathcal{H}(k)$-module $\mathcal{H}(k)/\epsilon_\tau(J)$. Le corollaire découle de cette remarque appliquée à

$$J=\mathcal{H}(k^\tau)\mathcal{S}_+(k^\tau)+\mathcal{H}(k^\tau)I_{\chi\otimes\tau}.$$

En effet, fixons l'annulateur $I_{\chi\otimes\tau}$ d'un élément non nul de $V_{\chi\otimes\tau}$; alors, $I_\chi=\epsilon_\tau(I_{\chi\otimes\tau})$ est l'annulateur de ce même élément dans $V_\chi=V_{\chi\otimes\tau}^{\epsilon_\tau}$. Donc

$$\epsilon_\tau(J)=\mathcal{H}(k)\mathcal{S}_+(k)+\mathcal{H}(k)I_\chi,$$

d'où le résultat voulu. □

Propriétés de $L(\chi)$. — Comme il est remarqué en [5, 2.6], on peut munir $M(\chi)$ d'une forme analogue à la forme de Shapovalov. Nous donnons ci-dessous une manière de construire une telle forme, ce qui nous servira au §5.

Définissons tout d'abord une forme bilinéaire sur $\mathcal{H}$ de la façon suivante. On fixe $0 \neq v_\chi \in V_\chi$ et une forme bilinéaire symétrique non dégénérée W-invariante $(\ |\ )$ sur V_χ (on peut la prendre symétrique puisque $V_\chi \simeq V_\chi^*$ comme W-module). On a donc $(w \cdot u \mid v) = (u \mid \sigma(w) \cdot v)$ pour tous $u, v \in V_\chi$ et $w \in \mathbb{C}W$. On peut alors définir une forme bilinéaire sur $\mathcal{H}$ en posant :

$$(a \mid b)_\chi = \bigl(v_\chi \mid \beta(a,b) \cdot v_\chi\bigr).$$

Remarquons que $(\ |\ )_\chi$ est non nulle (sinon $(v_\chi \mid V_\chi) = 0$). On déduit facilement des propriétés de β que $(\ |\ )_\chi$ est symétrique et que son radical contient $\mathcal{H}\mathcal{S}_+ + \mathcal{H}I_\chi$.

Comme $M(\chi) = \mathcal{H} \cdot v_\chi \simeq \mathcal{H}/(\mathcal{H}\mathcal{S}_+ + \mathcal{H}I_\chi)$, la forme $(\ |\ )_\chi$ induit une forme bilinéaire symétrique non nulle sur $M(\chi)$ par la formule

$$(a \cdot v_\chi, b \cdot v_\chi) = (a \mid b)_\chi = \bigl(v_\chi \mid \beta(a,b) \cdot v_\chi\bigr)$$

pour tous $a, b \in \mathcal{H}$. Cette forme dépend des choix de $(\ |\ )$ et v_χ ; nous allons voir que son radical $R(\chi)$ n'en dépend pas.

Remarques 3.4. — 1) En utilisant la σ-symétrie de β, on montre celle de $(\ ,\ )$, qui est en particulier W-invariante ; il en résulte que le radical $R(\chi)$ est un sous-$\mathcal{H}$-module de $M(\chi)$, différent de $M(\chi)$.

2) Soit $M(\chi) = \bigoplus_{\tau \in W^\wedge} M(\chi)[\tau]$ la décomposition en composantes isotypiques du W-module $M(\chi)$. On montre facilement que $(M(\chi)[\tau], M(\chi)[\psi]) = 0$ si $\tau \neq \psi$.

3) En identifiant $M(\chi)$ et $\mathcal{P} \otimes V_\chi$, on déduit facilement de

$$\beta(\mathcal{P}_n \otimes V_\chi, \mathcal{P}_m \otimes V_\chi) = 0 \quad \text{pour } n \neq m$$

que $(M_n(\chi), M_m(\chi)) = 0$ si $n \neq m$. Ou encore, du fait que $\beta(\mathcal{H}_n, \mathcal{H}_m) = 0$ si $n \neq m$, il découle que $(\mathcal{H}_n \cdot v_\chi, \mathcal{H}_m \cdot v_\chi) = 0$ si $n \neq m$. En observant que chaque $M_n(\chi)$ est un W-module, le 2) implique alors

$$\bigl(M_n(\chi)[\tau], M_m(\chi)[\psi]\bigr) = 0 \quad \text{si } n \neq m \text{ ou } \tau \neq \psi.$$

Proposition 3.5. — 1) *Le radical $R(\chi)$ est l'unique sous-module maximal de $M(\chi)$. Par conséquent $M(\chi)/R(\chi)$ est l'unique quotient simple $L(\chi)$ de $M(\chi)$.*

2) *Il existe un isomorphisme naturel $L(\chi, k) \simeq L(\chi \otimes \tau, k^\tau)^{\epsilon_\tau}$.*

Démonstration. — 1) Soit M un sous-$\mathcal{H}$-module propre de $M(\chi)$. D'après la proposition 3.2, M est gradué et vérifie $M \cap V_\chi = 0$, on a donc $M = \bigoplus_{n>0} M_n$. Par la remarque 3.4, 3) et le fait que $v_\chi \in M_0(\chi)$ il vient $(v_\chi, M) = 0$. D'où, par σ-symétrie, $(\mathcal{H} \cdot v_\chi, M) = (v_\chi, M) = 0$. Donc M est inclus dans $R(\chi)$.

