BULLETIN DE LA S. M. F.

RADOUAN DAHER

Résolubilité sur un espace riemannien symétrique

Bulletin de la S. M. F., tome 127, nº 3 (1999), p. 349-362
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1999__127_3_349_0>

Bull. Soc. math. France,
127, 1999, p. 349–362.

RÉSOLUBILITÉ SUR UN ESPACE RIEMANNIEN SYMÉTRIQUE

PAR RADOUAN DAHER (*)

RÉSUMÉ. — Nous étudions l'existence des solutions élémentaires pour certains opérateurs différentiels linéaires invariants sur un espace riemannien symétrique simplement connexe S. Nous montrons qu'un opérateur différentiel invariant sur S admet une solution élémentaire si et seulement si ses coefficients de Fourier partiels vérifient une condition de croissance lente.

ABSTRACT. — SOLVABILITY ON RIEMANNIAN SYMMETRIC SPACE. — We study the existence of fundamental solutions for certain invariant linear differential operators on simply connected riemannian symmetric spaces S. We prove that an invariant differential operator on S admits a fundamental solution if and only if its partial Fourier coefficients satisfy a condition of slow growth.

Introduction

Un des problèmes importants des mathématiques consiste à résoudre des équations aux dérivées partielles sur une variété et notamment à déterminer, si c'est possible, une solution élémentaire ou une paramétrix de l'opérateur différentiel considéré.

Quand la variété considérée est un groupe de Lie ou un espace homogène et l'opérateur différentiel un opérateur invariant, le problème posé bénéficie de l'apport de la théorie des représentations et peut alors se résoudre plus aisément. Un certain nombre de résultats ont été publiés sur ce problème.

M. Raïs a montré dans [10] que tout opérateur différentiel bi-invariant non nul sur un groupe de Lie nilpotent simplement connexe admet une

(*) Texte reçu le 14 novembre 1997, révisé les 20 mai 1998 et le 13 janvier 1999, accepté le 19 février 1999.

R. DAHER, Département de Mathématique et d'Informatique, Faculté des sciences Aïn chock, B.P. 5366 Maarif, Casablanca (Maroc). Email daher@facsc-achok.ac.ma.

Mots clés : espaces symétriques, transformation de Fourier et d'Abel, opérateurs différentiels invariants, solutions élémentaires.

Classification AMS : 35E05, 42A38, 43A85, 44A12, 53C35.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE 0037–9484/1999/349/$ 5.00

solution élémentaire tempérée. Dans [3], M. Duflo a prouvé que tout opérateur bi-invariant non nul sur un groupe de Lie simplement connexe a une solution élémentaire locale. A. Cerezo et F. Rouvière ont donné dans [2] une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur invariant à gauche sur un groupe de Lie compact ait une solution élémentaire.

Dans ce qui suit nous proposons d'étudier le problème suivant :

(P_0) *Un opérateur différentiel P invariant sur un espace symétrique riemannien simplement connexe S admet-il une solution élémentaire sur S ?*

L'outil de base est la proposition 4.2 du chapitre 5 de [6], qui donne la décomposition de l'espace S en produit direct

$$S = S^- \times S^0 \times S^+$$

de trois types d'espaces symétriques simplement connexes

- S^- (type non compact),
- S^0 (type euclidien),
- S^+ (type compact).

Notre méthode consiste à étudier le problème (P_0) posé sur S en considérant séparément les trois différents types S^-, S^0, S^+ et en réunissant les résultats.

La réponse au problème (P_0) est affirmative dans le cas euclidien S^0 (voir [4] ou [9]). Le type non compact S^- a été traité par S. Helgason [5]. Le résultat correspondant pour un espace symétrique de type compact S^+ n'avait pas été écrit de manière explicite (à notre connaissance). Notre travail se décrit sommairement comme suit.

Dans le paragraphe 1.1, nous montrons que sous des conditions de croissance de nature arithmétique sur les coefficients de Fourier de l'opérateur différentiel, il existe une solution élémentaire sur S^+ (voir théorème 1.1).

Nous recherchons au paragraphe 2 une solution élémentaire dans le cas général $S = S^- \times S^0 \times S^+$, simplement connexe. Pour cela, nous effectuons d'abord une transformation de Fourier partielle sur la partie compacte S^+ ; ceci ramène à une famille de problèmes analogues, notés (P_1), sur $S^- \times S^0$, indexés par λ élément d'un certain réseau Λ qui caractérise les représentations irréductibles sphériques de dimension finie de l'espace S^+ (voir [7, cor. 4.2, p. 538]). Pour simplifier ces problèmes (P_1), nous utiliserons (selon la méthode de S. Helgason pour S^-) la transformation d'Abel partielle sur $S^- \times S^0$, c'est-à-dire la transformée d'Abel sur S^- tensorisée par l'identité sur S^0. Le problème (P_1) se ramène ainsi à un problème (P_2)

sur l'espace $A^- \times S^0$, où A^- est la partie abélienne d'une décomposition d'Iwasawa associée à S^- ; l'intérêt de cet espace est d'être isomorphe à un espace euclidien (voir paragraphe 2.2).

