

BULLETIN DE LA S. M. F.

M.M. VIROTTE-DUCHARME

Présentation de certains couples fischériens de type classique

Bulletin de la S. M. F., tome 121, n° 2 (1993), p. 227-270

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1993__121_2_227_0

© Bulletin de la S. M. F., 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

PRÉSENTATION DE CERTAINS COUPLES FISCHÉRIENS DE TYPE CLASSIQUE

PAR

M.M. VIROTTE-DUCHARME (*)

RÉSUMÉ. — Soit D la classe des transvections unitaires ou la classe des réflexions orthogonales t_v , v étant de longueur donnée. On sait que D est une classe de 3-transpositions de G , où G désigne $SU(n, \mathbb{F}_4)$ ou un sous-groupe d'indice 2 de $O(n, \mathbb{F}_3)$. Dans ces deux cas, nous donnons des présentations (X, \mathcal{R}) pour le groupe G telles que X soit contenu dans D ; on obtient G comme un quotient d'un groupe de Coxeter avec un diagramme approprié.

ABSTRACT. — Let D be the class of the unitary transvections or the class of the orthogonal reflections t_v , v with given length. We know that D is a class of 3-transpositions of G , where G denotes $SU(n, \mathbb{F}_4)$ or a subgroup of index 2 in $O(n, \mathbb{F}_3)$. In these two cases, we give presentations (X, \mathcal{R}) for the group G with X contained in D ; we obtained G as a quotient of a Coxeter group with an appropriate diagram.

Soit (G, D) un couple fischérien, c'est-à-dire la donnée d'un groupe G engendré par une classe D d'involutions conjuguées telles que l'ordre de xy (avec $x, y \in D$) soit 1, 2 ou 3. On dit alors que D est une *classe de Fischer* de G . Toute partie X de D qui engendre G , détermine un graphe dont les sommets sont les éléments de X et les arêtes les paires d'éléments distincts x et y de X tels que $(xy)^3 = 1$. Notons $\mathcal{R}_F(X)$ l'ensemble des relations contenues dans la donnée d'un tel graphe sur X .

Nous nous proposons de donner des présentations (X, \mathcal{R}) pour deux des quatre familles de couples fischériens de type classique (G, D) intervenant dans le théorème de classification de Fischer [6]; présentations pour lesquelles X est contenu dans D et $\mathcal{R}_F(X)$ est une partie de \mathcal{R} .

(*) Texte reçu le 7 décembre 1991, révisé le 25 juin 1992.

M.M. VIROTTE-DUCHARME, Université de Paris VII, 2 place Jussieu, UFR de Mathématiques, Tour 45–55, 5^e étage, 75251 Paris cedex 05.

Classification AMS : 20.

Le cas des groupes symplectiques $G = \text{Sp}(2n, 2)$ et des groupes orthogonaux $G = \text{O}_\nu(2n, 2)$ a été traité à titre d'application des principes généraux exposés dans *Présentations des groupes de Fischer* (I) (cf. [12]). Les familles dont il est question ici concernent certains sous-groupes normaux $G^\varepsilon(n, 3)$, avec $\varepsilon \in \{+, -\}$ et $n \geq 5$, du groupe orthogonal $\text{O}(n, \mathbb{F}_3, \phi)$ (section 1) et les groupes unitaires $\text{SU}(n, 4)$ ($n \geq 4$) (section 2).

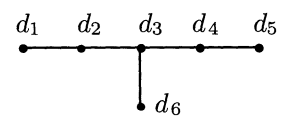
Les groupes $G^\varepsilon(n, 3)$ sont les sous-groupes d'indice 2 de $\text{O}(n, \mathbb{F}_3, \phi)$ qui admettent pour classe de Fischer une classe de réflexions orthogonales t_v . Il y a lieu de distinguer, pour chaque valeur de n , deux situations suivant que l'indice de ϕ est maximal ou non quand n est pair, et suivant que l'on considère la classe des réflexions t_v avec $\phi(v, v) = 1$ ou $\phi(v, v) = -1$ quand n est impair. De plus amples détails sont donnés en préliminaires et résumés sous forme de tableau (section 0, paragraphe 1).

On établit que chaque groupe des familles mentionnées ci-dessus admet une présentation (X, \mathcal{R}) où X est un sous-ensemble de D et où \mathcal{R} est la réunion de $\mathcal{R}_F(X)$ (défini ci-dessus), de \mathcal{R}_S ensemble de relations supplémentaires et de \mathcal{R}_Z relations concernant le centre de G . Le plus souvent, on obtient des présentations pour des extensions centrales de G dont on déduit des présentations pour G en ajoutant les relations \mathcal{R}_Z .

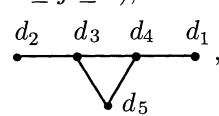
La méthode suivie est essentiellement inductive. Elle est rappelée dans les préliminaires (section 0, paragraphe 2) et exposée dans [12].

Pour les petites dimensions on a les résultats suivants [1], [6], [10], [13] :

(i) $G^-(5, 3) \simeq W(E_6)$ admet une présentation $(X, \mathcal{R}_F(X))$ avec :

- $X = (d_j \mid 1 \leq j \leq 6)$,
- $\mathcal{R}_F(X)$: 

(ii) $\text{PSU}(4, 4)$ admet une présentation $(X, \mathcal{R}_F(X) \cup \mathcal{R}_S \cup \mathcal{R}_Z)$ avec :

- $X = (d_j \mid 1 \leq j \leq 5)$,
- $\mathcal{R}_F(X)$: 
- $\mathcal{R}_S : (d_3 d_4 d_3 d_5)^3 = 1$,
- $\mathcal{R}_Z : p = 1$ avec $p = d_1 d_2 d_5 (d_2^{s d_2 d_1 d_4 d_5 d_3}) (d_2^{s d_1 d_5 d_3})$ et $s = (d_3 d_4 d_5)^2$.

(iii) $G^+(5, 3) \simeq C_2 \times \text{PSU}(4, 4)$ admet (avec les notations de (ii)) une présentation $(X, \mathcal{R}_F(X) \cup \mathcal{R}_S)$; p est alors l'involution centrale de $G^+(5, 3)$.

Les sections 1 et 2 traitent successivement des groupes orthogonaux et unitaires. Au début de chacune d'elles, c'est-à-dire au paragraphe 1, on trouve les énoncés des résultats et les notations. Les démonstrations sont reportées au paragraphe 2 et les calculs trop longs sont donnés en appendice.

Pour les petites dimensions, les présentations des groupes $G^\epsilon(n, 3)$ pour $n \leq 9$ et $SU(n, 4)$ pour $n \leq 6$ ont été vérifiées sur CAYLEY V3.7.3 machine SUN 3.60 par S. BOUC au Département de Mathématique et d'Informatique de l'École Normale Supérieure à Paris.

Je tiens à remercier ici le referee pour ses critiques lors de la lecture d'une première version de ce travail.

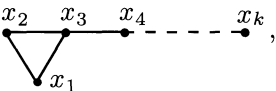
0. Préliminaires

1. Notations.

0.1.1. — Soient G un groupe et X un ensemble générateur contenu dans une classe de Fischer D de G . Désignons par g le graphe dont les sommets sont les éléments de X et les arêtes les paires d'éléments distincts de X dont le produit est d'ordre 3. La donnée de ce graphe g est équivalente à celle d'un ensemble de relations $\mathcal{R}(g)$ portant sur les éléments de X (relations du type $x^2 = 1$, $(xy)^2 = 1$ ou $(xy)^3 = 1$).

Si $(X, \mathcal{R}(g) \cup r)$ est une présentation de G où $\mathcal{R}(g)$ est défini ci-dessus et où r est un ensemble de relations portant sur les éléments de X , on dit que X satisfait à la formule de présentation $g \cup r$ où g est le graphe défini ci-dessus; G est un quotient du groupe de Coxeter $(X, \mathcal{R}(g))$.

0.1.2. Exemple. — On note $\mathcal{H}_{3,k}$ un groupe avec la présentation $(X_k, \mathcal{R}(h_k) \cup r)$ où :

- $X_k = \{x_j \mid 1 \leq j \leq k\}$,
- h_k : 
- $r : (x_1 x_2 x_1 x_3)^3 = 1$.

On montre que ce groupe est d'ordre $k! 3^{k-1}$, qu'il admet une classe de Fischer de cardinal $\frac{1}{2} 3k(k-1)$ et que son centre, trivial si $k \not\equiv 0 \pmod{3}$, est engendré par l'élément $\gamma_2 \gamma_3 \cdots \gamma_n$ d'ordre 3, où $\gamma_2 = x_1 x_2$ et $\gamma_j = x_j \gamma_{j-1} x_j$ pour $3 \leq j \leq k$.

Pour $k = 3$, le groupe $\mathcal{H}_{3,3}$ est noté \mathcal{H} ; il est d'ordre 54, les éléments de sa classe de Fischer ne commutent pas entre eux; \mathcal{H} est engendré par

les éléments x_1, x_2, x_3 sur lesquels on a la formule de présentation

$$\begin{array}{c}
 x_2 \quad \blacktriangle \quad x_3 \\
 \quad \quad \quad \blacktriangledown \\
 \quad \quad \quad x_1
 \end{array}
 \quad (x_1 x_2 x_1 x_3)^3 = 1$$

que l'on notera $\begin{array}{c} x_2 \quad \blacktriangle \quad x_3 \\ \quad \quad \quad \blacktriangledown \\ \quad \quad \quad x_1 \\ \quad \quad \quad H \end{array}$ pour alléger l'écriture.