2) Par l'équivalence de catégories entre $\mathcal{H}(k)$-mod et $\mathcal{H}(k^\tau)$-mod, le $\mathcal{H}(k)$-module $M(\chi \otimes \tau, k^\tau)^{\epsilon_\tau}$ admet un unique quotient simple $L(\chi \otimes \tau, k^\tau)^{\epsilon_\tau}$. Mais

$M(\chi, k) \simeq M(\chi \otimes \tau, k^\tau)^{\epsilon_\tau}$, par conséquent les $\mathcal{H}(k)$-modules $L(\chi \otimes \tau, k^\tau)^{\epsilon_\tau}$ et $L(\chi, k)$ sont isomorphes. □

REMARQUE 3.6. — Lorsque χ est le caractère trivial $R(\chi)$ coïncide avec le radical $R(k)$ de la forme $(\ ,\ )_k$ définie dans [4]. Ceci résulte des propositions 3.5 et 3.2, (e), et du fait que $\mathcal{P}/R(k) \simeq L(\mathrm{triv}, k)$ (*cf.* [5, 2.6]). Si τ est une représentation de dimension 1 de W on a un isomorphisme $L(\tau, k) \simeq L(\mathrm{triv}, k^\tau)^{\epsilon_\tau}$; en particulier, $L(\mathrm{sgn}, k) \simeq L(\mathrm{triv}, -k)^\varepsilon$

4. $\mathcal{H}$-modules irréductibles de dimension finie

Le but de ce paragraphe est de montrer que tout $\mathcal{H}$-module irréductible de dimension finie est isomorphe à un $L(\chi)$ pour un $\chi \in W^\wedge$. Pour ce faire, on va utiliser une copie de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ contenue dans l'algèbre $\mathcal{H}^W$ des W-invariants. Soit $\{z_1, \ldots, z_\ell\}$ une base orthonormée de $\mathfrak{a}_\mathbb{R}^*$ et $e_j = B(z_j)$, $1 \le j \le \ell$. Posons

$$E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} {z_i}^2, \quad F = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell} T_{e_i}^2, \quad H = [E, F], \quad \mathtt{E}(k) = \sum_{i=1}^{\ell} z_i T_{e_i}.$$

D'après un calcul fait en [7, th. 3.3], (E, F, H) est un $\mathfrak{sl}(2)$-triplet d'éléments de $\mathcal{H}^W$ et on a $H = \mathtt{E}(k) + g_k$ avec $g_k = \frac{1}{2}\ell + \sum_{\alpha \in R^+} k_\alpha r_\alpha$ (qui est un élément central de $\mathbb{C}W$).

THÉORÈME 4.1. — *Soit V un $\mathcal{H}$-module irréductible de dimension finie. Il existe un $\chi \in W^\wedge$ tel que $V \simeq L(\chi)$.*

Démonstration. — Décomposons le W-module V en somme de composantes isotypiques : $V = \sum_{\chi \in W^\wedge} V[\chi]$. Remarquons que $P \cdot V[\chi] \subset V[\chi]$ si $P \in \mathcal{H}^W$; en particulier, chaque $V[\chi]$ est un sous-$\mathfrak{sl}(2)$-module de dimension finie. Soit u de poids minimal $m \in -\mathbb{N}$ dans le $\mathfrak{sl}(2)$-module V. Écrivons $u = \sum_\chi u_\chi$ avec $u_\chi \in V[\chi]$. Comme H laisse stable $V[\chi]$ pour tout χ, chaque u_χ non nul est aussi un vecteur de poids minimal m dans V. On peut donc supposer que $u \in V[\chi]$ pour un $\chi \in W^\wedge$. De plus, pour tout $i \in \{1, \ldots, \ell\}$ on a $[H, T_{e_i}] = -T_{e_i}$, donc

$$HT_{e_i} \cdot u = (m-1)T_{e_i} \cdot u.$$

Par minimalité de m il vient $T_{e_i} \cdot u = 0$, donc $\mathcal{S}_+ \cdot u = 0$.

Posons $\mathbb{C}W \cdot u = \bigoplus_j V_j$, $V_j \simeq V_\chi$. Soit $a = \sum_w a_w w \in \mathbb{C}W$ tel que $v = a \cdot u \in V_j \smallsetminus \{0\}$. Puisque $T_y w = w T_{w^{-1}(y)}$ pour tout $y \in \mathfrak{a}$, il vient

$$T_y \cdot v = \textstyle\sum_w a_w w T_{w^{-1}(y)} \cdot u = 0.$$

Par conséquent $V = \mathcal{H} \cdot v$ avec $\mathbb{C}W \cdot v \simeq V_\chi$ et $\mathcal{S}_+ \cdot v = 0$; le (f) de la proposition 3.2 donne $V \simeq L(\chi)$. □

Rappelons que le module $M(\chi) = \mathcal{P} \otimes V_\chi$ est gradué par les

$$M_n(\chi) = \mathcal{P}_n \otimes V_\chi = \mathcal{H}_n \cdot v_\chi, \quad n \geq 0.$$

En posant $R_n(\chi) = R(\chi) \cap M_n(\chi)$ on en déduit la graduation

$$R(\chi) = \oplus_{n\geq 0} R_n(\chi)$$

du radical de la forme $(\,,)$ introduite au §3. Le quotient $L(\chi) = M(\chi)/R(\chi)$ est ainsi naturellement gradué :

$$L(\chi) = \oplus_{n\geq 0} L_n(\chi) \quad \text{avec} \ \ L_n(\chi) = M_n(\chi)/R_n(\chi).$$

Donc $L(\chi)$ est de dimension finie si, et seulement si, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $L_n(\chi) = 0$ pour $n \geq n_0$. Cette condition équivaut à $M_n(\chi) = R_n(\chi)$, ou encore à « la forme $(\,,)$ est identiquement nulle sur $M_n(\chi)$ ».

5. Étude des $L(\chi)$ de dimension finie

Nous allons donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur k et χ, *cf.* remarque 5.5, pour que $L(\chi)$ soit de dimension finie et étudier plus précisément la structure d'un tel $L(\chi)$. On conserve les notations des sections 3 et 4.