S. Helgason terminait alors sa démonstration en faisant appel au théorème de Hörmander et Lojasiewicz de résolution d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants dans l'espace des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^n$. Cette méthode ne fournit malheureusement pas les majorations utiles pour sommer, à la fin, la série des solutions obtenues pour chaque λ (*cf.* contre exemple donné dans [1, p. 11]). Au lieu de cela, nous adaptons au paragraphe 2.3 a) une méthode de construction de solutions élémentaires sur $\mathbb{R}^n$ (due aussi à L. Hörmander). Cette méthode, combinée avec des techniques de l'analyse de Fourier classique de $\mathbb{R}^n$, nous permettent de construire une solution explicite au problème (P_2), donnant les majorations voulues (voir lemme 2.6).

Le résultat principal de cet article s'énonce ainsi (voir théorème 2.7) : l'opérateur différentiel P invariant sur S admet une solution élémentaire si et seulement si les polynômes différentiels associés Q_λ (sur l'espace euclidien $A^- \times S^0$ vérifient des inégalités de type :

$$|Q_\lambda| \geq C\big(1 + |\lambda|\big)^{-N} \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda.$$

Les obstacles à l'existence de la solution élémentaire viennent donc uniquement de la composante compacte S^+ de S.

REMERCIEMENTS. — L'auteur tient à remercier vivement le professeur François Rouvière de lui avoir proposé cette étude et d'avoir suivi avec tant d'attention et d'intérêt ses progrès. Beaucoup des idées qui sont nées au cours des nombreuses discussions qu'il nous a accordées se trouvent ici et ont été essentielles à l'aboutissement de ce travail.

0. Notations et préliminaires

a) Notations générales.

On note $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$, l'ensemble des nombres entiers positifs ou nuls, réels, complexes respectivement. Soit V une variété $\mathcal{C}^\infty$ réelle ; on note $\mathcal{C}^\infty(V)$ (resp. $\mathcal{D}(V)$) l'espace des fonctions indéfiniment dérivables (resp. $\mathcal{C}^\infty(V)$ à support compact sur V). On désigne par $\mathcal{D}'(V)$ l'espace des distributions sur V.

Soit S un espace riemannien symétrique ; un tel espace est un espace homogène G/K, quotient d'un groupe de Lie G par un sous-groupe compact K de G, formé des points fixes d'une involution de G. On désigne par $\mathbb{D}(S)$ l'algèbre de tous les opérateurs différentiels sur G/K qui sont invariants par toutes les transformations

$$\begin{aligned} \tau(g) : G/K &\longrightarrow G/K, \\ xK &\longmapsto gxK. \end{aligned}$$

On note δ la distribution de Dirac à l'origine eK de G/K.

b) Notations semi-simples.

Soient G un groupe de Lie semi-simple réel connexe non compact de centre fini, et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Soit K un sous-groupe compact maximal de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{k}$. Soient $\langle\, .\, ,\, .\, \rangle$ la forme de Killing de $\mathfrak{g}$, θ une involution de Cartan, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan correspondante. Pour tous $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{g}$, notons

$$(X, Y) = -\langle X, \theta Y \rangle$$

d'où la norme $|X| = (X, X)^{1/2}$. Soit $\mathfrak{a}$ un sous-espace abélien maximal de $\mathfrak{p}$, de dual réel $\mathfrak{a}^*$. Pour $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}^*$, on définit $H_\alpha \in \mathfrak{a}$ par

$$\alpha(H) = \langle H_\alpha, H \rangle$$

pour tout $H \in \mathfrak{a}$, puis

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle H_\alpha, H_\beta \rangle \quad \text{et} \quad |\alpha| = \langle \alpha, \alpha \rangle^{1/2}.$$

Soient Σ le système de racines (restreintes) associées au couple $(\mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, Σ^+ le sous-ensemble des racines positives définies par le choix d'une chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a} \oplus \eta$ la décomposition d'Iwasawa correspondante, donnée aussi en termes de groupes de Lie par $G = KAN$.

Soient M le centralisateur de A dans K, M' le normalisateur de A dans K. Le sous-groupe M'/M noté W est appelé le groupe de Weyl. Il est fini de cardinal $|W|$.

