Bull. Soc. math. France
129 (2), 2001, p. 175–188

UNE CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES EXEMPLES DE LATTÈS DE $\mathbb{P}^k$

PAR FRANÇOIS BERTELOOT & JEAN-JACQUES LOEB

RÉSUMÉ. — Un exemple de Lattès est un endomorphisme holomorphe de l'espace projectif complexe qui se relève en une dilatation de l'espace affine de même dimension au moyen d'un revêtement ramifié sur les fibres duquel un groupe cristallographique agit transitivement. Nous montrons que tout endomorphisme holomorphe d'un espace projectif complexe dont le courant de Green est lisse et strictement positif sur un ouvert non vide est nécessairement un exemple de Lattès.

ABSTRACT (*A geometrical characterization of Lattès examples in* $\mathbb{P}^k$)
A Lattès example is an holomorphic self-map of the complex projective space which may be lift to some dilation of the affine space with same dimension by a ramified cover on which fibers a cristallographic group is acting transitively. We show that every holomorphic self-map of the complex projective space whose Green current is smooth and strictly positive on some non empty open set is a Lattès example.

1. Introduction

Les exemples de Lattès sont des fractions rationnelles induites sur la sphère de Riemann par une isogénie dilatante d'un tore complexe au moyen d'une

Texte reçu le 26 janvier 2000, accepté le 22 mai 2000

FRANÇOIS BERTELOOT, Université P. Sabatier, Toulouse III, Laboratoire É. Picard, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex (France) • *E-mail :* `berteloo@picard.ups-tlse.fr`

JEAN-JACQUES LOEB, Université d'Angers, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, 49045 Angers (France) • *E-mail :* `loeb@tonton.univ-angers.fr`

Classification mathématique par sujets (2000). — 32U40, 32H50.

Mots clefs. — Courant et mesure de Green, Région de Voronoi, Groupe cristallographique.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037-9484/2001/175/$ 5.00

fonction elliptique. Ce sont donc clairement des exemples de fractions rationnelles dont l'ensemble de Julia remplit la sphère de Riemann ; elles sont en fait ergodiques.

De façon équivalente, on considèrera qu'un exemple de Lattès est une fraction rationnelle f faisant commuter un diagramme du type suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{D} & \mathbb{C} \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^1 \end{array}$$

où σ est un revêtement ramifié sur les fibres duquel un groupe cristallographique agit transitivement et D une dilatation affine passant au quotient.

Dans l'exemple construit par S. Lattès [8], D est la multiplication par 2, σ la fonction de Weierstrass et le groupe cristallographique $(\mathbb{Z}+i\mathbb{Z}) \rtimes \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$. On trouvera la classification des exemples de Lattès dans [9]. Signalons aussi que le rôle joué par ces fractions dépasse celui de simples exemples. En effet, si ces fractions s'avéraient être les seules dont l'ensemble de Julia puisse supporter un champ de lignes mesurable invariant, alors la densité des fractions rationnelles hyperboliques serait établie (voir [11]).

Pour les espaces projectifs $\mathbb{P}^k$ de dimension quelconque, nous adopterons la définition précédente, la partie linéaire de la dilatation D étant alors le produit d'une homothétie par une transformation unitaire de $\mathbb{C}^k$. Ce choix nous semble justifié puisque nous montrons dans cet article que, comme pour $\mathbb{P}^1$ (voir [14], [2], [10]), cette définition est satisfaite par tout endomorphisme holomorphe dont le courant de Green est lisse et strictement positif sur un ouvert non vide :

THÉORÈME 1.1. — *Soit $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ un endomorphisme holomorphe de degré q dont le courant de Green T est lisse et strictement positif sur un ouvert non vide de $\mathbb{P}^k$. Il existe alors un groupe cristallographique complexe G, une application affine D de partie linéaire $\sqrt{q}\,U$ (U unitaire) ainsi qu'un revêtement ramifié $\sigma : \mathbb{C}^k \to \mathbb{P}^k$ tels que le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}^k \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k \end{array}$$

et le groupe G agisse transitivement sur les fibres de σ.

Cette caractérisation s'interprète géométriquement par la sphéricité locale des surfaces de niveau de la fonction de Green dans $\mathbb{C}^{k+1}$. Une description détaillée de ces surfaces est donnée dans [2] lorsque $k = 1$.

Cet article est organisé de la façon suivante. Dans la section 2, nous décrivons les notions et résultats utilisés puis exhibons des exemples de Lattès en dimension arbitraire. Dans la section 3, nous établissons une assertion quantitative de transitivité topologique pour un endomorphisme f satisfaisant nos hypothèses ; l'ingrédient essentiel étant un théorème de Fornaess et Sibony concernant l'équirépartition des orbites négatives dans le support de la mesure de Green. Dans la section 4, nous établissons le diagramme ($\sigma \circ D = f \circ \sigma$). L'étude de l'application σ fait l'objet de la section 5. L'existence d'un groupe d'isométries G agissant transitivement sur les fibres de σ est liée au fait que σ remonte le courant de Green de f sur le courant de Kähler standard de $\mathbb{C}^k$. La co-compacité de G est déduite de la transitivité topologique au moyen de la technique des régions de Voronoi. Par le théorème de Bieberbach, G est alors un groupe cristallographique complexe.

2. Rappels et exemples

Nous commençons par un bref rappel des outils et résultats que nous utiliserons. Tout endomorphisme holomorphe f de $\mathbb{P}^k$ est induit par une application polynômiale homogène F non-dégénérée de $\mathbb{C}^{k+1}$. Nous dirons que f est de degré q si F l'est ; les fibres de f sont alors constituées de q^k points en tenant compte des multiplicités :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k \end{array}$$

Hubbard-Papadopol [7] et Fornaess-Sibony [5] ont construit un (1,1)-courant positif fermé sur $\mathbb{P}^k$ dont le support est exactement l'ensemble de Julia de f, c'est-à-dire l'ensemble des points au voisinage desquels la suite des itérés de f n'est pas une famille normale. Ce courant, que nous appellerons *courant de Green de* f et noterons T, est obtenu de la façon suivante.