Le centre de \mathcal{H} est engendré par l'élément $(x_1 x_2 x_3)^2$ d'ordre 3 (voir [6], [10], [12] et [13]).

2. Le groupe $G^\varepsilon(n, 3)$ pour $n \geq 5$ et ε dans $\{+, -\}$.

0.2.1. — Soit V un espace vectoriel de dimension $n \geq 5$ sur \mathbb{F}_3 . Soient ϕ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V et $O(n, \phi)$ le groupe des isométries de ϕ . Ce groupe est noté souvent $GO_n(3)$, ou encore $O(\phi)$ dans [1] et $O(\mathbb{F}_3, \phi)$ dans [5]. Soit v dans V . On dit que v est de longueur k , avec $k \in \mathbb{F}_3$, si $\phi(v, v) = k$. Si V admet une base orthonormale, on dit que V est de type $\varepsilon = +$; dans le cas contraire, on dit que V est de type $\varepsilon = -$.

L'ensemble de réflexions t_v (avec $v \in V$ et $\phi(v, v) \neq 0$) est la réunion de classes de conjugaison $E(1)$ et $E(-1)$ dans $O(n, \phi)$: dans la première, les réflexions sont relatives à des vecteurs de longueur 1, dans la seconde, à des vecteurs de longueur -1 . Chacune de ces classes est une classe de Fischer du sous-groupe de $O(n, \phi)$ qu'elle engendre : ces sous-groupes sont d'indice 2 dans $O(n, \phi)$. On pose

$$G(n, \phi, E(1)) = \langle E(1) \rangle \quad \text{et} \quad G(n, \phi, E(-1)) = \langle E(-1) \rangle$$

et on désigne par Ω le groupe dérivé de $O(n, \phi)$, i.e. $\Omega = \mathcal{D}(O(n, \phi))$. On établit sans peine les assertions suivantes :

$$\mathcal{D}(G(n, \phi, E(1))) = \Omega = \mathcal{D}(G(n, \phi, E(-1))),$$

$$G(n, \phi, E(1)) \cap E(-1) = \emptyset = G(n, \phi, E(-1)) \cap E(1),$$

$$|G(n, \phi, E(1)) : \Omega| = 2 = |G(n, \phi, E(-1)) : \Omega|$$

(on utilise le fait que si v et v' sont des vecteurs orthogonaux de longueur 1, $v - v'$ et $v + v'$ sont orthogonaux de longueur -1 et que $t_v t_{v'} = t_{v+v'} t_{v-v'}$).

Notons v_i , pour $1 \leq i \leq n$, une base orthogonale de l'espace vectoriel V dont les $(n - 1)$ premiers vecteurs sont de longueur 1 et $\phi(v_n, v_n) \neq 0$. Le centre du groupe orthogonal $O(n, \phi)$ est formé des homothéties; on a donc :

$$Z(O(n, \phi)) = \langle -1 \rangle \quad \text{et} \quad -1 = t_{v_1} \cdots t_{v_n}.$$

Le groupe dérivé Ω est un groupe simple s'il ne contient pas -1 ; si -1 appartient à Ω , alors $\Omega / \langle -1 \rangle$ est un groupe simple [5].

0.2.2. *Supposons n impair.* — Dans ce cas, Ω est un groupe simple.

- Quand $\phi(v_n, v_n) = 1$ (l'espace V est de type $+$), -1 appartient à $G(n, \phi, E(1))$ et n'appartient pas à $G(n, \phi, E(-1))$.

- Quand $\phi(v_n, v_n) = -1$ (l'espace V est de type $-$), -1 est dans $G(n, \phi, E(-1))$ et non dans $G(n, \phi, E(1))$.

Comme les vecteurs de longueur 1 pour ϕ (resp. -1) sont exactement les vecteurs de longueur -1 pour $-\phi$ (resp. $+1$), on a :

$$G(n, \phi, E(1)) = G(n, -\phi, E(-1)),$$

$$G(n, \phi, E(-1)) = G(n, -\phi, E(1)).$$

Posons, pour $\varepsilon \in \{+, -\}$:

$$G^+(n, 3) = G(n, \phi, E(1)), \quad G^-(n, 3) = G(n, -\phi, E(1)), \quad D = E(1).$$

Alors :

(i) $G^+(n, 3) = \langle e \rangle \times \Omega$ avec e dans D ;

(ii) $1 \rightarrow \Omega \rightarrow G^-(n, 3) \rightarrow \langle e \rangle \rightarrow 1$ (où $e \in D$) est une extension non scindée.

0.2.3. *Supposons n pair.* — Les groupes $G(n, \phi, E(1))$ et $G(n, \phi, E(-1))$ sont isomorphes.

- Quand $\phi(v_n, v_n) = 1$ (V est de type $+$), on pose $G^+(n, 3) = G(n, \phi, E(1))$ et $D = E(1)$: l'élément -1 appartient à Ω ; le groupe $\Omega/\langle -1 \rangle$ est simple et on a l'extension non scindée :

$$1 \longrightarrow \Omega \longrightarrow G^+(n, 3) \longrightarrow \langle e \rangle \longrightarrow 1 \quad (e \in D).$$

- Quand $\phi(v_n, v_n) = -1$ (V est de type $-$), on pose $G^-(n, 3) = G(n, \phi, E(1))$ et $D = E(1)$: -1 n'est ni dans Ω , ni dans $G^-(n, 3)$. Le groupe Ω est un groupe simple et l'extension

$$1 \rightarrow \Omega \rightarrow G^-(n, 3) \rightarrow \langle e \rangle \rightarrow 1 \quad (e \in D)$$

est non scindée.

Observons que l'indice de la forme ϕ est maximal pour $\varepsilon(-1)^{n/2} = 1$ et non maximal pour $\varepsilon(-1)^{n/2} = -1$, ε désignant le type de l'espace V .

Faisons d'abord quelques remarques. Si V est un plan, ou bien c'est un plan hyperbolique (on a donc $\varepsilon = -1$), l'indice de ϕ est alors maximal, ou bien c'est un plan anisotrope (on a donc $\varepsilon = +$) et l'indice de ϕ est non

maximal. Si V est de dimension 4, c'est la somme orthogonale de deux plans anisotropes (on a donc $\varepsilon = +$) ou d'un plan anisotrope et d'un plan hyperbolique (on a donc $\varepsilon = -$). Dans le second cas, l'indice de ϕ n'est pas maximal; dans le premier cas, l'indice de ϕ est maximal : si v_1, v_2, v_3, v_4 est une base orthonormale de V , $\langle v_1 + v_3 - v_4, v_2 + v_3 + v_4 \rangle$ est un plan isotrope.

- Supposons $\dim V = 2 \pmod{4}$ et V de type $+$ (resp. $-$). Alors V est une somme orthogonale de sous-espaces de dimension 4 de type $+$ et d'un plan U de type $+$ (resp. $-$) : l'indice de la forme ϕ est alors non maximal (resp. maximal).

- Supposons $\dim V = 0 \pmod{4}$ et V de type $+$ (resp. $-$). Alors V est une somme orthogonale de sous-espaces de dimension 4 et de type $+$, d'un plan anisotrope (type $+$) et d'un plan hyperbolique (type $-$). L'indice de ϕ est alors maximal (resp. non maximal).

0.2.4. *Table de notations; liens avec les groupes simples associés.* — (Voir le tableau page suivante.) On pose $\Omega = \mathcal{D}(O(n, \phi))$ et

$$D = E(1) = \{t_v \mid \phi(v, v) = 1, v \in V\} \quad \nu \in \{+, -\}.$$

Type de V : V est de type $+$ si V admet une base formée de vecteurs orthogonaux v_i pour $1 \leq i \leq n$ avec $\phi(v_i, v_i) = 1$ et de type $-$ sinon.

Pour n pair, l'indice de la forme est maximal si et seulement si l'on a $\varepsilon(-1)^{n/2} = 1$ (cf. [3], [4], [5], [6], [7] et [10]).

3. La méthode.

Soit G un groupe avec une présentation (X, \mathcal{R}) . Le premier résultat donne des conditions sous lesquelles G admet une classe de Fischer E contenant X , sachant que G possède un sous-groupe « assez gros » engendré par une classe de Fischer.