Notons $\mathcal{D}(A)^W$ (resp. $\mathcal{D}'(A)^W$) l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact (resp. des distributions) sur A invariantes par le groupe de Weyl W. On note aussi $\mathcal{D}(G)^K$ (resp. $\mathcal{D}'(G)^K$) espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ à support compact (resp. des distributions) sur G, invariantes par l'action du groupe K. Désignons par ρ la demi-somme des racines positives comptées avec leurs multiplicités m_α.

1. Cas d'un espace symétrique riemannien de type compact

Pour alléger les notations, on abandonnera dans ce paragraphe le signe + de ce qui se rapportera à S^+ dans la suite.

Soit donc S un espace symétrique riemannien de type compact simplement connexe. On a $S = U/K$, où U est un groupe de Lie compact semi-simple connexe et simplement connexe, et K un certain sous-groupe fermé connexe de U.

Sur ce type d'espace, nous nous proposons d'étudier le problème (P_0). Pour cela rappelons d'abord brièvement un résultat utile à propos de la structure de l'algèbre $\mathbb{D}(S)$ des opérateurs différentiels invariants par l'action de U sur S. Nous savons qu'il existe un isomorphisme entre l'algèbre $\mathbb{D}(S)$ et l'algèbre $\mathbb{D}(\mathfrak{a})^W$ des polynômes invariants par le groupe de Weyl W sur le dual de l'espace vectoriel $\mathfrak{a}$:

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(S) &\longrightarrow \mathbb{D}(a)^W, \\ P &\longmapsto p. \end{aligned}$$

De plus $P\varphi_\lambda = p(\lambda)\varphi_\lambda$ pour tout $\lambda \in \Lambda$, où Λ est le réseau des formes linéaires sur $\mathfrak{a}$ telles que

$$\langle \lambda - \rho, \alpha \rangle \langle \alpha, \alpha^{-1} \rangle \in \mathbb{N} \quad \text{pour tout} \quad \alpha \in \Sigma^+,$$

et les φ_λ sont les fonctions sphériques de l'espace S.

Pour le laplacien L, on a notamment :

$$L\varphi_\lambda = \big(|\rho|^2 - |\lambda|^2\big)\varphi_\lambda \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda.$$

THÉORÈME 1.1. — *Soit S un espace symétrique riemannien simplement connexe, de type compact. L'opérateur différentiel P invariant sur S admet une solution élémentaire si et seulement s'il existe un entier naturel N et une constante $C > 0$ tels que :*

$$\big|p(\lambda)\big| \geq C\big(1 + |\lambda|\big)^{-N} \quad \textit{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda.$$

La démonstration de ce théorème est une adaptation sans problème de celle donnée par F. Rouvière et A. Cezero pour un groupe compact (voir [2, prop. 5, p. 567]).

REMARQUE. — Cette conditions nécessaire et suffisante d'existence de solution élémentaire de P sur S entraîne aussi la résolubilité globale dans $\mathcal{C}^\infty$:

$$P\mathcal{C}^\infty(S) = \mathcal{C}^\infty(S).$$

2. Étude du cas général

2.1 Réduction du problème ($\mathbf{P_0}$).

Dans ce paragraphe, on travaille sur le produit direct

$$S = S^- \times S^0 \times S^+$$

cité dans l'introduction :

• S^- est un espace symétrique de type non compact G^-/K^- avec G^- groupe de Lie semi-simple non compact et K^- un sous-groupe compact maximal de G^- ;

• $S^0 = G^0/K^0$ est un espace euclidien;

• S^+ est un espace symétrique de type compact G^+/K^+, avec G^+ groupe de Lie semi-simple compact, et K^+ un certain sous-groupe fermé de G^+.

Un élément s de S sera noté $(x,y,z) \in S^- \times S^0 \times S^+$.

Nous reprenons les notations concernant la partie compacte notamment le réseau Λ, la norme $|\lambda|$ et les fonctions sphériques φ_λ.

a) Caractérisation des distributions sur S.

Soit $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ une base de l'espace tangent à l'élément neutre à $G^- \times G^+$; ces X_j se prolongent en des champs de vecteurs invariants à droite sur $G^- \times G^0$. Considérons la norme définie sur $\mathcal{D}(S^- \times S^0)$ par :

$$\|f\|_b = \sum_{|\beta| \le b} \sup |X^\beta f|$$

où $b \in \mathbb{N}$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $|\beta| = \beta_1 + \cdots + \beta_n$ et $X^\beta = X_1^{\beta_1} \cdots X_n^{\beta_n}$.