La fonction de Green G de f est la limite, au sens de la convergence uniforme locale sur $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$, de la suite de fonctions p.s.h

$$G_n(z) = \frac{1}{q^n} \operatorname{Log}\big|F^n(z)\big|.$$

Comme $G(\lambda z) = \operatorname{Log}|\lambda| + G(z)$, on peut définir le courant T par

$$\pi^* T = \mathrm{dd^c} G.$$

Autrement dit, $G \circ s$ est un potentiel de T pour toute section locale s de π. De $G \circ F = qG$, on déduit immédiatement que $f^* T = qT$.

Dans [6], Fornaess et Sibony montrent que la mesure $\mu := T^k$, dite *mesure de Green de* f, est une mesure de probabilité vérifiant $f^* \mu = q^k \mu$. Ils établissent également l'existence d'un ensemble pluripolaire $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}^k$ tel que la suite de mesures

$$q^{-nk} \sum_{f^n(\beta_i)=\beta} \delta_{\beta_i}$$

converge faiblement vers la mesure de Green μ de f pour tout $\beta \in \mathbb{P}^k \setminus \mathcal{E}$.

Nous décrivons maintenant deux familles d'exemples de Lattès sur $\mathbb{P}^k$. Nous supposerons, pour simplifier, que $k = 2$. Ces constructions se généralisent cependant à toute dimension.

- *Première famille d'exemples* (*dus à T. Ueda, voir* [13]).

Soit f un exemple de Lattès de $\mathbb{P}^1$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C} \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\sigma"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\sigma"] \\ \mathbb{P}^1 \arrow[r, "f"] & \mathbb{P}^1 \end{tikzcd}$$

Par exemple, σ est obtenue en quotientant $\mathbb{C}$ par $G := (\mathbb{Z} + i\mathbb{Z}) \rtimes \{\mathrm{id}, -\mathrm{id}\}$ et D est la multiplication par 2.

L'endomorphisme $f \times f$ de $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ passe au quotient lorsque l'on identifie (x, y) à (y, x). Comme on peut le voir au moyen de l'application de Segre

$$\Phi\big([z_1 : w_1], [z_2 : w_2]\big) = [z_1w_1 : z_2w_2 : z_1w_2 + z_2w_1],$$

l'espace ainsi obtenu est isomorphe à $\mathbb{P}^2$. L'endomorphisme induit est bien un exemple de Lattès de $\mathbb{P}^2$. Le groupe cristallographique est dans ce cas le produit d'un réseau de $\mathbb{C}^2$ par un groupe d'ordre égal à 8 : $\big(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2\big) \rtimes \mathbb{Z}_2$.

- *Deuxième famille d'exemples*

Soit $T := \mathbb{C}/\Gamma$ un tore complexe. Nous allons réaliser $\mathbb{P}^2$ comme quotient de $T \times T$ par une action naturelle du groupe de substitutions σ_3. Pour cela, considérons la cubique lisse $\mathcal{W}$ de $\mathbb{P}^2$ obtenue comme plongement de Weierstrass de T. Observons que l'ensemble des triplets $\{x, y, z\}$ non ordonnés alignés de $\mathcal{W}$ s'identifie à l'ensemble des droites de $\mathbb{P}^2$, donc au dual de $\mathbb{P}^2$ qui est isomorphe à $\mathbb{P}^2$.

Par ailleurs, l'alignement de $\{x, y, z\}$ signifie que $x + y + z = 0$ pour la loi de groupe de la courbe elliptique. On voit alors facilement que $T \times T$ s'identifie à $\{(x, y, z) \in T \times T \times T\,;\, x + y + z = 0\}$ puis que $\mathbb{P}^2$ s'identifie au quotient de $T \times T$ par l'action naturelle de σ_3.

On induit alors un exemple de Lattès de $\mathbb{P}^2$ à partir d'une isogénie du type $D(x,y) = (\lambda x, \lambda y)$ où λ est un nombre complexe tel que $\lambda\Gamma \subset \Gamma$.

$$\begin{array}{ccc} T \times T & \xrightarrow{D} & T \times T \\ \sigma \Big\downarrow & & \Big\downarrow \sigma \\ T \times T/_{\sigma_3} = \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^2 = T \times T/_{\sigma_3} \end{array}$$

La différence essentielle entre ces deux familles d'exemples nous semble être la suivante. Dans le premier cas, $\mathbb{P}^2$ est obtenu en quotientant un produit de tores $T\times T$ par un groupe d'ordre 8, tandis que dans le second c'est le groupe σ_3 d'ordre 6 qui intervient. On notera également que dans le second cas, $\mathbb{P}^2$ est directement obtenu comme quotient de $T \times T$ et que l'existence d'un exemple de Lattès de $\mathbb{P}^1$ sous-jacent n'est pas évidente.

A contrario, dans ces deux types d'exemples $\mathbb{P}^2$ est obtenu à partir d'un tore produit ; nous pensons que ceci est une condition nécessaire.