Proposition 5.1. — *Soit $\chi \in W^\wedge$. Si $L_n(\chi) = 0$, alors $L_{n+1}(\chi) = 0$.*

Démonstration. — Il s'agit de montrer que si $R_n(\chi) = M_n(\chi)$, alors $R_{n+1}(\chi) = M_{n+1}(\chi)$. Soient $f, g \in \mathcal{P}_{n+1}$ et $a, b \in \mathbb{C}W$; on doit montrer que

$$\big(f \otimes (a \cdot v_\chi), g \otimes (b \cdot v_\chi)\big) = 0.$$

Il suffit de le faire lorsque g est un monôme de la forme $x_1 x_2 \cdots x_{n+1}$, $x_j \in \mathfrak{a}^*$; on écrit $f = \sum_{x\in\mathfrak{a}^*} x f_x$ avec $f_x \in \mathcal{P}_n$.

Soient $y \in \mathfrak{a}$ et $w \in W$. De

$$[T_y, w] = w(T_{w^{-1}(y)} - T_y) = wT_{w^{-1}(y)-y}$$

on tire que $[T_y, w] \in W\mathcal{S}_+$. En écrivant

$$[T_y, g] = \sum_j x_1 \cdots [T_y, x_j] \cdots x_{n+1}$$

et en utilisant la relation 1) du §1, on montre que $[T_y, g] \in \mathcal{P}_n \mathbb{C}W$. Alors,

$$T_y g w = g w T_y + [T_y, gw] = gwT_y + [T_y, g]w + g[T_y, w]$$

et $\mathcal{S}_+ \cdot v_\chi = 0$ impliquent $T_y g w \cdot v_\chi = [T_y, g] w \cdot v_\chi \in M_n(\chi) = \mathcal{P}_n \otimes V_\chi$.

Calculons maintenant $(f \otimes (a \cdot v_\chi), g \otimes (b \cdot v_\chi))$. En utilisant la σ-symétrie de $(\, , \,)$ et la définition de σ il vient

$$\begin{aligned}\big(f \otimes (a \cdot v_\chi), g \otimes (b \cdot v_\chi)\big) &= \sum_{x \in \mathfrak{a}^*} \big(f_x \otimes (a \cdot v_\chi), \sigma(x) g \otimes (b \cdot v_\chi)\big) \\ &= \sum_{x \in \mathfrak{a}^*} \big(f_x \otimes (a \cdot v_\chi), T_{B(x)} g \otimes (b \cdot v_\chi)\big).\end{aligned}$$

Il résulte du paragraphe précédent que pour tout $x \in \mathfrak{a}$:

$$\big(f_x \otimes (a \cdot v_\chi), T_{B(x)} g \otimes (b \cdot v_\chi)\big) \in \big(M_n(\chi), M_n(\chi)\big) = 0 \quad \text{(par hypothèse).}$$

Donc $(f \otimes (a \cdot v_\chi), g \otimes (b \cdot v_\chi)) = 0$. □

On en déduit :

Corollaire 5.2. — *Le module $L(\chi)$ est de dimension finie si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $L_n(\chi) = 0$.* □

Pour obtenir un critère plus précis assurant la finitude de $\dim L(\chi)$, nous allons utiliser le $\mathfrak{sl}(2)$-triplet (E, F, H) défini à la section précédente. On fera appel au résultat suivant [7, prop. 3.4] :

Lemme 5.3. — *Pour tout $p \in \mathcal{P}_n$, on a*

$$\sigma(p) = \frac{(-1)^n}{n!} \operatorname{ad}(F)^n(p) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_j F^j p F^{n-j}$$

où les c_j sont des entiers ne dépendant que de n. □

Théorème 5.4. — *Soit $0 \neq v_\chi \in V_\chi$. Le module $L(\chi)$ est de dimension finie si, et seulement si, il existe $m \geq 0$ tel que $E^m \cdot v_\chi \in R_{2m}(\chi)$.*

Démonstration. — Il est clair que la condition est nécessaire, montrons qu'elle est suffisante. Soit $n \in \mathbb{N}$. Tout élément de $\mathcal{H}_n \cdot v_\chi$ s'écrit $sp \cdot v_\chi$ avec $p \in \mathcal{P}_n$ et $s \in \mathbb{C}W$. Soit $r \in \mathcal{H}_n$ et calculons $(sp \cdot v_\chi, r \cdot v_\chi) = (p \cdot v_\chi, \sigma(s) r \cdot v_\chi)$. Posons $t = \sigma(s) r \in \mathcal{H}_n$. On a

$$(p \cdot v_\chi, t \cdot v_\chi) = (v_\chi \mid \beta(p, t) \cdot v_\chi)$$

et d'après le lemme précédent

$$\beta(p, t) = \pi\big(\sigma(p) t\big) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j c_j \pi(F^j p F^{n-j} t).$$

Or $F^{n-j} t \in \mathcal{H}_{-2(n-j)+n} = \mathcal{H}_{-(n-2j)} \subset \mathcal{HS}_+$ pour $n - 2j > 0$. Donc

$$\pi(F^j p F^{n-j} t) \in \pi(\mathcal{HS}_+) = 0 \quad \text{pour} \quad n > 2j.$$

Compte tenu de $\sigma(E)=-F$, on obtient (où [ ] désigne la partie entière) :

$$\beta(p,t)=\sum_{j=[\frac12 n]}^{n} c_j\pi\bigl(\sigma(E^j)pF^{n-j}t\bigr)=\sum_{j=[\frac12 n]}^{n} c_j\beta(E^j,pF^{n-j}t).$$

Par conséquent :

$$(sp\cdot v_\chi, r\cdot v_\chi)=\sum_{j=[\frac12 n]}^{n} c_j\bigl(E^j\cdot v_\chi, pF^{n-j}\sigma(s)r\cdot v_\chi\bigr). \tag{5.1}$$

Supposons $E^m\cdot v_\chi\in R_{2m}(\chi)$. Pour $j\ge m$ on a donc

$$\bigl(E^j\cdot v_\chi, M_{2j}(\chi)\bigr)=\bigl(E^m\cdot v_\chi,\sigma(E^{j-m})M_{2j}(\chi)\bigr)=0.$$