0.3.1. THÉORÈME. — *Soit G un groupe donné avec une présentation (X, \mathcal{R}) où X est un ensemble d'involutions, $|X| \geq 3$, et soit b un élément de X tel que :*

- (i) *il existe un élément x_0 dans $X - \{b\}$ avec $(x_0 b)^3 = 1$,*
- (ii) *pour tout x dans $X - \{b\}$ on a : ou bien $(x b)^2 = 1$ ou bien $(x b)^3 = 1$,*
- (iii) *le sous-groupe $K = \langle X - \{b\} \rangle$ est distinct de G et admet une classe de Fischer $D(K)$ contenant $X - \{b\}$.*

$\dim(V) = n$	$4m + 2$	$4m$	$4m + 2$	$4m$	$2m + 1$
type de V (pour ϕ) = ε	+	+	-	-	+
indice de ϕ	non max.	max.	max.	non max.	
groupe simple	$\Omega / \langle -1 \rangle$		Ω		Ω
(notation de l'Atlas)	$O_n^-(3)$	$O_n^+(3)$	$O_n^+(3)$	$O_n^-(3)$	$O_n(3)$
type de Lie	${}^2D_{2m+1}$	D_{2m}	D_{2m+1}	${}^2D_{2m}$	B_{2m+1}
$G^\varepsilon(n, 3)$	$G^+(n, 3)$		$G^-(n, 3)$	$G^-(n, 3)$	$G^+(n, 3)$
(notation de H. Cuypers et J.I. Hall)	$1 \rightarrow \Omega \rightarrow G^\varepsilon(n, 3) \rightarrow \langle e \rangle \rightarrow 1$ extension non scindée, $e \in D$				$\langle -1 \rangle \times \Omega$
$Z(G^\varepsilon(n, 3))$	${}^+\Omega_n^-(3)$	${}^+\Omega_n^+(3)$	${}^+\Omega_n^+(3)$	${}^+\Omega_n^-(3)$	${}^+\Omega_n^\nu(3)$
	$\langle -1 \rangle$			$1 = \nu(-1)^m$	$-1 = \nu(-1)^m$
				1	$\langle -1 \rangle$

$\Omega = \mathcal{D}(O(n, \phi))$, $D = E(1) = \{t_v \mid \phi(v, v) = 1, v \in V\}$, $\nu \in \{+, -\}$.
 Type de $V : V$ est de type + si V admet une base formée de vecteurs orthogonaux v_i pour $1 \leq i \leq n$
 avec $\phi(v_i, v_i) = 1$ et de type - sinon.

Table des notations.

Si les conditions C.0 et C.1 ci-dessous (resp. C.0, C.2) sont satisfaites, alors $E = D(K) \cup \{b^k \mid k \in K\}$ (resp. $E = D(K) \cup \{b^{zb}\} \cup \{b^k \mid k \in K\}$), pour z voir C.2) est une classe de Fischer de G et l'on a :

$$|E| = |D(K)| + |K : C_K(b)|$$

(resp. $|D(K)| + 1 + |K : C_K(b)|$).

C.0 Le centralisateur B de b dans K opère transitivement (par conjugaison) sur $D(K) - B$;

C.1 Pour tout élément k dans K , il existe des éléments d et d' dans $D(K)$ tels que $k \in Bd \cup Bdd'$;

C.2 Le centre de K contient une involution z ne centralisant pas b telle que $(bb^{zb})^3 = 1$ et $(xb^{zb})^2 = 1$ pour tout x dans $X - \{b\}$. Pour tout élément k dans K , il existe des éléments d et d' dans $D(K)$ tels que $k \in Bd \cup Bdz \cup Bdd' \cup Bz$ [12, 1.3.1].

0.3.2. — Soit $G = (X, \mathcal{R})$ un groupe satisfaisant aux hypothèses du théorème ci-dessus et pour lequel les conditions C.0 et C.1 (resp. C.0 et C.2) sont remplies. Supposons X fini, $X = \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$, et notons E la classe de Fischer de G .

Soit H un groupe de la famille $G^\varepsilon(n, 3)$, $SU(n, 4)$, avec $n \geq 5$, des groupes étudiés ici; soit $D = D(H)$ la classe de Fischer de H . Supposons que H admette des générateurs y_i ($1 \leq i \leq n$) satisfaisant aux relations \mathcal{R} , on démontre alors le résultat suivant :

(i) il existe un homomorphisme ψ de G sur H qui applique x_i sur y_i pour $1 \leq i \leq n$;

(ii) si $|E| = |D|$, l'extension $1 \rightarrow \ker \psi \rightarrow G \xrightarrow{\psi} H \rightarrow 1$ est centrale (voir. [12, 1.3.2]).

Observons que le groupe H est presque simple (i.e. $\mathcal{D}(H/Z(H))$ est simple non abélien). Posons $\bar{H} = H/Z(H)$. Dans la situation ci-dessus et sous l'hypothèse $|E| = |D|$, on a une extension centrale :

$$(e) : 1 \rightarrow Z \longrightarrow G \longrightarrow H \rightarrow 1.$$

Posons $Z' = \mathcal{D}(G) \cap Z$; on démontre les assertions suivantes :

(1) Si $|\bar{H} : \mathcal{D}(\bar{H})| = 2$, alors $Z = Z'$, l'extension (e) est non scindée, $|G : \mathcal{D}(G)| = 2$ et $|Z|$ est un diviseur de l'ordre du multiplicateur de Schur du groupe simple $\mathcal{D}(\bar{H})$.

(2) Si $|\bar{H} : \mathcal{D}(\bar{H})| = 1$, alors $|G : \mathcal{D}(G)| = |Z : Z'| \leq 2$, $G \simeq Z^0 \times G'$, où Z^0 est un sous-groupe central de G et où G' est une extension

centrale non scindée de Z' par H ; $|Z'|$ divise l'ordre du multiplicateur de Schur du groupe simple $\mathcal{D}(\overline{H})$. (On rappelle que $|G : \mathcal{D}(G)| \leq 2$, que $Z(\mathcal{D}(G)) \subset Z(G)$ et que $\mathcal{D}(G)$ est engendré par les produits ee' d'éléments de E , cf. [6] et [12, 1.3.3]).

Multiplicateur de Schur du groupe simple $\mathcal{D}(\overline{H})$. — (Avec les notations ci-dessus.)

H	$\overline{H} : \mathcal{D}(\overline{H})$	mult. de Schur de $\mathcal{D}(\overline{H})$
$G^+(2p+1, 3), p \geq 4$	1	$C_2 \times C_2$
$G^+(2p, 3), p \geq 4$	2	$C_2 \times C_2$
$G^+(6, 3)$	2	$C_4 \times C_3 \times C_3$
$G^\varepsilon(7, 3)$	2	$C_3 \times C_2$
$G^-(n, 3) \quad n \geq 6, n \neq 7$	2	C_2
$SU(n, 4) \quad n \geq 4, n \neq 6$	1	1
$SU(6, 4)$	1	$C_3 \times C_2 \times C_2$

(cf. [8] et [12]).

On peut alors établir la proposition suivante :

0.3.3. — Soit $(e) : 1 \rightarrow Z \rightarrow G \xrightarrow{\psi} H \rightarrow 1$ une extension centrale d'un couple fischérien (H, D) pour laquelle G admet une classe de Fischer E telle que $|\psi(E)| = |D|$. Alors :

(1) Pour $H \simeq SU(n, 4)$ (avec $n \geq 4$ et $n \neq 6$) l'extension (e) est scindée, on a $|Z| \leq 2$ et $G \simeq Z \times H$.

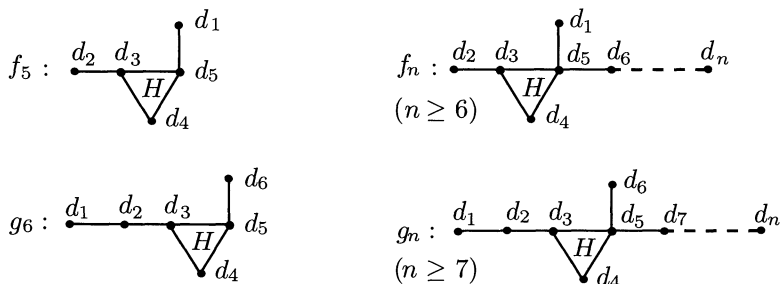
(2) Pour $H \simeq G^\varepsilon(n, 3)$ (avec $n \geq 8$ ou $(n = 6$ et $\varepsilon = -)$), l'extension (e) est triviale : $G \simeq H$.

(3) Pour $H \simeq G^\varepsilon(7, 3)$, l'extension (e) est ou bien triviale, ou bien non scindée, et dans ce cas $|Z| = 3$ [12, 1.3.7].

0.3.4. — Pour chaque groupe H des familles $G^\varepsilon(n, 3)$ pour $n \geq 6$, ($n = 6, \varepsilon = +$ excepté) et $SU(n, 4)$ pour $n \geq 5$, on détermine un ensemble générateur X contenu dans la classe de Fischer $D = D(H)$ de H de telle sorte que $X_0 = X - \{b\}$ engendre le stabilisateur K dans H d'un vecteur de longueur -1 . Le centralisateur B de b dans K et K satisfont aux conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 (cf. [12, 1.4.6 et 1.4.7, cas 3 et 4]). Les groupes K et B sont respectivement isomorphes à $G^{-\varepsilon}(n-1, 3)$ et à $G^\varepsilon(n-2, 3)$ si H désigne $G^\varepsilon(n, 3)$, et à $SU(n-1, 4)$ et $SU(n-2, 4)$ si H désigne $SU(n, 4)$. On a $|D(K)| + |K : B| = |D(H)|$.

Dans le cas d'exception, on est conduit à faire des choix différents pour K et B puisque $G^+(4, 3)$ (isomorphe à $W(D_4)$) n'est pas le stabilisateur dans H d'un plan anisotrope. On détermine un ensemble générateur $X_0 = X - \{b\}$ où $\langle X_0 \rangle$ est le stabilisateur dans K d'un vecteur v de longueur 1; t_v est alors un élément central de K ne centralisant pas b . Le stabilisateur B de b dans K est le stabilisateur d'un vecteur isotrope. On a $K \simeq G^+(5, 3)$ et $B \simeq \mathcal{H}_{3,4}$. Ces groupes satisfont aux conditions C.0 et C.2 ci-dessus et l'on a : $|D(K)| + 1 + |K : B| = |D(H)|$ [12, 1.4.6, 1.4.7 cas 3'].