3. Transitivité topologique

On démontre facilement, à l'aide du théorème de Picard, que pour toute fraction rationnelle f la réunion $\bigcup_n f^n(V)$ évite au plus deux points de la sphère de Riemann dès que V est un ouvert rencontrant l'ensemble de Julia de f. La transitivité topologique de la restriction de f à son Julia s'en déduit. Pour un endomorphisme f de $\mathbb{P}^k$, Fornaess et Sibony ont montré que l'ensemble évité est pluripolaire. Lorsque le courant de Green est lisse et strictement positif sur un ouvert U, nous en déduisons la transitivité topologique de f sur U. Cette propriété jouera un rôle important dans la suite de notre étude. Nous supposerons dorénavant $\mathbb{P}^k$ muni d'une métrique Riemannienne et noterons ρ la distance associée.

PROPOSITION 3.1. — *Soit $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ un endomorphisme holomorphe de degré q dont le courant de Green T est lisse et strictement positif sur un ouvert U de $\mathbb{P}^k$. Alors, pour tout point $a \in U$ et toute boule $B(b,R)$ relativement compacte dans U, il existe une suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ de limite a, une suite de réels $(\epsilon_n)_{n\geq n_0}$ ainsi que des constantes $0 < A, C < 1$ ne dépendant que de U et f telles que*

(i) $$\tfrac{1}{2}A\, q^{-\frac{1}{2}n}R \leq \epsilon_n \leq A^{-1}q^{-\frac{1}{2}n}R,$$

(ii) $$B(b,CR) \subset f^n\big[B(a_n,\epsilon_n)\big] \subset B(b,R).$$

Plus généralement, pour tout compact $K \subset U$ et tout voisinage V de $a \in U$, $f^n(V)$ contient K dès que n est assez grand et f^n est localement inversible en tout point de $V \cap (f^n)^{-1}(K)$.

Démonstration. — Nous supposerons, pour simplifier, que U est un ouvert de coordonnées. On pourrait aussi, sans perte de généralité pour la suite de cet article, remplacer U par un ouvert plus petit. Le courant T étant lisse et strictement positif sur U, on déduit de l'équation fonctionnelle $f^{n*}T = q^n T$ les estimations suivantes :

$$A\,q^{\frac{1}{2}n}|X| \leq \big|d(f^n)_z \cdot X\big| \leq A^{-1}q^{\frac{1}{2}n}|X| \tag{1}$$

pour tout $z \in U$ tel que $f^n(z) \in U$ et tout vecteur X tangent à $\mathbb{P}^k$ en z.

En effet, si u est un potentiel de T sur U, alors sa forme de Levi, $\mathcal{L}\big(u, z, X\big)$, est une forme hermitienne définie positive sur l'espace tangent à $\mathbb{P}^k$ en z. Comme $u\circ f^n$ est un potentiel de $f^{n*}T = q^n T$, $u\circ f^n - q^n u$ est pluriharmonique sur $U \cap \big(f^n\big)^{-1}\big(U\big) =: U_n$ et donc

$$q^n\mathcal{L}\big(u, z, X\big) = \mathcal{L}\big(u \circ f^n, z, X\big) = \mathcal{L}\big(u, f^n(z), d(f^n)_z \cdot X\big)$$

pour tout $z \in U_n$. Les estimations (1) s'en déduisent puisque $\mathcal{L}\big(u, z, X\big) \approx |X|^2$.

Considérons des boules $B_1 := B(a, r)$ et $B_2 := B(b, R)$ relativement compactes dans U. Soit $\mathcal{E} \subset \mathbb{P}^k$ un ensemble pluripolaire tel que la suite de mesures $q^{-nk}\sum_{f^n(\beta_i)=\beta}\delta_{\beta_i}$ converge faiblement vers la mesure de Green μ de f pour tout $\beta \in \mathbb{P}^k \setminus \mathcal{E}$ (voir section 2.). Choisissons $\beta \in B(b, \frac{1}{8}A^2R) \setminus \mathcal{E}$; comme μ charge tout voisinage de a, on trouve une suite (a_n) de limite a telle que $f^n(a_n) = \beta$.

Observons que $f^n\big[B(a_n, r)\big] \cap bB(\beta, \frac{1}{2}R)$ n'est pas vide pour n assez grand, sinon il existerait une sous-suite f^{n_j} pour laquelle $f^{n_j}\big[B(a_{n_j}, r)\big] \subset B(\beta, \frac{1}{2}R)$ et le courant T serait alors identiquement nul près de a par normalité de f^{n_j} (voir section 2). Posons alors

$$\epsilon_n := \operatorname{Sup}\Big\{\epsilon > 0 \text{ t.q. } f^n\big[B(a_n, \epsilon)\big] \subset B\Big(\beta, \frac{1}{2}R\Big)\Big\}.$$

D'après l'observation précédente, $\epsilon_n \leq r$ et donc les estimations (1) sont valables en tout point z de $B\big(a_n, \epsilon_n\big)$ pour n assez grand ($n \geq n_0$). Soit alors p tel que $\rho(p, a_n) = \epsilon_n$ et $\rho(f^n(a_n), f^n(p)) = \rho(\beta, f^n(p)) = \frac{1}{2}R$; on obtient à l'aide de (1) une minoration de ϵ_n :

$$\frac{1}{2}R \leq \frac{1}{A}q^{\frac{1}{2}n}\epsilon_n. \tag{2}$$

Pour majorer ϵ_n, on utilise un lemme classique dont une preuve est donnée dans [3], lemma 4.2 :

LEMME 3.2. — *Soit $(M, |\ |)$ une variété Riemannienne connexe de dimension m et ρ la distance associée. Soit $f : B \to M$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur la boule unité $B := B(0, 1)$ de $\mathbb{R}^m$ telle que $|df_x(X)| \geq A\|X\|$ pour* *tout $x \in B$ et tout $X \in \mathbb{R}^m$. Alors, si $M \setminus f\big[B(0, \frac{1}{2})\big] \neq \varnothing$, on a $\rho(p, f(0)) \geq \frac{1}{2}A$ pour tout $p \in M \setminus f\big[B(0, \frac{1}{2})\big]$.*