L'équation (5.1) fournit alors $(sp\cdot v_\chi, r\cdot v_\chi)=0$ pour tout $n\ge 2m$, c'est-à-dire $M_n(\chi)=R_n(\chi)$ pour $n\ge 2m$, ce qui montre que $L(\chi)$ est de dimension finie. □

Remarque 5.5. — Puisque $E\in\mathcal{H}^W$, on a $E^m\cdot v_\chi\in M(\chi)[\chi]$. La remarque 3.4, 3) permet de préciser encore la condition obtenue dans le théorème 5.4 : le module $L(\chi)$ est de dimension finie si, et seulement si,

$$\text{il existe } m\ge 0 \text{ tel que } \bigl(E^m\cdot v_\chi, M_{2m}(\chi)[\chi]\bigr)=0.$$

Observons de plus que $\dim M_{2m}(\chi)[\chi]<\infty$ et que si $P\in M_{2m}(\chi)[\chi]$, $(E^m\cdot v_\chi, P)$ est un polynôme en les k_α, $\alpha\in R^+$ (c'est en fait un polynôme en les k_i définis ci-dessous). Donc, si $\{P_1,\dots,P_s\}$ est une base de $M_{2m}(\chi)[\chi]$, la condition $E^m\cdot v_\chi\in R_{2m}(\chi)$ équivaut à l'annulation des s polynômes $(E^m\cdot v_\chi, P_j)$, $1\le j\le s$.

Le cas $\chi=$ triv. — On a rappelé, *cf.* remarque 3.6, que $M(\mathrm{triv},k)=\mathcal{P}$ et $R(\mathrm{triv})=R(k)$. Grâce à la remarque 5.5, la condition du théorème 5.4 se traduit par $(E^m,\mathcal{P}^W_{2m})_k=0$, soit $F^m(\mathcal{P}^W_{2m})=0$ pour un $m\in\mathbb{N}$. Rappelons que $\mathcal{P}^W=\mathbb{C}[Q_1,\dots,Q_\ell]$ où les Q_j sont des polynômes homogènes de degrés $d_1\le d_2\le\cdots\le d_\ell$ (appelés degrés primitifs de W). La nullité de $F^m(\mathcal{P}^W_{2m})$ est alors équivalente à $F^m(Q_1^{a_1}\cdots Q_\ell^{a_\ell})=0$ pour tout $(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathbb{N}^\ell$ tel que $\sum_j a_jd_j=2m$.

Structure des $L(\chi)$ de dimension finie. — Nous allons maintenant donner quelques résultats sur la forme du module $L(\chi)$ quand il est de dimension finie. La structure de $\mathfrak{sl}(2)$-module de $L(\chi)$ lui donne une certaine symétrie, du même type que celle observée en rang 1, *cf.* [3, th. 9.2]. Soient $R_1,\dots,R_s$ les W-orbites dans R ; on peut alors écrire R^+ comme réunion disjointe $\bigsqcup_{i=1}^s R_i^+$. On pose $k_\alpha=k_i$ pour $\alpha\in R_i^+$. Lorsque R est irréductible on a $s=2$ et l'on prend pour R_1^+, resp. R_2^+, l'ensemble des racines courtes, resp. longues (éventuellement vide), dans R^+.

L'élément $\sum_{\alpha\in R^+} k_\alpha r_\alpha$ étant central dans $\mathbb{C}W$, il opère par multiplication par un scalaire sur tout W-module irréductible V. Si V est de type τ, ce scalaire est

$$a_\tau(k) = \sum_{i=1}^{s} k_i |R_i^+| \frac{\tau(r_i)}{\tau(1)},$$

où $\tau(r_i)$ désigne la valeur commune des $\tau(r_\alpha)$ pour α dans R_i^+.

Proposition 5.6. — 1) *Posons*

$$b_\chi(k) = \frac{1}{2}\ell + a_\chi(k).$$

L'élément H opère sur $M_p(\chi)$ par le scalaire $p + b_\chi(k)$.

2) *Si $L(\chi)$ est de dimension finie, il existe un $m \in \mathbb{N}$ tel que :*

(i) $a_\chi(k) = -(m + \frac{1}{2}\ell) < 0$;

(ii) $L(\chi) = \oplus_{i=0}^{2m} L_i(\chi)$ *et l'application $x \mapsto E^m \cdot x$ est un isomorphisme de W-modules de $L_0(\chi) \simeq V_\chi$ sur $L_{2m}(\chi)$; si $x \in V_\chi \smallsetminus \{0\}$ on a*

$$m = \min\big\{p \in \mathbb{N} : E^{p+1} \cdot x \in R_{2p+2}(\chi)\big\}.$$

Démonstration. — 1) On rappelle, *cf.* §4, que $H = \mathtt{E}(k) + g_k$ où l'on a posé

$$g_k = \frac{1}{2}\ell + \sum_{\alpha\in R^+} k_\alpha r_\alpha.$$

Alors, par [5, prop. 2.26], $\mathtt{E}(k)$ opère sur $M_p(\chi)[\tau]$ par multiplication par le scalaire $p + a_\chi(k) - a_\tau(k)$. Donc H opère sur $\oplus_{\tau\in W^\wedge} M_p(\chi)[\tau] = M_p(\chi)$ par multiplication par $p + \frac{1}{2}\ell + a_\chi(k) = p + b_\chi(k)$.