0.3.5. Systèmes générateurs pour $G^\varepsilon(n, 3)$. — Le groupe $G^\varepsilon(n, 3)$ est engendré par des éléments d_i ($1 \leq i \leq n$) de sa classe de Fischer sur lesquels on a les relations f_n si $\varepsilon(-1)^n = -1$ et $n \geq 5$, et les relations g_n si $\varepsilon(-1)^n = 1$ et $n \geq 6$:



Soient n et ε tels que $\varepsilon(-1)^n = -1$ (resp. $\varepsilon(-1)^n = 1$). Par récurrence sur la dimension n de l'espace vectoriel V associé à G , on définit une base v_j pour $1 \leq j \leq n$ de V de vecteurs de longueur 1 de telle sorte que les réflexions t_{v_j} qui leurs sont associées satisfassent aux relations f_n (resp. g_n) :

- pour $n = 5$:

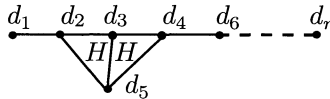
$$\begin{cases} \phi(v_i, v_{i+1}) = \phi(v_3, v_5) = \phi(v_1, v_5) = 1, & 2 \leq i \leq 5, \\ \phi(v_i, v_j) = 0, & 1 \leq i < j \leq 5, (i, j) \notin \{(1, 5), (3, 5), (i, i + 1)\}; \end{cases}$$
- pour $n = 6$:

$$\begin{cases} \phi(v_i, v_{i+1}) = \phi(v_3, v_5) = 1, & 1 \leq i \leq 5, \\ \phi(v_i, v_j) = 0, & 1 \leq i < j \leq 6, (i, j) \notin \{(3, 5), (i, i + 1)\}. \end{cases}$$

Pour $n > 5$ (resp. $n > 6$), on sait construire par récurrence une base de $(n - 1)$ vecteurs de longueur 1 engendrant un sous-espace V' de dimension $(n - 1)$ et de type $-\varepsilon$ tel que l'on ait les relations f_{n-1} (resp. g_{n-1});

l'orthogonal de V' est un vecteur a_n de longueur -1 , on pose alors : $v_n = a_n + v_1 + v_4 - \sum_5^{n-1} v_j$ (resp. $v_n = a_n + v_4 - v_5 - v_6 - \sum_6^{n-1} v_j$). (Dans tout ce numéro, ϕ désigne une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur V , pour laquelle V est de type ε .)

0.3.6. Systèmes générateurs pour $SU(n, 4)$. — On note ϕ une forme non dégénérée antihermitienne sur V , espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{F}_4 . On construit par récurrence une base de V formée de vecteurs non isotropes v_i pour $1 \leq i \leq n$ satisfaisant :



On choisit les v_i de la manière suivante :

- $\phi(v_i, v_{i+1}) = \phi(v_4, v_6) = \phi(v_2, v_5) = \phi(v_4, v_5) = 1$ si $1 \leq i \leq n - 1$ et $i \neq 5$;
- $\phi(v_i, v_j) = 0$ si $1 \leq i \leq j \leq n$ et $(i, j) \notin \{(2, 5), (3, 5), (i, i + 1)\}$;
- $\phi(v_5, v_3) = \omega$ avec $\{\omega, \bar{\omega}\} = \mathbb{F}_4 - \{1, 0\}$.

Soit V' le sous-espace engendré par v_i pour $1 \leq i \leq n - 1$; c'est un sous-espace non dégénéré dont l'orthogonal est une droite portée par :

$$a_n = v_1 + \omega v_3 + v_4 + \bar{\omega} v_5 + \sum_6^{n-1} v_j$$

pour $n > 6$ (cf. [5], [12]).

1. Groupes orthogonaux sur \mathbb{F}_3

1. Énoncés des résultats. Notations.

1.1.1. — Le groupe $G^+(5, 3)$ admet un système générateur d_i pour $2 \leq i \leq 6$ formé d'éléments de sa classe de Fischer D sur lequel



est une formule de présentation. L'involution centrale p est le produit de cinq éléments de D commutant deux à deux :

$$p = d_2 d_4 d_6 x x'$$

avec $x = d_3^{d_5 d_2 d_4 d_6 d_3 d_5 d_3}$ et $x' = d_3^{d_2 x d_4 d_3}$ [10, chap. 4].

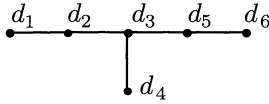
Enfin, pd'_7 centralise d_j pour $2 \leq j \leq 6$ et l'on a : $d_7^{pd'_7} = d_7^{p(d_7 d_7^p d_7)} = d_7$ ce qui montre que pd'_7 centralise d_j pour $2 \leq j \leq 7$, d'où (iii).

1.1.6. — Avec les notations 1.1.5. On pose :

$$z = (d_3 d_4)(d_3 d_4)^{d_5} (d_3 d_4)^{d_5 d_6} (d_3 d_4)^{d_5 d_6 d_7} (d_4 d_4)^{d_5 d_6 d_7 d'_7}$$

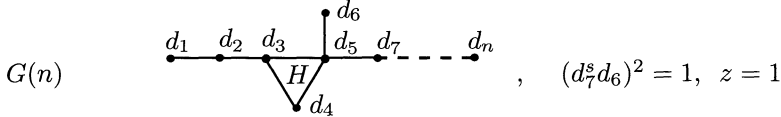
$\langle z \rangle$ est le centre de H (1.1.5 (ii)), on a $z^3 = 1$ (cf. [7] et [10, 0.1.2]).

1.1.7. — Le groupe $G^-(5, 3)$ admet un système générateur formé d'éléments d_j , $1 \leq j \leq 6$, de sa classe de Fischer D sur lequel on a la formule de présentation :



Les groupes $G^-(5, 3)$ et $W(E_6)$ sont isomorphes (cf. [1] et [10, chap. 3]).

1.1.8. THÉORÈME. — Soient $n \geq 6$ et $\varepsilon \in \{+, -\}$ tels que $\varepsilon(-1)^n = 1$. Le groupe $G^\varepsilon(n, 3)$ admet un système générateur d_j pour $1 \leq j \leq n$ sur lequel



est une formule de présentation; s étant défini en 1.1.3 et z étant un élément tel que $z^3 = 1$, déterminé en 1.1.10.

1.1.9. — Avec les notations de 1.1.8, soit P le sous-groupe de G engendré par d_j pour $2 \leq j \leq 6$. Son centre est engendré (1.1.1) par $p = d_2 d_4 d_6 x x'$. Posons $d_0 = d_1^{pd_1}$. On a les assertions suivantes :

- (i) $(d_0 d_2)^2 = 1$;
- (ii) $H = \langle d_j, d_0 \mid 1 \leq j \leq 5 \rangle \simeq \mathcal{H}_{3,6}$;
- (iii) $d_0 p$ centralise d_0 et d_j pour $1 \leq j \leq 5$.

Ces assertions se démontrent mutans mutandis comme dans (1.1.5).

1.1.10. — On pose :

$$z = (d_5 d_4)(d_5 d_4)^{d_3} (d_5 d_4)^{d_3 d_2} (d_5 d_4)^{d_3 d_2 d_1} (d_5 d_4)^{d_3 d_2 d_1 d_0}$$

Alors z engendre le centre du groupe H défini en 1.1.9 (ii); on a $z^3 = 1$.

2. Démonstrations.

On démontre chacun des THÉORÈMES 1.1.2 et 1.1.8 par récurrence sur l'entier n .

• Dans le cas $\varepsilon(-1)^n = -1$, on établit d'abord le résultat pour $n = 6$ (LEMME 1.2.1). Puis pour $n = 7$, on montre qu'en supprimant la relation $z = 1$, on obtient une présentation pour l'extension centrale non scindée

$$1 \longrightarrow \langle z \rangle \longrightarrow G \longrightarrow G^+(7, 3) \longrightarrow 1,$$

où z est un groupe d'ordre 3 (LEMME 1.2.2); certains calculs, un peu longs sont reportés en appendice. Enfin, on établit le résultat 1.1.2 pour $n = 8$ (resp. $n \geq 9$) (LEMME 1.2.4).

• Dans le cas $\varepsilon(-1)^n = 1$, on montre tout d'abord que pour $n = 6$, si l'on supprime la relation $z = 1$, le groupe G est l'extension centrale non scindée

$$1 \rightarrow \langle z \rangle \rightarrow G \rightarrow G^+(6, 3) \rightarrow 1,$$

où z est un groupe d'ordre 3 (LEMME 1.2.5). Pour $n = 7$, on montre que si l'on remplace la relation $z = 1$ par $d_7^z d_7 = 1$, le groupe G est l'extension centrale non scindée (LEMME 1.2.6)

$$1 \rightarrow \langle z \rangle \rightarrow G \rightarrow G^-(7, 3) \rightarrow 1.$$

Enfin, on établit le THÉORÈME 1.1.8 pour $n = 8$ et $n \geq 9$ (LEMME 1.2.7).

