BULLETIN DE LA S. M. F.

ANDRÉ UNTERBERGER

L'oscillateur relativiste et les fonctions de Mathieu

Bulletin de la S. M. F., tome 121, nº 4 (1993), p. 479-508
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_4_479_0>

Bull. Soc. math. France,
121, 1993, p. 479–508.

L'OSCILLATEUR RELATIVISTE ET LES FONCTIONS DE MATHIEU

PAR

ANDRÉ UNTERBERGER (*)

RÉSUMÉ. — Un calcul symbolique approprié (celui de Klein-Gordon) permet d'obtenir immédiatement les symboles d'opérateurs qui commutent à l'oscillateur relativiste L, version relativiste de l'oscillateur harmonique. On déduit de là une représentation intégrale à la Feynman, jouissant de propriétés très particulières, du semi-groupe engendré par L ainsi que, en dimension 1, des propriétés ou formules exactes relatives aux fonctions de Mathieu.

ABSTRACT. — The relativistic oscillator L is a relativistic version of the harmonic oscillator : in the Klein-Gordon symbolic calculus, it is straightforward to obtain the symbols of families of operators that commute with L. A Feynman integral type representation of $e^{-\varepsilon L}$, with especially nice properties, is derived as a first consequence; also, in the one-dimensional case, one gets new exact properties or formulas relative to Mathieu functions.

Plan

(*) Texte reçu le 26 mars 1992, révisé le 9 septembre 1992.
A. UNTERBERGER, Département de Mathématiques, Université de Reims, Moulin de la Housse, BP 347, 51062 Reims cedex.
Email : unterber@orphee.polytechnique.fr
Classification AMS : 58F06, 33E10, 34B30, 83A05.

0. Introduction

Instrument irremplaçable dans la recherche des propriétés *qualitatives* de solutions d'équations aux dérivées partielles, l'analyse pseudo-différentielle n'a guère contribué, jusqu'ici, à la découverte des propriétés *exactes* que celles-ci sont parfois susceptibles de posséder. Il y a à cela des contre-exemples (ainsi les formules exactes relatives à l'oscillateur quartique obtenues, par des méthodes semi-classiques, par VOROS [13] puis HELFFER-ROBERT [4]) et des raisons, plus ou moins honorables : la première de celles-ci est que les spécialistes des équations aux dérivées partielles voient souvent à de pareilles investigations la vocation exclusive de l'analyse harmonique.

Il est de fait que, en dehors d'exceptions notables (équation de K.d.V et celles qui s'y rattachent), les opérateurs différentiels qui conduisent à des faits de structure exacts (nous verrons qu'il ne faut pas toujours entendre par là des formules exactes pour leurs solutions) sont en général liés aux groupes et algèbres de Lie et à leurs représentations : en dehors de ce qu'on trouve dans les ouvrages consacrés à la théorie classique des fonctions spéciales (toutes plus ou moins liées au groupe $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$), mentionnons les travaux plus récents consacrés aux opérateurs différentiels invariants sur les espaces symétriques (DEBIARD-GAVEAU [2]) ou au réseau de Toda généralisé (KOSTANT [7]), renvoyant à HELGASON [5] pour des références étendues sur le premier de ces sujets.

L'opérateur auquel, dans cet article, nous attachons notre intérêt est l'oscillateur relativiste L défini par

$$(0.1)\qquad -4\pi L = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - 4\pi^2 \sum x_j^2 + c^{-2}\Big[\Big(\sum x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^2 + (n-1)\sum x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big]$$

dont la limite L_∞, lorsque $c \to \infty$, est l'oscillateur harmonique habituel. Ce dernier opérateur a une structure parfaitement connue : du reste, sa résolution spectrale résulte si l'on veut de la formule

$$(0.2)\qquad f_t(\vec{x},\vec{p}) = \big(\tfrac{1}{2}(1+\mathrm{e}^{-t})\big)^{-n} \exp\Big[-2\pi\big(\mathrm{th}\,\tfrac{1}{2}t\big)\big(|\vec{x}|^2+|\vec{p}|^2\big)\Big],$$

laquelle, dans les coordonnées $(\vec{x},\vec{p})$ sur l'espace de phase $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, exprime le symbole de Weyl f_t de l'opérateur $\exp -t\big(L_\infty - \frac{1}{2}n\big)$. Le caractère remarquable de cette formule est que toute une famille d'opérateurs commutant avec L_∞ ont des symboles qui sont des fonctions du seul symbole $\pi\big(|\vec{x}|^2 + |\vec{p}|^2\big)$ de L_∞ lui-même : il faut en effet, en général, des fonctions de $2n$ variables pour représenter les symboles d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R}^n)$. Si la réduction du nombre de variables résulte ici de la commutation de l'oscillateur L_∞ avec la partie au-dessus de $\mathrm{U}(n)$ de la représentation métaplectique de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n,\mathbb{R})$ dans $L^2(\mathbb{R}^{2n})$, rien d'analogue n'explique a priori le fait suivant, origine de ce travail : dans un calcul symbolique approprié, une formule semblable à (0.2) permet d'obtenir les symboles de familles d'opérateurs qui commutent avec l'oscillateur relativiste L.

Le calcul symbolique en question est celui de Klein-Gordon, développé dans [12], et dont le lien avec la mécanique classique relativiste est identique à celui du calcul de Weyl à la mécanique classique non relativiste. Seule sera nécessaire ici la définition du calcul de Klein-Gordon, que nous rappellerons : il sera conçu comme un calcul symbolique des opérateurs sur l'espace de Sobolev $H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ des distributions u sur $\mathbb{R}^n$ dont la transformée de Fourier $\hat{u}$ vérifie

$$\int \left|\hat{u}(\vec{p})\right|^2 \Big(1 + \frac{|\vec{p}|^2}{c^2}\Big)^{1/2} \mathrm{d}\vec{p} < \infty.$$

De fait, une compréhension véritable du calcul de Klein-Gordon n'est possible que s'il est systématiqquement fait appel au prolongement de u en une distribution $\tilde{u}$ sur l'espace-temps $\mathbb{R}^{n+1}$, solution à énergie positive de l'équation de Klein-Gordon libre : mais le fait de se limiter à $t = 0$ rendra plus facile, au lecteur non informé, la comparaison de ce calcul aux calculs usuels.

Sur l'espace $H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$, l'oscillateur L est autoadjoint, à spectre discret de multiplicité finie. Son symbole de Klein-Gordon est la fonction

$$\ell(\vec{x},\vec{p}) = \pi r - \frac{n}{16\pi c^2}\,,$$

où

$$r(\vec{x},\vec{p}) = |\vec{x}|^2 + |\vec{p}|^2 + c^{-2}\langle \vec{x},\vec{p}\rangle^2.$$

Les opérateurs dont les symboles sont des fonctions « arbitraires » de r commutent avec L. Ce fait, reconnu dans [12] dans le cas où $n = 1$, n'avait pu être décelé en général à la suite d'une erreur de signe qui avait conduit pour $n \geq 2$ à une formule inexacte pour ℓ et n'avait heureusement pas eu d'autre conséquence fâcheuse : nous saisissons cette occasion pour corriger, en appendice, les formules incriminées. L'opérateur L est aussi donné par

$$\pi^{-1}L = \sum B_j^2 + \sum D_j^2 - c^{-2}\sum_{j<k} R_{jk}^2 \tag{0.3}$$

où les opérateurs B_j, R_{jk} et D_j sont les opérateurs infinitésimaux de la représentation de Bargmann-Wigner du groupe de Poincaré dans $H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ correspondant respectivement aux « boosts relativistes », aux rotations et aux translations spatiales. Il est élémentaire, via un changement d'échelle, de faire apparaître un coefficient devant le terme $\sum D_j^2$: outre sa contraction non-relativiste L_∞, l'oscillateur L admet, quand ce coefficient est remplacé par zéro, une deuxième contraction, unitairement équivalente à l'opérateur de Laplace-Beltrami d'un feuillet d'hyperboloïde de masse. Si l'oscillateur harmonique commute avec la transformation de Fourier $u \mapsto \hat{u}$, L commute avec la transformation $\mathcal{F}_c$ définie par

$$(\mathcal{F}_c u)(\vec{x}) = \Big(1 + \frac{|\vec{x}\,|^2}{c^2}\Big)^{1/2} \hat{u}(\vec{x}),$$

dont la décomposition spectrale se trouve ainsi liée à celle de L.

Nous examinerons pour commencer le cas où $n = 1$: via le changement de variable $x_1 = c \operatorname{sh} u$, l'oscillateur L se ramène à l'opérateur

$$M = \frac{1}{-4\pi c^2} \Big[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\xi^2} - 4\pi^2 c^4 \operatorname{sh}^2 \xi \Big] \tag{0.4}$$

dont les fonctions propres sont des fonctions de Mathieu modifiées.

Rappelons que les fonctions de Mathieu usuelles sont des fonctions propres, de périodicité convenable, de l'opérateur lié à M par le changement de $\operatorname{sh}^2 \xi$ en $\sin^2 \xi$. Les fonctions propres de l'opérateur M lui-même sont à rapprocher des fonctions de Mathieu modifiées de troisième espèce ([15], article 268), mais seules nous intéressent ici celles qui appartiennent à l'espace $L^2(\mathbb{R})$: ce sont celles-ci que nous appellerons *fonctions de Mathieu* dans cet article.

Les fonctions de Mathieu d'un type plus usuel, introduites par MATHIEU dans [10] il y a fort longtemps, ont fait l'objet de nombreux articles et de plusieurs ouvrages (WHITTAKER-WATSON [14], Mac LACHLAN [9], MEIXNER-SCHÄFKE [11], CAMPBELL [1]) : un auteur relativement récent (CAMPBELL) attirait cependant, à plusieurs reprises, l'attention sur la structure mal comprise de ces fonctions, et la situation n'a pas tellement changé depuis l'époque où il écrivait ces lignes. Le calcul de Klein-Gordon, permettant d'écrire (via leurs symboles) toutes les fonctions (au sens de la théorie spectrale) de l'opérateur M fournit d'emblée un point de vue nouveau, et un lot de formules, dont certaines sont sans doute nouvelles, sur les fonctions de Mathieu du type considéré ici. L'aspect le plus intéressant sera la mise en évidence du fait que les fonctions de Mathieu (définies comme *fonctions propres* de M) fournissent également les *valeurs* *propres* d'une famille à un paramètre d'opérateurs fonctions de M, dont les symboles sont des fonctions élémentaires.

Passant au cas où n est quelconque, et disposant de familles à un paramètre d'opérateurs commutant avec L, on obtient une expression de l'opérateur e^{-sL} (pour $\operatorname{Re} s \geq 0$) comme limite de produits d'un grand nombre d'opérateurs dont les noyaux (et les symboles) sont connus. Il s'agit bien entendu d'une sorte d'intégrale de Feynman, jouissant de la propriété très particulière que l'opérateur L commute avec les opérateurs obtenus avant tout passage à la limite.

Nous devons solliciter l'indulgence du lecteur pour les calculs, qui sont quelquefois considérables : mais les formules exactes finales sont toujours très simples. En outre, les deux contractions de l'oscillateur mentionnées plus haut, vers l'oscillateur harmonique et vers l'opérateur de Laplace-Beltrami d'un espace symétrique de rang un, permettent des vérifications souhaitables.