Compte tenu de (1), ce lemme fournit l'estimation :

$$\frac{R}{2} \geq \rho\Big(\beta, bf^n\Big[B\Big(a_n, \frac{\epsilon_n}{2}\Big)\Big]\Big) \geq \frac{A}{2}\, q^{\frac{1}{2}n}\epsilon_n. \tag{3}$$

De (2) et (3), on déduit

$$\frac{A}{2}q^{-\frac{1}{2}n}R \leq \epsilon_n \leq \frac{1}{A}q^{-\frac{1}{2}n}R \tag{4}$$

puis

$$B\Big(\beta, \frac{A^2}{4}R\Big) \subset f^n\Big[B\Big(a_n, \frac{\epsilon_n}{2}\Big)\Big] \subset f^n\big[B(a_n, \epsilon_n)\big] \subset \overline{B}\Big(\beta, \frac{R}{2}\Big) \tag{5}$$

d'où, en posant $C = A^2/8$ et puisque $\rho(\beta, b) \leq A^2/8$,

$$B(b, CR) \subset f^n\big[B(a_n, \epsilon_n)\big] \subset B(b, R). \tag{6}$$

Pour un compact K quelconque, il suffit de considérer un recouvrement fini par des boules de rayon $C\rho(K, bU)$. Que f^n ne branche pas sur $V \cap \big(f^n\big)^{-1}(K)$ résulte déjà de (1). $\square$

Nous aurons besoin, pour la suite de la démonstration, de disposer d'un point fixe d'une itérée de f dans l'ouvert U. En dimension $k = 1$, il est bien connu que les cycles répulsifs de f sont denses dans l'ensemble de Julia de f c'est-à-dire dans le support du courant T. En dimension supérieure, ceux-ci sont denses (et même équirépartis) dans le support de la mesure de Green $\mu := T^k$; c'est un résultat beaucoup plus délicat dû à Briend et Duval [4]. L'existence d'un tel point est donc assurée en toute dimension. En fait, sous nos hypothèses, cela se déduit très facilement de la proposition précédente par un argument de renormalisation. C'est l'objet du :

Corollaire 3.3. — *Sous les hypothèses de la proposition précédente, la trace sur U de l'ensemble des cycles* (*répulsifs*) *de f est dense dans U.*

Démonstration. — Comme $\mu = T^k$ est une forme volume sur U, on déduit de l'équation fonctionnelle $f^{n*}\mu = q^{nk}\mu$ les estimations

$$Mq^{nk} \leq \big|\det d(f^n)_z\big|^2 \leq \frac{q^{nk}}{M} \tag{7}$$

pour tout $z \in U$ tel que $f^n(z) \in U$ ($M > 0$ étant une constante qui ne dépend que de f et U).

Appliquons la proposition 3.1 avec $a = b$. On pourra supposer la boule $B(a, R)$ contenue dans un ouvert de coordonnées et définir par $g_n(u) = f^n(a_n + \epsilon_n u)$ (avec abus de notations) une suite d'applications holomorphes $g_n : \mathcal{B} \to B(a, R)$ sur la boule unité $\mathcal{B}$ de $\mathbb{C}^k$.

Il résulte de (7) et de l'estimation (i) de la proposition 1 que

$$\left(\frac{A}{2}R\right)^{2k} M \leq \left|\det dg_n(u)\right|^2 \leq \left(\frac{R}{A}\right)^{2k} \frac{1}{M} \tag{8}$$

pour tout $u \in \mathcal{B}$.

Soit g_{n_p} une sous-suite qui converge localement uniformément vers g. D'après (8), g est localement inversible en 0. Utilisons maintenant la dernière assertion de la proposition 1 pour trouver u_0 arbitrairement proche de 0 et f^N localement inversible en $g(u_0)$ telle que $f^N\big(g(u_0)\big) = a$. Posons

$$h_p(u) := f^N \circ g_{n_p}(u) - (a_{n_p} + \epsilon_{n_p} u).$$

Puisque h_p converge vers $f^N \circ g - f^N \circ g(u_0)$, le « lemme d'Hurwitz » énoncé ci-dessous, assure l'existence de $u_p \in \mathcal{B}$ tel que $h_p(u_p) = 0$ pour p assez grand. La suite $(a_{n_p} + \epsilon_{n_p} u_p)$ est une suite de points fixes de f^{N+n_p} qui tend vers a. □

LEMME 3.4. — *Soit $h_p : V \to \mathbb{C}^k$ une suite d'applications holomorphes définies sur un voisinage V de l'origine dans $\mathbb{C}^k$ et convergeant localement uniformément vers h. Si $h^{-1}\{0\} = \{0\}$ alors ${h_p}^{-1}\{0\} \neq \varnothing$ pour p assez grand.*

Démonstration. — Posons $\phi_p(u) = \operatorname{Log}|h_p(u)|$. Soit $r > 0$ tel que $\{|u| \leq r\} \subset V$ et $M := \operatorname{Inf}\{\operatorname{Log}|h(u)|\,;|u| = r\}$. Par convergence uniforme, $\phi_p \geq M - 1$ sur $\{|u| = r\}$ pour p assez grand. Si ${h_p}^{-1}\{0\} = \varnothing$, ϕ_p est p.s.h maximale sur V ($\operatorname{Log}|\ |$ est maximale sur $\mathbb{C}^k \setminus \{0\}$ car elle est harmonique sur tout rayon épointé à l'origine). Il en résulte que $\phi_p \geq M - 1 > -\infty$ sur $\{|u| \leq r\}$, ce qui contredit $\lim_{p\to\infty} \phi_p(0) = -\infty$. □

4. Linéarisation

L'objet de cette partie est d'établir la :

PROPOSITION 4.1. — *Soit $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ un endomorphisme holomorphe de degré q dont le courant de Green T est lisse et strictement positif au voisinage d'un point fixe ξ_0. Il existe alors une application linéaire $D : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^k$ de la forme $\sqrt{q}\,U$ où U est diagonale unitaire ainsi qu'une application holomorphe $\sigma : \mathbb{C}^k \to \mathbb{P}^k$ telles que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}^k \\ {\scriptstyle\sigma}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\sigma} \\ \mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k \end{array} \tag{1}$$

et

$$\sigma^* T = dd^c |z|^2 \tag{1'}$$

En outre, σ est localement inversible en 0 et $\sigma(0) = \xi_0$.

