Bulletin de la S. M. F.

Frédéric Campana

Connexité abélienne des variétés kählériennes compactes

Bulletin de la S. M. F., tome 126, nº 4 (1998), p. 483-506

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1998__126_4_483_0>

Bull. Soc. math. France,
126, 1998, p. 483–506.

CONNEXITÉ ABÉLIENNE DES VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES COMPACTES

PAR FRÉDÉRIC CAMPANA (*)

RÉSUMÉ. — On établit des critères géométriques pour que le groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte X soit fini ou virtuellement abélien, nilpotent ou résoluble. Les démonstrations reposent sur la compacité de la variété de Chow de X, et la SHM sur la complétion de Malčev du groupe fondamental. On donne des versions relatives, qui fournissent de nouvelles fibrations biméromorphes de X.

ABSTRACT. — ABELIAN CONNECTEDNESS OF COMPACT KÄHLER MANIFOLDS. — We show geometric criteria for the fundamental group of a compact Kähler manifold X to be either finite or virtually abelian, nilpotent or solvable. The proofs rest on compactness properties of the Chow Scheme and MHS on the Malčev completion of the fundamental group. Relative versions are given, which lead to new bimeromorphic fibrations for X.

0. INTRODUCTION

Soient X une variété kählérienne compacte et connexe, et $\mathfrak{g}$ une classe de groupes (par exemple : abéliens, nilpotents, ou résolubles). On dira que X est $\mathfrak{g}$-*connexe* si deux points génériques de X sont contenus dans un sous-ensemble analytique compact et connexe $Z \subset X$ tel que l'image $\pi_1(\widehat{Z}_i)_X$ dans $\pi_1(X)$ de $\pi_1(\widehat{Z}_i)$ appartienne à $\mathfrak{g}$, où $\widehat{Z}_i$ est la normalisation de Z_i, une composante irréductible arbitraire de Z.

Il est naturel de se demander sous quelles hypothèses sur $\mathfrak{g}$ il est encore vrai que $\pi_1(X)$ est dans $\mathfrak{g}$. (Observons que, si l'on supprime l'hypothèse que X est Kähler, il existe des contre-exemples à une telle assertion :

(*) Texte reçu le 18 avril 1997, révisé le 7 novembre 1997 et le 4 mars 1998, accepté le 13 mai 1998.

F. CAMPANA, Université Nancy 1, Département de Mathématiques, B.P. 239, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy CEDEX. Email : campana@iecn.u-nancy.fr.

Classification AMS : 14C05, 14C30, 14C10, 14E20, 32C18, 32C25, 32S35, 32J27.

Mots clés : groupe fondamental, variété kählérienne compacte, variété projective complexe, structures de Hodge mixtes, groupes abéliens, groupes nilpotents, groupes résolubles.

pour toute classe $\mathfrak{g}$, même réduite au groupe trivial, il existe X complexe compacte et $\mathfrak{g}$-connexe avec $\pi_1(X)$, de présentation finie arbitraire (voir la remarque 3.3.2).

Lorsque $\mathfrak{g}$ est la classe des groupes finis, il a été établi dans [C5] que cette propriété est vraie. Ce résultat permet d'établir, par exemple, la simple-connexité des variétés rationnellement connexes.

On l'établit ici en général (pour X normal et une hypothèse plus faible que la kählérianité) lorsque $\mathfrak{g}$ est *stable* (définition 3.0). Cette propriété est satisfaite si $\mathfrak{g}$ est la classe des groupes moyennables, ou virtuellement résolubles, ou virtuellement polycycliques. Les arguments sont basés sur des versions relatives de [C4] et des résultats de [C1] et [C3].

La classe $\widetilde{\mathcal{A}b}$ des groupes virtuellement abéliens n'est pas stable (car non préservée par extensions). Le résultat mentionné ci-dessus fournit donc seulement : $\pi_1(X)$ est virtuellement polycyclique si X est $\widetilde{\mathcal{A}b}$-connexe. On montre au § 4 qu'en fait $\pi_1(X)$ est virtuellement abélien dans ce cas. La démonstration utilise de manière essentielle divers résultats de théorie de Hodge (existence d'une structure de Hodge mixte fonctorielle sur la complétion nilpotente de $\pi_1(X)$ (voir [H]) et nilpotence virtuelle des groupes de Kähler polycycliques (voir [A-N])).

Ce résultat résout (affirmativement) une conjecture énoncée dans [O-Z], et qui a en fait motivé le présent travail : $\pi_1(X)$ est-il virtuellement abélien si X est « toriquement connexe » (*i.e.* les Z_i ci-dessus sont des images de tores complexes).

Enfin, une notion proche de la stabilité a été introduite aussi dans [K1], et un résultat similaire à 3.3 obtenu (pour X projective) sous l'hypothèse que $\pi_1(\widehat{Z}_i) \in \mathfrak{g}$ (au lieu de $\pi_1(\widehat{Z}_i)_X \in \mathfrak{g}$, ici). Dans les applications, la différence entre ces deux hypothèses est souvent essentielle (voir la remarque 3.3.0).

Pour conclure, observons que les résultats précédents admettent, plus généralement, des versions relatives et s'appliquent aussi à la classe des groupes virtuellement nilpotents (3.3, 6.2 et 6.3), et que X peut être supposée seulement normale (6.4).

Expliquons brièvement le principe de la démonstration : les méthodes habituelles (§ 1) d'utilisation de Chow(X) et la considération de la Γ-réduction (voir [C3], ou [K1] pour le cas projectif) au début du § 3 réduisent à établir le fait suivant : si $f : X \to Y$ est un morphisme surjectif et connexe, avec X compacte et Kähler et $Z \subset X$ analytique irréductible compact (passant par un point générique de X), alors $\pi_1(\widehat{V})_X \in \mathfrak{g}$ si $\pi_1(\widehat{Z})_X \in \mathfrak{g}$ et si $\pi_1(F)_X \in \mathfrak{g}$, où F est une fibre générique de f et $V := f^{-1}(f(Z))$. Si $\mathfrak{g}$ est stable par extensions, c'est un résultat élémentaire utilisant la suite exacte d'homotopie (3.4). Lorsque $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathcal{A}b}$, on montre d'abord à l'aide du cas où $\mathfrak{g}$ est la classe des groupes virtuellement polycycliques, puis à l'aide de [A-N], que $\pi_1(X)$ est virtuellement nilpotent. On conclut alors (5.2.1) en montrant que $\pi_1(F)_X$ admet un sous-groupe d'indice fini contenu dans le centre de $\pi_1(X)$. Ce dernier résultat, d'intérêt indépendant, repose sur la construction (voir [H]) d'une structure de Hodge mixte fonctorielle sur les groupes de Malčev de $\pi_1(X)$ et $\pi_1(F)$.

Notons enfin que la démonstration des résultats principaux (3.3.1, 4.1, 6.1, 6.2 et 6.3) n'utilise des §§ 1.1 et 1.2 que (1.2.6).

Les résultats du présent travail ont été annoncés dans [C6].

Je voudrais remercier les *referees* dont les remarques ont permis d'améliorer considérablement la lisibilité du présent travail.

Note rajoutée sur épreuves : on trouvera dans [C7] une extension au cas des groupes nilpotents de classe $m \geq 2$, de 4.1, ainsi qu'une discussion plus détaillée des cas relatif et normal. Voir 5.2.3 et 6.5 pour plus de détails. Dans [C8], on compare les cas nilpotent et résoluble de rang fini.

1. S-CONNEXITÉ

On généralise ici un résultat obtenu dans [C2] concernant les quotients par la relation d'équivalence engendrée par une famille analytique de cycles compacts.

1.0. Définitions, conventions.

1.0.0. — La lettre X désignera un espace analytique compact normal et irréductible; Chow(X) désignera sa variété de Chow (encore appelée son espace des cycles).

On supposera que les composantes irréductibles de Chow(X) sont compactes dans toute la suite; cette condition est satisfaite si X est dans la classe $\mathcal{C}$ de Fujiki (*i.e.* s'il existe $f : \widehat{X} \to X$ holomorphe surjective avec $\widehat{X}$ lisse et kählérienne compacte).

Si S est un sous-ensemble analytique fermé de Chow(X), on notera :

• $(Z_s)_{s\in S}$ la famille universelle de cycles de X paramétrée par S (appelée *famille* S) ;

• $G_S := \{(s,x) \mid x \in Z_s\} \subset X \times S$ son graphe d'incidence, muni des projections naturelles $p_S : G_S \to S$ (qui est propre) et $q_S : G_S \to X$ (qui est propre précisément si S est compact) ;

• $q_S(G_S) := \big(\bigcup_{s\in S} Z_s\big) = X_S$ le *support* de S; c'est une réunion dénombrable de sous-ensembles analytiques compacts de X.

1.0.1. — Une *quasi-fibration* $f : X \to Y$ est une application méromorphe surjective telle qu'existent des ouverts de Zariski denses $Y^* \subset Y$ et $X^* \subset X$ tels que $f_{|X^*} : X^* \to Y^*$ est holomorphe propre à fibres connexes. On supposera Y normal.