2) En passant au quotient modulo $R_p(\chi)$, on obtient que pour tous $p \geq 0$ et $x \in L_p(\chi)$, $H \cdot x = (p + b_\chi(k))x$. Les éléments de poids minimal pour H sont donc dans $L_0(\chi) = V_\chi$. De plus, comme $[H,E] = 2E$ et $[H,F] = -2F$, on a

$$H \cdot (E \cdot x) = \big(p + 2 + b_\chi(k)\big) E \cdot x \quad \text{et} \quad H \cdot (F \cdot x) = \big(p - 2 + b_\chi(k)\big) F \cdot x.$$

Supposons maintenant $L(\chi)$ de dimension finie. On a donc

$$L(\chi) = \oplus_{i=0}^{p} L_i(\chi),$$

avec $L_j(\chi) \neq 0$, $1 \leq j \leq p$, *cf.* prop. 5.1. Alors si $0 \neq x \in L_0(\chi)$, x est vecteur propre de plus bas poids $b_\chi(k)$ pour l'action de $\mathfrak{sl}(2)$ et $U(\mathfrak{sl}(2)) \cdot x$ est un $\mathfrak{sl}(2)$-module irréductible de dimension finie. Il existe donc $m \in \mathbb{N}$ tel que $b_\chi(k) = -m$. D'où (i).

(ii) De $U(\mathfrak{sl}(2)) \cdot x = \oplus_{i=0}^{m} \mathbb{C}E^i \cdot x$ avec $0 \neq E^m \cdot x \in L_{2m}(\chi)$ vecteur de plus haut poids (égal à m) on tire $2m \leq p$. Soit $z \in L_p(\chi)$. Comme $E \cdot z = 0$ et $H \cdot z = (p-m)z$, le $\mathfrak{sl}(2)$-module $U(\mathfrak{sl}(2)) \cdot z$ est simple de plus haut poids $p-m$. Il en découle que $0 \neq F^{p-m} \cdot z \in L_{-2(p-m)+m}(\chi)$, donc $-2(p-m) + p = 2m - p \geq 0$ et $p = 2m$.

Comme $E^m \in \mathcal{H}^W$, l'application (non nulle) $x \mapsto E^m \cdot x$ de $L_0(\chi) \simeq V_\chi$ vers $L_{2m}(\chi)$ est injective. Il reste à montrer que son image est $L_{2m}(\chi)$. Soit $y \in L_{2m}(\chi)$; c'est un vecteur de plus haut poids pour $\mathfrak{sl}(2)$. Par conséquent $E^m \cdot (F^m \cdot y) = y$, à une constante près, avec $F^m \cdot y \in L_0(\chi)$. La dernière assertion découle immédiatement de la précédente. □

Remarques 5.7. — 1) Supposons $L(\chi, k)$ de dimension finie et soit m comme dans la proposition 5.6. En raisonnant comme dans la preuve du 2), (ii) de la cette proposition, on peut montrer que l'application $v \mapsto E^{m-1} \cdot v$ est un isomorphisme de W-modules de $L_1(\chi) = M_1(\chi)/R_1(\chi)$ sur $L_{2m-1}(\chi)$.

2) Si $\chi(r_i) = 0$ pour tout i, il résulte de la prop. 5.6, (i) que $L(\chi, k)$ est de dimension infinie. Cette condition est par exemple vérifiée lorsque $\chi = \chi \otimes \mathrm{sgn}$.

6. Exemples

On suppose, dans toute cette section, que R et la représentation $W \to \mathrm{GL}(\mathfrak{a})$ sont irréductibles. On a alors $\mathcal{P}^W = \mathbb{C}[Q_1, \dots, Q_\ell]$ avec $d_1 = 2 < d_3 \leq \cdots \leq d_\ell$ et l'on peut prendre $Q_1 = E$.

On rappelle que la multiplicité k est dite *singulière* si $R(k) \neq 0$. D'après [4], pour k constante, cela équivaut à $k = j/d_i - p$ avec $1 \leq i \leq \ell$, $1 \leq j \leq d_i - 1$ et $p \in \mathbb{N}^*$.

On dira que k est *très singulière* si $L(\mathrm{triv}, k)$ est de dimension finie. (Rappelons que c'est équivalent à l'existence d'un entier p tel que $F^p(\mathcal{P}^W_{2p}) = 0$.)

Une multiplicité très singulière est évidemment singulière et l'on a vu que, si τ est une représentation de dimension 1, cela équivaut à $\dim L(\tau, k^\tau) < \infty$ (*cf.* remarque 3.6). Le but de cette section est de donner des exemples de multiplicités très singulières pour certains systèmes de racines.

On pose $\hbar = b_{\mathrm{triv}}(k) = H(1)$, donc

$$\hbar = -F(E) = k_1|R_1^+| + k_2|R_2^+| + \frac{1}{2}\ell.$$

Observons que $\hbar = k|R^+| + \frac{1}{2}\ell$ lorsque toutes les racines ont la même longueur et que $\hbar = \frac{1}{2}|R^+|(k_1 + k_2) + \frac{1}{2}\ell$ lorsque R est de type B_2, C_2, G_2 ou F_4.

Lemme 6.1. — *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $F^{p+1}(E^{p+1}) = (-1)^{p+1}(p+1)! \prod_{i=0}^{p}(\hbar + i)$.*

Démonstration. — En utilisant le fait que $H(P) = (\hbar + d)P$ pour $P \in \mathcal{P}^W_d$ et la relation

$$[F, E^s] = -HE^{s-1} + E[F, E^{s-1}] \tag{6.1}$$

on montre par récurrence que $F(E^s) = -s(\hbar + s - 1)E^{s-1}$, d'où le lemme. □

On posera, si ces entiers existent,

$$n = \min\{p \in \mathbb{N} : F^{p+1}(E^{p+1}) = 0\},$$
$$m = \min\{s \in \mathbb{N} : F^{s+1}(\mathcal{P}^W_{2s+2}) = 0\}.$$

Donc l'existence de m équivaut à $\dim L(\mathrm{triv}, k) < \infty$ et l'on a alors (*cf.* §5)

$$L(\mathrm{triv}, k) = \oplus_{i=0}^{2m} L_i(\mathrm{triv}, k).$$

(On pourra remarquer que si $L_1(\mathrm{triv}, k) \neq 0$, il est égal au W-module $\mathfrak{a}^*$.) L'existence de n signifie que $\hbar = -n$, *i.e.* $k = -(2n+\ell)/|R|$ lorsque k est constante.