1. Calcul de Klein-Gordon

On se borne ici au minimum de rappels nécessaires pour la suite, renvoyant l'éventuel lecteur intéressé à [12] pour des explications plus abondantes. On considère l'*espace de Minkowski* $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, muni de la forme quadratique relativiste

$$\mathrm{d}s^2 = c^2\,\mathrm{d}t^2 - |\mathrm{d}\vec{x}\,|^2, \tag{1.1}$$

ainsi que son dual, espace des *covecteurs d'énergie-impulsion* $p = (p_0, \vec{p})$. L'énergie-impulsion d'une *particule de Klein-Gordon* libre, de masse 1, appartient à $\mathfrak{M}$, feuillet d'hyperboloïde d'équation $p_0 = c^2(1+|\vec{p}|^2/c^2)^{1/2}$. Le *groupe de Lorentz orthochrone* est le groupe des transformations linéaires de l'espace de Minkowski qui conservent le $\mathrm{d}s^2$, et dont la contragrédiente (qui conserve bien entendu l'hyperboloïde d'équation $p_0^2 = c^2|\vec{p}|^2 + c^4$) conserve le feuillet $\mathfrak{M}$. Sur $\mathfrak{M}$ existent une métrique riemannienne invariante, à savoir

$$\mathrm{d}s^2_{\mathfrak{M}} = |\mathrm{d}\vec{p}|^2 - c^2 p_0^{-2} \langle \vec{p}, \mathrm{d}\vec{p}\rangle^2, \tag{1.2}$$

et l'*opérateur de Laplace-Beltrami* associé

$$\Delta_{\mathfrak{M}} = \sum \frac{\partial^2}{\partial p_j^2} + c^{-2}\Big[\Big(\sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j}\Big)^2 + (n-1)\sum p_j \frac{\partial}{\partial p_j}\Big]. \tag{1.3}$$

La mesure invariante associée est

$$c^2 p_0^{-1}\,\mathrm{d}\vec{p} = \langle \vec{p}\,\rangle^{-1}\,\mathrm{d}\vec{p}, \tag{1.4}$$

où l'on a posé $\langle\vec{p}\rangle = (1 + c^{-2}|\vec{p}|^2)^{1/2}$, convention que l'on généralisera aux vecteurs de $\mathbb{R}^n$; la distance hyperbolique d sur $\mathfrak{M}$ est fournie par la formule

$$c^2 \operatorname{ch} \frac{\mathrm{d}(p,p')}{c} = \langle Jp, p'\rangle = c^{-2} p_0 p_0' - \langle\vec{p}, \vec{p}\,'\rangle \tag{1.5}$$

dans laquelle la deuxième égalité est une définition de J. L'espace riemannien $\mathfrak{M}$ est un espace symétrique (de rang un) de type non compact, ce qui permet de définir le milieu géodésique $\operatorname{mid}(p,p')$ de deux points de $\mathfrak{M}$, ou bien le symétrique $S_q p$ de p par rapport à q : se rappelant que $(p_0, -\vec{p})$ est le symétrique de $(p_0, \vec{p})$ par rapport à $(c^2, \vec{0})$ et utilisant l'invariance de Lorentz, on retrouve que :

$$\operatorname{mid}(p,p') = 2^{-1/2}\big(1 + c^{-2}\langle Jp, p'\rangle\big)^{-1/2}(p + p'). \tag{1.6}$$

La définition suivante est fondamentale : si $u \in H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$, espace de Hilbert constitué des fonctions $u = u(\vec{x})$ telles que

$$\|u\|^2 = \int \langle\vec{p}\rangle |\vec{u}(\vec{p})|^2 \,\mathrm{d}\vec{p} < \infty, \tag{1.7}$$

avec

$$\hat{u}(\vec{p}) = \int \exp\big\{-2i\pi\langle\vec{x}, \vec{p}\rangle\big\}\, u(\vec{x})\,\mathrm{d}\vec{x},$$

on pose, pour tout $p \in \mathfrak{M}$,

$$(\mathcal{G}u)(p) = \langle\vec{p}\rangle \hat{u}(\vec{p}). \tag{1.8}$$

La transformation $\mathcal{G}$ est alors une isométrie de $H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ sur $L^2(\mathfrak{M}) = L^2(\mathfrak{M}, \langle\vec{p}\rangle^{-1}\,\mathrm{d}\vec{p})$. On remarquera que $H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ est, lorsque $c = 1$, l'espace de Sobolev $H^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ usuel; également, $H_\infty^{1/2}(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$.

L'espace $L^2(\mathfrak{M})$ est l'espace de Hilbert à une particule de la théorie des champs. Comme le groupe de Lorentz orthochrone conserve $\mathfrak{M}$ et la mesure $\langle\vec{p}\rangle^{-1}\,\mathrm{d}\vec{p}$, il opère unitairement sur $L^2(\mathfrak{M})$: on peut préférer, conjuguant cette action au moyen de $\mathcal{G}$, la voir comme une représentation unitaire dans $H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$; c'est le point de vue que nous adopterons. Posons :

$$D_j = \frac{1}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \langle D\rangle = \Big[1 + c^{-2}\sum D_j^2\Big]^{1/2}.$$

Pour tout vecteur $a = (a_0, \vec{a})$ de l'espace de Minkowski, l'opérateur $a_0\langle D\rangle + \sum a_j D_j$ est essentiellement autoadjoint sur $H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$: en en prenant l'exponentielle au sens du théorème de Stone, on vérifie que

$$\mathcal{G}\big(\mathrm{e}^{2i\pi(a_0\langle D\rangle+\langle\vec{a},\vec{D}\rangle)}u\big)(p) = \mathrm{e}^{2i\pi(c^{-2}a_0p_0+\langle\vec{a},\vec{p}\rangle)}\mathcal{G}u(p) \tag{1.9}$$

pour tout $u \in H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$. Étendant, au moyen de (1.9), la représentation considérée ci-dessus en une représentation du groupe engendré par le groupe de Lorentz orthochrone et par les translations de l'espace de Minkowski, on obtient la *représentation de Bargmann-Wigner* du *groupe de Poincaré orthochrone* dans $H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$. Si les translations purement spatiales (i.e. $a_0 = 0$) ont une action évidente sur u (à savoir $u \mapsto v$, avec $v(\vec{x}) = u(\vec{x}+\vec{a})$), pour laquelle il n'est pas nécessaire d'utiliser l'opérateur d'entrelacement $\mathcal{G}$, les translations temporelles ne s'interprètent correctement que si l'on utilise le prolongement de $u \in H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ en la distribution $\tilde{u}$ sur l'espace-temps, solution de l'équation de Klein-Gordon

$$\frac{1}{2i\pi}\frac{\partial\tilde{u}}{\partial t} = c^2\langle D\rangle\tilde{u}. \tag{1.10}$$

Soit $f = f(\vec{y}; q)$ une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{M}$, telle que

$$\int \big|f(\vec{y}; q)\big| \,\mathrm{d}\vec{y}\,\mathrm{d}\vec{q} < \infty.$$

On a défini dans [12] (en (2.23) et (2.14) pour $c = 1$, en (16.13) pour c quelconque), au sens faible, l'opérateur borné $\mathrm{Op}(f)$ sur $H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ tel que :

$$\big(\mathcal{G}\,\mathrm{Op}(f)u\big)(p) = 2^n \int f(\vec{y}; q)(\mathcal{G}u)(S_q p)e^{2i\pi\langle\vec{y},\overrightarrow{S_q p}-\vec{p}\rangle}\,\mathrm{d}\vec{y}\,\mathrm{d}\vec{q}.$$

Effectuons dans l'intégrale le changement de variable défini par $p' = S_q p$: d'après le calcul effectué dans [12], en (7.7), et tenant compte du fait que l'on ne fixe plus $c = 1$, on a :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}'}{\mathrm{d}\vec{q}} = 2^n c^{2(1-n)}\langle q, Jp\rangle^{n-1}\frac{p_0'}{q_0}. \tag{1.11}$$

D'après (1.6), on peut écrire :

$$\frac{q_0}{p_0'} = 2^{-1/2}\big(1 + c^{-2}\langle Jp, p'\rangle\big)^{-1/2}\frac{p_0 + p_0'}{p_0'}, \tag{1.12}$$

$$\langle q, Jp\rangle = 2^{-1/2}c^2\big(1 + c^{-2}\langle Jp, p'\rangle\big)^{1/2}. \tag{1.13}$$

Ce calcul conduit à la définition suivante :

DÉFINITION 1.1. — *L'opérateur* $\mathrm{Op}(f)$ *de symbole* (*de Klein-Gordon*) f *est défini par la formule*

$$\big(\mathcal{G}\,\mathrm{Op}(f)u\big)(p) = 2^{(n-2)/2}\int (\mathcal{F}_1 f)\big(\vec{p}-\vec{p}\,';\mathrm{mid}(p,p')\big)(\mathcal{G}u)(p')\\ \big[1+c^{-2}\langle Jp,p'\rangle\big]^{-n/2}\,\frac{p_0+p_0'}{p_0'}\,\mathrm{d}\vec{p}\,'$$

dans laquelle $\mathcal{F}_1 f$ *désigne la transformée de Fourier de* $f(\vec{y};q)$ *par rapport à l'ensemble des* n *premières variables.*

On trouvera dans [12] un développement de l'analyse pseudo-différentielle basée sur cette formule, laquelle, tout au moins pour des symboles de classe C^∞, conduit à des opérateurs bornés sous des hypothèses bien moins restrictives que celle de la sommabilité de f par rapport à la mesure $\mathrm{d}\vec{y}\,\mathrm{d}\vec{q}$.

2. Oscillateur relativiste

Les opérateurs infinitésimaux de la représentation de Bargmann-Wigner sont engendrés ([12, p. 202]) par les opérateurs

$$D_j,\quad \langle D\rangle,\quad B_j = x_j\langle D\rangle \quad \text{et} \quad R_{jk} = x_jD_k - x_kD_j.$$

Ceux des deux premières espèces correspondent aux translations d'espace-temps, les R_{jk} aux rotations et les B_j aux « boosts » ou « transformations spéciales de Lorentz » : ces dernières sont les transformations linéaires bien connues qui « mélangent » t et x_j.

DÉFINITION 2.1. — *L'oscillateur relativiste* L *est l'opérateur autoadjoint sur* $H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ *tel que*

$$\pi^{-1}L = \sum\big(B_j^2 + D_j^2\big) - c^{-2}\sum_{j<k} R_{jk}^2.$$

Nous avons montré dans [12] que l'opérateur L, de domaine initial $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\subset H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$, est essentiellement autoadjoint, que son spectre est constitué d'une suite $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ tendant vers $+\infty$ et que ses espaces propres sont de dimension finie.

REMARQUE. — A un coefficient global près, le terme

$$\sum B_j^2 - c^{-2}\sum_{j<k} R_{jk}^2$$

est canonique puisqu'il correspond à l'opérateur de Casimir de la représentation restreinte au groupe de Lorentz. Le groupe de Poincaré, au contraire, n'est pas semi-simple et (tout en conservant le fait que L commute avec le groupe des rotations), on pourrait considérer comme tout aussi naturel l'opérateur

$$\sum B_j^2 + \lambda^{-2} \sum D_j^2 - c^{-2} \sum_{j>k} R_{jk}^2 \ ; \tag{2.1}$$

or, le simple changement d'échelle $\vec{x} \mapsto \lambda^{-1/2}\vec{x}$, accompagné du changement de c en $\lambda^{1/2}c$, ramène, à un coefficient global près, cet opérateur à l'oscillateur relativiste canonique, pour lequel $\lambda = 1$.

Nous avons explicité dans [12, p. 203], l'oscillateur sous la forme

$$-4\pi L = \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} - 4\pi^2|\vec{x}\,|^2 + c^{-2}\Big[\Big(\sum x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big)^2 + (n-1)\sum x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big] \tag{2.2}$$

et vérifié également [loc. cit, p. 176] que l'expression, dans les coordonnées $\vec{p}$ sur $\mathfrak{M}$, de l'opérateur $\mathcal{G}(-4\pi L)\ \mathcal{G}^{-1}$, est identique à (2.2), à condition d'y remplacer x_j par p_j. Compte tenu de (1.3), on peut aussi écrire :

$$\mathcal{G}\big(-4\pi L\big)\mathcal{G}^{-1} = \Delta_{\mathfrak{M}} - 4\pi^2|\vec{p}\,|^2. \tag{2.3}$$

Signalons que d'autres opérateurs sur l'hyperboloïde $\mathfrak{M}$, ou encore sur $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, ont été étudiés par LUNDBERG [8], dans le but de décrire des interactions de particules.