L'application méromorphe «fibre» $\varphi : Y \to \mathrm{Chow}(X)$ qui associe à y générique dans Y la fibre réduite de f au-dessus de y a alors pour image une composante irréductible $\tilde{f}$ de $\mathrm{Chow}(X)$, et $\varphi : Y \to \tilde{f}$ est biméromorphe (voir [C1]). (Un exemple typique d'application méromorphe qui n'est pas une quasi-fibration est la projection linéaire $\lambda : \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_m$ pour $0 < m < n$.)

On identifiera deux quasi-fibrations ayant la même famille de fibres (vue dans $\mathrm{Chow}(X)$).

1.0.2. — Si Y est un espace analytique irréductible, on dira que $y \in Y$ est un *point général* de Y s'il appartient à une intersection dénombrable d'ouverts de Zariski denses (dépendant du contexte) de Y.

Si $f : X \mapsto Y$ est une quasi-fibration, sa *fibre générale* est celle au-dessus d'un point général y de Y, appartenant à Y^* (notation de 1.0.1).

1.0.3. — Soient S un sous-ensemble analytique compact irréductible de $\mathrm{Chow}(X)$ et $(Z_s)_{s\in S}$ la famille S. On dit que S est *admissible* si Z_s est irréductible réduit pour s générique dans S. On dit que S est *couvrante* si S est admissible et si son support X_S est égal à X (ceci signifie que X est recouvert par les Z_s). Soient $f : X \to Y$ une quasi-fibration et S une famille admissible. On dira que S est *f-couvrante* si $f(X_S) = Y$ (*i.e.* si le support de S rencontre chaque fibre de f).

1.0.4. — Soit S un sous-ensemble analytique fermé de $\mathrm{Chow}(X)$. Par l'hypothèse 1.0.0, S est réunion (dénombrable) de ses composantes irréductibles $(S_i)_{i\in I}$, qui sont compactes. On dira que S est *admissible* si chacune des S_i est admissible.

Si a est un élément de X, on notera $S(a)$ la *S-enveloppe de a* (ou encore la S-composante connexe de a), définie par

$$\begin{aligned} S(a) := \big\{ b \in X \mid \exists\, N \geq 1,\ \exists\, \sigma = (s_1, \ldots, s_N) \in S^N \\ \text{tels que } Z_\sigma := Z_{s_1} + \cdots + Z_{s_N} \\ \text{est connexe et contient } a \text{ et } b \big\}. \end{aligned}$$

(Un $\sigma = (s_1, \ldots, s_N)$ tel que Z_σ est connexe est appelé une S-chaîne. On dit que a et b peuvent être joints par une S-chaîne s'ils sont contenus dans une S-chaîne. L'ensemble $S(a)$ est donc l'ensemble des b qui peuvent être joints à a par une S-chaîne.)

Il est facile de voir (*cf.* [C2]) que les $S(a)$ forment (si $X_S = X$) une partition de X en classes d'équivalence pour la relation d'équivalence « a et b peuvent être joints par une S-chaîne ».

On dira que X est *S-connexe* si on a $S(a) = X$ pour un (donc pour tout) $a \in X$.

1.0.5. — Soient $f_i : X \to Y_i$ $(i = 1, 2)$ des quasi-fibrations et une famille couvrante $S \subset \mathrm{Chow}(X)$. On notera

$$S \leq f_1 \quad \text{si } f_1(Z_s) \text{ est un point } y_s \text{ de } Y_1$$

(*i.e.* si Z_s est contenue dans une fibre de f) pour s générique dans S. On notera

$$f_2 \leq f_1$$

si la fibre générique de f_2 est contenue dans une fibre de f_1 (*i.e.* s'il existe $g : Y_2 \to Y_1$ telle que $f_1 = g \circ f_2$).

1.1. S-quotients.

Les résultats des §§ 1.1 et 1.2 (à l'exception de 1.2.0, 1.2.1 et 1.2.2) ne sont pas directement nécessaires pour établir les résultats principaux de ce travail ; ils sont utilisés pour établir 1.2.6.

Rappelons le :

THÉORÈME 1.1.1 (voir [C2]). — *Soient X comme en* 1.0.0, *et $S \subset \mathrm{Chow}(X)$ une famille couvrante. Il existe une (unique) quasi-fibration $f_S : X \to X(S)$ telle que pour u général dans $X(S)$, la fibre $X_u := f_S^{-1}(u)$ au-dessus de u coïncide avec la S-enveloppe $S(a)$ pour tout a dans X_u.*

L'objectif de 1.1 est simplement d'étendre l'énoncé 1.1.1 au cas où S est admissible.

DÉFINITION 1.1.2. — Soient X comme en 1.0.0 et $S \subset \mathrm{Chow}(X)$, avec S analytique fermé admissible. On dit que la quasi-fibration $f_S : X \to X(S)$ *est le S-quotient de X* si elle possède la propriété énoncée dans le théorème 1.1.1 ci-dessus (propriété qui détermine f_S).

DÉFINITION 1.1.3. — Soit X comme en 1.0.0 ; soient $f : X \to Y$ une quasi-fibration et $S \subset \mathrm{Chow}(X)$ une famille admissible avec S irréductible et f-couvrante. On note S_f la famille admissible couvrante dont le membre générique est $Z_s^f := f^{-1}\big(f(Z_s)\big)$ pour s générique dans S. On dira que S_f *est la famille couvrante engendrée* par f et S.

PROPOSITION 1.1.4. — *Soient X, f, S comme en* 1.1.3 *ci-dessus, et soit S_f la famille couvrante engendrée par S et f. Soit $f_{S_f} : X \to X(S_f)$ le S_f-quotient de X (th.* 1.1.1 *et déf.* 1.1.2*). Alors f_{S_f} est le Σ-quotient de X, où*

$\Sigma \subset \mathrm{Chow}(X)$ *est la famille admissible dont les composantes irréductibles sont* S *et* $\tilde{f} \subset \mathrm{Chow}(X)$, *la famille des fibres de* f (*voir* 1.0.1).

En d'autres termes, la fibre générale de f_{S_f} est la Σ-enveloppe de l'un quelconque de ses points.

Démonstration. — La fibre générale de f_{S_f} est la S_f-enveloppe de chacun de ses points ; elle est donc contenue dans la Σ-enveloppe de chacun de ses points. (Il est facile de vérifier, par passage à la limite, que chacun des Z_σ, pour $\sigma \in S_f$ est Σ-connexe.)

Par ailleurs, $S_f \leq f_{S_f}$; donc $S \leq f_{S_f}$ et $f \leq f_{S_f}$. Ceci entraîne que la fibre générale de f_{S_f} contient la Σ-enveloppe de chacun de ses points, et établit l'assertion.

COROLLAIRE 1.1.5. — *Soient* X *comme en* 1.0.0 *et* $S \subset \mathrm{Chow}(X)$ *une famille admissible* (*qui admet donc un ensemble fini ou dénombrable de composantes irréductibles compactes admissibles* S_i, $i \in I$). *Alors* X *admet un* S*-quotient.*

Démonstration. — On procède par récurrence sur $\dim_{\mathbb{C}}(X)$ (en remarquant que la propriété 1.0.0 est satisfaite par Y si elle l'est par X et si $f : X \to Y$ est une quasi-fibration). Si aucune des S_i n'est couvrante, on prend $f_S = \mathrm{id}_X$. Sinon, on considère $f_0 = f_{S_0} : X \to X(S_0)$, où S_0, avec $0 \in I$, est couvrante. Si aucune des S_i, $i \neq 0$, n'est f_0-couvrante, on prend $f_{S_f} = f_0$. Si S_1 est disons f_0-couvrante, on considère

$$f_1 := f_{S_1'} : X \longrightarrow X(S_0, S_1),$$

où S_1' est engendrée par f_0 et S_1 (voir 1.1.3). On construit ainsi par récurrence une suite de quasi-fibrations $f_0, f_1, \ldots, f_m$ avec

$$f_0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_m,$$

et de composantes irréductibles $S_0, \ldots, S_m$ de S telles que

$$f_k : X \to X(S_0, \ldots, S_k) \quad \text{pour} \quad k = 0, \ldots, m$$

où f_{k+1} est le $\widetilde{S}_{k+1}$-quotient de X, avec $\widetilde{S}_{k+1}$ la famille engendrée par f_k et S_{k+1}. Puisque

$$\dim_{\mathbb{C}}\big(X(S_0, \ldots, S_{k+1})\big) < \dim_{\mathbb{C}}\big(X(S_0, \ldots, S_k)\big),$$

ce processus s'arrête pour un entier $m \leq \dim_{\mathbb{C}}(X)$ pour lequel aucune des familles S_i ($i \neq 0, \ldots, m$) n'est f_m-couvrante. On prend $f_S := f_m$. Cette fibration est le S-quotient de X, par récurrence sur k et 1.1.4.

COROLLAIRE 1.1.6. — *Soient* X, S *comme en* 1.1.5. *Si* $f_S : X \to X(S)$ *est le* S*-quotient de* X, *soient* $u \in X(S)$ *général dans* $X(S)$ *et soit* $X_u := f_S^{-1}(u)$. *Alors :*

(i) X_u *est normal* (*lisse si* X *est lisse*) *et* S*-connexe*;

(ii) *si* Z_s *rencontre* X_u, *pour* $s \in S$, *alors* Z_s *est contenu dans* X_u.