Démonstration.

- *Première étape : linéarisation locale de f au point fixe ξ_0.*

Identifions à $\mathbb{C}^k$ l'espace tangent complexe au point ξ_0 à $\mathbb{P}^k$ et notons $\hat{f}$ l'application localement induite par f sur $\mathbb{C}^k$ au moyen de l'application exponentielle :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k,_0 & \xrightarrow{\hat{f}} & \mathbb{C}^k,_0 \\ \psi\big\downarrow & & \big\downarrow\psi \\ \mathbb{P}^k,_{\xi_0} & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k,_{\xi_0} \end{array} \tag{2}$$

Soit ω_0 la forme hermitienne définie positive induite par T_{ξ_0} sur $\mathbb{C}^k$. De l'équation fonctionnelle $f^*T = qT$ on déduit que $1/\sqrt{q}\,d\hat{f}_0$ est unitaire pour ω_0. L'application linéaire $1/\sqrt{q}\,d\hat{f}_0$ est donc diagonalisable dans une base orthogonale pour ω_0. Ainsi, quitte à conjuguer $\hat{f}$ et composer ψ à la source par une application linéaire adéquate, on peut supposer que $d\hat{f}_0 = \sqrt{q}\,U =: D$ (U étant diagonale unitaire) et $(\psi^*T)_0 = \sum_{j=1}^k dz_j \wedge d\bar{z}_j$. Toutes les valeurs propres de $d\hat{f}_0$ sont égales à $\sqrt{q}$ en module et le spectre de $d\hat{f}_0$ ne présente donc pas de résonnance. Le théorème de Poincaré-Siegel s'applique alors : il existe un biholomorphisme local $\hat{\sigma}$ tangent à l'identité en 0 tel que $\hat{\sigma} \circ D \circ \hat{\sigma}^{-1} = \hat{f}$ au voisinage de 0 (voir [1], p. 204 ou [12]). En posant $\sigma := \psi \circ \hat{\sigma}$, on obtient une version locale de la proposition 2 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k,_0 & \xrightarrow{D} & \mathbb{C}^k,_0 \\ \sigma\big\downarrow & & \big\downarrow\sigma \\ \mathbb{P}^k,_{\xi_0} & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^k,_{\xi_0} \end{array} \tag{3}$$

et

$$(\sigma^*T)(0) = \sum_{j=1}^k dz_j \wedge d\bar{z}_j \tag{4}$$

- *Deuxième étape : globalisation du diagramme (3).*

D'après la première étape, σ est déjà définie sur un voisinage W_0 de l'origine dans $\mathbb{C}^k$. Considérons une petite boule euclidienne $\mathcal{B}$ centrée à l'origine et contenue dans W_0 puis notons $\sigma_0 : \mathcal{B} \to \sigma_0(\mathcal{B}) \subset \mathbb{P}^k$ le biholomorphisme induit par σ sur $\mathcal{B}$. On définit un prolongement σ de σ_0 à $\mathbb{C}^k$ par :

$$\sigma = f^n \circ \sigma_0 \circ D^{-n} \quad \text{sur} \quad D^n(\mathcal{B}) \tag{5}$$

Comme la suite $D^n(\mathcal{B})_n$ exhauste $\mathbb{C}^k$, il suffit de vérifier la cohérence de cette définition. Soit donc $z = D^{n_1}(w_1) = D^{n_2}(w_2)$ où $w_1, w_2 \in \mathcal{B}$; il s'agit de s'assurer que

$$f^{n_1}\circ\sigma_0(w_1) = f^{n_2}\circ\sigma_0(w_2).$$

Notons $n_2 = n_1 + p$, comme $D^{n_1}\big[D^p(w_2)\big] = D^{n_1}(w_1)$, on a $D^p(w_2) = w_1 \in \mathcal{B}$ et par conséquent $D^m(w_2)$ appartient à $\mathcal{B}$ pour tout $0 \le m \le p$. En utilisant la commutativité du diagramme (3), on établit alors de proche en proche que

$$f^p\circ\sigma_0(w_2) = \cdots = f^{p-m}\circ\sigma_0\circ D^m(w_2) = \cdots = \sigma_0\circ D^p(w_2)$$

dont on déduit que

$$f^{n_2}\circ\sigma_0(w_2) = f^{n_1}\circ f^p\circ\sigma_0(w_2) = f^{n_1}\circ\sigma_0\circ D^p(w_2) = f^{n_1}\circ\sigma_0(w_1).$$

Par construction, l'application $\sigma : \mathbb{C}^k \to \mathbb{P}^k$ est holomorphe et le diagramme (1) commute.