Comme me l'a fait remarquer le referee, en m'indiquant l'existence d'une extension non scindée $G = 3^7 \cdot G^-(7, 3)$ (où G est engendré par une classe de Fischer) dans Fi_{24} (cf. [3]), la relation $d_7^z d_7 = 1$, dans le cas $\varepsilon = -$ et $n = 7$ est nécessaire, alors que dans le cas $\varepsilon = +$ et $n = 7$ elle est conséquence des autres relations (1.2.3).

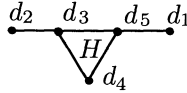
Je donne, en appendice la preuve du lemme suivant :

Soit (K, D) un couple fischérien avec une présentation (X, \mathcal{R}) fischérienne (i.e. $X \subset D$, les éléments de \mathcal{R} étant du type $(xy^k)^m = 1$, $x^2 = 1$ avec x et y dans X , k dans K et $m = 2, 3$).

Alors, toute extension $1 \rightarrow N \rightarrow G \xrightarrow{f} K \rightarrow 1$ telle que G admette une classe de Fischer E avec $f(E) = D$, est scindée (appendice 7).

1.2.1. LEMME. — *Soit G un groupe engendré par des éléments d_j pour $1 \leq j \leq 6$ sur lesquels on a la formule de présentation $F(6)$. Alors le groupe G admet une classe de Fischer E de cardinal 117, contenant d_j pour $1 \leq j \leq 6$; G est isomorphe à $G^-(6, 3)$.*

Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = G^-(6, 3)$ appliquant d_i sur t_{v_i} pour $1 \leq i \leq 6$ (0.3.5). Soit K le sous-groupe de G engendré par d_j pour $2 \leq j \leq 6$; K est un quotient de $G^+(5, 3)$ (1.1.1)

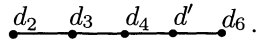


et son image par ψ est contenue dans le stabilisateur dans G^0 d'un vecteur de longueur -1 :

$$\psi(K) \subset S(a_6) \quad \text{où} \quad a_6 = v_6 - v_5 + v_4.$$

Comme ψ applique le système générateur de K sur un système générateur de $S(a_6)$ (0.3.5), nous en déduisons que K est engendré par une classe de Fischer $D(K)$ et que la restriction de ψ à K est un isomorphisme.

Soit B le centralisateur de d_1 dans K . Posons $d' = d_6^{s_{d_2}d_3d_4}$; d' est un élément de B pour lequel on a :



En effet, d_6^s, d_3 et d_4 sont dans B ; on a les assertions suivantes :

$$|d'd_2| = |d_6^s d_3| = |d_6 d_3|, \quad |d'd_3| = |d_6^s d_4| = |d_6 d_4|,$$

d'où $(d'd_2)^2 = (d'd_3)^2 = 1$. En outre

$$|d'd_4| = |d_6^s d_2^{d_3 d_4}| = |d_6^{d_5 d_3 d_4 d_5} d_2| = |d_6 d_5|,$$

$$|d'd_6| = |d_6^s d_6| = |d_6^{d_5 d_3 d_4} d_6^{d_5}| = |d_5^{d_3} d_5^{d_4}| = |d_3 d_4|,$$

d'où $(d'd_6)^3 = (d'd_4)^3 = 1$, ce qui établit l'assertion.

Le sous-groupe $B' = \langle d_2, d_3, d_4, d', d_6 \rangle$ est isomorphe à Σ_6 et son image $\psi(B')$ (isomorphe à B'), isomorphe aussi à $G^-(4, 3)$, est le stabilisateur dans $\psi(K)$ d'un vecteur de longueur -1 ; en particulier c'est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$. On a donc $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = B'$.

Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 sont satisfaites pour K et B (0.3.4), le groupe G admet donc une classe de Fischer E , avec $E = D(K) \cup \{d_1^k \mid k \in K\}$ dont le cardinal est

$$|E| = 45 + \frac{|G^+(5, 3)|}{|G^-(4, 3)|} = 45 + 72 = 117.$$

Comme $|D(G^-(6, 3))| = 117$, G est une extension centrale de $G^-(6, 3)$ et par suite G est isomorphe à $G^-(6, 3)$ (0.3.2 et 0.3.3).

1.2.2. LEMME. — Soit G un groupe engendré par des éléments d_j pour $1 \leq j \leq 7$ sur lesquels on a la formule de présentation

$$f(7) \quad \begin{array}{c} \bullet d_1 \\ | \\ \bullet d_3 \text{---} \bullet d_5 \text{---} \bullet d_6 \text{---} \bullet d_7 \\ / \quad \backslash \\ \bullet d_2 \quad \bullet d_4 \end{array}, \quad (d_6^8 d_1)^2 = 1, \quad (s \text{ défini en 1.1.3})$$

Alors le groupe G admet une classe de Fischer E contenant d_j pour $1 \leq j \leq 7$; G est une extension centrale non scindée de $G^+(7, 3)$ par un sous-groupe $\langle z \rangle$, $z^3 = 1$. Le centre de G est d'ordre 6; il est engendré par z et m_7 , m_7 étant le produit de 7 éléments de E commutant deux à deux. L'expression de z est donnée en 1.1.6, celle de m_7 en appendice 2.

Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = G^+(7, 3)$ qui applique d_i sur t_{v_i} pour $1 \leq i \leq 7$ (notations 0.3.5). Posons :

$$K = \langle d_i \mid 1 \leq i \leq 6 \rangle.$$

L'image de K dans G^0 fixe un vecteur $a_7 = v_1 + v_4 - \sum_5^7 v_j$ de longueur -1 ; le fixateur $S(a_7)$ de a_7 dans G^0 est isomorphe à $G^-(6, 3)$, il est engendré par $\psi(d_i)$ pour $1 \leq i \leq 6$ (0.3.5). Il résulte alors de 1.2.1 que K est isomorphe à $\psi(K) = S(a_7)$, donc à $G^-(6, 3)$. La classe de conjugaison de d_1 dans K est alors une classe de Fischer $D(K)$ de K .

Soit B le centralisateur de d_7 dans K . Observons que B contient le sous-groupe B' engendré par d_i pour $1 \leq i \leq 5$; B' est isomorphe à son image par ψ . On a donc :

$$\psi(B') \simeq B' \simeq G^+(5, 3).$$

Comme $\psi(B')$ est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$, on a :

$$\psi(B') = \psi(B) \quad \text{d'où} \quad B = B'.$$

Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 sont satisfaites pour K et B (0.3.4). Le groupe G admet donc une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_7^k \mid k \in K\}$. Le cardinal de E est $117 + 2 \times 9 \times 31 = 351$ (cf. [12, 1.4.7 L3]). Par suite G est une extension centrale de G^0 (0.3.2). Ainsi on a la suite exacte

$$1 \rightarrow Z_0 \longrightarrow G \xrightarrow{\psi} G^0 \rightarrow 1,$$

où Z_0 est un sous-groupe central dont l'ordre divise celui du multiplicateur de Schur de $DG^+(7, 3)$.

1.2.3. Détermination de Z_0 . — Conservons les notations 1.1.5 et 1.1.6; z désigne le générateur

$$z = (d_3d_4)(d_3d_4)^{d_5}(d_3d_4)^{d_5d_6}(d_3d_4)^{d_5d_6d_7}(d_3d_4)^{d_5d_6d_7d'_7}$$

du centre du groupe H engendré par d'_7 et d_j pour $3 \leq j \leq 7$. Cet élément z appartient à $\mathcal{D}(G)$, son image par ψ engendre le centre de $\psi(H)$. Or $\psi(H)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}/Z(\mathcal{H}_{3,6})$, car $G^+(7, 3)$ ne contient pas de sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}$; on a donc $\psi(z) = 1$ et z est un élément central de G .

On peut aussi démontrer « à la main » que z centralise d_1 et d_2 (appendice 3); z centralise alors les générateurs de G : c'est un élément de $Z(G)$.

Ainsi, $\langle z \rangle$ est contenu dans Z_0 ; comme $|Z_0| \leq 3$, on a : $Z_0 = \langle z \rangle$.

Pour déterminer l'involution centrale de G il suffit de sélectionner sept éléments dans E commutant deux à deux; leurs images par ψ correspondent alors à des réflexions orthogonales déterminées à partir d'une base orthonormale de l'espace vectoriel V associé à G^0 .

Pour les expressions explicites voir appendice 2.

1.2.4. LEMME. — Soit $n \geq 8$. Soit G un groupe engendré par des éléments d_j pour $1 \leq j \leq n$ sur lesquels on a la formule de présentation :

$$f(n) \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} d_1 \\ | \\ \bullet \text{---} d_2 \text{---} d_3 \text{---} \bullet \text{---} d_5 \text{---} d_6 \text{---} \dots \text{---} d_n \\ | \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad \quad \quad H \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \text{---} d_4 \end{array} \\ (d_6^s d_1)^2 = 1 \quad s \text{ défini en 1.1.3,} \\ (d_8^z d_8)^2 = 1 \quad z \text{ défini en 1.1.6.} \end{array} \right.$$

Alors le groupe G admet une classe de Fischer E de cardinal

- $\frac{1}{2} 3^{m-1}(3^m + (-1)^m)$ si $n = 2m$,
- $\frac{1}{2} 3^m(3^m + (-1)^m)$ si $n = 2m + 1$;

E contient d_j pour $1 \leq j \leq n$; G est isomorphe à $G^-(n, 3)$ si n est pair et à $G^+(n, 3)$ si n est impair.