REMARQUE 1.1.7. — Tous les résultats exposés ici sont encore valables, même si X n'est pas compact, pourvu qu'il possède la propriété 1.0.0* suivante, équivalente à 1.0.0 lorsque X est compact :

1.0.0*. — Pour toute composante irréductible S de Chow(X), le graphe G_S de la famille S est propre *sur* X.

Pour le voir, il suffit d'appliquer [C3], appendice à la place de 1.1.4 (voir [C2]). La condition 1.0.0* est vérifiée si, par exemple, X est un revêtement connexe étale d'une variété kählérienne compacte (ou, plus généralement, de la classe $\mathcal{C}$ de Fujiki, voir 1.0.0).

1.2. $\mathfrak{g}$-connexité.

1.2.0. — Soit $\mathfrak{g}$ une classe de groupes telle que $G \in \mathfrak{g}$ et H isomorphe à G entraînent $H \in \mathfrak{g}$. On dira simplement que $\mathfrak{g}$ est une *classe de groupes.*

Les classes considérées ici sont les classes

$$\mathfrak{F},\ \mathcal{A}b,\ \mathcal{N}ilp,\ \mathcal{P},\ \mathcal{R},\ \mathcal{M}$$

des groupes finis, abéliens, nilpotents, polycycliques, résolubles et moyennables, ainsi que leurs complétions virtuelles (voir 2.0.2, 2.1, 2.1.1 pour les définitions).

1.2.1. *Notation.* — Soit $Z \subset X$ un sous-ensemble analytique compact et irréductible; soit $j_Z : Z \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle; soit $\nu_Z : \widehat{Z} \mapsto Z$ la normalisation. L'application composée

$$j_Z \circ \nu_Z : \widehat{Z} \longrightarrow X$$

induit un morphisme de groupes $\pi_1(\widehat{Z}) \to \pi_1(X)$ dont on notera $\pi_1(\widehat{Z})_X$ l'image.

Les considérations qui suivent ne nécessitent pas de choisir des points base, quitte éventuellement à remplacer X par un revêtement étale fini adéquat. En effet, les sous-groupes de $\pi_1(X)$ considérés ici ont tous un normalisateur d'indice fini dans $\pi_1(X)$ (voir 1.2.3); or le choix d'un point base différent définit un nouveau groupe fondamental isomorphe au premier par un isomorphisme unique à conjugaison près.

Si $f : X \to Y$ est une quasi-fibration de fibre générique F, on notera

$$\pi_1(f)_X := \pi_1(F)_X\ ;$$

c'est un sous-groupe normal de $\pi_1(X)$.

LEMME 1.2.2. — *Soit $\Sigma \subset \mathrm{Chow}(X)$ un sous-ensemble tel que, pour tout $\sigma \in \Sigma$, le cycle correspondant Z_σ est irréductible et réduit. Soit S l'adhérence de Zariski de Σ dans $\mathrm{Chow}(X)$. Il existe alors un sous-ensemble analytique fermé S' de S, d'intérieur vide dans S, tel que pour toute composante irréductible S_0 de S :*

(i) *Z_s est irréductible réduit pour $s \in (S - S')$;*

(ii) *$\pi_1(\widehat{Z}_s)_X$ est isomorphe à $\pi_1(\widehat{Z}_{s'})_X$ si $s, s' \in (S_0 - (S_0 \cap S')) = S_0^*$. (Noter que $\Sigma_0^* := \Sigma \cap S_0^*$ est Zariski dense dans S_0.)*

Remarquons que, plus précisément, les groupes décrits en 1.2.2 sont conjugués dans $\pi_1(X)$.

Démonstration. — On peut supposer S irréductible. Soient alors $G_S \subset S \times X$ le graphe d'incidence de S et $p_S : G_S \to S$, $q_S : G_S \to X$ les projections naturelles. Soit $\delta : \overline{G}_S \to G_S$ un modèle lisse de G_S (qui est compact, par l'hypothèse 1.0.0), et $p_S \circ \delta := \bar{p}_S : \overline{G}_S \to S$ la projection composée. Soit ${}^*S$ l'ouvert de Zariski dense des points lisses de S au-dessus desquels le morphisme $\bar{p}_S$ est lisse, et ${}^*\overline{G}_S := \bar{p}_S^{-1}({}^*S)$.

La fibration $\bar{p}_S : {}^*\overline{G}_S \to {}^*S$ est donc localement triviale topologiquement, et l'assertion résulte de la suite exacte d'homotopie associée en remarquant que, pour s dans ${}^*S$, la fibre $\overline{Z}_s$ de $(\overline{G}_S)$ au-dessus de s n'est autre qu'un modèle lisse de $\widehat{Z}_s$, et que l'application naturelle $\pi_1(\overline{Z}_s) \to \pi_1(\widehat{Z}_s)$ est surjective car ses fibres sont toutes connexes, de sorte que $(\overline{p}_S)_* : \pi_1(\overline{Z}_s) \to \pi_1(X)$ a pour image $\pi_1(\widehat{Z}_s)_X$.

REMARQUE 1.2.3. — Il résulte de la démonstration de 1.2.2 que $\pi_1(\widehat{Z}_s)_X$ possède dans $\pi_1(X)$ un normalisateur d'indice fini, si s est générique dans $S \subset \mathrm{Chow}(X)$, S famille couvrante de X (voir [C4] ou [K1, 2.11]).

REMARQUE 1.2.4. — On peut éviter le théorème de désingularisation en recourant aux stratifications de Whitney (voir [K1, 2.8]).

COROLLAIRE 1.2.5. — *Soit $\mathfrak{g}$ une classe de groupes (au sens de 1.2.0) et soit X comme en 1.0.0. Il existe une famille admissible $S(\mathfrak{g}) \subset \mathrm{Chow}(X)$ telle que :*

(i) *pour toute composante irréductible S_i de $S := S(\mathfrak{g})$ et tout s générique de S_i, on ait $\pi_1(\widehat{Z}_s)_X \in \mathfrak{g}$;*

(ii) *pour tout sous-ensemble analytique irréductible Z de X tel que $\pi_1(\widehat{Z})_X \in \mathfrak{g}$, il existe $s \in S^*$ tel que $Z = Z_s$, où $S^* = (S - S')$ et S' sont comme en* 1.2.2.

Démonstration. — Appliquer 1.2.2 à

$$\Sigma = \big\{\sigma \in \mathrm{Chow}(X) \text{ tel que } Z_\sigma \text{ est irréductible réduit et } \pi_1(\widehat{Z}_\sigma)_X \in \mathfrak{g}\big\}. \quad \square$$

Appliquant maintenant 1.1.5 à $S(\mathfrak{g})$, on obtient :

THÉORÈME 1.2.6. — *Soit $\mathfrak{g}$ une classe de groupes et X satisfaisant* 1.0.0. *Il existe une quasi-fibration (unique) $f_{\mathfrak{g}} : X \to X(\mathfrak{g})$ telle que pour u général dans $X(\mathfrak{g})$, on ait :*

(i) *$X_u := f_{\mathfrak{g}}^{-1}(u)$ est $S(\mathfrak{g})$-connexe;*

(ii) *si Z est analytique compact et irréductible dans X, et rencontre X_u avec $\pi_1(\widehat{Z})_X \in \mathfrak{g}$, alors Z est contenu dans X_u.*

On appellera $f_{\mathfrak{g}} : X \to X(\mathfrak{g})$ le $\mathfrak{g}$-quotient de X.

Remarquons que X est $\mathfrak{g}$-connexe si deux points génériques de X peuvent être joints par une $S(\mathfrak{g})$-chaîne de X (*i.e.* un sous-ensemble analytique compact connexe dont toute composante irréductible Z satisfait $\pi_1(\widehat{Z})_X \in \mathfrak{g}$). (La $\mathfrak{g}$-connexité entraîne donc la $S(\mathfrak{g})$-connexité, qui suffit aux situations considérées ici.)

Par exemple, si X est rationnellement connexe (*i.e.* deux quelconques de ses points sont contenus dans une courbe connexe compacte dont les composantes irréductibles sont rationnelles), alors X est $\{1\}$-connexe, où $\mathfrak{g} = \{1\}$ est la classe des groupes ayant un seul élément (neutre).

Un second exemple est celui des variétés « toriquement connexes » (voir 4.1.3) : elles sont $\mathcal{A}b$-connexes.

2. CLASSES STABLES DE GROUPES

2.0. DÉFINITION. — Soit $\mathfrak{g}$ une classe de groupes. On dira que $\mathfrak{g}$ est *virtuellement stable* si, lorsque

$$1 \to K \longrightarrow G \xrightarrow{\pi} H \to 1$$

est une suite exacte de groupes, et $L \subset G$ un sous-groupe d'indice fini dans G, alors :

(i) $H \in \mathfrak{g}$ si $G \in \mathfrak{g}$;

(ii) $L \in \mathfrak{g}$ si $G \in \mathfrak{g}$;

(ii) $G \in \mathfrak{g}$ si K et H' sont dans $\mathfrak{g}$ et si K est de type fini, où H' est un sous-groupe de G tel que $\pi(H') = H$.

On dira que $\mathfrak{g}$ est *stable* si $\mathfrak{g}$ est virtuellement stable et satisfait aussi

(ii)′ $G \in \mathfrak{g}$ si $L \in \mathfrak{g}$.

Remarque 2.0.1. — Des conditions analogues ont été indépendamment considérées dans [K1, § 3]. (La condition « K de type fini dans 2.0 (iii) » n'y est pas imposée ; elle joue un rôle crucial ici.)