Il est commode d'introduire la transformation de Fourier relativiste $\mathcal{F}_c$ définie par

$$(\mathcal{F}_c u)(\vec{x}\,) = \langle \vec{x}\,\rangle \hat{u}(\vec{x}\,) \tag{2.4}$$

qui ne serait autre (cf. (1.8)) que $\mathcal{G}$ si l'on ne tenait pas à distinguer conceptuellement $\mathfrak{M}$ de $\mathbb{R}^n$. Ce qui a été dit plus haut exprime le fait que L commute avec $\mathcal{F}_c$. Posant $(Pu)(\vec{x}\,) = u(-\vec{x}\,)$ pour toute fonction u, il est immédiat que $P\mathcal{F}_c^2 = \langle \vec{x}\rangle\langle D\rangle$. Lorsque $n = 1$, les valeurs propres de L sont simples, et les opérateurs $\mathcal{F}_c$ et $\langle \vec{x}\,\rangle\langle D\rangle$ (dont les inverses ont des noyaux explicitables à l'aide de fonctions élémentaires ou de Bessel) sont des « fonctions » de l'oscillateur L : de quelles fonctions il s'agit, c'est l'un des objets de la section suivante.

Observons que L admet deux limites ou, pour mieux dire, contractions. La première, obtenue en faisant tendre c vers l'infini, fournit l'oscillateur harmonique $L_\infty = \pi\sum(x_j^2 + D_j^2)$: mais, ainsi qu'il a été observé dans la dernière section de [12], tous les faits de structure relatifs à l'analyse de Klein-Gordon se contractent, quand $c \to \infty$, vers des notions analogues liées au calcul de Weyl. La deuxième contraction s'obtient en faisant $\lambda = \infty$ dans l'expression (2.1) obtenue après changement d'échelle : elle nous permettra de mieux comprendre l'intégrale de Feynman qui se présentera dans la section 4.

Nous avons calculé dans [12, prop. 15.4] (voir l'appendice du présent article pour une correction) le symbole *passif* de l'oscillateur L. En unités pour lesquelles on n'a pas fixé $c = 1$ (mais, toujours, $h = 1$, et la masse de la particule est $m = 1$ également), ce symbole est

$$\pi\Big(\,|||\vec{x}|||_p^2 + |\vec{p}|^2 + \frac{n(n-1)}{16\pi^2c^2}\Big)$$

avec, pour c quelconque,

$$|||\vec{x}|||_p^2 = |\vec{x}|^2 + c^{-2}\langle\vec{x},\vec{p}\rangle^2. \tag{2.5}$$

Posons :

$$r(\vec{x},\vec{p}) = |\vec{x}\,|^2 + |\vec{p}|^2 + c^{-2}\langle\vec{x},\vec{p}\rangle^2. \tag{2.6}$$

Le prolongement admissible de r au sens de [12, p.31], i.e le prolongement de r en une fonction $\tilde{r}(t,\vec{x};p)$ sur $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathfrak{M}$ vérifiant

$$c^{-2}p_0\frac{\partial\tilde{r}}{\partial t} = \sum_{j\geq 1} p_j\frac{\partial\tilde{r}}{\partial x_j}, \tag{2.7}$$

est donné, avec $x = (t,\vec{x})$, par

$$\tilde{r}(t,\vec{x};p) = |\vec{x}\,|^2 - c^2t^2 + |\vec{p}|^2 + c^{-2}\langle x,p\rangle^2, \tag{2.8}$$

comme il est immédiat si l'on se souvient que $p_0^2 = c^2|\vec{p}|^2 + c^4$ sur $\mathfrak{M}$.

La recette, donné dans [12, th. 12.8], pour calculer le symbole *actif* ℓ (i.e. celui de l'espèce utilisée dans la définition 1.1) d'un opérateur à partir de son symbole passif consiste à appliquer au prolongement admissible de ce dernier l'opérateur

$$\nabla^n = \Big(1 + \frac{\square}{16\pi^2c^2}\Big)^{n/2} \tag{2.9}$$

avec

$$\Box = c^{-2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}.$$

Rappelons (cf. [12, p. 58]) que la transformée de Fourier $(\mathcal{F}_1 f)(\xi; p)$, par rapport aux variables d'espace-temps, d'une fonction admissible sur $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathfrak{M}$, a son support dans l'ensemble défini par $|\vec{\xi}\,|^2 - c^{-2}\xi_0^2 > 0$, ce qui donne un sens à $\nabla^n f$. Comme $\Box\,\tilde{r} = -2n$, on voit que le symbole actif ℓ de L est finalement donné par :

$$\ell = \pi r - \frac{n}{16\pi c^2}. \tag{2.10}$$

Si les puissances entières de ∇ jouent un rôle obligatoire dans le calcul symbolique de Klein-Gordon, et si, par ailleurs, le choix du symbole actif ou passif (ou de toute autre espèce de symbole liée à la première par l'application d'une puissance de ∇) conduit dans tous les cas à un calcul covariant à l'égard de la représentation de Bargmann-Wigner, seul le choix du symbole actif conduit aux formules exactes relatives à L qui sont la base du présent travail : nous n'avons pas d'explication a priori de ce fait, fondé sur le calcul.

3. Fonctions de Mathieu

Dans toute cette section, on suppose $n = 1$, et l'on écrit x pour $\vec{x} = x_1$ (mais on conserve la notation $p = (p_0, p_1)$). Soit $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ la suite croissante des valeurs propres de

$$L = (-4\pi)^{-1}\Big[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - 4\pi^2 x^2 + c^{-2}\Big(x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big)^2\Big] \tag{3.1}$$

et, pour chaque k, soit $\psi_k \in H_c^{1/2}(\mathbb{R})$ une fonction propre associée (chaque espace propre est de dimension 1) : on remet à plus tard le choix de la normalisation de ψ_k. Comme L commute avec

$$\mathcal{F}_c = (1 + x^2/c^2)^{1/2}\mathcal{F} = \langle x\rangle \mathcal{F}$$

(où $\mathcal{F}$ désigne la transformation de Fourier), L est également autoadjoint sur $L^2(\mathbb{R}, \langle x\rangle^{-1}\,\mathrm{d}x)$: en posant $x = c\,\mathrm{sh}\, s$, d'où $\langle x\rangle^{-1}\,\mathrm{d}x = c\,\mathrm{d}s$, on transforme L en l'opérateur

$$M = -\frac{1}{4\pi c^2}\Big[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2} - 4\pi^2 c^4\,\mathrm{sh}^2\, s\Big]. \tag{3.2}$$

Cet opérateur est l'opérateur «modifié» introduit par Mathieu [10] en même temps que la version non modifiée (pour laquelle sin remplace sh) en vue de résoudre le problème de Dirichlet dans une ellipse. Il a donné lieu à un grand nombre de travaux dont certains sont cités en référence : cependant, c'est plutôt en changeant c^4 en $-c^4$ que l'on retrouverait l'opérateur modifié habituel — et il n'est pas sûr que l'opérateur M lui-même ait été sérieusement examiné. Quoiqu'il en soit, c'est par la recherche de développements en série de types divers, à coefficients non explicites, que tous les auteurs abordent l'étude des fonctions de Mathieu : ce ne sera pas notre point de vue ici. Des méthodes asymptotiques modernes, pour l'équation de Hill générale, ont été utilisées par A. Grigis [3].

En même temps que ψ_k, on considère la fonction χ_k telle que :

$$\chi_k(s) = \psi_k(c \operatorname{sh} s). \tag{3.3}$$

Définition 3.1. — *Posons* $r = x^2 + p_1^2 + c^{-2}x^2p_1^2$, *de sorte que le symbole* (*de Klein-Gordon, actif*) *de* L *est*

$$\ell = \pi r - \frac{1}{16\pi c^2}\cdot$$

Pour tout $s \in \mathbb{C}$ *tel que* $|\operatorname{Im} s| < \frac{1}{2}\pi$, *on pose* $g_s = \exp(-2\pi\, \mathrm{e}^s r)$ *et l'on désigne par* G_s *l'opérateur* $G_s = \operatorname{Op}(g_s)$; *on pose enfin :*

$$F_s = 2^{1/2}\, \mathrm{e}^{s/2}\, \mathrm{e}^{-2\pi c^2 \operatorname{ch} s} G_s.$$

Remarque. — Puisque $\Re(\mathrm{e}^s) > 0$, g_s est sommable et $\operatorname{Op}(g_s)$ est bien défini au sens de la définition 1.1 : pour $|\operatorname{Im} s| = \frac{1}{2}\pi$, G_s a encore un sens, a priori, comme opérateur de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$: on améliorera le résultat de cette constatation dans un instant.

Proposition 3.2. — *Quels que soient* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ *et* $p \in \mathfrak{M}$, *on a :*

$$(\mathcal{G}F_s u)(p) = c^2 \int_{\mathfrak{M}} \mathrm{e}^{-2\pi(c^{-2}p_0p_0' \operatorname{ch} s + p_1p_1' \operatorname{sh} s)} (\mathcal{G}u)(p')p_0'^{-1}\, \mathrm{d}p_1'.$$

Preuve. — Lorsque $n = 1$, l'application $\xi \mapsto (c^2 \operatorname{ch}\xi, c \operatorname{sh}\xi)$ est d'après (1.2) (au facteur constant c^2 près) une isométrie riemannienne de $\mathbb{R}$ sur $\mathfrak{M}$. Il est alors commode de poser $p_1 = c \operatorname{sh}\xi, p_1' = c \operatorname{sh}\eta$ puisqu'ainsi, avec $q = \operatorname{mid}(p, p')$, on a $q_1 = c \operatorname{sh} \frac{1}{2}(\xi + \eta)$. La définition 1.1, que l'on rappelle, compte tenu de (1.6), sous la forme

$$(\mathcal{G} \operatorname{Op}(f)u)(p) = \int (\mathcal{F}_1 f)(p_1 - p_1'; q)(\mathcal{G}u)(p') \frac{q_0}{p_0'}\, \mathrm{d}p_1', \tag{3.4}$$

s'écrit (si l'on identifie $p \in \mathfrak{M}$ à p_1, etc.)

$$(3.5)\quad \big(\mathcal{G}\operatorname{Op}(f)u\big)(c\operatorname{sh}\xi) = c\int (\mathcal{F}_1 f)\big(c\operatorname{sh}\xi - c\operatorname{sh}\eta; c\operatorname{sh}\tfrac{1}{2}(\xi+\eta)\big) \\ (\mathcal{G}u)(c\operatorname{sh}\eta)\operatorname{ch}\tfrac{1}{2}(\xi+\eta)\,\mathrm{d}\eta.$$

Rappelant que $1 + c^{-2}q_1^2 = c^{-4}q_0^2$, on voit que :

$$(\mathcal{F}_1 g_s)(z;q) = c^2(2\,\mathrm{e}^s q_0^2)^{-1/2}\exp\big(-2\pi\,\mathrm{e}^s q_1^2\big)\exp\Big(-\frac{\pi c^4 z^2}{2\,\mathrm{e}^s q_0^2}\Big).$$

Avec $z = c(\operatorname{sh}\xi - \operatorname{sh}\eta)$ et $q_0 = c^2\operatorname{ch}\frac{1}{2}(\xi+\eta)$, on a $\dfrac{c^4 z^2}{4q_0^2} = c^2\operatorname{sh}^2\frac{1}{2}(\xi-\eta)$ ainsi que

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}_1 f_s)&\big(c\operatorname{sh}\xi - c\operatorname{sh}\eta; c\operatorname{sh}\tfrac{1}{2}(\xi+\eta)\big)\operatorname{ch}\tfrac{1}{2}(\xi+\eta)\\ &= \exp -2\pi c^2\big(\operatorname{ch}s + \mathrm{e}^s\operatorname{sh}^2\tfrac{1}{2}(\xi+\eta) + \mathrm{e}^{-s}\operatorname{sh}^2\tfrac{1}{2}(\xi-\eta)\big)\\ &= \exp -2\pi c^2\big(\operatorname{ch}s\operatorname{ch}\xi\operatorname{ch}\eta + \operatorname{sh}s\operatorname{sh}\xi\operatorname{sh}\eta\big).\end{aligned}$$

En revenant dans (3.5) aux variables p, p', on obtient la PROPOSITION 3.2.