Preuve. — Soit $\varepsilon \in \{+, -\}$ tel que $\varepsilon(-1)^n = -1$. Posons $G^0 = G(n, 3)$. Il existe un homomorphisme ψ de G sur G^0 qui applique d_i sur t_{v_i} pour $1 \leq i \leq n$ (0.3.5). Soit $K = \langle d_j \mid 1 \leq j \leq n - 1 \rangle$; l'image du système générateur de K engendre le stabilisateur $S(a_n)$ dans G^0 du vecteur $a_n = v_1 + v_4 - \sum_5^n v_j$ de longueur -1 .

Démontrons 1.2.4 par récurrence sur n .

Soit $n = 8$. Le sous-groupe K de G est isomorphe à un quotient de l'extension centrale de $G^+(7, 3)$ par $\langle z \rangle \simeq C_3$ (1.2.2); compte tenu de ce qui précède, K admet une classe de Fischer $D(K)$ et l'on a :

$$1 \rightarrow \langle z \rangle \longrightarrow K \xrightarrow{\psi} S(a_8) \rightarrow 1$$

où $\langle z \rangle$ est le centre du sous-groupe H de K engendré par d'_7 et les d_j pour $3 \leq j \leq 7$ construit en (1.2.3). Observons que l'hypothèse $d'_8 d_8 = 1$ impose que z soit un élément central dans G .

Soit B le centralisateur de d_8 dans K ; B contient le sous-groupe B' engendré par d_j pour $1 \leq j \leq 6$. Comme l'image de B' par ψ est isomorphe à $G^-(6, 3)$ (1.2.1), c'est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$. On a donc $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = \langle z \rangle B'$ (car $z \notin B'$). Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 sont satisfaites pour K et B (0.3.4); le groupe G admet alors une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_8^k \mid k \in K\}$ dont le cardinal est :

$$|E| = 351 + \frac{|\langle z \rangle| \times |G^+(7, 3)|}{|\langle z \rangle| \times |G^-(6, 3)|} = 351 + 2^2 \times 3^3 \times 7 = 1\,107.$$

Comme 1 107 est aussi le cardinal de la classe de Fischer de $G^-(8, 3)$, on voit que G est isomorphe à $G^-(8, 3)$ (0.3.2, 0.3.3) et l'on a $z = 1$.

Supposons $n \geq 9$. Le groupe K est un quotient de $G^{-\varepsilon}(n - 1, 3)$ (hypothèse de récurrence) dont l'image par ψ est $S(a_n) \simeq G^{-\varepsilon}(n - 1, 3)$. La restriction de ψ à K est donc un isomorphisme.

Soit B le centralisateur de d_n dans K ; B contient le $D(K)$ -sous-groupe B' engendré par d_j pour $1 \leq j \leq n - 2$. Si $n = 9$, K est isomorphe à $G^-(8, 3)$ et $z = 1$; le sous-groupe B' est donc isomorphe à $G^-(7, 3)$. Si $n > 9$, B' est isomorphe à $G^\varepsilon(n - 2, 3)$. Dans toutes les situations, $\psi(B')$ est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$; on a donc $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = B'$. Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 sont satisfaites pour K et B (0.3.4); le groupe G admet une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_n^k \mid k \in K\}$. On a :

$$\begin{aligned} \bullet \quad n = 2m + 1 \quad |E| &= |D(K)| + \frac{|G^-(2m, 3)|}{|G^+(2m - 1, 3)|} \\ &= \frac{1}{2} 3^{m-1} (3^m + (-1)^m) + 3^{m-1} (3^m + (-1)^m) \\ &= \frac{1}{2} 3^m (3^m + (-1)^m), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad n = 2m \quad |E| &= |D(K)| + \frac{|G^+(2m-1, 3)|}{|G^-(2m-2, 3)|} \\
 &= \frac{1}{2} 3^{m-1} (3^{m-1} + (-1)^{m-1}) \\
 &\quad + 3^{m-1} (3^{m-1} - (-1)^{m-1}) \\
 &= \frac{1}{2} 3^{m-1} (3^m + (-1)^m).
 \end{aligned}$$

Donc $|E| = |D(G^\varepsilon(n, 3))|$ avec $\varepsilon(-1)^n = -1$. Le groupe G est donc une extension centrale de G^0 et l'on a $G \simeq G^0 = G^\varepsilon(n, 3)$ (0.3.2 et 0.3.3).

1.2.5. LEMME. — Soit G un groupe engendré par des éléments d_j ($1 \leq j \leq 6$) sur lesquels on a la formule de présentation :

$$g(6)$$

Alors, le groupe G admet une classe de Fischer E de cardinal 126 contenant d_j pour $1 \leq j \leq 6$; G est une extension centrale non scindée de $G^+(6, 3)$ par $\langle z \rangle$, z étant défini en 1.1.10.

Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = G^+(6, 3)$ (0.3.5) qui applique d_i sur t_{v_i} pour $1 \leq i \leq 6$. Posons $P = \langle d_j \mid 2 \leq j \leq 6 \rangle$. Soit S le fixateur du vecteur $u = v_1 - v_3 + v_4$ de longueur +1 (notations 0.3.5). On a alors $S \simeq G^+(5, 3)$ et les générateurs de P s'envoient sur des éléments de S engendrant S , d'où $\psi(P) = S$. Il résulte de (1.2.1) que la restriction de ψ à P est un isomorphisme. Notons $D(P)$ la classe de conjugaison de d_2 dans P ; c'est une classe de Fischer de P . Soit $\langle p \rangle$ le centre de P , on a :

$$p = d_2 d_4 d_6 x x', \quad x = d_3^{d_5 d_2 d_4 d_6 d_3 d_5 d_3}, \quad x' = d_3^{d_2 x d_4 d_3}.$$

Posons $d_0 = d_1^{p d_1}$; on a les assertions suivantes :

- (1) $(d_0 d_1)^3 = 1 = (d_0 d_j)^2$ pour $2 \leq j \leq 6$;
- (2) $m_0 = p d_0$ est une involution centrale dans G ;
- (3) $H = \langle d_j \mid 0 \leq j \leq 5 \rangle \simeq \mathcal{H}_{3,6}$;
- (4) $Z(H) = \langle z \rangle$ et $|z| = 3$;
- (5) $\psi(z) = 1$ avec $z \in Z(G)$.

Les quatre premières assertions résultent de 1.1.9. Comme $G^+(5, 3)$ n'admet aucun sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}$, $\psi(H)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}/Z(\mathcal{H}_{3,6})$. Le centre de H est donc contenu dans le noyau de ψ . Pour établir (5), il suffit de prouver l'égalité $z d_6 = d_6 z$, avec z explicité en 1.1.10. Pour ce calcul, voir l'appendice 3.

Soit B le centralisateur de d_1 dans P ; il contient le $D(P)$ -sous-groupe B' engendré par d_i pour $3 \leq i \leq 6$; $B' \simeq \mathcal{H}_{3,4}$ (cf. [8, chap. 3] et [10, 1.1.2]). L'image de B' par ψ est le stabilisateur dans $\psi(P)$ de la droite isotrope $v_3 - v_4$, c'est donc un sous-groupe maximal de $\psi(P)$. On a :

$$\psi(B') = \psi(B) \quad \text{et par suite} \quad B = B'.$$

Les conditions C.0 et C.2 du THÉORÈME 0.3.1 sont donc remplies pour les groupes P et B (0.3.4); le groupe G admet une classe de Fischer E telle que $E = D(P) \cup \{d_0\} \cup \{d_1^k \mid k \in P\}$ dont le cardinal est

$$|E| = 45 + 1 + \frac{|G^+(5, 3)|}{|B|} = 126.$$

Le groupe G est donc une extension centrale de $G^+(6, 3)$:

$$1 \rightarrow Z_0 \longrightarrow G \xrightarrow{\psi} G^0 \rightarrow 1.$$

Or, toute extension centrale de $G^+(6, 3)$ admet une représentation complexe irréductible de degré 6 (cf. [13, chap. 6]) et il résulte de la classification des groupes finis possédant certaines représentations de degré 6 que le centre de G est au plus de cardinal 6 (cf. [9]). Soit m_6 le produit de six involutions de E commutant deux à deux dont les images par ψ sont des réflexions orthogonales définies par les vecteurs d'une base orthonormale de l'espace vectoriel V associé à G^0 . Les éléments z et m_6 sont centraux dans G et contenus dans le groupe dérivé de G ; on a donc $Z(G) = \langle z, m_6 \rangle$ et l'extension

$$1 \rightarrow \langle z \rangle \longrightarrow G \xrightarrow{\psi} G^0 \rightarrow 1$$

est non scindée.

Remarquons que $\psi(m_6)$ opère sur V par $v \mapsto -v$ et que m_6 engendre le centre de tout E -sous-groupe de G isomorphe à $W(D_6)$ puisque G^0 ne contient aucun D -sous-groupe isomorphe à $W(D_6)/Z(W(D_6))$.