Cas où $m = n$. — Lorsque $m = n$, cela détermine les multiplicités très singulières. Ceci se produit lorsque $\hbar = -n$ et $\mathcal{P}_{2n+2} = \mathbb{C}E^{n+1}$. Donnons des exemples :

- Comme $\mathcal{P}^W_2 = \mathbb{C}E$, on a
$$\hbar = 0 \iff L(\mathrm{triv}, k) = \mathbb{C} \iff R(k) = \mathcal{P}_+.$$
Si $k = k_1 = k_2$, on obtient alors $k = -\ell/|R|$.
- Si aucun degré primitif n'est égal à 4 (c'est par exemple le cas pour les types A_2, F_4, E_6, E_7, E_8 et G_2) on a $\mathcal{P}^W_4 = \mathbb{C}E^2$. Donc
$$\hbar = -1 \iff L(\mathrm{triv}, k) = \oplus_{i=0}^{2} L_i(\mathrm{triv}, k).$$
- De même, quand $d_j \neq 6$ pour tout j (*e.g.* pour le type E_8), on obtient
$$\hbar = -2 \iff L(\mathrm{triv}, k) = \oplus_{i=0}^{4} L_i(\mathrm{triv}, k).$$
- Supposons R de type A_1 et notons $\mathcal{P} = \mathbb{C}[z]$. On a $\mathcal{P}_{2n+2} = \mathbb{C}E^{n+1} = \mathbb{C}z^{2n+2}$, donc il découle des résultats de la section 5 que
$$\hbar = -n \iff L(\mathrm{triv}, k) = \mathbb{C}[z]/(z^{2n+1}).$$
On retrouve ainsi ce qui a été obtenu dans [3] : les multiplicités singulières et très singulières coïncident et correspondent aux multiplicités $k = -\frac{1}{2} - n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Type A_2. — On a $\mathcal{P}^W = \mathbb{C}[E, Q_2]$ où Q_2 est un polynôme homogène W-invariant de degré 3. Rappelons que l'ensemble des valeurs singulières de k est formé des k *non entiers* de la forme $-\frac{1}{3}p$ ou $-\frac{1}{2}p$ avec $p \in \mathbb{N}$.

On a $F(Q_2) \in \mathcal{P}^W_1 = 0$ et un calcul direct montre que $F(Q_2^2) = \lambda E^2$ pour un $\lambda \in \mathbb{C}^*$ indépendant de k. En remplaçant Q_2 par $\sqrt{\lambda}Q_2$, on peut donc écrire $\mathcal{P}^W = \mathbb{C}[E, Q]$ avec $F(Q) = 0$, $F(Q^2) = E^2$. On pose

$$P_{n,r} = P_{n,r}(k) = F^n(E^{n-3r}Q^{2r}).$$

Les $P_{n,r}$ sont des polynômes en k, ou $\hbar$, et l'on a $F^n(\mathcal{P}^W_{2n}) = \sum_{i=0}^{[\frac{1}{3}n]} \mathbb{C}P_{n,i}$. Ainsi la multiplicité k est très singulière si, et seulement si, il existe un entier positif ou nul m tel que $P_{m+1,r} = 0$ pour tout $r = 0, \dots, [\frac{1}{3}(m+1)]$.

On peut montrer le résultat qui suit en utilisant

$$[F,Q](Q^p) = F(Q^{p+1}) - QF(Q^p)$$

et la formule (6.1).

Assertion 6.2. — *Les polynômes (en $\hbar$) $P_{n,r}$ vérifient la formule de récurrence suivante :*

$$\forall\, n,r \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1,r} = r(2r-1)P_{n,r-1} - (n+1-3r)(\hbar+n+3r)P_{n,r}.$$

En outre, $P_{n,r} = 0$ si $n < 3r$. □

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $0 \le r \le [\frac{1}{3}n]$, on définit alors un polynôme (en $\hbar$) de degré $n-r$ par :

$$f_{n,r}(\hbar) = \prod_{j=0}^{n-1}(\hbar+j) \Big/ \prod_{i=0}^{r-1}(\hbar+3i+2).$$

Remarquons que $f_{n,r}(\hbar)$ s'annule pour $\hbar = -j$ avec $j \in \{0,1,3,\ldots,n-1\}$ et $j \not\equiv 2 \pmod 3$. Donc, si $n \not\equiv 2 \pmod 3$ le polynôme

$$f_{n+1,[\frac{1}{3}(n+1)]}(\hbar) = f_{n+1,[\frac{1}{3}n]}(\hbar)$$

possède $-n$ pour racine. Observons également que $f_{n+1,r+1}(\hbar)$ divise $f_{n+1,r}(\hbar)$.

Grâce à la formule de récurrence obtenue dans l'assertion 6.2, on peut alors démontrer :

Assertion 6.3. — 1) *Soit $n,r \in \mathbb{N}$. Alors, si*

$$a_{n,r} = (-1)^{n+r}\frac{n!}{3^r}\prod_{i=1}^{r}(2i-1),$$

on a $P_{n,r} = a_{n,r}f_{n,r}(\hbar)$.