REMARQUE. — Lorsque $|\operatorname{Im}s| < \frac{1}{2}\pi$, F_s est un opérateur borné dans $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$. On peut prolonger l'application $s \mapsto F_s$ en une application continue de la bande fermée $|\operatorname{Im}s| \le \frac{1}{2}\pi$ dans l'espace des endomorphismes continus de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, comme on le voit en examinant le noyau de l'opérateur $\mathcal{G}F_s\mathcal{G}^{-1}$: il est alors immédiat que $F_{-i\pi/2} = \mathcal{F}_c^{-1}$. On a aussi (avec $(Pu)(x) = u(-x)$) la relation $F_{-s} = PF_s = F_sP$ pour tout s.

PROPOSITION 3.3. — *Si $|\operatorname{Im}(s \pm t)| \le \frac{1}{2}\pi$, on a la formule de composition :*

$$F_sF_t = c\int_{\mathbb{R}} \exp -2\pi c^2\big(\operatorname{ch}s\operatorname{ch}t\operatorname{ch}u + \operatorname{sh}s\operatorname{sh}t\operatorname{sh}u\big)F_u\,\mathrm{d}u.$$

Preuve. — Posons, pour $\nu \in \mathbb{R}$ et $\theta \in \mathbb{C}$, avec θ distinct d'un réel ≤ 0,

$$(3.6)\qquad k_\nu(\theta) = \theta^{-\nu/2}K_\nu\big(2\pi\theta^{1/2}\big)$$

où K_ν est la fonction de Bessel habituelle.

En dimension n quelconque, on a évalué dans [12, prop. 4.3] (le passage de $c = 1$ à c quelconque ne présentant aucune difficulté), l'intégrale

$$(3.7)\qquad \Psi(Z) = \int_{\mathfrak{M}} \mathrm{e}^{-2\pi\langle Z,p\rangle}p_0^{-1}\,\mathrm{d}\vec{p}.$$

Il faut supposer ici que $Z \in \mathbb{C}^{n+1}$ et que la partie réelle z de Z appartient au cône de l'espace de Minkowski défini par $z_0 > 0$ et $c^2 z_0^2 - \sum_{j\geq 1} z_j^2 > 0$; le résultat est :

$$\Psi(Z) = 2k_{(n-1)/2}\Big(c^4 Z_0^2 - c^2 \sum_{j\geq 1} Z_j^2\Big). \tag{3.8}$$

D'après la PROPOSITION 3.2, le noyau $k(p,p')$, relativement à ${p'_0}^{-1}\,\mathrm{d}p'_1$, de l'opérateur $\mathcal{G}F_s F_t \mathcal{G}^{-1}$, est donné par :

$$\begin{aligned} k(p,p') = c^4 \int_{\mathfrak{M}} \exp -2\pi \Big[c^{-2} q_0 \big(p_0 \operatorname{ch} s + p'_0 \operatorname{ch} t\big) \\ + q_1 \big(p_1 \operatorname{sh} s + p'_1 \operatorname{sh} t\big)\Big] \frac{\mathrm{d}q_1}{q_0}. \end{aligned}$$

Or on a, ainsi qu'on le voit en développant, l'identité :

$$\begin{aligned} &\big(p_0 \operatorname{ch} s + p'_0 \operatorname{ch} t\big)^2 - c^2 \big(p_1 \operatorname{sh} s + p'_1 \operatorname{sh} t\big)^2 \\ &\qquad = \big(c^{-2} p_0 p'_0 + c^2 \operatorname{ch} s \operatorname{ch} t\big)^2 - \big(p_1 p'_1 + c^2 \operatorname{sh} s \operatorname{sh} t\big)^2. \end{aligned}$$

Compte tenu de (3.8), on peut donc écrire, également, $k(p,p')$ sous la forme :

$$c^4 \int_{\mathfrak{M}} \mathrm{e}^{-2\pi \left[c^{-2} q_0 (c^{-2} p_0 p'_0 + c^2 \operatorname{ch} s \operatorname{ch} t) + c^{-1} q_1 (p_1 p'_1 + c^2 \operatorname{sh} s \operatorname{sh} t)\right]} \frac{\mathrm{d}q_1}{q_0}.$$

Il suffit de poser $q_1 = c \operatorname{sh} u$, d'où $q_0 = c^2 \operatorname{ch} u$ et $c q_0^{-1}\,\mathrm{d}q_1 = \mathrm{d}u$, et de se référer au noyau de $\mathcal{G}F_u\mathcal{G}^{-1}$ fourni par la PROPOSITION 3.2, pour obtenir la PROPOSITION 3.3.

THÉORÈME 3.4. — *Pour tout entier $k \geq 0$, normalisons la fonction propre ψ_k par la condition*

$$\psi_k(-x) \sim \Big(\frac{x}{c}\Big)^{-1/2} \exp -2\pi c^2 \Big(1 + \frac{x^2}{c^2}\Big)^{1/2}$$

pour $x \longrightarrow +\infty$. Alors, pour tout s réel, on a :

$$F_s \psi_k = \psi_k(c \operatorname{sh} s) \psi_k = \chi_k(s) \psi_k.$$

REMARQUE. — La fonction ψ_k est une *fonction propre* de l'oscillateur L ou de la famille d'opérateurs (F_s) : mais ψ_k $(c \operatorname{sh} s)$ apparaît comme la *valeur propre* de F_s associée à cette fonction propre commune.

Preuve. — Soit $h(r) = (2e^s)^{1/2}e^{-2\pi c^2 \operatorname{ch} s}e^{-2\pi e^s r}$ le symbole de F_s. D'après les résultats de [12], F_s commute avec L, et l'on a donc

$$F_s\psi_k = f_k(s)\psi_k \tag{3.9}$$

pour une fonction f_k qu'il s'agit de déterminer. La PROPOSITION 15.10 (voir aussi (16.31)) permet le calcul du symbole $\ell \natural h$ de l'opérateur LF_s : on a en effet

$$-4\pi\ell \natural h = r\Big(\frac{r}{c^2}+1\Big)h'' + \Big(\frac{2r}{c^2}+1\Big)h' - 4\pi^2 rh + \frac{1}{4c^2}h, \tag{3.10}$$

identité où figurent au second membre les dérivées de h par rapport à r :

$$-4\pi\ell \natural h = \Big[4\pi^2\Big(\frac{r^2}{c^2}+r\Big)\,\mathrm{e}^{2s} - 2\pi\Big(\frac{2r}{c^2}+1\Big)\,\mathrm{e}^{s} - 4\pi^2 r + \frac{1}{4c^2}\Big]h. \tag{3.11}$$

On vérifie alors, en effectuant le calcul élémentaire, que

$$\ell \natural h = -\frac{1}{4\pi c^2}\Big[\frac{\partial^2 h}{\partial s^2} - 4\pi^2 c^4(\operatorname{sh}^2 s)h\Big], \tag{3.12}$$

où le membre de droite n'est autre (cf. (3.2) que Mh si l'on regarde le symbole h comme une fonction de s. Si l'on désigne par $(\,,\,)$ le produit scalaire dans l'espace $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$, il résulte de là que, quelle que soit $u \in H_c^{1/2}(\mathbb{R})$, on a

$$M\big(s \mapsto (F_s\psi_k, u)\big) = \big(LF_s\psi_k, u\big)$$

et par suite, tenant compte de (3.9), $Mf_k = \lambda_k f_k$.

D'après le théorème 2.8 de [12], il existe une constante C telle que, pour tout symbole $f(x;p)$, la norme de Hilbert-Schmidt de l'opérateur $\operatorname{Op}(f)$ vérifie :

$$\|\operatorname{Op}(f)\|_{H.S}^2 \le C\int_{\mathbb{R}\times\mathfrak{M}} \big|f(x;p)\big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}p_1.$$

Si l'on pose $f(x;p_1) = h(x^2+p_1^2+c^{-2}x^2p_1^2)$ avec h comme ci-dessus (pour avoir $\operatorname{Op}(f) = F_s$), il est immédiat que l'intégrale est une fonction à décroissance rapide de s.

Comme $\|F_s\|_{H.S.}^2 = \sum_{k=0}^{\infty}|f_k(s)|^2$, on voit que chaque fonction f_k est à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$: a fortiori $f_k \in L^2(\mathbb{R})$, et par suite les fonctions $f_k(s)$ et $\chi_k(s) = \psi_k(c\operatorname{sh} s)$, fonctions propres de M pour la même valeur propre, sont proportionnelles : *on normalisera la fonction ψ_k en décidant que ces deux fonctions sont identiques.*

Quand s tend vers $-\infty$, le symbole $(2\,\mathrm{e}^s)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{2\pi c^2 \operatorname{ch} s} h(r)$ tend vers 1, et l'opérateur correspondant tend vers l'identité au sens faible dans l'espace des opérateurs de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Par suite

$$(2\,\mathrm{e}^s)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{2\pi c^2 \operatorname{ch} s}\psi_k(c \operatorname{sh} s) \to 1, \tag{3.13}$$

ce qui termine la preuve du THÉORÈME 3.4.

Du fait que χ_k est une fonction propre de l'opérateur M, il résulte que cette fonction se prolonge en une fonction entière.

COROLLAIRE 3.5. — *Pour s et $t \in \mathbb{C}$ tels que $|\operatorname{Im}(s \pm t)| \leq \frac{1}{2}\pi$, on a :*

$$\chi_k(s)\chi_k(t) = c \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi c^2(\operatorname{ch} s \operatorname{ch} t \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} s \operatorname{sh} t \operatorname{sh} u)} \chi_k(u)\,\mathrm{d}u.$$

Preuve. — Cette identité intégrale est une conséquence de la PROPOSITION 3.3 et du THÉORÈME 3.4.

REMARQUES :

1) La fonction ψ_k liée à χ_k par (3.3) se prolonge en une fonction holomorphe dans le plan privé des demi-droites imaginaires pures joignant respectivement $\pm ic$ à l'infini ; on peut encore définir $\psi_m(\pm ic) = \chi_k(\pm\frac{1}{2}i\pi)$, en particulier :

$$\mathcal{F}_c^{-1}\psi_k = \psi_k(-ic)\psi_k. \tag{3.14}$$

2) Les équations intégrales exprimant que les fonctions de Mathieu sont fonctions propres de certains opérateurs à noyaux intégraux ont depuis fort longtemps joué un rôle dans l'étude de ces fonctions : l'équation intégrale de Whittaker, base des méthodes de cet auteur, est la version non modifiée de l'équation $\mathcal{F}_c\psi_k = \mu\psi_k$.

La PROPOSITION 3.3 et la définition 3.1 montrent que, pour $|\operatorname{Im} s| \leq \frac{1}{2}\pi$, le symbole de $F_s F_{-s} = PF_s^2$ est

$$\begin{aligned} c\int \mathrm{e}^{-2\pi c^2(\operatorname{ch}^2 s \operatorname{ch} t - \operatorname{sh}^2 s \operatorname{sh} t)}(2e^t)^{1/2}\,\mathrm{e}^{-2\pi c^2 \operatorname{ch} t}\,\mathrm{e}^{-2\pi r\,\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \\ = \Big(1 + \frac{r}{c^2}\Big)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-4\pi c^2(\operatorname{ch} s)(1+r/c^2)^{1/2}} \ ; \end{aligned} \tag{3.15}$$

en particulier, pour $s = \pm\frac{1}{2}i\pi$ (d'où $\operatorname{ch} s = 0$), on obtient le symbole de l'opérateur $\big(\langle x\rangle\langle D\rangle\big)^{-1}$. Voici enfin une recette permettant de calculer le symbole d'un opérateur quelconque commutant avec L : tous les produits scalaires sont pris dans $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$.