- *Troisième étape : tiré en arrière sur $\mathbb{C}^k$ du courant de Green.*

Commencons par vérifier que l'identité ponctuelle (4) reste valable sur un voisinage de l'origine. De l'équation fonctionnelle $f^*T = qT$ et de (1), on tire :

$$q\big(\sigma^*T\big) = \sigma^*\big(f^*T\big) = D^*\big(\sigma^*T\big) \tag{6}$$

Posons $\sigma^*T = i\sum_{j,\ell=1}^k C_{j,\ell}(z)\,dz_j\wedge d\bar z_\ell$ où les $C_{j,\ell}$ sont des fonctions lisses dans un voisinage de l'origine, et notons $\lambda_j := e^{i\theta_j}\sqrt{q}$ les valeurs propres de D. On peut alors réécrire (6) sous la forme :

$$\sum_{j,\ell=1}^k C_{j,\ell}(z)\,dz_j\wedge d\bar z_\ell = \sum_{j,\ell=1}^k C_{j,\ell}\big(D(z)\big)\lambda_j\bar\lambda_\ell\,dz_j\wedge d\bar z_\ell. \tag{7}$$

On a donc

$$C_{j,j}\circ D^{-1}\equiv C_{j,j},\quad |C_{j,\ell}\circ D^{-1}|\equiv|C_{j,\ell}|,$$

d'où l'on déduit en itérant D^{-1}, que $C_{j,j}\equiv C_{j,j}(0) = 1$ et $|C_{j,\ell}| = |C_{j,\ell}(0)| = 0$ pour $j\ne\ell$. Ainsi, au voisinage de 0,

$$\sigma^*T = i\sum_{j=1}^k dz_j\wedge d\bar z_j. \tag{8}$$

Il nous reste à montrer que (8) reste vraie sur $\mathbb{C}^k$. Le courant $\sigma^*(T)$ est défini sur $\mathbb{C}^k$ en tirant en arrière par σ les potentiels locaux de T. D'après (1), on a $f^p\circ\sigma\circ D^{-p} = \sigma$ et donc $\sigma^*T = \big(D^{-p}\big)^*\circ\sigma^*\circ(f^p)^*(T)$ pour tout entier p. On en déduit, comme $f^*T = qT$, que

$$q^p[D^{-p}]^*(\sigma^*T) = \sigma^*T \tag{9}$$

D'après (8), $\beta(z) := |z|^2$ est un potentiel de (σ^*T) sur un voisinage W_0 de 0. L'identité (9) montre alors que $q^p(\beta\circ D^{-p})$ est un potentiel de σ^*T sur $D^p(W_0)$ pour tout entier p. Or,

$$q^p(\beta\circ D^{-p})(z) = q^p\big|D^{-p}(z)\big|^2 = q^p(\sqrt{q}\,)^{-2p}\big|U^p(z)\big|^2 = |z|^2.$$

On a donc bien $\sigma^*T = dd^c|z|^2$ sur $D^p(w_0)$ puis sur $\mathbb{C}^k$ par exhaustion. $\square$

5. Groupe de Galois de la linéarisation

Certains endomorphismes holomorphes de $\mathbb{P}^k$ se linéarisent au sens du diagramme de la proposition 4.1 sans pour autant que la structure de l'application σ ne soit simple. De tels exemples sont fournis pour $\mathbb{P}^1$ par les fractions rationnelles chaotiques qui ne sont pas du type Lattès. Dans cette partie, nous montrons comment la condition $\sigma^*T = dd^c|z|^2$ fait de σ un revêtement ramifié dont le groupe de Galois est un sous-groupe du groupe affine agissant transitivement sur les fibres de σ. Nous établissons ensuite la co-compacité de ce groupe, ce qui permet, par le théorème de Bieberbach, d'achever la preuve du théorème 1.1.

PROPOSITION 5.1. — *Soient f, D et σ donnés par la proposition* 2. *Soit G le sous-groupe du groupe affine dont les éléments laissent σ invariante :*

$$G = \big\{(U,b) \in \mathbb{U}_k \rtimes \mathbb{C}^k \ t.q.\ \sigma\big(U\cdot z + b\big) = \sigma(z)\big\}.$$

Alors G est un sous-groupe discret fermé de $\mathbb{U}_k \rtimes \mathbb{C}^k$ qui agit transitivement sur les fibres de σ.

Démonstration. — Le groupe G est clairement fermé ; montrons qu'il est discret. Soit $\big(U_n, b_n\big)$ une suite dans G qui converge vers $\big(\mathrm{Id}, 0\big)$; comme par construction σ est localement inversible au voisinage de l'origine, la condition $\sigma\big(U_n\cdot z + b_n\big) \equiv \sigma(z)$ entraîne $U_n\cdot z + b_n \equiv z$ pour z proche de l'origine et n assez grand. On a donc $\big(U_n, b_n\big) = (\mathrm{Id}, 0)$ à partir d'un certain rang et G est discret dans $\mathbb{U}_k \rtimes \mathbb{C}^k$.

Soient $z_0, z'_0 \in \mathbb{C}^k$ deux points distincts d'une même fibre de σ. Supposons d'abord z_0 et z'_0 réguliers et désignons par ϕ et ϕ' deux inverses locaux de σ définis sur un voisinage V de $\xi := \sigma(z_0) = \sigma(z'_0)$ tels que $\phi(\xi) = z_0$ et $\phi'(\xi) = z'_0$. Alors, $\psi := \phi \circ {\phi'}^{-1}$ est un biholomorphisme local échangeant z'_0 et z_0 pour lequel $\sigma \circ \psi = \sigma$. On a donc $\psi^*(\sigma^*T) = (\sigma\circ\psi)^*T = \sigma^*T$ d'où, comme $\sigma^*T = dd^c|z|^2$,

$$\psi^*\big(dd^c|z|^2\big) = dd^c|z|^2. \tag{1}$$

On déduit alors du lemme suivant que ψ est induit par un élément g appartenant à $\mathbb{U}_k \rtimes \mathbb{C}^k$.