Étant donnée une distribution $E(x,y,z)$ K-invariante sur S, ses transformées de Fourier partielles, notées $\widetilde{E}(x,y,\lambda)$, sont définies comme suit : pour toute fonction $f(x,y) \in \mathcal{D}(S^- \times S^0)$ et pour tout $\lambda \in \Lambda$,

$$\langle \widetilde{E}(x,y,\lambda), f(x,y) \rangle = \langle E(x,y,z), f(x,y) \cdot \varphi_{-\lambda}(z) \rangle.$$

Ces coefficients de Fourier partiels sont des distributions sur $S^- \times S^0$. Lorsque $E(x,y,z) = \delta(x,y,z)$ (la mesure de Dirac à l'origine de S), un calcul immédiat montre que :

$$\widetilde{E}(x,y,\lambda) = \delta(x,y) \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda.$$

La proposition suivante généralise la proposition 5, p. 567 de [2].

PROPOSITION 2.1. — *Une famille de distributions* $(E_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *appartenant à* $\mathcal{D}'(S^- \times S^0)^{K^- \times K^0}$ *est formée des transformées de Fourier partielles* $\widetilde{E}(x,y,\lambda)$ *(avec* $x \in S^-$, $y \in S^0$, $\lambda \in \Lambda$*) d'une distribution* $E(x,y,z) \in \mathcal{D}'(S)^K$ *si et seulement si, pour tout compact* C *de* $S^- \times S^0$, *il existe une constante* $d > 0$ *et des entiers naturels* a *et* b *tels que :*

$$\bigl|\langle E_\lambda, f\rangle\bigr| \le d\bigl(1+|\lambda|\bigr)^a \|f\|_b$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$, *et pour toute fonction* f *appartenant à* $\mathcal{D}(S^- \times S^0)$, *à support inclus dans* C. *Dans ce cas,*

$$E(x,y,z) = \sum_{\lambda\in\Lambda} d(\lambda) E_\lambda(x,y) \cdot \varphi_\lambda(z),$$

où $d(\lambda)$ *est la dimension de l'espace des représentations irréductibles sphériques de l'espace* S^+ *caractérisées par le réseau* Λ.

b) Sur l'algèbre $\mathbb{D}(S)$.

L'étude des opérateurs différentiels invariants sur l'espace S, décomposé en produit direct $S^- \times S^0 \times S^+$, repose sur la proposition suivante dont la démonstration est immédiate.

PROPOSITION 2.2. — *Soient* $S = G/K$ *et* $S' = G'/K'$ *deux espaces symétriques et* $S \times S' = G \times G'/K \times K'$ *leur produit direct. On a :*

$$\mathbb{D}(S \times S') = \mathbb{D}(S) \otimes \mathbb{D}(S').$$

LEMME 2.3. — *Soit* P *un élément de* $\mathbb{D}(S)$. *Pour chaque* $\lambda \in \Lambda$, *il existe un unique* P_λ *appartenant à* $\mathbb{D}(S^- \times S^0)$ *tel que*

$$P\bigl(f(x,y)\cdot\varphi_\lambda(z)\bigr) = (P_\lambda f)(x,y)\cdot\varphi_\lambda(z)$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(S^- \times S^0)$, $(x,y,z) \in S$. *De plus, pour toute distribution* $T \in \mathcal{D}'(S)^K$

$$(PT)^{\sim}(x,y,\lambda) = P_\lambda \widetilde{T}(x,y,\lambda).$$

Nous appellerons *coefficients de Fourier partiels* de P les opérateurs P_λ.

Démonstration. — La première égalité qui caractérise P_λ se déduit de la proposition 2.2. Cette caractérisation et un calcul immédiat montrent l'autre égalité. $\square$

c) Une condition nécessaire et suffisante de résolubilité.

Ce paragraphe donne une première condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution élémentaire pour un opérateur différentiel invariant non nul sur S, par transformation de Fourier partielle sur la partie compacte S^+.

L'utilisation des propositions 2.1 et 2.2 conduit directement à la proposition suivante :

PROPOSITION 2.4. — *Soit S un espace symétrique riemannien simplement connexe, décomposé en produit direct d'espaces symétriques riemanniens simplement connexes de trois types, notés respectivement S^-, S^0 et S^+. Soit P un opérateur différentiel invariant sur S de coefficients de Fourier partiels P_λ, avec $\lambda \in \Lambda$. Pour que l'opérateur P ait une solution élémentaire K-invariante sur S, il est nécessaire et suffisant qu'il existe pour chaque $\lambda \in \Lambda$ une distribution $E_\lambda \in \mathcal{D}'(S^- \times S^0)^{K^- \times K^0}$ telle que l'on ait :*

$$(P_1)\quad \begin{cases} \text{(i) } P_\lambda E_\lambda(x,y) = \delta(x,y)\,; \\ \text{(ii) } \textit{pour tout compact } C \textit{ de } S^- \times S^0, \textit{ il existe une constante} \\ d > 0 \textit{ et des entiers } a \textit{ et } b \textit{ tels que} \\ \qquad |\langle E_\lambda, f\rangle| \le d(1+|\lambda|)^a \|f\|_b \\ \textit{pour toute fonction } f \in \mathcal{D}(S^- \times S^0) \textit{ à support dans } C, \textit{ et} \\ \textit{pour tout } \lambda \in \Lambda. \end{cases}$$

2.2 Simplification du problème réduit (P_1).

Notre propos consiste à ramener par transformation d'Abel, le problème (P_1) sur $\mathcal{D}'(S^- \times S^0)^{K^- \times K^0}$ à la résolution d'une équation aux dérivées partielles à coefficients constants sur $A^- \times S^0$, où A^- est la partie abelienne d'une décomposition d'Iwasawa associée à S^-.