PROPOSITION 3.6. — *Soit A l'opérateur*

$$u \mapsto \sum \mu_j (u, \psi_j) \psi_j$$

avec $\mu_j = 0$ pour j assez grand. Avec

$$w(x) = \sum \mu_j \big|\psi_j(ic)\big|^{-2} \psi_j(x),$$

le symbole de A est donné par l'intégrale

$$c \int_{\mathbb{R}} (2\,\mathrm{e}^s)^{1/2}\, \mathrm{e}^{-2\pi c^2 \operatorname{ch} s}\, \mathrm{e}^{-2\pi r e^s} w(c \operatorname{sh} s)\, \mathrm{d}s.$$

Preuve. — D'après la définition 3.1, l'opérateur B dont le symbole est l'intégrale proposée est :

$$B = c \int_{\mathbb{R}} w(c \operatorname{sh} s) F_s \, \mathrm{d}s.$$

D'après le THÉORÈME 3.4, tout revient à montrer que :

$$\frac{c}{\big|\psi_j(-ic)\big|^2} \int \psi_j(c \operatorname{sh} s) \psi_k(c \operatorname{sh} s)\, \mathrm{d}s = (\psi_k, \psi_j).$$

Or ceci résulte de (3.14) et de ce que $\mathcal{F}_c$ est une isométrie de $H_c^{1/2}(\mathbb{R})$ sur $L^2(\mathbb{R}, \langle x \rangle^{-1}\, \mathrm{d}x)$.

Pour terminer cette section, indiquons en quoi (que l'on s'intéresse ou non à l'oscillateur relativiste), l'opérateur F_s joue un rôle obligé dans l'analyse de Klein-Gordon, fondée sur le prolongement de $u \in H_c^{1/2}(\mathbb{R})$ en la fonction $\tilde{u}$ sur l'espace-temps $\mathbb{R}^2$ caractérisée par l'équation d'évolution (1.10), i.e. définie par :

$$\tilde{u}(t, x) = \big(\mathrm{e}^{2i\pi c^2 t \langle D \rangle} u\big)(x). \tag{3.16}$$

Il est immédiat que :

$$\tilde{u}(t, x) = c^2 \int_{\mathfrak{M}} \mathrm{e}^{2i\pi(tp_0' + xp_1')} (\mathcal{G}u)(p') p_0'^{-1}\, \mathrm{d}p_1'. \tag{3.17}$$

Pour tout σ réel, posons :

$$E_\sigma = F_{-i\pi/2}^{-1} F_{\sigma - i\pi/2} = \mathcal{F}_c F_{\sigma - i\pi/2}. \tag{3.18}$$

Si u appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a donc pour tout $p_1 \in \mathbb{R}$

$$(E_\sigma u)(p_1) = \big(\mathcal{G}F_{\sigma - i\pi/2u}\big)\big(c^2\langle p_1\rangle, p_1\big) \tag{3.19}$$

et il résulte de la PROPOSITION 3.2 que

$$(E_\sigma u)(c\,\mathrm{sh}\,\xi) = c^2 \int \mathrm{e}^{2i\pi(p_0' \,\mathrm{ch}\,\xi\,\mathrm{sh}\,\sigma + cp_1'\,\mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{ch}\,\sigma)}(\mathcal{G}u)(p')p_0'^{-1}dp_1'. \tag{3.20}$$

En comparant avec (3.17), on voit que

$$\tilde{u}(t,x) = (E_\sigma u)(c\,\mathrm{sh}\,\xi) \tag{3.21}$$

pourvu que $\mathrm{ch}\,\xi\,\mathrm{sh}\,\sigma = t$ et $c\,\mathrm{sh}\,\xi\,\mathrm{ch}\,\sigma = x$; en d'autres termes :

$$\mathrm{sh}\big(\sigma \pm \xi\big) = t \pm \frac{x}{c}\cdot \tag{3.22}$$

Le fait que le changement de coordonnées (3.22) permet une séparation des variables dans l'équation de Klein-Gordon n'est évidemment pas nouveau : dans la version pour laquelle le laplacien se substitue à l'opérateur des ondes, le fait qu'un changement de coordonnées analogue sépare les variables dans l'équation de Helmholtz remonte au tout premier article de Mathieu, dans lequel ces fonctions furent introduites.

4. Une intégrale de Feynman

On ne suppose plus à présent que $n = 1$. On commence par généraliser les opérateurs F_s et G_s, en partant de l'expression fournie par la PROPOSITION 3.2 : on verra plus loin une autre généralisation possible, qui coïncide avec G_s lorsque $n = 1$.

DÉFINITION 4.1. — *Pour* $|\,\mathrm{Im}\,s| \le \frac{1}{2}\pi$, *on définit l'opérateur* F_s, *sur l'espace* $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, *par la formule*

$$(\mathcal{G}F_s u)(p) = c^2 \int_{\mathfrak{M}} \mathrm{e}^{-2\pi(c^{-2}p_0p_0'\,\mathrm{ch}\,s + \langle\vec{p},\vec{p}'\,\rangle\,\mathrm{sh}\,s)}(\mathcal{G}u)(p')\frac{\mathrm{d}\vec{p}'}{p_0'}$$

et l'opérateur $G_s = (2\,\mathrm{e}^s)^{-n/2}\,\mathrm{e}^{2\pi c^2\,\mathrm{ch}\,s}F_s$.

Remarquons que, lorsque $|\,\mathrm{Im}\,s| < \frac{1}{2}\pi$, l'opérateur F_s s'étend en un opérateur borné sur $H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$. On a toujours $F_{-i\pi/2} = \mathcal{F}_c^{-1}$ et si l'on définit, pour σ réel, E_σ comme en (3.18), on voit que le prolongement $\tilde{u}$ de $u \in H_c^{1/2}(\mathbb{R}^n)$ caractérisé par (1.10) est donné par la formule

$$\tilde{u}(t,\vec{x}) = (E_\sigma u)(\vec{p}) \tag{4.1}$$

si

$$t = \langle \vec{p} \rangle \operatorname{sh} \sigma \quad \text{et} \quad \vec{x} = \vec{p} \operatorname{ch} \sigma. \tag{4.2}$$

Pour s et t réels, le noyau de l'opérateur $\mathcal{G} F_s F_t \mathcal{G}^{-1}$ relativement à $p_0'^{-1}\, \mathrm{d}\vec{p}\,'$ est

$$k(p,p') = c^4 \int \exp -2\pi \Big[c^{-2} q_0 \big(p_0 \operatorname{ch} s + p_0' \operatorname{ch} t\big) \\ + \big\langle \vec{q}, \vec{p} \operatorname{sh} s + \vec{p}\,' \operatorname{sh} t \big\rangle \Big] \frac{\mathrm{d}\vec{q}}{q_0}$$

et d'après (3.8), cette intégrale ne dépend que de

$$(p_0 \operatorname{ch} s + p_0' \operatorname{ch} t)^2 - c^2 \big|\vec{p} \operatorname{sh} s + \vec{p}\,' \operatorname{sh} t\big|^2 \\ = p_0^2 + p_0'^2 + c^4(\operatorname{sh}^2 s + \operatorname{sh}^2 t) + 2\big[p_0 p_0' \operatorname{ch} s \operatorname{ch} t - c^2 \langle \vec{p}, \vec{p}\,' \rangle \operatorname{sh} s \operatorname{sh} t\big],$$

expression symétrique en (s,t). Par suite F_s et F_t commutent, fait qui reste vrai toutes les fois que $|\operatorname{Im} s| \le \frac{1}{2}\pi$ et $|\operatorname{Im} t| \le \frac{1}{2}\pi$ (par prolongement analytique et continuité).

Le symbole de F_s (ou de G_s) n'est pas particulièrement attrayant (contrairement à celui de l'autre opérateur qui sera proposé plus loin) : néanmoins, il va nous servir à obtenir un développement limité utile, pour $s \to -\infty$. On définit pour commencer ∇^{1-n} comme en (2.9), remplaçant l'exposant $\frac{1}{2}n$ par $\frac{1}{2}(1-n)$: alors

$$\nabla^{1-n} \ell = \pi r + \frac{n(n-2)}{16\pi c^2} \tag{4.3}$$

si ℓ est le symbole de L et si r est l'expression définie en (2.6).

LEMME 4.2. — *Le symbole g_s de G_s est donné par la formule*

$$(\nabla^{1-n} g_s)(\vec{x}\,; p) = \mathrm{e}^{(1-n)s/2}\, \mathrm{e}^{-2\pi |\vec{p}|^2 \mathrm{e}^s} \big(c^{-2}|\vec{p}|^2 \mathrm{e}^s + \mathrm{e}^{-s}\big)^{(1-n)/2} \\ \exp -2\pi \frac{|\vec{x}\,|^2 + c^{-2}(1 + c^{-4} p_0^2 \mathrm{e}^{2s}) \langle \vec{x}, \vec{p} \rangle^2}{c^{-2}|\vec{p}|^2 \mathrm{e}^s + \mathrm{e}^{-s}}. \tag{4.4}$$

Preuve. — Les définitions 1.1 et 4.1 fournissent l'identité :

$$2^{n/2-1} (\mathcal{F}_1 g_s)\big(\vec{p} - \vec{p}\,', \operatorname{mid}(p,p')\big) \big[1 + c^{-2}\langle Jp, p' \rangle\big]^{-n/2} (p_0 + p_0') \\ = (2\,\mathrm{e}^s)^{-n/2}\, \mathrm{e}^{2\pi c^2 \operatorname{ch} s} c^2 \exp -2\pi \big(c^{-2} p_0 p_0' \operatorname{ch} s + \langle \vec{p}, \vec{p}\,' \rangle \operatorname{sh} s\big). \tag{4.4}$$

Posons $\vec{z} = \vec{p} - \vec{p}\,'$ et $q = \mathrm{mid}(p, p')$. D'après (1.6), on a :

$$(4.5) \qquad q_0 = 2^{-1/2}\bigl(1 + c^{-2}\langle Jp, p'\rangle\bigr)^{-1/2}(p_0 + p_0').$$

En appliquant à nouveau (1.6), ainsi que

$$\langle \vec{p} + \vec{p}\,', \vec{p} - \vec{p}\,'\rangle = c^{-2}\bigl(p_0 + p_0'\bigr)\bigl(p_0 - p_0'\bigr),$$

on obtient

$$\langle \vec{q}, \vec{z}\rangle = c^{-2} q_0 (p_0 - p_0')$$

d'où

$$|\vec{z}|^2 - c^2 q_0^{-2}\langle \vec{q}, \vec{z}\rangle^2 = |\vec{p} - \vec{p}\,'|^2 - c^{-2}(p_0 - p_0')^2 = -2c^2 + 2\langle Jp, p'\rangle$$

et par suite

$$(4.6) \qquad \tfrac{1}{2}\bigl(1 + c^{-2}\langle Jp, p'\rangle\bigr) = 1 + \tfrac{1}{4}\bigl[c^{-2}|\vec{z}|^2 - q_0^{-2}\langle \vec{q}, \vec{z}\rangle^2\bigr],$$

ce qui s'écrit aussi

$$(4.7) \qquad \tfrac{1}{2}\bigl(-c^2 + c^{-2}p_0p_0' - \langle \vec{p}, \vec{p}\,'\rangle\bigr) = \tfrac{1}{4}\bigl(|\vec{z}|^2 - c^2 q_0^{-2}\langle \vec{q}, \vec{z}\rangle^2\bigr).$$