LEMME 5.2. — *Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}^k$ et $\psi : \Omega \to \mathbb{C}^k$ une application holomorphe telle que $\psi^*\big(dd^c|z|^2\big) = dd^c|z|^2$ au voisinage d'un point ξ_0 de Ω. Alors ψ coïncide sur Ω avec une transformation affine de la forme $z \mapsto Uz + b$ où $U \in \mathbb{U}_k$*

Comme $\sigma \circ g = \sigma \circ \psi = \sigma$ près de z'_0, on a $\sigma \circ g = \sigma$ sur $\mathbb{C}^k$ et donc z_0 et z'_0 sont échangés par un élément g de G.

Supposons maintenant z_0 et z'_0 arbitraires. Soient $B_R := B(0,R)$ une boule euclidienne centrée en 0 contenant z_0, z'_0 et N un entier assez grand pour que la restriction σ_0 de σ à la boule $B\big(0, q^{-\frac{1}{2}N}R\big)$ soit un biholomorphisme. Puisque σ coïncide avec $f^N \circ \sigma_0 \circ D^{-N}$ sur B_R et que f^N est un revêtement ramifié, on peut approcher z_0 et z'_0 par des points réguliers z_n et z'_n d'une même fibre de σ. Comme nous l'avons vu précédemment, il existe alors $\big(U_n, b_n\big) \in G$ tels que $U_n {z'}^n + b_n = z_n$. Après une éventuelle extraction, U_n converge vers U dans $\mathbb{U}_k$ et $b_n = z_n - U_n z'_n$ vers $z_0 - Uz'_0 =: b$. Ainsi (U, b) est bien un élément de G échangeant z'_0 et z_0. □

Démonstration du lemme 5.2. — Comme $\psi^*\big(dd^c|z|^2\big) = dd^c|z|^2$ près de ξ_0, $d\psi_z$ est unitaire en tout point z d'un voisinage de ξ_0. Il suffit donc pour conclure de s'assurer que les applications holomorphes à valeurs dans $\mathbb{U}_k$ sont constantes. Considérons à cet effet $\tau : \Delta \to \mathcal{M}_k(\mathbb{C})$ un disque holomorphe donné par $\tau(u) = \big[\tau_{j,\ell}(u)\big]_{1 \le j,\ell \le k}$. Si τ est à valeurs dans $\mathbb{U}_k$, alors chacune des applications holomorphes $\tau_j : \Delta \to \mathbb{C}^k$, $\tau_j(u) = (\tau_{j,1}(u), \ldots, \tau_{j,k}(u))$, est à valeurs dans la sphère euclidienne unité donc constante. □

Nous établissons maintenant la

PROPOSITION 5.3. — *Le groupe G introduit par la proposition précédente est un groupe cristallographique complexe.*

Par le théorème de Bieberbach, il nous suffit de montrer que G est co-compact. Pour cela, nous utiliserons la propriété de transitivité topologique établie dans la proposition 3.1 ainsi que les propriétés élémentaires des régions de Voronoi. Commençons par faire quelques rappels à leur sujet.

DÉFINITION 5.4. — Soit $\big(\mathbb{R}^N, \|\ \|\big)$ l'espace euclidien usuel et G un groupe d'isométries de $\mathbb{R}^N$. Pour toute orbite $G \cdot x_0$ ($x_0 \in \mathbb{R}^N$) et tout point $p \in G \cdot x_0$ on définit la région de Voronoi, V_p, de p par

$$V_p := \big\{x \in \mathbb{R}^N \ t.q\ \|x - p\| = \mathrm{Inf}_{q \in G \cdot x_0} \|x - q\|\big\}.$$

Ainsi V_p est l'intersection, lorsque q parcourt $G \cdot x_0$, des demi-espaces fermés contenant p et limités par les hyperplans bissecteurs des segments $[p, q]$.

Les propriétés suivantes se déduisent facilement du fait que G est un groupe d'isométries :

PROPOSITION 5.5. — *Soit G un groupe fermé d'isométries de l'espace euclidien $\big(\mathbb{R}^N, \|\ \|\big)$ et $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Alors :*

(i) *G agit transitivement sur les régions de Voronoi V_p, $p \in G \cdot x_0$;*

(ii) *les régions de Voronoi de $G \cdot x_0$ pavent $\mathbb{R}^N$: $\mathbb{R}^N = \bigcup_{p \in G \cdot x_0} V_p$;*

(iii) *G est co-compact si et seulement si V_{x_0} est compact.*

Démonstation de la proposition 5.3. — Nous reprenons les notations de la proposition 4.1. Par hypothèse, le courant de Green de f est lisse et strictement positif sur un ouvert U contenant $\sigma(0)$. Soit $\{e_1, \dots, e_{2k}\}$ une base orthogonale de l'espace euclidien réel $\big(\mathbb{R}^{2k}, \langle\ ,\ \rangle\big)$ sous-jacent à $\mathbb{C}^k$. Posons $e_{2k+j} := -e_j$ pour $1 \le j \le 2k$. Quitte à diminuer la norme des vecteurs e_j et à choisir $\epsilon > 0$ assez petit, les images par σ des boules $B_j := B(e_j, \epsilon)$, $1 \le j \le 4k$, sont contenues dans U. D'après l'assertion de transitivité topologique de la proposition 1, il existe alors un entier n_0 tel que

$$\sigma(0) \in f^{n_0}\big[\sigma(B_j)\big] = \sigma\big[D^{n_0}(B_j)\big]$$

pour tout $1 \le j \le 4k$. Il existe ainsi des points $x_j \in B_j$, $1 \le j \le 4k$, tels que $\sigma(0) = \sigma\big(q^{\frac{1}{2}n_0} U^{n_0} x_j\big)$, c'est-à-dire, compte tenu de la proposition 5.1, tels que $y_j := q^{\frac{1}{2}n_0} U^{n_0} x_j \in G \cdot 0$. Alors, par définition , la région de Voronoi V_0 de l'origine est contenue dans l'intersection des demi-espaces

$$\mathcal{H}_j := \Big\{ \Big\langle x, \frac{y_j}{2} \Big\rangle \le \Big\| \frac{y_j}{2} \Big\|^2 \Big\}.$$