2) *La multiplicité k est très singulière si, et seulement si, $\hbar = -m \in -\mathbb{N}$ avec $m \not\equiv 2 \pmod 3$.* □

Compte tenu de l'assertion précédente, des remarques 5.7, 2) et 3.6 nous pouvons énoncer :

Théorème 6.4. — *Soit R un système de racines de type A_2, $k = k_\alpha$, $\alpha \in R$. Alors $\mathcal{H}(k)$ possède des représentations de dimension finie si, et seulement si, il existe un $m \in \mathbb{N}$ non congru à 2 modulo 3 tel que $3k+1 = \pm m$. De plus,*

$$3k+1 = -m \Leftrightarrow \dim L(\mathrm{triv},k) < \infty \ \textit{et}\ 3k+1 = m \Leftrightarrow \dim L(\mathrm{sgn},k) < \infty. \quad \square$$

Type $\mathsf{B_2}$. — Rappelons que k_1, resp. k_2, désigne la valeur de k sur les racines courtes, resp. longues ; on a donc $\hbar = 2(k_1 + k_2) + 1$. Écrivons $\mathcal{P} = \mathbb{C}[x_1, x_2]$ de sorte que $R^+ = \{x_1, x_2, x_1 \pm x_2\}$ et W soit engendré par $r = r_{x_1 - x_2}$, $s_i = r_{x_i}$, $i = 1, 2$. On a alors $\mathcal{P}^W = \mathbb{C}[E, Q]$ où $Q = x_1^2 x_2^2 \in \mathcal{P}_4^W$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Une base de $\mathcal{P}_{2n+2}^W$ est $\{E^{n+1-2r}Q^r,\ r = 0, \dots, [\frac{1}{2}(n+1)]\}$. On définit des polynômes en $k_1, \hbar$ (*i.e.* k_1, k_2) par

$$P_{n,r} = P_{n,r}(k_1, \hbar) = F^n(E^{n-2r}Q^r).$$

La condition $F^{n+1}(\mathcal{P}_{2n+2}^W) = 0$ est donc équivalente à $P_{n+1,r} = 0$ pour $r = 0, \dots, [\frac{1}{2}(n+1)]$. On obtient aisément le résultat suivant :

Assertion 6.5. — *Les polynômes $P_{n,r}$ vérifient la formule de récurrence*

$$\forall n, r \in \mathbb{N}, \quad P_{n+1,r} = -2r(2k_1 + 2r - 1)P_{n,r-1} - (n + 1 - 2r)(\hbar + n + 2r)P_{n,r}.$$

(*Avec la convention $P_{n,-1} = 0$.*) □

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq r \leq [\frac{1}{2}n]$, on pose :

$$g_{n,r}(k_1, \hbar) = \prod_{i=1}^r (2k_1 + 2i - 1) \prod_{j=0}^{n-1} (\hbar + j) \Big/ \prod_{i=1}^r (\hbar + 2i - 1).$$

Une récurrence et l'assertion 6.5 donnent :

Assertion 6.6. — *Soient $n, r \in \mathbb{N}$. Alors, $P_{n,r} = (-1)^n n!\, g_{n,r}(k_1, \hbar)$.* □

Rappelons que $W^\wedge = \{\mathrm{triv}, \mathrm{sgn}, \mathrm{std}, \chi_1, \chi_2\}$, où std est la représentation standard $W \hookrightarrow \mathrm{GL}(\mathfrak{a})$, χ_1, χ_2 sont de dimension 1 données par

$$\chi_1(r) = 1, \quad \chi_1(s_1) = \chi_1(s_2) = -1, \quad \chi_2 = \chi_1 \otimes \mathrm{sgn}.$$

En utilisant la formule précédente, les remarques 5.7, 2) et 3.6, on obtient le théorème qui suit. Il fournit les conditions nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{H}(k)$ possède des représentations de dimension finie.

Théorème 6.7. — *Soit R un système de racines de type B_2.*

1) *La condition* $\dim L(\mathrm{triv}, k) < \infty$ *équivaut à l'une des deux conditions suivantes :*

(a) $\hbar = -n$ *pour un* $n \in \mathbb{N}$ *pair ;*
(b) $\hbar = -n$ *et* $k_1 = -\frac{1}{2}(2j - 1)$ *avec* $j \in \{1, \dots, \frac{1}{2}(n+1)\}$ *pour* $n \in \mathbb{N}$ *impair.*

2) *Le module $L(\mathrm{std}, k)$ est de dimension infinie.*

3) *Si $\tau \in \{\mathrm{sgn}, \chi_1, \chi_2\}$ on a :*

$$\dim L(\tau, k) < \infty \iff \dim L(\mathrm{triv}, k^\tau) < \infty.$$ □

Type $\mathsf{G_2}$. — Soit e_1, e_2 une base orthonormée de $\mathfrak{a}_{\mathbb{R}}$, de base duale x_1, x_2. On pose

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2, \quad T = \frac{1}{2}(T_{e_1} - iT_{e_2}), \quad \overline{T} = \frac{1}{2}(T_{e_1} + iT_{e_2}).$$

Ainsi $2E = z\bar{z}$ et $F = -2T\overline{T}$. Soit $Q' = z^6 + \bar{z}^6$. Comme W est le groupe diédral d'ordre 12, on a $\hbar = 1 + 3(k_1 + k_2)$, $\mathcal{P}^W = \mathbb{C}[E, Q']$ et (*cf.* [4]) la multiplicité $k = (k_1, k_2)$ est singulière si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'on soit dans l'un des cas suivants :

(i) $k_1 = -\frac{1}{2} - n,\ k_2 \in \mathbb{C}$;
(ii) $k_2 = -\frac{1}{2} - n,\ k_1 \in \mathbb{C}$;
(iii) $3(k_1 + k_2) = -j - 3n$ où $j \in \{1, 2, 4, 5\}$.

Posons $\kappa = k_2 - k_1$; il existe alors une constante λ (non nulle et indépendante de k_1, k_2) telle que $F(\lambda Q') = \kappa E^2$. On pose $Q = \lambda Q'$ et, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \dots, [\frac{1}{3}n]\}$:

$$P_{n,r} = F^n(Q^r E^{n-3r}).$$

Ces polynômes en k_1, k_2 (ou $\kappa, \hbar$) engendrent $F^n(\mathcal{P}^W_{2n})$. On montre par récurrence le résultat suivant.