Pour alléger les notations, on abandonnera dans ce paragraphe le paramètre λ ainsi que le signe « $-$ » de ce qui rapporte à S^-, mais on gardera le signe « 0 » de ce qui est relatif à S^0.

Notons $\mathcal{A}$ la transformation d'Abel partielle sur $S \times S^0$, c'est-à-dire la transformée d'Abel sur S tensorisée par l'identité S^0.

Par l'isomorphisme ${}^t\mathcal{A}^{-1}$, l'équation du problème précédent (P_1) prend une autre forme simple; c'est l'objet du lemme suivant, qui résulte facilement des propriétés de la transformation d'Abel.

LEMME 2.5. — *Avec les notations précédentes, nous avons :*

(i) ${}^t\mathcal{A}^{-1}(\delta(x,y)) = {}^t\mathcal{A}^{-1}(\delta(x)) \otimes \delta(y)$;

(ii) ${}^t\mathcal{A}^{-1}(PE(x,y)) = Q({}^t\mathcal{A}^{-1}(E(x,y)))$, *où Q est un opérateur différentiel à coefficients constants sur $A \times S^0$ qui est $W \times K^0$ invariant.*

D'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier sphérique (*cf.* [7, p. 454]), prise à l'origine 0 de S et la normalisation des mesures dg sur le groupe G et dν sur $\mathfrak{a}^*$ (dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de A) (*cf.* [8,

p. 488]), on a, pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(S)^K$:

$$f(0) = \langle |W^{-1}| \cdot |C(\nu)|^{-2} \,\mathrm{d}\nu, (\mathcal{A}f)^\wedge(\nu) \rangle$$

où $|W|$ désigne le cardinal du groupe de Weyl W, $\nu \in \mathfrak{a}^*$, et C est la fonction de Harish-Chandra.

Le signe « $^\wedge$ » désigne la transformée de Fourier définie par

$$\widehat{g}(\mu) = \int_A g(a)\,\mathrm{e}^{-i\mu \log a}\,\mathrm{d}a$$

où $\mu \in \mathfrak{a}^*$ et $g \in \mathcal{D}(A)$.

L'expression $|W|^{-1}|C(\nu)|^{-2}\,\mathrm{d}\nu$ est une distribution tempérée sur $\mathfrak{a}^*$ conséquence de ce qui sera démontré dans le paragraphe 2.3, b).

En posant

$$T = |W|^{-1}\big(|C(\nu)|^{-2}\,\mathrm{d}\nu\big)^\wedge,$$

on a donc $f(0) = \langle T, \mathcal{A}f\rangle$; comme $|C(\nu)|^{-2} = C(-\nu)C(\nu)$ est paire et W-invariante, on a aussi :

$$\widehat{T} = |W|^{-1}|C(\nu)|^{-2}\,\mathrm{d}\nu.$$

Ainsi $f(0) = \langle \delta, f\rangle = \langle T, \mathcal{A}f\rangle = \langle {}^t\!\mathcal{A}T, f\rangle$ pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(S)^K$ (ici δ désigne la mesure de Dirac à l'origine 0 de S). Comme ${}^t\!\mathcal{A}T$ et δ sont des distributions K^--invariantes sur S, elles coïncident et $T = {}^t\!\mathcal{A}^{-1}\delta$. Ces propriétés s'étendent à $S \times S^0$ et à la transformation d'Abel partielle.

Par le lemme 2.5, résoudre l'équation $PE(x,y) = \delta(x,y)$ sur $S \times S^0$ revient donc à résoudre le problème sur $A \times S^0$:

$$(P_2) \qquad \begin{cases} \textit{Existe-t-il une distribution } F \in D'(A \times S^0)^{W \times K^0} \textit{ telle que} \\ \qquad\qquad QF(a,y) = T(a) \otimes \delta(y), \quad a \in A,\ y \in S^0 \\ \textit{avec } \widehat{T}(\nu) = |W|^{-1}|C(\nu)|^{-2} \in \mathcal{D}'(A)^W. \end{cases}$$

Si F existe, $E(x,y)$ sera ensuite donnée par $E = {}^t\!\mathcal{A}F$.