Par un calcul élémentaire on a aussi

$$\mathcal{H}_j = \Big\{ \Big\langle q^{-\frac{1}{2}n_0} U^{-n_0} x, \frac{x_j}{2} \Big\rangle \le \Big\| \frac{x_j}{2} \Big\|^2 \Big\}.$$

Pour ϵ assez petit, V_0 est donc contenue dans l'image par $q^{\frac{1}{2}n_0} U^{n_0}$ d'une petite perturbation du polyèdre standard $\{ |\langle x, \frac{1}{2} e_j \rangle| \le \| \frac{1}{2} e_j \|^2,\ 1 \le j \le 4k \}$. Par l'assertion (iii) de la proposition 5.5, G est alors co-compact. $\square$

Démonstation du théorème 1.1. — Soit f un endomorphisme holomorphe de $\mathbb{P}^k$ dont le courant de Green, T, est lisse et strictement positif sur un ouvert U. D'après le corollaire 3.3, il existe un point $\xi_0 \in U$ fixé par une itérée f^N de f. Les propositions 4.1, 5.1 et 5.3 appliquées à f^N montrent que f^N est un exemple de Lattès. Plus précisement, il existe un revêtement ramifié $\sigma : \mathbb{C}^k \to \mathbb{P}^k$ dont le groupe de Galois est un groupe cristallographique complexe laissant σ invariant et tel que $\sigma^* T = dd^c |z|^2$.

Nous allons montrer qu'en outre $f \circ \sigma = \sigma \circ D$ pour une transformation affine D adéquate. Quitte à légèrement déplacer ξ_0, on peut supposer que $f \circ \sigma(\xi_0)$ est une valeur régulière de σ (ξ_0 n'appartenant plus nécessairement à un cycle de f). Considérons alors σ^{-1} une branche inverse de σ définie au voisinage de $f \circ \sigma(\xi_0)$ et posons $\xi_1 := \sigma^{-1}(f \circ \sigma(\xi_0))$. Au voisinage de ξ_1, on a :

$$(\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma)^* \big[dd^c |z|^2\big] = (\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma)^* \big[\sigma^* T\big] = \sigma^* \big[f^* T\big] = q \sigma^* T = q\big(dd^c |z|^2\big).$$

Donc, d'après le lemme 5.2, $\sigma^{-1} \circ f \circ \sigma$ coïncide près de ξ_0 avec une transformation affine D dont la partie linéaire est de la forme $\sqrt{q}\, U$, $U \in \mathbb{U}^k$. Ainsi, $f \circ \sigma \equiv \sigma \circ D$ près de ξ_0 et sur $\mathbb{C}^k$ par prolongement analytique : f est bien un exemple de Lattès. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Arnold (V.) – *Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires,* Éd. MIR, Moscou, 1996.

[2] Berteloot (F.), Loeb (J.-J.) – *Spherical hypersurfaces and Lattès rational maps,* J. Math. Pures Appl., t. **77** (1998), p. 655–666.

[3] Berteloot (F.), Patrizio (G.) – *A Cartan theorem for proper holomorphic mappings of complete circular domains,* Adv. Math., t. **153** (2000), n$^{\text{o}}$ 2, p. 342–352.

[4] Briend (J.Y.), Duval (J.) – *Exposants de Lyapounoff et distribution des points périodiques d'un endomorphisme de* $\mathbb{P}^k$*,* Acta. Math., t. **182** (1999), p. 143–157.

[5] Fornaess (J.E.), Sibony (N.) – *Complex dynamics in higher dimensions,* Complex Potential Theory (Montreal, PQ, 1993), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. **439**, Kluwer, Dordrecht, 1994, p. 131–186.

[6] Fornaess (J.E.), Sibony (N.) – *Complex dynamics in higher dimensions II,* Ann. Math. Studies, t. **137** (1995), p. 135–187.

[7] Hubbard (J.H.), Papadopol (P.) – *Superattractive fixed points in* $\mathbb{C}^n$*,* Indiana Univ. Math. J., t. **43**-1 (1994), p. 321–365.

[8] Lattès (S.) – *Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions rationnelles,* C.R.A.S. Paris, t. **166** (1918), p. 26–28.

[9] Lyubich (M.) – *Dynamics of rational maps : a topological picture,* Russian Math. Surveys, t. **41**-4 (1986), p. 43–117.

[10] Mayer (V.) – *Comparing measures and invariant line fields,* Erg. Th. & Dyn. Syst., (to appear).

[11] McMullen (C.) – *Frontiers in Complex dynamics,* Bull. A.M.S., t. **31**-2 (1994), p. 155–172.

[12] Rosay (J.P.), Rudin (W.) – *Holomorphic maps from* $\mathbb{C}^n$ *to* $\mathbb{C}^n$*,* Trans. A.M.S., t. **310** (1988), p. 47–86.

[13] Ueda (T.) – *Complex dynamical systems on projective spaces,* Advanced Series in Dynamical Systems, vol. **13**, Proc. RIMS Conference : Chaotic Dynamical Systems, World Scientific Publ., 1993, p. 120–138.

[14] Zdunik (A.) – *Parabolic orbifolds and the dimension of the maximal entropy measure for rational maps,* Invent. Math., t. **99** (1990) p. 627–649.