Par ailleurs

$$|\vec{z}|^2 = |\vec{p} - \vec{p}\,'|^2 = c^{-2}(p_0 + p_0')^2 - 2\bigl[c^2 + c^{-2}p_0p_0' + \langle \vec{p}, \vec{p}\,'\rangle\bigr]$$

d'où, en se servant à nouveau de (4.5) puis de (4.6) :

$$\begin{aligned}(4.8) \qquad \tfrac{1}{2}\bigl(-c^2 + c^{-2}p_0p_0' + \langle \vec{p}, \vec{p}\,'\rangle\bigr) &= -c^2 - \tfrac{1}{4}|\vec{z}|^2 + \tfrac{1}{4}c^{-2}(p_0 + p_0')^2 \\ &= -c^2 - \tfrac{1}{4}|\vec{z}|^2 + \tfrac{1}{2}c^{-2}q_0^2\bigl(1 + c^{-2}\langle Jp, p'\rangle\bigr) \\ &= -c^2 - \tfrac{1}{4}|\vec{z}|^2 + c^{-2}q_0^2 + \tfrac{1}{4}\bigl(c^{-4}q_0^2|\vec{z}|^2 - c^{-2}\langle \vec{q}, \vec{z}\rangle^2\bigr) \\ &= |\vec{q}|^2 + \tfrac{1}{4}c^{-2}\bigl(|\vec{q}|^2|\vec{z}|^2 - \langle \vec{q}, \vec{z}\rangle^2\bigr).\end{aligned}$$

Il résulte de (4.7) et (4.8) que

$$\begin{aligned}(4.9) \qquad c^{-2}p_0p_0'\operatorname{ch} s + \langle \vec{p}, \vec{p}\,'\rangle \operatorname{sh} s - c^2 \operatorname{ch} s &= \bigl[|\vec{q}|^2 + \tfrac{1}{4}c^{-2}\bigl(|\vec{q}|^2|\vec{z}|^2 - \langle \vec{q}, \vec{z}\rangle^2\bigr)\bigr]\,\mathrm{e}^{s} \\ &\quad + \tfrac{1}{4}\bigl[|\vec{z}|^2 - c^2 q_0^{-2}\langle \vec{q}, \vec{z}\rangle^2\bigr]\,\mathrm{e}^{-s}.\end{aligned}$$

Posons

$$(4.10)\quad Q(\vec{z}) = \tfrac{1}{2}\big(c^{-2}|\vec{q}|^2\,\mathrm{e}^s + \mathrm{e}^{-s}\big)|\vec{z}|^2 - \tfrac{1}{2}\big(c^{-2}\,\mathrm{e}^s + c^2 q_0^{-2}\,\mathrm{e}^{-s}\big)\langle\vec{q},\vec{z}\rangle^2$$

et soit A la matrice de cette forme quadratique. D'après (4.4), (4.5), (4.6) et (4.9), on a :

$$(4.11)\quad (\mathcal{F}_1 g_s)(\vec{z}\,; q) = c^2 q_0^{-1}(2\,\mathrm{e}^s)^{-n/2}\,\mathrm{e}^{-2\pi|\vec{q}|^2\,\mathrm{e}^s}\,\mathrm{e}^{-\pi Q(\vec{z})} \big[1 + \tfrac{1}{4}\big(c^{-2}|\vec{z}|^2 - q_0^{-2}\langle\vec{z},\vec{q}\rangle^2\big)\big]^{(n-1)/2}.$$

La formule (8.6) et la définition 8.5 de [12] fournissent (en tenant compte de ce que c n'est plus fixé égal à 1)

$$(4.12)\quad \mathcal{F}_1(\nabla^{1-n} g_s)(\vec{z}\,; q) = \Big(1 + \frac{1}{4c^2}\|\vec{z}\|_q^2\Big)^{(1-n)/2}(\mathcal{F}_1 g_s)(\vec{z}\,; q)$$

avec

$$(4.13)\quad \|\vec{z}\|_q^2 = |\vec{z}|^2 - c^2 q_0^{-2}\langle\vec{z},\vec{q}\rangle^2$$

d'où

$$(4.14)\quad \mathcal{F}_1(\nabla^{1-n} g_s)(\vec{z}\,; q) = c^2 q_0^{-1}(2\,\mathrm{e}^s)^{-n/2}\,\mathrm{e}^{-2\pi|\vec{q}|^2\,\mathrm{e}^s}\,\mathrm{e}^{-\pi Q(\vec{z})}.$$

Bien entendu, la transformée de Fourier inverse, évaluée en $\vec{x}$, d'une gaussienne $\exp -\pi\langle A\vec{z},\vec{z}\rangle$, est la fonction $(\det A)^{-1/2}\exp(-\pi\langle A^{-1}\vec{x},\vec{x}\rangle)$, et l'on inverse A à l'aide de l'appendice de [12] ; en posant

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\big(c^{-2}|\vec{q}|^2\,\mathrm{e}^s + \mathrm{e}^{-s}\big),\qquad \vec{a} = -\vec{b} = 2^{-1/2}\big(c^{-2}\,\mathrm{e}^s + c^2 q_0^{-2}\,\mathrm{e}^{-s}\big)\vec{q},$$

on a $\det A = \lambda^{n-1}(\lambda + \langle\vec{a},\vec{b}\rangle)$, et

$$\lambda + \langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-s}\big(1 - c^2 q_0^{-2}|\vec{q}|^2\big) = \tfrac{1}{2}c^4 q_0^{-2}\,\mathrm{e}^{-s}$$

d'où

$$(4.15)\quad \det A = 2^{-n}c^4 q_0^{-2}\,\mathrm{e}^{-s}\big(c^{-2}|\vec{q}|^2\,\mathrm{e}^s + \mathrm{e}^{-s}\big)^{n-1}.$$

Les coefficients B_{jk} de la matrice $B = A^{-1}$ sont alors donnés par

$$B_{jk} = \lambda^{-1}\big(\delta_{jk} - \big(\lambda + \langle\vec{a},\vec{b}\rangle\big)^{-1}a_j b_k\big)$$

d'où

$$(4.16)\quad \langle A^{-1}\vec{x},\vec{x}\,\rangle = \lambda^{-1}\big\{\,|\vec{x}|^2 + c^{-2}\big(1 + c^{-4}q_0^2\,\mathrm{e}^{2s}\big)\langle\vec{x},\vec{q}\rangle^2\big\},$$

de sorte que (4.14), (4.15) et (4.16) conduisent au résultat du LEMME 4.2.

On notera que lorsque $n = 1$, $\langle A^{-1}\vec{x},\vec{x}\,\rangle$ se réduit à

$$2\,\mathrm{e}^s(1 + c^{-2}q_1^2)x_1^2,$$

ce qui permet de retrouver aussitôt la formule de la définition 3.1.

THÉORÈME 4.3. — *Pour tout s tel que $|\operatorname{Im} s| \leq \frac{1}{2}\pi$, G_s commute avec l'oscillateur relativiste L. En outre, pour $\varepsilon > 0$, on peut écrire*

$$G_{\ell n(\varepsilon/2)} = \big(I + \varepsilon^2 \beta(\varepsilon)\big) \exp -\varepsilon\Big(L - \frac{n(n-2)}{16\pi c^2}\Big),$$

l'opérateur $\beta(\varepsilon)$ restant borné sur chaque espace propre de L pour ε tendant vers 0.

Preuve. — D'après le LEMME 4.2, on a

$$\begin{aligned}\nabla^{1-n} g_{\ell n(\varepsilon/2)} = {} & \mathrm{e}^{-\pi\varepsilon|\vec{p}|^2}\big(1 + \tfrac{1}{4}c^{-2}\varepsilon^2|\vec{p}|^2\big)^{(1-n)/4} \\ & \exp\Big\{-\pi\varepsilon\big(1 + \tfrac{1}{4}c^{-2}\varepsilon^2|\vec{p}|^2\big)^{-1} \\ & \qquad \big[|\vec{x}|^2 + c^{-2}\langle\vec{x},\vec{p}\rangle^2 + \tfrac{1}{4}c^{-6}\varepsilon^2 p_0^2\langle\vec{x},\vec{p}\rangle^2\big]\Big\}\end{aligned}$$

d'où (utilisant aussi (4.3))

$$\begin{aligned}\nabla^{1-n} g_{\ell n(\varepsilon/2)} &= 1 - \pi\varepsilon r + \varepsilon^2 b_\varepsilon \\ &= 1 - \varepsilon\Big(\nabla^{1-n}\ell - \frac{n(n-2)}{16\pi c^2}\Big) + \varepsilon^2 b_\varepsilon\end{aligned}$$

avec $|b_\varepsilon(\vec{x}\,;p)| \leq C(1+r)^4$ pour une constante C ne dépendant que de c. L'opérateur de symbole $\nabla^{n-1} b_\varepsilon$ reste borné au sens faible, quand $\varepsilon \to 0$, dans l'espace des opérateurs de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et comme pour tout s, G_s commute avec $G_{\ell n(\varepsilon/2)}$, G_s commute aussi avec L. La deuxième partie du THÉORÈME 4.3 résulte du même développement limité.

Nous avons défini F_s, pour n quelconque, en généralisant le noyau, fourni par la PROPOSITION 3.2, de l'opérateur $\mathcal{G}F_s\mathcal{G}^{-1}$: on peut, au lieu de cela, généraliser le symbole g_s introduit dans la définition 3.1.

PROPOSITION 4.4. — *Pour $|\operatorname{Im} s| < \frac{1}{2}\pi$, posons, avec $g_s = \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{e}^s r}$,*

$$H_s = \operatorname{Op}(g_s).$$

Pour tout $\varepsilon < 0$, le noyau $h_\varepsilon(p,p')$ de l'opérateur $\mathcal{G}H_{\ell n(\varepsilon/2)}\mathcal{G}^{-1}$ relativement à la mesure $p_0'^{-1}\,\mathrm{d}\vec{p}'$ est donné par :

$$\begin{aligned}h_\varepsilon(p,p') = {} & c^2\varepsilon^{-n/2}\Big(\operatorname{ch}\frac{d(p,p')}{2c}\Big)^{1-n} \\ & \exp -\pi\Big[\frac{4c^2}{\varepsilon}\operatorname{sh}^2\frac{d(p,p')}{2c} + \varepsilon\big|\overrightarrow{\mathrm{mid}}(p,p')\big|^2\Big].\end{aligned}$$

Preuve. — D'après la définition (2.6) de r, on a

$$g_s(\vec{x}\,;q) = \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{e}^s|\vec{q}|^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{e}^s(|\vec{x}|^2+c^{-2}\langle\vec{q},\vec{x}\rangle^2)}.$$

D'après l'appendice et le lemme 8.6 de [12], le discriminant de la forme quadratique

$$\vec{x} \mapsto |||\vec{x}|||_q^2 = |\vec{x}|^2 + c^{-2}\langle\vec{q},\vec{x}\rangle^2$$

est $\langle\vec{q}\rangle^2 = c^{-4}q_0^2$, est la forme quadratique duale est

$$\vec{z} \mapsto \|\vec{z}\|_q^2 = |\vec{z}|^2 - c^2 q_0^{-2}\langle\vec{q},\vec{z}\rangle^2,$$

d'où

$$\big(\mathcal{F}_1 g_s\big)(\vec{z}\,;q) = c^2 q_0^{-1}\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{e}^s|\vec{q}|^2}(2\,\mathrm{e}^s)^{-n/2} \\ \exp -\tfrac{1}{2}\pi\,\mathrm{e}^{-s}\big(|\vec{z}|^2 - c^2q_0^{-2}\langle\vec{q},\vec{z}\rangle^2\big).$$

Il ne reste plus qu'à appliquer la définition 1.1 de $\mathrm{Op}(g_s)$ en posant $\vec{z} = \vec{p} - \vec{p}\,'$ et $q = \mathrm{mid}(p,p')$: en se servant à nouveau de (4.5) et (4.7), on obtient, pour $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, l'identité :

$$(\mathcal{G}H_s u)(p) = c^2(2\,\mathrm{e}^s)^{-n/2}\int\big\{\tfrac{1}{2}\big(1 + c^{-2}\langle Jp,p'\rangle\big)\big\}^{(1-n)/2}(\mathcal{G}u)(p') \\ \big\{\exp -2\pi\,\mathrm{e}^s|\vec{q}|^2\big\}\Big\{\exp -\pi\,\mathrm{e}^{-s}(-c^2 + c^{-2}p_0p_0' - \langle\vec{p},\vec{p}\,'\rangle)\Big\}\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{p_0'}\cdot$$

Enfin, on obtient l'énoncé de la PROPOSITION 4.4 en posant $\varepsilon = 2\,\mathrm{e}^s$ et en utilisant (1.5).