2.3. Résolution du problème simplifié ($\mathbf{P_2}$).

a) *Lemme de résolution.* — Un opérateur différentiel à coefficients constants dans $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire sous la forme $Q(D)$ où Q est un polynôme à n variables, à coefficients complexes, et

$$D = \Big(-i\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, -i\frac{\partial}{\partial x_n}\Big), \quad Q(D) = \sum a_\alpha D^{(\alpha)}$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ est un multi-indice, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ et la somme est finie.

Soit $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ satisfaisant à certaines conditions; nous allons construire une distribution F appartenant à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, telle que $Q(D)F = u$ en généralisant la construction de L. Hörmander pour le cas $u = \delta$ (*cf.* [8, p. 188-190]).

Soient m un entier naturel fixé, $\mathrm{Pol}(m)$ l'espace vectoriel des polynômes de degré $\leq m$ dans $\mathbb{C}$, et $\mathrm{Pol}^0(m)$ le complémentaire de 0 dans $\mathrm{Pol}(m)$. On définit sur $\mathrm{Pol}(m)$ la norme

$$|Q| = \|\widetilde{Q}(0)\|$$

avec, pour tout $Q \in \mathrm{Pol}(m)$,

$$\widetilde{Q}(\xi) = \Big(\sum_{\alpha} |Q^{(\alpha)}(\xi)|^2\Big)^{1/2}.$$

On note $Q_\xi(\zeta) = Q(\xi + \zeta)$ le polynôme translaté dans $\mathbb{C}^n$, avec $\xi \in \mathbb{R}^n$ et $\zeta \in \mathbb{C}^n$; on note enfin $\mathrm{d}\mu$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$.

La construction de L. Hörmander utilise une fonction auxiliaire $\Phi(Q, \xi)$ sur $\mathrm{Pol}^0(m) \times \mathbb{C}^n$, pour éviter les difficultés dûes aux zéros de Q (*cf.* [9, lemma 7.3.12]). Ses majorations se généralisent sans difficulté, et conduisent au résultat suivant :

LEMME 2.6. — *Supposons que la transformée de Fourier $\hat{u}$ de $u \in S'(\mathbb{R}^n)$ se prolonge en une fonction holomorphe au voisinage d'une bande définie par $|\mathrm{Im}(\zeta)| \leq \varepsilon$, avec ($d$ et N étant deux constantes positives) :*

$$\big|\hat{u}(\zeta)\big| \leq d(1 + |\zeta|^2)^N \quad \textit{pour} \quad \zeta \in \mathbb{C}^n, \ \big|\mathrm{Im}(\zeta)\big| \leq \varepsilon.$$

Soit B la boule de centre 0 et de rayon ε dans $\mathbb{C}^n$. Alors, pour tout polynôme $Q \in \mathrm{Pol}^0(m)$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, la formule

$$\langle F, f\rangle = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{d}\xi \int_B \hat{u}(\xi + \zeta) Q(\xi + \zeta)^{-1} \hat{f}(-\xi - \zeta)\Phi(Q_\xi, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

définit une distribution F sur $\mathbb{R}^n$, solution de l'équation $Q(D)F = u$. Et plus précisement, on a

$$\big|\langle F, f\rangle\big| \leq C\|Q\|^{-1} \cdot \|f\|_b$$

où la constante C (resp. l'entier b) ne dépend que de m = degré de Q, de n, de u et du support de f (resp. de m et de n).

b) *Majoration de* $|C(\nu)|^{-2}$. — Afin d'appliquer le lemme 2.6 au problème (P_2), nous devons majorer $|C(\nu)|^{-2}$ avec $\nu \in \mathfrak{a}^*_{\mathbb{C}}$.

La formule de Gindikin-Karpelevich (*cf.* [7, p. 447]) combinée avec les propriétés de la fonction Γ permet d'exprimer $|C(\nu)|^{-2}$ comme un polynôme en ν multiplié éventuellement par des facteurs $\mathrm{th}(k\langle\nu, \alpha\rangle)$ ou $\langle\nu, \alpha\rangle \coth(k\langle\nu, \alpha\rangle)$, où α est une racine et k une constante. Le lemme ci-dessous en résulte aisément.

LEMME 2.7. — *Pour $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe une constante $d > 0$ et un entier $N \in \mathbb{N}$ tels que :*

$$\left|C(\nu)\right|^{-2} \leq d\left(1 + |\nu|^2\right)^N$$

lorsque $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$ et $|\operatorname{Im}(\langle \nu, \alpha \rangle) \leq \varepsilon$ pour toute racine positive $\alpha \in \Sigma^+$.