Remarquons que si $\mathfrak{g}$ est virtuellement stable et non vide, alors $\{1\} \in \mathfrak{g}$ et que $G_1 \in \mathfrak{g}$ si $G \in \mathfrak{g}$ et si G_1 est isomorphe à G (par 1.2.0).

Exemples 2.0.2. — Rappelons qu'un groupe est *polycyclique* s'il est résoluble et si tous ses sous-groupes sont de type fini. De manière équivalente, $\mathcal{P}$ est la plus petite classe de groupes contenant les groupes cycliques, et stable par extensions.

Soit $\mathfrak{F}$ (resp. $\mathcal{A}b$, $\mathcal{N}ilp$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{M}$) la classe des groupes finis (resp. abéliens, nilpotents, polycycliques, résolubles de type fini, résolubles, moyennables). Alors :

- $\mathfrak{F}$ et $\mathcal{M}$ sont stables ;
- $\mathcal{P}$, $\mathcal{R}_f$ et $\mathcal{R}$ sont virtuellement stables, mais
- $\mathcal{A}$b et $\mathcal{N}ilp$ ne sont pas virtuellement stables.

Remarquons qu'il existe des groupes résolubles de type fini ayant des sous-groupes qui ne sont pas de type fini (par exemple le groupe à deux générateurs a et b défini par la relation $aba^{-1} = b^2$). Cette situation est exclue dans les cas considérés ici ($G = \pi_1(X)$, $K = \pi_1(\widehat{Z})_X$).

2.1. Définition. — Soit $\mathfrak{g}$ une classe de groupes. On dit que le groupe G est *virtuellement dans* $\mathfrak{g}$ (ou *presque dans* $\mathfrak{g}$) si G admet un sous-groupe L d'indice fini avec $L \in \mathfrak{g}$. On note $\tilde{\mathfrak{g}}$ la classe des groupes virtuellement dans $\mathfrak{g}$. On appelle $\tilde{\mathfrak{g}}$ la *complétion virtuelle* de $\mathfrak{g}$. Bien sûr, $\mathfrak{g} \subset \tilde{\mathfrak{g}}$

Exemple 2.1.1. — On a $\widetilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}$ et $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$. Mais $\mathcal{A}b \subsetneqq \widetilde{\mathcal{A}b}$, et l'on a inclusion stricte pour les autres classes de 2.0.2.

2.2. Proposition. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une classe de groupes telle que* $\mathfrak{g}$ *est virtuellement stable. Alors* $\widetilde{\mathfrak{g}}$ *est stable.*

COROLLAIRE 2.2.1. — *La classe* $\widetilde{\mathcal{P}}$ (*resp.* $\widetilde{\mathcal{R}}_f$, *resp.* $\widetilde{\mathcal{R}}$) *est stable* (*il s'agit de la classe des groupes virtuellement polycycliques* (*resp. résolubles de type fini, resp. résolubles*)).

2.3. Démonstration de 2.2.

Les propriétés 2.0 (i), (ii), (ii)′ sont faciles à établir pour $\widetilde{\mathfrak{g}}$ puisque $\mathfrak{g}$ est virtuellement stable, par hypothèse. On va établir 2.0 (iii). Soit donc $1 \to K \to G \to H \to 1$ une suite exacte, avec $K, H' \in \widetilde{\mathfrak{g}}$ et K de type fini. On veut montrer que $G \in \widetilde{\mathfrak{g}}$. Soit $K_1 \subset K$ d'indice fini dans K et tel que $K_1 \in \mathfrak{g}$.

LEMME 2.3.1. — *Il existe $K_2 \subset K_1$, avec K_2 normal dans G et d'indice fini dans K.*

Montrons que 2.3.1 entraîne 2.2 d'abord. Soit $H'' \subset H'$ un sous-groupe d'indice fini avec $H'' \in \mathfrak{g}$. Alors $G' := K_2H'' = \langle K_2, H''\rangle$ est d'indice fini dans G et $G' \in \mathfrak{g}$ puisque $\mathfrak{g}$ est virtuellement stable. Donc $G \in \widetilde{\mathfrak{g}}$, ce qui établit 2.2.

Il reste à établir 2.3.1. Soit $N_G(K_1)$ le normalisateur dans G de K_1. Par le lemme 2.3.2 ci-dessous, $N_G(K_1)$ est d'indice fini dans G, et K_1 n'a donc qu'un nombre fini de conjugués dans G, dont l'intersection est le groupe K_2 cherché.

LEMME 2.3.2 (voir [S, lemma 2, p. 2]). — *Soient $K_1 \subset K \subset G$ des groupes, avec K_1 d'indice fini dans K, normal dans G. Si K est de type fini, alors $N_G(K_1)$ est d'indice fini dans G.*

Démonstration. — Les sous-groupes $Q_g := (K/gK_1g^{-1})$, $g \in G$, sont finis, isomorphes, quotients de K. Si F est fini, fixé, avec $Q_g \simeq F$, il n'y a donc qu'un nombre fini de morphismes $\eta : K \to F$, donc de noyaux Q_g possibles. ∎

2.4. Notation.

Si H' et K sont deux sous-groupes du groupe G, on a noté $\langle H', K\rangle$ le sous-groupe de G engendré par H' et K. Si K est normal dans G,

$$\langle H', K\rangle = KH' = H'K.$$

2.5. Remarque.

On utilisera implicitement le lemme suivant (pour passer à des revêtements étales finis adéquats de X) : si $H \subset K$ et $G_1 \subset G$ sont des sous-groupes de G, et si G_1 est d'indice fini dans G, il en est de même de H dans K si et seulement si l'indice de $(H \cap G_1)$ dans $(K \cap G_1)$ est fini.

3. STABILITÉ ET $\mathfrak{g}$-CONNEXITÉ

3.0. — L'objectif de cette section est d'établir le théorème 3.3 ci-dessous, d'où résulte en particulier que si $\mathfrak{g}$ est stable et si X satisfait 1.0.0 en étant $\mathfrak{g}$-connexe, alors $\pi_1(X) \in \mathfrak{g}$. Des rappels sont nécessaires.

3.1. THÉORÈME. — *Soient X satisfaisant* 1.0.0 *et Γ un sous-groupe normal de $\pi_1(X)$. Il existe alors une (unique) quasi-fibration $\psi_\Gamma : X \to X_\Gamma$ telle que :*

(i) *$\pi_1(\psi_\Gamma)_X$ contient Γ comme sous-groupe d'indice fini;*

(ii) *si Z est un sous-ensemble analytique compact irréductible de X contenant un point général a de X, et si $\big(\pi_1(\widehat{Z})_X \cap \Gamma\big)$ est d'indice fini dans $\pi_1(\widehat{Z})_X$, alors Z est contenu dans la fibre de ψ_Γ contenant a.*

Démonstration. — Ceci n'est qu'une reformulation du cas galoisien du résultat principal de [C3] (ou de [K1] lorsque X est projective). En effet, soit

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{X} & \xrightarrow{\ \widetilde{\psi}_\Gamma\ } & \widetilde{X}_\Gamma \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ X = \widetilde{X}/\Gamma & \xrightarrow{\ \psi_\Gamma\ } & X_\Gamma := \widetilde{X}_\Gamma/\Gamma \end{array}$$

la $\widetilde{\Gamma}$-réduction de $\pi : \widetilde{X} \to X$, le revêtement galoisien de X de groupe Γ (voir [C3]). La propriété caractéristique de $\widetilde{\psi}_\Gamma$ est la suivante : elle est propre et si $a \in Z$ est comme en 3.1 (ii), les composantes irréductibles de $\pi^{-1}(Z)$ sont compactes si et seulement si Z est contenu dans la fibre de ψ_Γ passant par a. Or, la condition de compacité est justement équivalente à la finitude de l'indice $\big[\pi_1(\widehat{Z})_X : \big(\pi_1(\widehat{Z})_X \cap \Gamma\big)\big]$. D'où l'assertion. $\square$

En particulier, nous avons :

3.2. COROLLAIRE. — *Soient X satisfaisant* 1.0.0 *et $f : X \to Y$ une quasi-fibration. Soit $S \subset \mathrm{Chow}(X)$ une famille admissible et f-couvrante, avec S irréductible. Soit $\psi_\Gamma : X \to X_\Gamma$ la quasi-fibration (Γ-réduction de X) définie par Γ, où $\Gamma := \pi_1(\widehat{Z}_s^f)$, avec $Z_s^f := f^{-1}\big(f(Z_s)\big)$ pour s générique dans S (Γ sera supposé normal dans $\pi_1(X)$, quitte à remplacer X par un revêtement étale fini). Alors Γ est d'indice fini dans $\pi_1(\psi_\Gamma)_X$, et chacun des $(\widehat{Z}_s^f)$ est contenu dans une fibre de ψ_Γ.*

3.3. THÉORÈME. — *Soient $\mathfrak{g}$ une classe stable de groupes, et X satisfaisant* 1.0.0. *Soit $f_{\mathfrak{g}} : X \to X(\mathfrak{g})$ le $\mathfrak{g}$-quotient de X (voir* 1.2.6*), et soit*

X_u une fibre générique de $f_{\mathfrak{g}}$. Alors

$$\pi_1(X_u)_X := \pi_1(f_{\mathfrak{g}})_X \in \mathfrak{g}. \quad \square$$

REMARQUE 3.3.0. — Lorsque X est Moishezon, le résultat précédent est analogue à [K1, 3.11]. La différence principale est que dans *loc. cit.*, la condition considérée est

$$\pi_1(X_u) \in \mathfrak{g}$$

(et non $\pi_1(X_u)_X \in \mathfrak{g}$, comme ici). Cette différence est essentielle dans nombre d'applications ; elle est importante précisément dans l'exemple donné en [K1, 3.12] de l'estimation du groupe fondamental d'une hypersurface cubique lisse X de $\mathbb{P}_4(\mathbb{C})$: si Z est la surface de X balayée par les droites ℓ contenues dans X et rencontrant une droite fixée ℓ_0, alors $\widehat{Z}$ est une surface réglée sur une courbe C' de genre 11 (*cf.* [K1, 3.12]). Donc $\pi_1(\widehat{Z})$ contient un groupe libre à 21 générateurs. Cependant, $\pi_1(\widehat{Z})_X \subset \pi_1(X) = \{1\}$. En fait, 3.3 fournit « $\pi_1(X)$ est fini » (prendre $\mathfrak{g} = \mathcal{F}$).