1.2.6. LEMME. — Soit G un groupe engendré par des éléments d_i pour $1 \leq i \leq 7$ sur lesquels on a la formule de présentation :

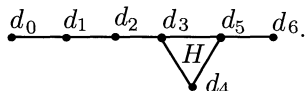
$$g(7) \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} \bullet d_6 \\ | \\ \bullet d_1 \quad \bullet d_2 \quad \bullet d_3 \quad \bullet d_5 \quad \bullet d_7 \\ | \\ \bullet d_4 \end{array} \\ (d_6^s d_7)^2 = 1, \quad s \text{ défini en 1.1.3,} \\ (d_7^z d_7) = 1, \quad z \text{ défini en 1.1.10,} \end{array} \right.$$

Alors le groupe G admet une classe de Fischer de cardinal 378, contenant d_i pour $1 \leq i \leq 7$; G est une extension centrale non scindée de $G^-(7, 3)$ par C_3 :

$$1 \rightarrow \langle z \rangle \longrightarrow G \longrightarrow G^-(7, 3) \rightarrow 1 \quad \text{avec } z^3 = 1.$$

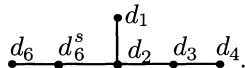
Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = G^-(7, 3)$ qui applique d_i sur t_{v_i} pour $1 \leq i \leq 7$ (0.3.5). Soit K le sous-groupe de G engendré par d_i pour $1 \leq i \leq 6$; K est engendré par une classe de Fischer $D(K)$. C'est un quotient de l'extension de $G^+(6, 3)$ par C_3 (1.2.5) et de plus, son image par ψ stabilise le vecteur $a_7 = v_7 - v_6 + v_5 - v_4$ de longueur -1 (notations loc. cit.).

Posons $P = \langle d_i \mid 2 \leq i \leq 6 \rangle$ et $\langle p \rangle = Z(P)$. Rappelons que p est le produit de cinq involutions de $D(K)$ commutant deux à deux; on a $p = d_2 d_4 d_6 x x'$ (1.1.9). Désignons par d_0 l'élément $d_1^{pd_1}$. On a :



Soit z un générateur du centre du groupe $H = \langle d_j \mid 0 \leq j \leq 5 \rangle$ (on a $H \simeq \mathcal{H}_{3,6}$ d'après 1.1.9(ii)). On a alors $d_6^z d_6 = 1$ (appendice 3); de plus $\psi(z) = 1$ car $\psi(H)$ est isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}/Z(\mathcal{H}_{3,6})$ car il n'y a pas de sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}$ dans $G^-(7, 3)$ (cf. [10, chap. 3]). Compte tenu de la relation $d_7^z d_7 = 1$, l'élément z de K est donc central dans G . On a $K/\langle z \rangle \simeq G^+(6, 3)$; K est une extension centrale non scindée de $S(a_7)$ par $\langle z \rangle$, $S(a_7)$ désignant le stabilisateur de a_7 dans G^0 , $S(a_7) \simeq G^+(6, 3)$.

Notons B le centralisateur de d_7 dans K . Par hypothèse $(d_6^s d_7)^2 = 1$, donc B contient le $D(K)$ -sous-groupe $B' = \langle d_6, d_6^s, d_i \mid 1 \leq i \leq 4 \rangle$. On a :



En effet, cela résulte des définitions suivantes :

$$\begin{aligned} |d_6^s d_j| &= |d_6 d_j^{s^{-1}}| = |d_6 d_j|, & j = 1, 3, 4; \\ |d_6^s d_2| &= |d_6^{d_5 d_3} d_2| = |d_6^{d_5} d_3| = |d_6 d_5|, \\ |d_6^s d_6| &= |d_6^{d_5 d_3 d_4 d_5} d_6| = |d_6^{d_5 d_3} d_6^{d_5 d_4}| = |d_3 d_4|. \end{aligned}$$

En conséquence, B' est isomorphe à $W(E_6)$, (on a $W(E_6) \simeq G^-(5, 3)$). Observons que $\psi(B')$ est isomorphe à son image dans G^0 et que $\psi(B')$ est

un $D(K)$ -sous-groupe maximal de $\psi(K)$; on a alors $\psi(B) = \psi(B')$. Par suite $B = B'(B \cap \text{Ker } \psi)$. Comme $\langle z \rangle$ est le noyau de la restriction de ψ à K et comme z centralise d_7 , on en déduit : $B = B'\langle z \rangle$.

Les conditions C.0 et C.1 de (0.3.1) sont remplies pour K et B ; le groupe G admet une classe de Fischer E , avec $E = D(K) \cup \{d_7^k \mid k \in K\}$, dont le cardinal est :

$$|D(K)| + \frac{3|G^+(6, 3)|}{3|W(E_6)|} = 126 + 2^2 \times 3^2 \times 7 = 378.$$

Comme $378 = |D(G^-(7, 3))|$, G est une extension centrale de $G^-(7, 3)$ d'après (0.3.2). L'élément z appartient à $\mathcal{D}(G) \cap Z(G)$; l'extension

$$1 \rightarrow \langle z \rangle \rightarrow G \xrightarrow{\psi} G^0 \rightarrow 1, \quad G^0 = G^-(7, 3),$$

est donc non scindée.

1.2.7 LEMME. — Soit $n \geq 8$. Soit G un groupe engendré par des éléments d_j , avec $1 \leq j \leq n$, sur lesquels on a la formule de présentation :

$$g(n) \left\{ \begin{array}{l} \begin{array}{c} d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad \begin{array}{c} \uparrow d_6 \\ \text{---} d_5 \text{---} \\ \downarrow d_4 \end{array} \quad d_7 \quad \cdots \quad d_n, \\ \text{---} H \text{---} \end{array} \\ (d_6^s d_7)^2 = 1, \quad s \text{ défini en 1.1.3,} \\ (d_7^z d_7)^2 = 1, \quad s \text{ défini en 1.1.10.} \end{array} \right.$$

Alors, le groupe G admet une classe de Fischer E contenant les d_j pour $1 \leq j \leq n$ dont le cardinal est :

- $\frac{1}{2} 3^m (3^{m+1} + (-1)^{m+1})$ si $n = 2m + 2$,
- $\frac{1}{2} 3^m (3^m + (-1)^m)$ si $n = 2m + 1$.

Le groupe G est isomorphe à $G^\varepsilon(n, 3)$ avec $\varepsilon(-1)^n = 1$; on a $z = 1$.

Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = G^\varepsilon(n, 3)$ (avec $\varepsilon \in \{+, -\}$ et $\varepsilon(-1)^n = 1$) appliquant d_i sur t_{v_i} pour $1 \leq i \leq n$, avec les notations et les conventions (0.3.5). Démontrons les assertions par récurrence sur n .

Observons que si $n = 7$, la formule $g(7)$ est une formule de présentation pour l'extension centrale G de $G^-(7, 3)$ par un sous-groupe $\langle z \rangle$ d'ordre 3 (cf. 1.2.6).

Supposons $n = 8$ (resp. $n \geq 9$). Posons $K = \langle d_j \mid 1 \leq j \leq n - 1 \rangle$. D'après l'hypothèse de récurrence, K est un quotient central du groupe

$G^\varepsilon(n-1, 3)$ et admet pour classe de Fischer la classe de conjugaison de d_1 dans K ; on la note $D(K)$. L'image de K par ψ stabilise le vecteur $a_n = -v_4 + v_5 - v_6 + \sum_7^n v_j$ de longueur -1 ($n \geq 8$). Comme l'image par ψ du système générateur de K est un système générateur du fixateur $S(a_n)$ de a_n dans G^0 , le groupe K est une extension centrale de $G^{-\varepsilon}(n-1, 3)$.

En conséquence, pour $n \geq 9$, ψ est un isomorphisme; pour $n = 8$, on a $K/Z(K) \simeq G^-(7, 3)$ et le noyau de ψ est engendré par $\langle z \rangle$, centre du groupe K . Rappelons que z engendre le centre du sous-groupe $H = \langle d_j \mid 0 \leq j \leq 5 \rangle$ et que z centralise d_6 (1.2.5, appendice 3). Par hypothèse, on a $d_7^2 d_7 = 1$ et par suite z est central dans G .

Notons B le centralisateur de d_n dans K ; B contient le sous-groupe B' , engendré par d_j pour $1 \leq j \leq n-2$.

Si $n = 8$, on a $K/\langle z \rangle \simeq \psi(K) = S(a_8) \simeq G^-(7, 3)$; B' est une extension centrale de $G^+(6, 3)$ par $\langle z \rangle$ (1.2.5). Son image $\psi(B')$ est alors un sous-groupe maximal de $\psi(K)$. On a donc $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = B'$ (avec z appartenant à B). Les conditions C.0 et C.1 (0.3.1) sont remplies pour K et B ; le groupe G admet donc une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_n^k \mid k \in K\}$ dont le cardinal est :

$$|E| = 378 + \frac{3|G^-(7, 3)|}{3|G^+(6, 3)|} = 378 + 2 \times 3^3 \times 13 = 1080.$$

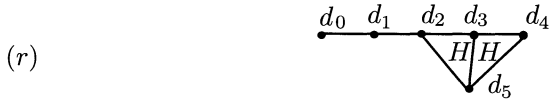
Comme 1080 est aussi le cardinal de la classe de Fischer de $G^+(8, 3)$, le groupe G est une extension centrale de $G^+(8, 3)$ (0.3.2). Il résulte alors de (0.3.3) que l'élément z , central dans G et appartenant à G , est trivial.