L'inégalité est donc vérifiée pour $|\operatorname{Im}(\langle \nu, \alpha \rangle|$ suffisamment petit.

L'espace $A \times S^0$ est isomorphe à un $\mathbb{R}^n$. D'autre part si on pose $u = T \otimes \delta(y)$ où $\delta(y)$ désigne la mesure de Dirac à l'origine de S^0, et $\widehat{T}(\nu) = |W|^{-1}|C(\nu)|^{-2}$ avec $\nu \in \mathfrak{a}_{\mathbb{C}}^*$, alors les lemmes 2.6 et 2.7 conduisent finalement à la résolution du problème (P_2).

2.4. Solutions élémentaires sur l'espace S.

Nous conservons les notations des §§ 2.1, 2.2, 2.3, en reprenant toutefois le signe « $-$ » relatif à la composante S^-, abandonné aux §§ 2.2 et 2.3. Rappelons notamment que P_λ désigne un coefficient de Fourier partiel (relatif à la composante S^+) de l'opérateur différentiel invariant P sur S. À P_λ correspond par transformation d'Abel partielle un opérateur différentiel Q_λ, à coefficients constants et $W^- \times K^0$-invariant sur $A^- \times S^0$ tel que :

$${}^t\!\mathcal{A}^{-1}(P_\lambda T) = Q_\lambda({}^t\!\mathcal{A}^{-1}T) \quad \text{pour tout} \quad T \in \mathcal{D}'(S^- \times S^0)^{K^- \times K^0}.$$

Nous nous proposons de montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2.7. — *Soient P un opérateur différentiel invariant sur un espace riemannien symétrique simplement connexe S, et Q_λ les polynômes différentiels associés comme ci-dessus. Alors P a une solution élémentaire (K-invariante) sur S si et seulement s'il existe une constante $d > 0$ et un entier $a \in \mathbb{N}$ tels que*

$$\|Q_\lambda\| \geq \left(d(1 + |\lambda|\right)^{-a}$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$. Dans ce cas l'expression explicite de E est donnée comme suit : pour toute fonction $f \in \mathcal{D}(S)^K$,

$$\langle F, f \rangle = r \sum_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{d}(\lambda) \int_{\mathfrak{a}^* \times (S)^*} \mathrm{d}\xi \int_B |C(\nu + \mu)|^{-2} Q_\lambda(\xi + \zeta)$$
$$(\mathcal{A}f)^\wedge(-\xi - \zeta, z)\Phi((Q_\lambda)_\xi, \zeta)\,\mathrm{d}\zeta\varphi_\lambda(z)\,\mathrm{d}z.$$

où r est une constante strictement positive dépendant de la normalisation des mesures.

Les deux paragraphes qui vont suivre donnent la démonstration du théorème 2.7.

Preuve de la condition suffisante. — Le polynôme Q introduit dans le paragraphe 2.3 va dépendre cette fois-ci du paramètre $\lambda \in \Lambda$; notons-le $Q(\,.\,,\lambda)$, son degré reste inférieur ou égal à un entier fixe, l'ordre de P.

Dans le paragraphe précédent, nous avons construit $F_\lambda \in \mathcal{D}'(A^- \times S^0)$ solution du problème (P_2), avec la majoration suivante :

$$\left|\langle F_\lambda, g\rangle\right| \leq C\|Q\|^{-1}\|f\|_b$$

pour $f \in \mathcal{D}(A^- \times S^0)^{W^- \times K^0}$. Puis

$$\left|\langle E_\lambda, g\rangle\right| = \langle F_\lambda, \mathcal{A}g\rangle,$$

avec $g \in \mathcal{D}(S^- \times S^0)^{K^- \times K^0}$, définit $E_\lambda \in \mathcal{D}'(S^- \times S^0)$ telle que :

$$P_\lambda E_\lambda = \delta(x,y) \quad \text{et} \quad \left|\langle E_\lambda, g\rangle\right| \leq C\|Q_\lambda\|^{-1}\|\mathcal{A}g\|_b$$

Or par dérivation sous le signe somme, on a :

$$\|\mathcal{A}g\|_b \leq C\|g\|_{b'}$$

où la constante C (qui peut changer d'une ligne à l'autre), dépend du support de g. Par suite, on a :

$$(*) \qquad \left|\langle E_\lambda, g\rangle\right| \leq C\|Q_\lambda\|^{-1} \cdot \|g\|_{b'}$$

où b' dépend de degré de P de la constante b, des dimensions de $(\mathfrak{a}^-)^*$ et $(S^0)^*$. Notons aussi que C et b sont indépendants du paramètre $\lambda \in \Lambda$.