Rappelons (voir 1.2.6) que X est $\mathfrak{g}$-connexe si deux points génériques de X peuvent être joints par une $\mathfrak{g}$-chaîne $Z = Z_1 + \cdots + Z_N$, avec Z connexe et $\pi_1(\widetilde{Z}_i)_X \in \mathfrak{g}$ pour $i = 1, 2, \ldots, N$.

COROLLAIRE 3.3.1. — *Soit $\mathfrak{g}$ une classe stable de groupes, et X satisfaisant* 1.0.0. *Si X est $\mathfrak{g}$-connexe, alors $\pi_1(X) \in \mathfrak{g}$.*

Ce résultat s'applique donc en particulier à $\mathcal{F}$ (où il résulte en fait de [C3]), $\widetilde{\mathcal{P}}$, $\widetilde{\mathcal{R}}_f$ et $\widetilde{\mathcal{M}}$. On l'obtient de 3.3 en remarquant que $X(\mathfrak{g})$ est un point si X est $\mathfrak{g}$-connexe. (Une démonstration directe de 3.3.1 est aussi donnée, en même temps que celle de 3.3.)

Ce résultat 3.3.1 établit donc la version faible de la conjecture de [O-Z] et [Z] : si X est compacte Kähler lisse et « toriquement connexe » (voir § 4), $\pi_1(X)$ est-il virtuellement résoluble ? Nous obtenons un peu mieux : $\pi_1(X)$ est virtuellement polycyclique. La version forte ($\pi_1(X)$ est virtuellement abélien) sera établie au § 4.

REMARQUE 3.3.2. — D'après un résultat de C. Taubes, si Γ est un groupe de présentation finie arbitraire, il existe une variété complexe compacte Z de dimension 3 telle que $\pi_1(Z) \simeq \Gamma$. En fait, Z est un espace de twisteurs et deux points quelconques de Z peuvent donc être joints par une chaîne de courbes rationnelles lisses. Donc, Z est $\{1\}$-connexe, si $\mathfrak{g} = \{1\}$ est la classe des groupes réduits à leur élément neutre. La condition d'être $\{1\}$-connexe n'entraîne donc aucune restriction sur $\pi_1(Z)$ sans hypothèse kählérienne.

Démonstration du théorème 3.3. — Soit $f : X \to Y$ une quasi-fibration telle que (*) $\pi_1(f)_X \in \mathfrak{g}$ et telle que $\dim(Y)$ soit minimum (parmi les (f, Y) possédant la propriété (*) précédente). On veut montrer que f est le $\mathfrak{g}$-quotient de X, ce qui établira l'énoncé. Par l'absurde, si ce n'est pas le cas, il existe d'après 1.2.2 une famille admissible $S \subset \mathrm{Chow}(X)$ qui est f-couvrante avec $\pi_1(\widehat{Z}_s)_X \in \mathfrak{g}$ pour s générique dans S.

Le lemme 3.4 ci-dessous montre alors que $\pi_1(\widehat{Z}_s^f)$ appartient à $\mathfrak{g}$ si

$$Z_s^f := f^{-1}\big(f(Z_s)\big)$$

est le membre générique de la famille S_f définie en 1.1.3.

Le corollaire 3.2 montre alors que $\pi_1(\widehat{Z}_s^f)$ est d'indice fini dans $\pi_1(\psi_\Gamma)_X$. Donc $\pi_1(\psi_\Gamma)_X$ est dans $\mathfrak{g}$, par stabilité de $\mathfrak{g}$. Mais

$$\dim(X_\Gamma) \leq \dim\big((Y) - \dim\big(f(Z_s)\big) < \dim(Y),$$

puisque les Z_s^f sont contenus dans les fibres de ψ_Γ, et ceci contredit la minimalité de $\dim(Y)$. D'où 3.3 (resp. 3.3.1). $\square$

3.4. LEMME. — *Soient X, f et S comme en* 3.3. *Supposons que S est f-couvrante. Alors $\langle \pi_1(\widehat{Z}_s)_X, \pi_1(f)_X\rangle$ est un sous-groupe d'indice fini de*

$$\pi_1(\widehat{Z}_s^f)_X := \pi_1\big(f^{-1}\widehat{(f(Z_s))}\big)_X$$

pour s générique dans S (*voir* 1.1.3). *En particulier, si $\mathfrak{g}$ est stable et si $\pi_1(f)_X$ et $\pi_1(\widehat{Z}_s)_X$ sont dans $\mathfrak{g}$, alors $\pi_1(\widehat{Z}_s^f)$ est aussi dans $\mathfrak{g}$.*

Démonstration. — Elle est presque identique à celle du résultat principal de [C4]. On a un morphisme à fibre générique lisse (celle de f) : $\widehat{Z}_s^f \xrightarrow{f} \widehat{Z}_s$, obtenu par le changement de base $\widehat{Z}_s \to f(Z_s)$. Celui-ci fournit, par restriction au-dessus de l'ouvert de Zariski dense $({}^*\widehat{Z}_s)$ de $\widehat{Z}_s$ au-dessus duquel f est lisse, une suite exacte d'homotopie :

$$\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1({}^*\widehat{Z}_s^f) \longrightarrow \pi_1({}^*\widehat{Z}_s) \to 1, \tag{3.4.0}$$

où F est la fibre générique de f.

Par normalité, les applications naturelles de restriction $\pi_1({}^*\widehat{Z}_s^f) \to \pi_1(\widehat{Z}_s^f)$ et $\pi_1({}^*\widehat{Z}_s) \to \pi_1(\widehat{Z}_s)$ sont surjectives.

On a, de plus, une section analytique naturelle $\sigma : \widehat{Z}_s \to \widehat{Z}_s^f$ qui fournit des scindages $\sigma_* : \pi_1(\widehat{Z}_s) \to \pi_1(\widehat{Z}_s^f)$ et $\sigma_* : \pi_1({}^*\widehat{Z}_s) \to \pi_1({}^*\widehat{Z}_s^f)$ compatibles.

On obtient alors la conclusion cherchée en composant les applications ci-dessus avec les morphismes déduits des inclusions à valeurs dans $\pi_1(X)$, et en observant que l'image de $\pi_1(F)$ est, par définition $\pi_1(f)_X$, tandis que celle de $\pi_1(\widehat{Z}_s)$ est $\pi_1(\widehat{Z}_s)_X$. $\square$

3.5. QUESTION. — Si X est une variété kählérienne compacte, et si $\pi_1(X)$ est moyennable, alors $\pi_1(X)$ est virtuellement nilpotent dans les exemples connus. Ceci est-il général ? On peut décomposer cette question en trois questions intermédiaires :

3.5.1. $\pi_1(X) \in \mathcal{M} \Rightarrow \pi_1(X) \in \widetilde{\mathcal{R}}_f$?

3.5.2. $\pi_1(X) \in \widetilde{\mathcal{R}}_f \Rightarrow \pi_1(X) \in \widetilde{\mathcal{P}}$?

3.5.3. $\pi_1(X) \in \widetilde{\mathcal{P}} \Rightarrow \pi_1(X) \in \widetilde{\mathcal{N}ilp}$?

Remarquons que l'alternative de Tits montre que si $\rho : \pi_1(X) \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{C})$ est une représentation linéaire fidèle et si $\rho(\pi_1(X))$ appartient à $\mathcal{M}$, alors $\rho\big(\pi_1(X)\big) \in \widetilde{\mathcal{P}}$. S'il existe un exemple X qui contredit 3.5.1 ou 3.5.2, $\pi_1(X)$ n'est donc pas « linéaire ».

3.6. — La question 3.5.3 a été résolue affirmativement dans [A-N], qui établissent le :

THÉORÈME 3.6.1. — *Soit X une variété kählérienne compacte et connexe. Si $\pi_1(X)$ est virtuellement polycyclique, alors $\pi_1(X)$ est virtuellement nilpotent.*

Appliquant 3.3.1, on en déduit :

THÉORÈME 3.6.2. — *Soit X une variété kählérienne compacte et connexe qui est $\widetilde{\mathcal{P}}$-connexe. Alors $\pi_1(X)$ est virtuellement nilpotent.*

Nous allons maintenant voir que 3.3.1 reste encore valable si $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathcal{A}b}$. La démonstration, donnée au § 4 ci-dessous, utilise 3.6.1 et la formalité des variétés kählériennes compactes (dans le sens de [D-G-M-S]).