THÉORÈME 4.5. — *L'opérateur* $H_s = \mathrm{Op}(\,\mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{e}^s r})$ *commute avec* L.

Preuve. — Posons, d'après (2.3), $\mathcal{L} = \mathcal{G}(-4\pi L)\mathcal{G}^{-1} = \Delta_{\mathfrak{M}} - 4\pi^2|\vec{p}|^2$ et

$$\theta = c^2 + \langle Jp,p'\rangle = c^2 + c^{-2}p_0p_0' - \langle\vec{p},\vec{p}\,'\rangle \tag{4.17}$$

ainsi que

$$A = \mathrm{e}^s\frac{(p_0+p_0')^2}{\theta} + \mathrm{e}^{-s}\theta. \tag{4.18}$$

En examinant le noyau de $\mathcal{G}H_s\mathcal{G}^{-1}$ relativement à $p_0'^{-1}d\vec{p}\,'$ et en notant que $c^{-2}q_0^2 = (p_0+p_0')^2/(2\theta)$, on voit qu'il s'agit d'établir que, avec

$$K = \theta^{(1-n)/2}\,\mathrm{e}^{-\pi A}, \tag{4.19}$$

la fonction $\mathcal{L}K$ est une fonction symétrique de (p,p'). Avec

$$R_j = \frac{\partial A}{\partial p_j}, \quad S = \sum_{j\geq 1} p_j \frac{\partial A}{\partial p_j}, \tag{4.20}$$

on a, d'après l'expression de $\mathcal{L}$ donnée en (2.2) (remplacer $\vec{x}$ par $\vec{p}$)

$$K^{-1}\mathcal{L}K = \pi^2 B_1 - \pi B_2 + \frac{(n-1)\pi}{\theta} B_3 + \frac{1-n}{2\theta} B_4 + \frac{n^2-1}{4\theta^2} B_5 \tag{4.21}$$

où

$$B_1 = \sum R_j^2 + c^{-2}S^2 - 4|\vec{p}|^2, \quad B_2 = \Delta_{\mathfrak{M}} A, \tag{4.22}$$

$$B_3 = \sum R_j \frac{\partial \theta}{\partial p_j} + c^{-2}\Big(\sum p_j \frac{\partial \theta}{\partial p_j}\Big) S, \quad B_4 = \Delta_{\mathfrak{M}} \theta, \tag{4.23}$$

$$B_5 = \sum \Big(\frac{\partial \theta}{\partial p_j}\Big)^2 + c^{-2}\Big(\sum p_j \frac{\partial \theta}{\partial p_j}\Big)^2. \tag{4.24}$$

On a

$$\frac{\partial p_0}{\partial p_j} = c^2 \frac{p_j}{p_0}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial p_j} = p_0' \frac{p_j}{p_0} - p_j' \tag{4.25}$$

d'où

$$\sum p_j \frac{\partial \theta}{\partial p_j} = \frac{p_0'}{p_0}\big(c^{-2}p_0^2 - c^2\big) - \langle \vec{p}, \vec{p}\,' \rangle = \theta - c^2 \frac{p_0 + p_0'}{p_0}, \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} \Big|\frac{\partial \vec{\theta}}{\partial p}\Big|^2 &= \frac{2p_0'}{p_0}\langle Jp, p'\rangle - c^2\Big(1 + \frac{p_0'^2}{p_0^2}\Big) \\ &= 2\theta\big(\frac{p_0 + p_0'}{p_0} - 1\big) - c^2 \frac{(p_0 + p_0')^2}{p_0^2}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Par suite $B_5 = \theta(c^{-2}\theta - 2)$ est symétrique : on écrira $B_5 \sim 0$ pour traduire, dans toute la preuve de ce théorème, une équivalence plus précise, à savoir celle qui néglige les termes symétriques en (p,p') qui sont en outre invariants sous l'action du groupe des rotations opérant à la fois sur $\vec{p}$ et $\vec{p}\,'$.

On sait (cf. HELGASON [6, p. 268]) que lorsque $c = 1$, la partie radiale de $\Delta_{\mathfrak{M}}$ s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} + (n-1)\coth\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}$$

avec $p_0 = \operatorname{ch}\rho$: pour c quelconque cette partie radiale s'écrit, si l'on revient à la coordonnée p_0,

$$\Delta_{\mathfrak{M}}^{\mathrm{rad}} = \left(c^{-2}p_0^2 - c^2\right)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}p_0^2} + \frac{n}{c^2}p_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_0}. \tag{4.28}$$

On en déduit l'identité

$$\Delta_{\mathfrak{M}}(p_0 + p_0')^2 = 2\left(c^{-2}p_0^2 - c^2\right) + \frac{2n}{c^2}p_0(p_0 + p_0') \tag{4.29}$$

ainsi que (utilisant également l'invariance de $\Delta_{\mathfrak{M}}$ par le groupe de Lorentz) les identités

$$\Delta_M\theta = n\left(c^{-2}\theta - 1\right), \tag{4.30}$$

$$\Delta_{\mathfrak{M}}(\theta^{-1}) = (2-n)c^{-2}\theta^{-1} + (n-4)\theta^{-2}. \tag{4.31}$$

La relation (4.30) montre que $B_4 \sim 0$ et que $B_2 \sim \mathrm{e}^s\Delta_{\mathfrak{M}}$ a avec

$$a = \left(p_0 + p_0'\right)^2\theta^{-1}. \tag{4.32}$$

On se propose d'établir la relation :

$$\Delta_{\mathfrak{M}}a \sim \frac{2(n-1)}{c^2}\frac{p_0(p_0 + p_0')}{\theta}. \tag{4.33}$$

Il suffit évidemment, utilisant l'invariance de $\Delta_{\mathfrak{M}}$ et de a par rotation, de le faire en un point $p = (p_0, p_1, 0, \ldots, 0)$. En un tel point on a (utilisant l'expression explicite de $\Delta_{\mathfrak{M}}$ provenant de (2.2))

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{M}}a = {} & \left(p_0 + p_0'\right)^2\Delta_{\mathfrak{M}}(\theta^{-1}) + \theta^{-1}\Delta_{\mathfrak{M}}\left(p_0 + p_0'\right)^2 \\ & + 2\left(1 + c^{-2}p_1^2\right)\frac{\partial}{\partial p_1}(p_0 + p_0')^2\frac{\partial}{\partial p_1}(\theta^{-1}) \end{aligned} \tag{4.34}$$

et, compte tenu de (4.25) et (4.26), le dernier terme s'écrit :

$$-4c^{-2}\theta^{-2}p_0\left(p_0 + p_0'\right)\left(\theta - c^2\frac{p_0 + p_0'}{p_0}\right) \sim -4c^{-2}p_0\left(p_0 + p_0'\right)\theta^{-1}.$$

En se servant de (4.29) et (4.31), on obtient

$$\begin{aligned} \Delta_{\mathfrak{M}}a & \sim 2c^{-2}\theta^{-1}\left[p_0^2 + (n-2)p_0\left(p_0 + p_0'\right)\right] \\ & \sim 2(n-1)c^{-2}\theta^{-1}p_0\left(p_0 + p_0'\right) \end{aligned}$$

ce qui confirme (4.32) et permet d'écrire :

$$B_2 \sim 2(n-1)c^{-2}\theta^{-1}p_0(p_0+p_0')\,\mathrm{e}^s. \tag{4.35}$$

On obtient aisément (en développant systématiquement les calculs suivant les puissances de $\theta, p_0 + p_0'$ et p_0) les relations

$$R_j = \Big[-\mathrm{e}^s\frac{(p_0+p_0')^2}{\theta^2} + \mathrm{e}^{-s}\Big]\Big(p_0'\frac{p_j}{p_0} - p_j'\Big) + 2c^2\,\mathrm{e}^s\frac{(p_0+p_0')p_j}{p_0\theta} \tag{4.36}$$

et (se servant de (4.25) et (4.26) pour ne pas calculer $\langle p_0'\vec{p}/p_0 - \vec{p}', \vec{p}\rangle$ une deuxième fois) :

$$\begin{aligned} S = \mathrm{e}^s\Big\{-\frac{(p_0+p_0')^2}{\theta} &+ c^2\frac{(p_0+p_0')^3}{p_0\theta^2} \\ &+ \frac{2p_0(p_0+p_0')}{\theta} - 2c^4\frac{p_0+p_0'}{p_0\theta}\Big\} \\ &\qquad + \mathrm{e}^{-s}\Big[\theta - c^2\frac{p_0+p_0'}{p_0}\Big]. \end{aligned} \tag{4.37}$$

D'après (4.23), (4.25) et (4.26), on a

$$B_3 = \sum R_j\Big(p_0'\frac{p_j}{p_0} - p_j'\Big) + c^{-2}\Big(\theta - c^2\frac{p_0+p_0'}{p_0}\Big)S. \tag{4.38}$$

En utilisant à nouveau (4.27) et (4.26) pour obtenir le carré du module du vecteur $p_0'\vec{p}/p_0 - \vec{p}'$ ainsi que son produit scalaire avec $\vec{p}$, on obtient après développement

$$B_3 \sim 2c^{-2}p_0(p_0+p_0')\,\mathrm{e}^s, \tag{4.39}$$

ce qui permet de constater, grâce à (4.35), que

$$-B_2 + \frac{n-1}{\theta}B_3 \sim 0. \tag{4.40}$$

C'est à cet endroit précis que seul le symbole *actif* utilisé dans la définition 1.1 (cf. fin de la section 2) convient. D'après (4.21), il reste pour terminer la preuve du THÉORÈME 4.5 à montrer que $B_1 \sim 0$, ce qui — d'après (4.22), (4.36) et (4.37) — est le fruit d'un calcul que nous épargnerons au lecteur, vu qu'il s'agit, au fond, plus de comptabilité que de mathématiques.

COROLLAIRE 4.6. — *Soit* $f = f(\vec{x}\,; p)$ *un symbole continu sur* $\mathbb{R}^n \times \mathfrak{M}$, *tendant vers* 0 *quand* $|\vec{x}|^2 + |\vec{p}|^2 \to \infty$, *et ne dépendant que de* r. *Alors l'opérateur* $\mathrm{Op}(f)$ (*bien défini de* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *dans* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ *d'après la définition* 1.1) *commute avec* L.

Preuve. — Elle est une occasion d'appliquer le théorème de Stone-Weierstrass sur le compactifié de $[0, \infty[$.

REMARQUE. — Les opérateurs G_s et H_s, tout en commutant avec L, ne sont pas, si $n \geq 2$, des « fonctions » de L puisque la restriction de l'un ou de l'autre à un sous-espace propre de L n'est pas, en général, un opérateur scalaire. Rappelons cependant le THÉORÈME 4.3 et le fait analogue relatif à H_s (conséquence du THÉORÈME 4.5) :

$$H_{\ell n(\varepsilon/2)} = \big(I + \varepsilon^2 \gamma(\varepsilon)\big) \exp -\varepsilon\Big(L + \frac{n}{16\pi c^2}\Big), \tag{4.41}$$

où $\gamma(\varepsilon)$ désigne un opérateur commutant avec L et restant borné sur chaque espace propre de L pour ε tendant vers 0.