Supposons maintenant qu'il existe une constante $d > 0$ et un entier $a \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\|Q_\lambda\|^{-1} \leq d\big(1 + |\lambda|\big)^{-a} \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda.$$

Alors, d'après l'inégalité (*), il s'ensuit que :

$$\left|\langle E_\lambda, g\rangle\right| \leq C\big(1 + |\lambda|\big)^a \cdot \|g\|_{b'}.$$

Dès lors, la famille des distributionsE_λ est solution de l'équation

$$P_\lambda E_\lambda = \delta(x,y) \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda$$

et vérifie les inégalités de la proposition 2.4 ; donc P admet une solution élémentaire. Ainsi nous avons démontré la condition suffisante de résolubilité de l'opérateur P.

Preuve de la condition nécessaire. — Supposons que l'opérateur P ait une solution élémentaire sur l'espace symétrique S ; alors il existe, d'après la proposition 2.4, des distributions $E_\lambda \in \mathcal{D}'(S^- \times S^0)$ telles que

$$P_\lambda E_\lambda(x,y) = \delta(x,y)$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$, $x \in S^-$, $y \in S^0$, avec les inégalités suivantes : pour tout compact Ω de $S^- \times S^0$ donné, il existe une constante $C > 0$, des entiers a et b tels que :

$$(**) \qquad \left|\langle E_\lambda, f\rangle\right| \leq C\big(1+|\lambda|\big)^a \cdot \|f\|_b$$

pour toute fonction f à support dans Ω, et tout $\lambda \in \Lambda$.

Soit alors φ une fonction de $\mathcal{D}(A^- \times S^0)^{W^- \times K^0}$ telle que

$$\operatorname{Supp}(\mathcal{A}^{-1}\varphi) \subset \Omega \quad \text{et} \quad (\mathcal{A}^{-1}\varphi)(0) = 1.$$

Appliquons maintenant l'inégalité (**) à la fonction

$$f = \mathcal{A}^{-1}({}^tQ_\lambda\varphi) = {}^tP_\lambda(\mathcal{A}^{-1}(\varphi)), \quad \lambda \in \Lambda.$$

Il vient donc

$$\left|\langle E_\lambda, f\rangle\right| = 1 \leq C\big(1+|\lambda|\big)^a \|\mathcal{A}^{-1}({}^tQ_\lambda\varphi)\|_b$$

or $\|\mathcal{A}^{-1}({}^tQ_\lambda\varphi)\|_b \leq C\|{}^tQ_\lambda\varphi\|_{b'}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ (là aussi, la constante change) ; donc

$$1 \leq C\big(1+|\lambda|\big)^a \cdot \|({}^tQ_\lambda\varphi)\|_{b'}.$$

Or φ étant $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact, la transformation de Fourier montre que, sur le sous-espace de dimension finie des polynômes à coefficients complexes sur $\mathbb{R}^n$ de degré inférieur à l'ordre de P, l'application $Q \mapsto \|{}^tQ_\lambda(\varphi)\|_{b'}$ est une norme. Cette norme est donc équivalente à la norme $\|Q\|$ définie dans le paragraphe 2.3, a) ; d'où

$$1 \leq C\big(1+|\lambda|\big)^a \cdot \|Q_\lambda\|_{b'} \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda.$$

Ainsi nous avons démontré la condition nécessaire de résolubilité de l'opérateur P.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BATTESTI (F.). — *Résolubilité globale d'opérateurs différentiels invariants sur certains groupes de Lie*, thèse, Nice, 1985.

[2] CEREZO (A.), ROUVIÈRE (F.). — *Solution élémentaire d'un opérateur différentiel linéaire invariant à gauche sur un groupe de Lie réel compact et sur un espace homogène réductif compact*, Ann. Sci. École. Norm. Sup, 4e série, t. **2**, 1969, p. 561–581.

[3] DUFLO (M.). — *Opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie*, Ann. Sci. École. Norm. Sup, t. **10**, 1977, p. 265–288.

[4] EHRENPREIS (L.). — *Solutions of some problems of division*, I, Amer. J. Math, t. **76**, 1954, p. 883–903.

[5] HELGASON (S.). — *Fundamental solutions of invariant differential operators on symmetric spaces*, Amer. J. Math, t. **86**, 1964, p. 601–665.

[6] HELGASON (S.). — *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces.* — Academic Press, 1978.

[7] HELGASON (S.). — *Groups and geometric analysis.* — Academic Press, 1984.

[8] HÖRMANDER (L.). — *The analysis of linear partial differential operateur*, I. — Springer-Verlag, 1983.

[9] MALGRANCE (B.). — *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et équations de convolution*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, t. **6**, 1955–56, p. 271–355.

[10] RAÏS (M.). — *Solutions élémentaires des opérateurs différentiels bi-invariants sur un groupe de Lie nilpotent*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **273**, 1971, p. 495–498.