4. CONNEXITÉ ABÉLIENNE

4.0. — On considère la $\widetilde{\mathcal{A}b}$-connexité lorsque X est une variété (lisse) compacte et connexe kählérienne (ou dans la classe $\mathcal{C}$). Alors, X satisfait les conditions énoncées en 1.0.0, de sorte que les résultats des §§ 1, 2, 3 lui sont applicables. Puisque $\widetilde{\mathcal{A}b}$ n'est pas stable, on ne peut appliquer 3.3.1. Cependant :

4.1. Théorème. — *Si X est une variété kählérienne compacte, connexe et $\widetilde{\mathcal{A}}$b-connexe (au sens de* 1.0.4, *avec $S = S(\mathfrak{g})$; voir aussi* 3.3.1), *alors $\pi_1(X) \in \widetilde{\mathcal{A}}$b (i.e. $\pi_1(X)$ est virtuellement abélien).*

Remarque 4.1.1. — La démonstration permet d'obtenir l'analogue de 3.3, avec $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathcal{A}b}$ (à condition d'utiliser la version adéquate de 3.6.1 : $\pi_1(\widehat{Z})_X \in \widetilde{\mathcal{N}ilp}$ si $\pi_1(\widehat{Z})_X \in \widetilde{\mathcal{P}}$). Voir 6.2 et 6.3 ci-dessous.

Exemple 4.1.2. — Si $\pi_1(X) \in \widetilde{\mathcal{N}ilp}$, X n'est donc pas $\widetilde{\mathcal{A}b}$-connexe si $\pi_1(X) \notin \widetilde{\mathcal{A}b}$. De tels exemples de X sont fournis dans [C5] et [S-V].

On déduit de 4.1 une réponse positive aux questions posées dans [Z] et [O-Z], et qui ont en fait motivé le présent travail :

Définition 4.1.3. — Une variété complexe compacte X est dite *toriquement connexe si* deux points quelconques de X peuvent être joints par une chaîne connexe $Z = Z_1 + \cdots + Z_N$ dans laquelle les Z_i sont des images holomorphes de tores complexes. (Une telle variété X ne peut être de type général.)

Corollaire 4.1.4. — *Soit X une variété kählérienne compacte et toriquement connexe. Alors $\pi_1(X)$ est virtuellement abélien.*

4.2. Démonstration de 4.1.

Puisque X est $\widetilde{\mathcal{A}b}$-connexe, et que $\widetilde{\mathcal{A}b} \subset \widetilde{\mathcal{P}}$, on en déduit par 3.3.1 que $\pi_1(X) \in \widetilde{\mathcal{P}}$. Par 3.6, on en déduit que $\pi_1(X) \in \widetilde{\mathcal{N}ilp}$.

Remplaçant X par un revêtement étale fini adéquat (ce qui préserve le caractère $\widetilde{\mathcal{A}b}$-connexe), on peut aussi supposer que $\pi_1(X)$ est nilpotent.

Quitte à remplacer F par un revêtement étale fini adéquat, on supposera, de plus, que $\pi_1(f)_X$ est abélien (et non seulement virtuellement abélien) et normal dans $\pi_1(X)$ en remplaçant X par un revêtement étale fini adéquat (ce qui préserve la $\widetilde{\mathcal{A}b}$-connexité) dans ce qui suit.

La démonstration de 4.1 est maintenant identique à celle de 3.3 (dont on utilisera les notations relatives à $f : X \to Y$) en y remplaçant le lemme 3.4 par le lemme 4.3 ci-dessous :

4.3. Lemme. — *Dans la situation de* 4.1, *on a $\pi_1(\widehat{Z}_s^f) \in \widetilde{\mathcal{A}b}$.*

Démonstration. — Soit $j : F \to X$ l'inclusion naturelle, où F est une fibre générique de $f : X \to Y$. Par 5.2.1 ci-dessous, puisque $\pi_1(X) \in \mathcal{N}ilp$ et $\pi_1(F)_X \in \mathcal{A}b$, $\pi_1(F)_X$ admet un sous-groupe d'indice fini $\pi_1(F)_X^0$ qui est contenu dans le centre de $\pi_1(X)$. Quitte à remplacer X par un revêtement étale fini adéquat (fourni par le lemme 4.2.1), on peut supposer que $\pi_1(F)_X = \pi_1(F)_X^0$ est central dans $\pi_1(X)$. Puisque $\pi_1(\widehat{Z}_s)_X \in \mathcal{A}b$, on en déduit que $\langle \pi_1(\widehat{Z}_s), \pi_1(F)_X \rangle$ est abélien. Donc (par 3.4), $\pi_1(\widehat{Z}_s^f)$ appartient à $\widetilde{\mathcal{A}b}$. □

5. MORPHISMES DE GROUPES DE KÄHLER

On a utilisé le corollaire 5.2.1, établi ci-dessous, et dont la démonstration repose sur des techniques très différentes.

5.0.1. — Soit G un groupe. On note $C_0^k G$ la suite centrale descendante de G, définie par

$$C_0^1 G = G \quad \text{et} \quad C_0^{k+1} G = [G, C_0^k G] \ \text{ si } \ k \geq 1.$$

C'est une suite décroissante (fonctorielle en G) de sous-groupes caractéristiques de G. Soient

$$G_0^k := G/C_0^k \quad \text{si} \quad k \geq 1$$

et $q_k^0 : G \to G_0^k$ le quotient naturel. Puisque G_0^k est un groupe nilpotent (de classe $(k-1)$), l'ensemble Tors_k de ses éléments de torsion est un sous-groupe (caractéristique) de G_0^k. Soit

$$q_k : G \to (G_0^k/\mathrm{Tors}_k) := G^k$$

le quotient composé naturel. On note

$$C^k G := \mathrm{Ker}(q_k) \,;$$

c'est un sous-groupe caractéristique de G qui définit la *suite centrale descendante modulo torsion de G*. On notera

$$C^\infty G := \Big(\bigcap_{k>0} C^k G\Big) \quad \text{et} \quad q_k : G \to G/C^k G := G^k \text{ pour } 0 < k \leq \infty.$$

Si $\varphi : H \to G$ est un morphisme de groupes, on a des morphismes naturels induits par $\varphi : C^k H \to C^k G$ et $\varphi^{(k)} : H^k \to G^k$ $(0 < k \leq \infty)$.

5.0.2. — Pour chaque $0 < k < \infty$, si G est de type fini, G^k se plonge dans sa complétion de Malčev $G_{\mathbb{R}}^k$, groupe de Lie réel nilpotent simplement connexe dans lequel G^k est un réseau cocompact ; $G_{\mathbb{R}}^k$ est en fait défini sur $\mathbb{Q}$: on notera $G_{\mathbb{Q}}^k$ le sous-groupe de $G_{\mathbb{R}}^k$ constitué des éléments dont une puissance entière positive est dans G^k. Alors

$$G_{\mathbb{R}}^k = \Big(G_{\mathbb{Q}}^k \bigotimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}\Big).$$

On notera $\mathcal{L}_k G$ l'algèbre de Lie sur $\mathbb{Q}$ de $G_{\mathbb{Q}}^k$.

Ces constructions sont fonctorielles en G. Si $\varphi : H \to G$ est un morphisme de groupes de types finis, il induit pour $k > 0$ des morphismes de groupes (resp. d'algèbres) de Lie $\varphi_k : H^k_{\mathbb{R}} \to G^k_{\mathbb{R}}$ (et $\varphi_k : \mathcal{L}_k H \to \mathcal{L}_k G$), le premier étant bien sûr défini sur $\mathbb{Q}$.

5.0.3. — Pour tout $k > 0$ et tout $k \geq j > 0$, on définit la suite centrale descendante $(C^j \mathcal{L}_k G)$ de l'algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{L}_k G$ par les relations utilisées en 5.0.1. On a alors

$$\mathcal{L}_k G / C^j \mathcal{L}_k G = \mathcal{L}_j G \quad \text{pour} \quad k \geq j > 0,$$

comme il est facile de le vérifier.

DÉFINITION 5.1.1. — Un morphisme $\varphi : H \to G$ entre groupes de types finis est dit *strict* si :

(i) ou bien $\varphi_k : \mathcal{L}_k H \to \mathcal{L}_k G$ est nul pour tout $k > 0$,

(ii) ou bien, pour tout $k > 0$ et $k \geq j \geq 1$,

$$\varphi_k(C^j \mathcal{L}_k H) = (C^j \mathcal{L}_k G) \cap \big(\varphi_k(\mathcal{L}_k H)\big).$$

LEMME 5.1.2. — *Soit $\varphi : H \to G$ un morphisme de groupes de types finis. Alors, φ est strict si et seulement si :*

(i) *ou bien $\varphi(H) \subset C^\infty G$,*

(ii) *ou bien $\big(\varphi(H) \cap C^k G\big) = \varphi(C^k H)$ (pour tout k tel que $0 < k < \infty$).*

Démonstration. — Pour tout $k > 0$, on a des isomorphismes algébriques $\exp : \mathcal{L}_k G \to G^k_{\mathbb{R}}$ et $\log : G^k_{\mathbb{R}} \to \mathcal{L}_k G$ fonctoriels en G et réciproques, tels que

$$\exp(C^j \mathcal{L}_k G) = C^j G^k_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad \log C^j G^k = (C^j \mathcal{L}_k G).$$

L'équivalence de 5.1.1 (ii) et 5.1.2 (ii) en résulte immédiatement car $G^k \to G^k_{\mathbb{R}}$ est injective pour tout $k > 0$.