Soit $\delta > 0$ et soit une suite de subdivisions $0 = \delta_0 < \delta_1 < \ldots < \delta_m = \delta$ telle que $\sum_{j=0}^{m-1} (\delta_{j+1} - \delta_j)^2 \to 0$. D'après le THÉORÈME 4.43, on peut écrire, dans ces conditions,

$$\prod_{j=0}^{m-1} G_{\ell n((\delta_{j+1}-\delta_j)/2)} \to \exp -\delta\Big(L - \frac{n(n-2)}{16\pi c^2}\Big) \tag{4.42}$$

et (4.41) permet une formule analogue dans laquelle H_s remplace G_s. Il n'y a aucune difficulté à justifier (4.42) si l'on se contente d'une convergence en norme sur chaque sous-espace propre de L, pour laquelle l'analyse est ramenée en dimension finie. Explicitons le résultat en dimension 1 (cas où $H_s = G_s$) : se servant du noyau de $\mathcal{G} H_{\ell n(\varepsilon/2)} \mathcal{G}^{-1}$ sous la version donnée dans la PROPOSITION 4.4, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\Big(\mathcal{F}_c\big(\exp -\delta\big[L + (16\pi c^2)^{-1}\big]\big)\mathcal{F}_c^{-1}\Big)(c \operatorname{sh} \xi_0) \\
&\qquad = \lim c^m \Big(\prod_{j=0}^{m-1} (\delta_{j+1} - \delta_j)^{-1/2}\Big) \\
&\quad \times \int \cdots \int \exp -\pi c^2 \sum (\delta_{j+1} - \delta_j) \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2}(\xi_j + \xi_{j+1}) \\
&\qquad\qquad \exp\Big(-4\pi c^2 \sum (\delta_{j+1} - \delta_j)^{-1} \operatorname{sh}^2 \tfrac{1}{2}(\xi_j - \xi_{j+1})\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad u\big(c \operatorname{sh} \xi_m\big)\, \mathrm{d}\xi_1 \cdots \mathrm{d}\xi_m.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

On peut également se dispenser d'écrire $\mathcal{F}_c^{\pm 1}$ puisque L commute avec $\mathcal{F}_c$.

Il s'agit évidemment, en dimension quelconque, d'une intégrale de Feynman, qui reste valable pour tout δ complexe tel que $\operatorname{Re}\delta \geq 0$. Elle présente le caractère tout à fait exceptionnel que L commute avec l'opérateur produit considéré avant tout passage à la limite. Rappelons ici la décomposition

$$\mathcal{G}(-4\pi L)\mathcal{G}^{-1} = \Delta_{\mathfrak{M}} - 4\pi^2|\vec{p}|^2 \tag{4.44}$$

donnée en (2.3) pour observer que l'intégrale de Feynman que nous avons obtenue est distincte de celle à laquelle pourrait conduire la formule de Trotter usuelle :

$$\mathcal{G}\,\mathrm{e}^{-\delta L}\mathcal{G}^{-1} = \lim_{m\to\infty}\Big\{\exp\Big(\frac{\delta}{4\pi m}\Delta_{\mathfrak{M}}\Big)\exp -\frac{\pi\delta}{m}|\vec{p}|^2\Big\}^m. \tag{4.45}$$

En effet le noyau $h_\varepsilon(p,p')$ de $\mathcal{G}H_{\ell n\frac{\varepsilon}{2}}\mathcal{G}^{-1}$ a été donné dans la PROPOSITION 4.4 ; quant au noyau $k_\varepsilon(p,p')$ de $\mathcal{G}G_{\ell n\frac{\varepsilon}{2}}\mathcal{G}^{-1}$ tel qu'il a été introduit dans la définition 4.1, on peut l'écrire aussi sous la forme comparable :

$$k_\varepsilon(p,p') = c^2\varepsilon^{-n/2}\big\{\exp\big[-\pi(\varepsilon/2+2/\varepsilon)\big(\langle Jp,p'\rangle - c^2\big)\big]\big\}\,\mathrm{e}^{-\pi\varepsilon\langle\vec{p},\vec{p}\rangle}. \tag{4.46}$$

Or, si la deuxième exponentielle $\mathrm{e}^{-\pi\varepsilon\langle\vec{p},\vec{p}'\rangle}$ (ou $\exp -\pi\varepsilon|\overrightarrow{\mathrm{mid}}(p,p')|^2$, qui est le facteur correspondant dans $h_\varepsilon(p,p')$) n'a rien d'exotique si l'on se réfère à (4.44), la fonction

$$c^2\varepsilon^{-n/2}\exp\Big(-\frac{2\pi}{\varepsilon}\big(\langle Jp,p'\rangle - c^2\big)\Big) = c^2\varepsilon^{-n/2}\exp\Big(-\frac{4\pi c^2}{\varepsilon}\operatorname{sh}^2\frac{d(p,p')}{2c}\Big)$$

est, d'après la proposition 5.1 de [12], le noyau de l'opérateur

$$2c\varepsilon^{-1/2}\,\mathrm{e}^{2\pi c^2/\varepsilon}K_{i[-c^2\Delta_{\mathfrak{M}}-(\frac{n-1}{2})^2]^{1/2}}(2\pi c^2\varepsilon^{-1}). \tag{4.47}$$

Observons pour terminer qu'un développement asymptotique de la fonction $K_{i\nu}(x)$ lorsque $x\to\infty$ montre que, sur l'image du projecteur spectral correspondant à n'importe quelle partie compacte du spectre (continu, cette fois) de $\Delta_{\mathfrak{M}}$, l'opérateur ci-dessus s'écrit

$$\big(1+\mathrm{O}(\varepsilon^2)\big)\exp\varepsilon\Big[\frac{\Delta_{\mathfrak{M}}}{4\pi} + \frac{n(n-2)}{16\pi c^2}\Big]$$

pour $\varepsilon\to 0$. Ce fait apparaît comme la contraction, lorsque le paramètre λ qui intervient dans (2.1) tend vers l'infini, du THÉORÈME 4.3. L'autre contraction utile, ne serait-ce que dans un but de vérification, est celle pour laquelle $c \to \infty$: alors $\mathrm{ch}\{d(p,p')/(2c)\} \to 1$ mais $2c^2 \,\mathrm{sh}^2\{d(p,p')/(2c)\} \to \frac{1}{2}|\vec{p}-\vec{p}'|^2$ de sorte que le noyau, relativement à $\mathrm{d}\vec{p}'$, de l'un quelconque des opérateurs $\mathcal{G}G_s\mathcal{G}^{-1}$ et $\mathcal{G}H_s\mathcal{G}^{-1}$ tend vers le noyau

$$(2\,\mathrm{e}^s)^{-n/2} \exp -\pi\big\{\big(|\vec{p}|^2+|\vec{p}'|^2\big)\,\mathrm{ch}\, s + 2\langle \vec{p},\vec{p}'\rangle\,\mathrm{sh}\, s\big\}, \tag{4.48}$$

lequel n'est autre que le noyau classique du semi-groupe de l'oscillateur harmonique, comme on peut le retrouver par exemple en posant $\mathrm{e}^s = \mathrm{th}\,\frac{1}{2}t$ dans $(0,2)$.

Appendice

Cet appendice est un erratum, qui corrige une erreur de signe intervenue dans [12] dans le calcul de la composition d'un symbole par celui d'un opérateur de rotation R_{jk}.

Avec $\tilde{r}_{12}(x,p) = x_1p_2 - p_1x_2$, il faut lire (12.40) comme suit :

$$\begin{aligned}\{\{\tilde{r}_{12},\tilde{g}\}\} &= \frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial x_2\partial p_1} - \frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial x_1\partial p_2}\\ &\quad + p_0p_1\Big(\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial x_0\partial p_2}+\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial x_2\partial p_0}\Big) - p_0p_2\Big(\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial x_0\partial p_1}+\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial x_1\partial p_0}\Big)\\ &\quad + \sum p_1p_j\Big(-\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial x_j\partial p_2}+\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial x_2\partial p_j}\Big) + \sum p_2p_j\Big(\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial x_j\partial p_1}-\frac{\partial^2\tilde{g}}{\partial x_1\partial p_j}\Big)\end{aligned}$$

et les mêmes changements de signe intéressent les termes qui subsistent dans (12.44). La dernière formule du THÉORÈME 12.6 doit donc se lire :

$$B_2(r_{12},g) = \Big[\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial p_1} - \frac{\partial^2}{\partial x_1\partial p_2} + \Big(p_1\frac{\partial}{\partial x_2} - p_2\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)\Big(1+\sum p_j\frac{\partial}{\partial p_j}\Big)\Big]g.$$

Cette erreur de signe a des conséquences dans la section 15. La formule (15.38) devient en effet

$$B_2(r_{12},r_{12}) = -2 + 2\Big(p_1\frac{\partial}{\partial x_2} - p_2\frac{\partial}{\partial x_1}\Big)r_{12} = -2\big(1+p_1^2+p_2^2\big)$$

et le dernier terme $n(n-1)/(16\pi^2)$ au second membre de (15.39) doit être remplacé par :

$$\frac{1}{8\pi^2}\sum_{j<k}\big(1+p_j^2+p_k^2\big) = \frac{n(n-1)}{16\pi^2} + \frac{n-1}{8\pi^2}(p_0^2-1).$$

Finalement, dans la PROPOSITION 15.4, il faut lire

$$\pi^{-1}\ell\big(0,\vec{x}\,;p\big) = |||\vec{x}|||_p^2 + p_0^2 - 1 + \frac{n(n-1)}{16\pi^2}.$$

La preuve de la PROPOSITION 15.5 s'en trouve simplifiée, la page 181 étant désormais inutile en toute dimension.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Campbell (R.). — *Théorie générale de l'équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la mécanique.* — Masson, Paris, 1955.

[2] Debiard (A.) and Gaveau (B.). — *Analysis on root systems*, Canad. J. Math., t. **39,6**, 1987, p. 1281–1404.

[3] Grigis (A.). — *Estimations asymptotiques des intervalles d'instabilité pour l'équation de Hill*, Ann. Sci. École Norm. Sup., t. **20**, 1987, p. 641–672.

[4] Helffer (B.) et Robert (D.). — *Asymptotique des niveaux d'énergie pour des hamiltoniens à un degré de liberté*, Duke Math. J., t. **49,4**, 1982, p. 853–868.

[5] Helgason (S.). — *The Fourier transform on symmetric spaces*, Astérisque, tome hors série, 1982, p. 151–164.

[6] Helgason (S.). — *Groups and geometric analysis.* — Acad. Press, New York, 1984.

[7] Kostant (S.). — *The solution to a generalized Toda lattice and representation theory*, Adv. in Math., t. **34**, 1979, p. 195–338.

[8] Lundberg (L.E.). — *Quantum mechanics on hyperboloids*, Preprint, 1992.

[9] Mac Lachlan (N.W.). — *Theory and applications of Mathieu functions.* — Clarendon Press, Oxford, 1947.

[10] Mathieu (E.). — *Mémoire sur le mouvement vibratoire d'une membrane de forme elliptique*, J. Liouville, t. **13**, 1868, p. 137.

[11] Meixner (J.) and Schäfke (F.W.). — *Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen.* — Springer-Verlag, Berlin, 1954.

[12] Unterberger (A.). — Quantification relativiste, *Mémoires (nouvelle série,* **44–45**) *de la Soc. Math. de France, Paris*, 1991.

[13] Voros (A.). — *The zeta function of the quartic oscillator*, Nuclear Phys. B, t. **165**, 1980, p. 209–236.

[14] Whittaker (E.T.) and Watson (G.N.). — *A course of modern analysis.* — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1902.

[15] Encyclopedic Dictionary of Mathematics. — Math. Soc. of Japan, MIT Press (Cambridge, USA), 1980.