Assertion 6.8. — *Pour tous $(n, r) \in \mathbb{N}^2$, on a :*

$$P_{n+1,r} = -(n + 1 - 3r)(\hbar + n + 3r)P_{n,r} + r\kappa P_{n,r-1} - \frac{r(r-1)}{9}P_{n,r-2}.$$

(*Avec la convention que $P_{n,r} = 0$ pour $r < 0$ ou $n < 3r$.*) □

On obtient une suite de polynômes (en $\kappa, \hbar$), $\{\Phi_p(\hbar, \kappa)\}_{p \in \mathbb{N}}$, en posant $\Phi_0 = 1$, $\Phi_1 = \kappa$ et pour tout $p > 1$:

$$\Phi_p(\hbar, \kappa) = \kappa\Phi_{p-1}(\hbar, \kappa) + \frac{p-1}{3}(\hbar + 3p - 4)\Phi_{p-2}(\hbar, \kappa).$$

Définissons aussi, pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \dots, [\frac{1}{3}n]\}$, les polynômes :

$$a_{n,r}(\hbar) = \prod_{i=0}^{n-1}(\hbar + i) \Big/ \prod_{j=0}^{r-1}(\hbar + 2 + 3j).$$

On vérifie alors que pour $n \in \mathbb{N}$ et $r \in \{0, \dots, [\frac{1}{3}n]\}$ on a :

$$P_{n,r}(\hbar, \kappa) = (-1)^{n+r}\frac{n!}{3^r}\Phi_r(\hbar, \kappa)a_{n,r}(\hbar).$$

Ainsi l'existence d'un entier $n \in \mathbb{N}$ minimal tel que $F^n(\mathcal{P}^W_{2n}) = 0$ est équivalente à la réalisation de l'une des deux conditions suivantes :

(a) si $n \not\equiv 0 \pmod 3$, alors $\hbar = -(n-1)$;
(b) si $n = 3r$, alors $\phi_r(\kappa) = \Phi_r(\kappa, -(3r-1)) = 0$.

Quelques calculs fournissent la conjecture suivante (vérifiée pour $2q+1 \leq 31$) :

$$\phi_{2q}(\kappa) = \prod_{j=1}^{q} (\kappa^2 - (2j-1)^2), \quad \phi_{2q+1}(\kappa) = \kappa \prod_{j=1}^{q} (\kappa^2 - (2j)^2). \tag{6.2}$$

Supposons que (6.2) soit vérifiée. La multiplicité k est alors très singulière si, et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que :

(a) soit $n \not\equiv 0 \pmod 3$ et $\hbar = -(n-1)$;
(b) soit $n \equiv 0 \pmod 3$ et si $\frac{1}{3}n$ est pair (resp. impair), alors $|\kappa|$ est un entier impair (resp. pair) inférieur à $\frac{1}{3}n$.

Soit α_1, resp. α_2, une racine courte, resp. longue. On a

$$W^\wedge = \{\mathrm{triv}, \mathrm{sgn}, \tau, \mathrm{sgn} \otimes \tau, \mathrm{std}, \mathrm{std} \otimes \tau\},$$

où τ est la representation irréductible de dimension 1 donnée par $\tau(r_{\alpha_1}) = 1$ et $\tau(r_{\alpha_2}) = -1$. En utilisant la caractérisation précédente, les remarques 5.7, 2) et 3.6, on obtient le théorème suivant. Il détermine les multiplicités pour lesquelles $\mathcal{H}(k)$ admet des représentations de dimension finie.

Théorème 6.9. — *Soit R un système de racines de type G_2.*

1) *On suppose* (6.2) *vérifiée. Alors la multiplicité $k = (k_1, k_2)$ est très singulière, i.e.* $\dim L(\mathrm{triv}, k) < \infty$*, si et seulement si, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que*

(a) $k_1 + k_2 = -\frac{1}{3}n$ *si* $n \not\equiv 0 \pmod 3$ *;*
(b) (k_1, k_2) *ou* (k_2, k_1) *est de la forme*

$$\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}n + 2j - 1\Big), -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}n - 2j + 1\Big)\Big), \quad 1 \leq j \leq \frac{1}{6}n,$$

si $n \equiv 0 \pmod 6$ *;*
(c) (k_1, k_2) *ou* (k_2, k_1) *est de la forme*

$$\Big(-\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}n + 2j\Big), -\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{3}n - 2j\Big)\Big), \quad 0 \leq j \leq \frac{1}{6}(n-3),$$

si $n \equiv 3 \pmod 6$.

2) *Si* $\chi \in \{\mathrm{sgn}, \tau, \mathrm{sgn} \otimes \tau\}$*, alors* $\dim L(\chi, k) < \infty$ *si et seulement si la multiplicité k^χ est très singulière.*

3) *Si* $\chi \in \{\mathrm{std}, \tau \otimes \mathrm{std}\}$*, alors* $\dim L(\chi, k) = \infty$. □

BIBLIOGRAPHIE

[1] Berest (Y.), Etingof (P.) & Ginzburg (V.) – *Cherednik algebras and differential operators on quasi-invariants*, Preprint, `arXiv:math.QA/0111005`.

[2] Bourbaki (N.) – *Groupes et algèbres de Lie*, Hermann, Paris, 1968, chap. 4–6.

[3] Cherednik (I.) & Markov (Y.) – *Hankel transform via double Hecke algebra*, Preprint, `arXiv:math.QA/0004116`.

[4] Dunkl (C.F.), de Jeu (M.) & Opdam (E.M.) – *Singular polynomial for finite reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc., t. **346** (1994), pp. 237–256.

[5] Dunkl (C.F.) & Opdam (E.M.) – *Dunkl operators for complex reflection groups*, Preprint, `arXiv:math.RT/018185`.

[6] Etingof (P.) & Ginzburg (V.) – *Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism*, Preprint, `arXiv:math.RT/0011114`.

[7] Heckman (G.J.) – *A remark on the Dunkl differential-difference operators*, in *Harmonic analysis on reductive groups*, Progress in Math., vol. 101, Birkhäuser, 1991.