L'équivalence de 5.1.1 (i) et 5.1.2 (i) résulte immédiatement des égalités

$$\varphi(H^k) = \exp(\varphi \mathcal{L}_k H) \quad \text{et} \quad \varphi \mathcal{L}_k H = \log(\varphi H^k)$$

qui montrent l'équivalence de $\varphi \mathcal{L}_k H = 0$ et de $\varphi H^k = (1)$. Enfin,

$$H \subset C^\infty G := \bigcap_{k>0} C^k G$$

équivaut à $\varphi H^k = (1)$ pour tout $k > 0$. $\square$

COROLLAIRE 5.1.3. — *Soit* $\varphi : H \to G$ *un morphisme de groupes de types finis. Alors* φ *est strict si et seulement si l'inclusion* $i : \varphi(H) \hookrightarrow G$ *est stricte.*

Démonstration. — En effet, $\big(\varphi(H)\big)^k = \psi(H^k)$ si $\psi : H \to \varphi(H)$ est le quotient canonique. ▯

COROLLAIRE 5.1.4. — *Soit* $\varphi : H \to G$ *un morphisme de groupes de types finis. Supposons que :*

(i) $H_1 := \varphi(H)$ *est abélien*;

(ii) G *est nilpotent*;

(iii) φ *est strict.*

Alors :

(a) $(C_0^2 G \cap H_1) = L$ *est un groupe fini (rappelons que* $C_0^2 G$ *est le groupe des commutateurs de* G*)* ;

(b) *si, de plus,* H_1 *est normal dans* G *et si* $m := |L|$ *est le cardinal de* L*, alors* H_1^m *est contenu dans le centre de* G*, où* H_1^m *est l'image de* $\mu : H_1 \to H_1$*, morphisme de groupes défini par* $\mu(x) = x^m$*, pour* x *dans* H_1 *(observer que* H_1^m *est caractéristique dans* H*, donc normal dans* G*).*

Démonstration. — Puisque φ est strict, si $\varphi(H)$ n'est pas contenu dans

$$C^\infty G = C^\nu G = T_G,$$

où ν est la classe de nilpotence de G (auquel cas $H_1 = \varphi(H)$ est fini et contenu dans T_G, le groupe de torsion de G, on est dans la situation 5.1.2 (ii), et 5.1.4 (a) est vraie). Prenons alors $k = \nu$ et $j = 2$. On obtient

$$(H_1 \cap C^2 G) = C^2 H_1 = (1) \quad (\text{modulo } T_G)$$

puisque H_1 est abélien, et que $C^2 G = C^2 G^\nu$ puisque $G^\nu = G/T_G$. Donc $H_1 \cap C_0^2 G \subset T_G$, qui est fini. Donc L est fini.

Ceci établit 5.1.4 (a). La seconde assertion résulte immédiatement de 5.1.5 ci-dessous. ▯

LEMME 5.1.5. — *Soit* H *un sous-groupe abélien normal du groupe* G *tel que* $H \cap G' := L$ *soit (un sous-groupe normal de* G*) fini, où* $G' := C_0^2(G)$ *est le groupe des commutateurs de* G*. Soit* $m := |L|$ *et soit* $H^m := \{h^m \mid h \in H\}$*. Alors* H^m *est un sous-groupe caractéristique d'indice fini de* H *; il est donc normal dans* G*. De plus,* H^m *est contenu dans le centre de* G*.*

Démonstration. — Si $(g,h) \in G \times H$ on a $ghg^{-1}h^{-1} \in H \cap G' = L$. Donc $ghg^{-1} = h\ell$, avec $\ell \in L$, et $gh^m g^{-1} = (ghg)^m = (h\ell)^m = h^m$. D'où le lemme 5.1.5. ▯

Ceci achève donc la démonstration de 5.1.4.

5.2. Théorème. — *Soient $f : Y \to X$ une application holomorphe entre variétés kählériennes compactes et connexes, et $\varphi : \pi_1(Y) \to \pi_1(X)$ le morphisme de groupes induit par f (nous omettons les points base). Alors φ est strict.*

Démonstration. — Elle s'obtient immédiatement en combinant deux résultats, l'un dû à R. Hain, l'autre dû à P. Deligne. Dans [H], il est établi que, pour tout $k > 0$, $\mathcal{L}_k\big(\pi_1(X), x\big)$ est muni canoniquement d'une structure de Hodge mixte fonctorielle en (X, x), et dont la filtration par le poids coïncide (pour X lisse) avec la filtration définie par la suite centrale descendante $(C^j\mathcal{L}_k)_{j>0}$. Le résultat de [H] s'applique lorsque X est singulière normale; dans le cas lisse, on peut aussi obtenir cette structure de Hodge mixte grâce à la considération d'intégrales itérées de Chen, la longueur fournissant la filtration par le poids.

Un résultat fondamental de P. Deligne (voir [D, 1.2.10], voir aussi 2.3.5) affirme que tout morphisme de structures de Hodge mixtes est strict $\big($dans un sens qui fait que la définition 5.1.1 n'en est que la traduction dans le cas particulier $\varphi : \mathcal{L}_k\big(\pi_1(Y)\big) \to \mathcal{L}_k\big(\pi_1(X)\big)\big)$.

On déduit maintenant de 5.1.4 le :

Corollaire 5.2.1. — *Soit $f : Y \to X$ une application holomorphe entre variétés kählériennes compactes et connexes. Supposons que $\pi_1(X)$ est nilpotent et $\pi_1(Y)_X$ abélien. Alors :*

(a) *Si $H_1(f) : H_1(Y, \mathbb{Q}) \to H_1(X, \mathbb{Q})$ est nul, alors $\pi_1(Y)_X$ est fini (ceci est vrai sans hypothèse sur $\pi_1(X)$ et $\pi_1(Y)$).*

(b) *Si $H_1(f)$ n'est pas nul, alors :* $\mathrm{Ker}\big(\pi_1(Y)_X \to H_1(X, \mathbb{Z})\big)$ *est fini; si de plus $\pi_1(Y)_X$ est normal dans $\pi_1(X)$, alors $\big(\pi_1(Y)_X\big)$ admet un sous-groupe d'indice fini caractéristique et contenu dans le centre de $\pi_1(X)$.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer 5.2 et 5.1.4 avec $G = \pi_1(X)$, $H = \pi_1(Y)$ et $H_1 = \pi_1(Y)_X$. ▯

Remarque 5.2.2. — Une conséquence de 5.2.1 est la suivante. Soit $f : X \to S$ une application holomorphe surjective connexe, avec X compacte et Kähler telle que les fibres lisses F de f soient des tores complexes. Supposons que $f_* : H_1(F, \mathbb{Q}) \to H_1(X, \mathbb{Q})$ est nulle. Alors $\pi_1(F)_X$ est fini. Il serait intéressant d'avoir une démonstration élémentaire de ce résultat.

Remarque 5.2.3. — On établit dans [C7] par une méthode analogue que si, dans 5.1.4 on remplace l'hypothèse (i) par (i′) $H_1 = \varphi(H)$ et (G/H_1) sont nilpotents de classe de nilpotence $m \geq 2$, alors on peut déduire de

(ii) et (iii) aussi) que G est lui-même de classe m. (Le cas présenté ici est le cas $m = 1$). On en déduit que 4.1 est valable pour $\tilde{\mathfrak{g}}$ si $\mathfrak{g}$ est la classe des groupes nilpotents de classe m.

6. VERSIONS RELATIVES

Nous établissons maintenant la version relative des théorèmes 4.1 et 3.6.2, c'est-à-dire la validité de 3.3 lorsque $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathcal{A}b}$ ou $\widetilde{\mathcal{N}ilp}$ (qui ne sont pas stables).

6.1. THÉORÈME. — *Soient X une variété kählérienne compacte et connexe et $\mathfrak{g}$ l'une des deux classes suivantes de groupes $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathcal{A}b}$ ou $\mathfrak{g} = \widetilde{\mathcal{N}ilp}$. Soient $f_\mathfrak{g} : X \to X(\mathfrak{g})$ le $\mathfrak{g}$-quotient (cf. 1.2.6) de X, et X_u une fibre générique (lisse) de $f_\mathfrak{g}$. Alors $\pi_1(f_\mathfrak{g})_X := \pi_1(X_u) \in \mathfrak{g}$.*

Rappelons (1.2.6) que la quasi-fibration $f_\mathfrak{g} : X \to X(\mathfrak{g})$ est caractérisée par le fait que sa fibre passant par un point général a de X est constituée des points de X pouvant être joints à a par une chaîne $\mathfrak{g}$-connexe.

Démonstration. — Elle est identique à celle des cas absolus (où $X(\mathfrak{g})$ est un point, c'est-à-dire où X est $\mathfrak{g}$-connexe) en y remplaçant 3.6.1 et 5.2.1 (b) par les versions relatives adéquates 6.2 et 6.3 ci-dessous. Plus précisément, il suffit d'établir :

6.2. THÉORÈME (version relative de [A-N]). — *Soit $g : F \to X$ une application holomorphe entre variétés kählériennes compactes et connexes. Si $g_*(\pi_1(F)) := \pi_1(F)_X$ est normal dans $\pi_1(X)$ et virtuellement polycyclique, il est virtuellement nilpotent.*

6.3. THÉORÈME. — *Soit F, Z, X trois variétés kählériennes compactes et connexes et $g : F \to Z$, $h : Z \to X$ deux applications holomorphes. On note $\pi_1(F)_X := (h \circ g)_*(\pi_1(F))$ et $\pi_1(Z)_X := h_*(\pi_1(Z))$, en omettant les points base. On suppose que :*

1) *$\pi_1(Z)_X$ est nilpotent;*

2) *$\pi_1(F)_X$ est abélien et normal dans $\pi_1(Z)_X$.*

Alors $\pi_1(F)_X$ est presque central dans $\pi_1(Z)_X$ (i.e. l'intersection de $\pi_1(F)_X$ avec le centre de $\pi_1(Z)_X$ est d'indice fini dans $\pi_1(F)_X$).

REMARQUE 6.3.1. — On obtient ainsi une version relative de la dernière assertion de 5.2.1 (b) en supposant $\pi_1(F)_X$ normal dans $\pi_1(Z)_X$. Il serait intéressant de savoir si 5.2.1 (b) admet aussi une version relative (*i.e.* si $(\pi_1(F)_X \cap C^2(\pi_1(Z)_X))$ est fini, sans nécessairement supposer $\pi_1(F)_X$ normal dans $\pi_1(Z)_X$).

COROLLAIRE 6.3.2 (du théorème 6.3). — *La situation et les hypothèses étant celles de* 6.3, *on suppose de plus l'existence d'une application holomorphe* $k : Y \to Z$ *avec* Y *variété kählérienne compacte et connexe, telle que :*

3) $\pi_1(Y)_X := (h \circ k)_*\big(\pi_1(Y)\big)$ *est abélien, et*

4) $\pi_1(Z)_X$ *est engendré par* $\pi_1(Y)_X$ *et* $\pi_1(F)_X$.

Alors $\pi_1(Z)_X$ *est abélien.*

6.3.3. *Démonstration de 6.3.2.* — Elle résulte de 6.3, par l'argument (voir 4.2 et 4.3) utilisé pour déduire 4.1 de 5.2.1.

Démonstration de 6.3. — Soient

- $\overline{H} := \pi_1(F)$,
- $\overline{G} := \pi_1(Z)$,
- $\psi : \overline{G} \to G := \pi_1(Z)_X$ la projection naturelle déduite de h_*,
- $g_* : \overline{H} \to \overline{G}$ l'application déduite de g et
- $\psi : \overline{H} \to H := \pi_1(Y)_X$ l'application déduite de $(h \circ g)$.

On a donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \overline{H} & \xrightarrow{g_*} & \overline{G} \\ \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ H & \xrightarrow{i_*} & G \end{array}$$

Avec les notations introduites en 5.0.2 et la démonstration de 5.2, on a donc pour tout $n > 0$ et $0 < j \leq n$:

$$\mathcal{L}^n\overline{H} \xrightarrow{g_*} \mathcal{L}^n\overline{G}$$

telle que :

$$g_*(C^j\mathcal{L}^n\overline{H}\,) = (C^j\mathcal{L}^n\overline{G}\,) \cap (g_*\mathcal{L}^n\overline{H}\,).$$

D'où :

$$i_*(C^j\mathcal{L}^nH) = \psi\big(g_*(C^j\mathcal{L}^n\overline{H}\,)\big) = \psi\big((C^j\mathcal{L}^n\overline{G}\,) \cap (g_*\mathcal{L}^n\overline{H}\,)\big).$$

Pour $j = 2$, on obtient, puisque H est abélien :

$$0 = C^j\mathcal{L}^nH = \psi(C^2\mathcal{L}^n\overline{G} \cap g_*\mathcal{L}^n\overline{H}\,).$$

Mais $\psi(C^2\mathcal{L}^n\overline{G} \cap g_*\mathcal{L}^n\overline{H}\,)$ contient $[\mathcal{L}^nG, \mathcal{L}^nH]$ puisque H est normal dans G par hypothèse. En effet,

$$\psi(C^2\mathcal{L}^n\overline{G} \cap g_*\mathcal{L}^n\overline{H}\,) \quad \text{contient} \quad \psi(\mathcal{L}^nK + [\mathcal{L}^n\overline{G}, \mathcal{L}^n\overline{H}\,])$$

qui contient $\psi([\mathcal{L}^n\overline{G}, \mathcal{L}^n K + \mathcal{L}^n\overline{H}\,]) = [\mathcal{L}^n G, \mathcal{L}^n H]$, et

$$(\mathcal{L}^n K + \mathcal{L}^n\overline{H}\,) = \psi^{-1}(\mathcal{L}^n H)$$

est un idéal de $\mathcal{L}^n\overline{G}$, puisque H est supposé normal dans G. Ici, $K = \operatorname{Ker}\psi$ et on identifie $\mathcal{L}^n\overline{H}$ et $g_*\mathcal{L}^n\overline{H}\,$). Donc

$$[\mathcal{L}^n G, \mathcal{L}^n H] = 0$$

et $\mathcal{L}^n H$ est central dans $\mathcal{L}^n G$. Prenant n égal à la classe de nilpotence de G, on en déduit que $[G, H]$ est fini. On conclut alors à l'aide de l'argument utilisé pour établir 5.1.4.

Démonstration de 6.2. — Elle est identique à celle de 3.6.2 établie dans [A-N], en y utilisant la remarque 4.7, p. 14 de [Be].

6.4. Remarque. — Les résultats du § 6 sont énoncés pour X Kähler compacte lisse. Ils restent valables pour X normale dans la classe $\mathcal{C}$, car la structure de Hodge mixte sur le complété de Malčev de X peut être définie fonctoriellement dans ce cadre.

6.5. Remarque. — Le cas où X est normale dans la classe $\mathcal{C}$ est traité plus explicitement dans [C7]. On y construit, en particulier, des variétés projectives normales rationnellement connexes de groupe fondamental fini arbitraire.

BIBLIOGRAPHIE

[A-N] Arapura (D.), Nori (M.). — *Solvable fundamental groups of algebraic varieties and Kähler manifolds.* — Preprint.

[Be] Beauville (A.). — *Annulation du H^1 pour les fibrés en droites plats*, Lecture Notes, t. **1507**, p. 1–15.

[C1] Campana (F.). — *Réduction d'Albanese d'un morphisme kählérien propre, I et II*, Comp. Math., t. **54**, 1985, p. 378–416.

[C2] Campana (F.). — *Coréduction algébrique d'un espace analytique faiblement kählérien compact*, Inv. Math., t. **63**, 1981, p. 187–223.

[C3] Campana (F.). — *Remarques sur le revêtement universel des variétés kählériennes compactes*, Bull. S.M.F., t. **122**, 1994, p. 255–284.

[C4] CAMPANA (F.). — *On twistor spaces of class $\mathcal{C}$*, J. Diff. Geom., t. **33**, 1991, p. 541–549.

[C5] CAMPANA (F.). — *Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents*, Ann. Sci. École Normale Sup., t. **28**, 1995, p. 307–316.

[C6] CAMPANA (F.). — *Connexité abélienne des variétés kählériennes compactes*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. **325**, 1997, p. 755–758.

[C7] CAMPANA (F.). — *$\mathfrak{g}$-connectedness of compact Kähler manifolds*, I, Soumis aux Proceedings of the Conference "Hirzebruch 70", Warsaw 1998, (Szurek, Wisniewski éd., Pragacz), Amer. Math. Soc.

[C8] CAMPANA (F.). — *$\mathfrak{g}$-connectedness of compact Kähler manifolds*, II, soumis aux Proceedings of the Conference dedicated to the memory of Kurosh (Moscou, mai 1998).

[D] DELIGNE (P.). — *Théorie de Hodge*, II, Publ. IHES, t. **40**, 1972, p. 5–57.

[D-G-M-S] DELIGNE (P.), GRIFFITHS (P.), MORGAN (J.), SULLIVAN (D.). — *Real homotopy theory of compact Kähler manifolds*, Inv. Math., t. **29**, 1975, p. 245–274.

[H] HAIN (R.). — *The de Rham homotopy theory of complex algebraic varieties*, I, K-theory, t. **1**, 1987, p. 271–324.

[K1] KOLLÁR (J.). — *Shafarevich maps and automorphic forms.* — Princeton Univ. Press, 1995.

[O-Z] OGUISO (K.), ZAIDENBERG (M.). — *On fundamental groups of elliptically connected surfaces.* — Prépublication Institut Fourier, 1996.

[S] SEGAL (D.). — *Polycyclic groups.* — Cambridge Univ. Press, 1983.

[S-V] SOMMESE (A.), VAN DE VEN (A.). — *Homotopy groups of pullbacks of varieties*, Nagoya Math. J., t. **102**, 1986, p. 79–90.

[Z] ZAIDENBERG (M.). — *Problems on open algebraic varieties, in "Problems on open algebraic varieties".* — P. Russel éd., Montréal, 1994.