Pour $n \geq 9$, le groupe K est isomorphe à $G^{-\varepsilon}(n-1, 3)$ pour ε tel que $\varepsilon(-1)^n = 1$. On a alors $z = 1$. Ainsi le sous-groupe B' de B est isomorphe à $G^\varepsilon(n-2, 3)$ et son image par ψ est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$; on a $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = B' \simeq G^\varepsilon(n-2, 3)$. Les conditions C.0 et C.1 ci-dessus sont remplies pour K et B ; le groupe G est engendré par une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_n^k \mid k \in K\}$ dont le cardinal est :

- si $n = 2m + 1$, $|E| = \frac{1}{2} 3^{m-1} (3^m - (-1)^m) + \frac{|G^+(2m, 3)|}{|G^-(2m-1, 3)|}$
 $= \frac{1}{2} 3^m (3^m - (-1)^m)$;
- si $n = 2m + 2$, $|E| = \frac{1}{2} 3^m (3^m - (-1)^m) + \frac{|G^-(2m+1, 3)|}{|G^+(2m, 3)|}$
 $= \frac{1}{2} 3^m (3^{m+1} + (-1)^m)$.

On a donc $|E| = |D(G^\varepsilon(n, 3))|$ avec $\varepsilon(-1)^n = 1$. Il s'ensuit que G est une extension centrale de $G^\varepsilon(n, 3)$; l'élément z est donc trivial et l'on a $G \simeq G^\varepsilon(n, 3)$ (0.3.2 et 0.3.3).

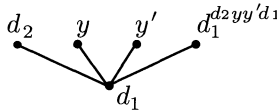
2.1.4. — On désigne par \hat{q} le produit d_0q où $d_0 = d_1^{qd_1}$ (notation 2.1.3). On a les relations suivantes :



En effet, q centralise d_j pour $2 \leq j \leq 5$ et d_1 centralise d_3, d_4 et d_5 . Pour établir (r), il suffit donc de prouver $(d_0d_1)^3 = 1 = (d_0d_2)^2$. Rappelons que d_2, y, y' sont des éléments qui commutent deux à deux (2.1.3), de plus, on a :

$$|d_1y| = |d_1d_2| \quad \text{et} \quad |d_1y'| = |d_1d_4^{d_3d_5d_2}| = |d_1d_2|.$$

Ainsi le sous-groupe $W = \langle d_1, d_2, y', y \rangle$ est isomorphe à $W(D_4)$ (ou à $W(D_4)/Z(W(D_4))$); on a alors :



Comme $d_1^{d_2yy'd_1} = d_1^{qd_1}$, l'assertion en découle immédiatement.

2.1.5. THÉORÈME. — *Le groupe $SU(6, 4)$ admet un système générateur d_j pour $1 \leq j \leq 6$ sur lequel*

$$S(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Diagram (r) with } d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, \\ (d_3^{d_2d_4}d_5)^3 = 1, \quad (d_6d_1^{qd_2d_3d_4})^2 = 1, \\ \hat{q} = m(R_1) = m(R_2) = 1. \end{array} \right.$$

est une formule de présentation, les éléments q et \hat{q} étant donnés en 2.1.3 et 2.1.4; $m(R_1)$ et $m(R_2)$ étant le produit de six conjugués de d_1 commutant entre eux (2.1.6).

Le centre de G est engendré par un élément z d'ordre 3 :

$$z = (d_3d_5)(d_3d_5)^{d_2}(d_3d_5)^{d_2d_1}(d_3d_5)^{d_2d_1d_0}(d_3d_5)^{d_2d_1d_0d_6}.$$

2.1.6. — (Avec les notations ci-dessus.) On pose :

$$\begin{aligned} b &= d_1^{qd_2d_3d_4}, & e &= d_2^{d_5d_4d_1d_3d_6(d_2^{d_5d_4})d_5d_3}, \\ y'_2 &= e^{bd_3d_5d_2d_3d_5}, & y''_2 &= d_2^{d_3d_5e^bd_3d_5}, & y_2 &= d_1^{y'_2y''_2d_2d_1}. \end{aligned}$$

Pour $i = 1, 2, 3$, on définit $m(R_i)$ comme le produit

$$m(R_i) = f_i d_6 b x_i x'_i x''_i,$$

où $f_1 = d_2$, $f_2 = x_1^{(e^b)y'_2}$, $f_3 = x_1^{(e^b)y'_2}$ et où x'_i, x''_i et x_i sont donnés par :

$$x'_i = (d_4^{d_5})^{f_i b d_6 (d_5 d_4 d_5)}, \quad x''_i = d_5^{x'_i b f_i d_5}, \quad x_i = d_1^{x'_i x''_i f_i d_1} \quad i = 1, 2, 3.$$

(Pour plus de détails sur $m(R_1)$, voir 2.1.7.)

2.1.7. — (Notations 2.1.5 et 2.1.6.) On a les relations :



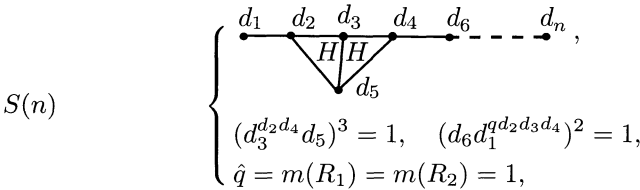
En effet :

$$\begin{aligned} |bd_1| &= |d_0^{d_1 d_2 d_3 d_4} d_1| = |d_0 d_2|, \\ |bd_2| &= |d_1^{d_2 d_3} d_2| = |d_1 d_3|, \\ |bd_5| &= |d_1^q d_5^{d_4 d_3 d_2}| = |d_1 d_5^{d_4 d_3 d_2}| = |d_1 d_2|, \\ |bd_4| &= |d_1^q d_4^{d_3 d_2}| = |d_1 d_4^{d_3 d_2}| = |d_1 d_2|, \\ |bd_5^{d_4}| &= |d_1^q d_5^{d_3 d_2}| = |d_1 d_5^{d_3 d_2}| = |d_1 d_2|. \end{aligned}$$

Par hypothèse, $(bd_6)^2 = 1$; les relations (r') sont donc établies.

Il résulte de la section 1 (1.2.5) que le sous-groupe R_1 engendré par $d_1, d_2, d_5, d_4, d_6, b$ est une extension centrale de $G^+(6, 3)/Z(G^+(6, 3))$; les éléments $d_2, d_5, d_6, x'_1, x''_1, x_1$ commutent deux à deux, leur produit $m(R_1)$ est un élément central de R_1 tel que $m(R_1)^2 = 1$.

2.1.8. THÉORÈME. — Soit $n \geq 7$. Le groupe $SU(n, 4)$ admet un système générateur d_j pour $1 \leq j \leq n$ sur lequel on a la formule de



où q est défini en 2.1.3, où \hat{q} est défini en 2.1.4 et où $m(R_1), m(R_2)$ sont définis en 2.1.6.

Pour $n \equiv 0 \pmod 3$, le centre de G est engendré par l'élément :

$$z = (d_3 d_5)(d_3 d_5)^{d_2} (d_3 d_5)^{d_2 d_1} (d_3 d_5)^{d_2 d_1 d_0} \prod_{6 \leq j \leq n} (d_3 d_5)^{d_2 d_1 d_0} \prod_{6 \leq i \leq j} d_i.$$

2. Démonstrations.

La PROPOSITION 2.1.2 a été établie en [10, chap. 4] et [13, chap. 6]). Pour que l'exposé soit complet, nous en donnons ici une démonstration (2.2.2).

Si dans la formule $S(6)$, (2.1.5), on omet les relations $\hat{q} = m(R_1) = m(R_2) = 1$, on obtient alors une formule de présentation $s(6)$ sur d_j , où $1 \leq j \leq 6$, pour l'extension centrale $C_2 \times \tilde{G}$ où \tilde{G} est l'extension centrale non scindée de $SU(6, 4)$ par $C_2 \times C_2$ (2.2.3).

On démontre ensuite le théorème (2.1.8) par récurrence sur n pour $n \geq 7$; on omet la relation $\hat{q} = 1$, le groupe obtenu est une extension centrale scindée de $SU(n, 4)$ par C_2 (2.2.9) :

$$1 \rightarrow C_2 \longrightarrow G \longrightarrow SU(n, 4) \rightarrow 1.$$

Observons que les groupes G considérés ci-après en 2.2.3 et 2.2.9 admettent des images homomorphes d'ordre 2. Au cours des démonstrations, on établit qu'ils sont engendrés par une classe de Fischer; ils satisfont donc à $|G : \mathcal{D}(G)| = 2$. Comme $PSU(n, 4)$ est un groupe simple, on obtient toujours G comme extension centrale scindée de la forme $C_2 \times G_1$ où G_1 est une extension centrale non scindée

$$1 \rightarrow Z_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow PSU(n, 4) \rightarrow 1,$$

$|Z_1|$ divisant l'ordre du multiplicateur de Schur de $PSU(n, 4)$ (0.3.2 et 0.3.3).

2.2.1 PROPOSITION. — Soit G un groupe engendré par des éléments d_j pour $1 \leq j \leq 5$ satisfaisant à la formule de présentation :

$$S(5) \quad \begin{array}{c} d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4 \\ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \quad H \quad H \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \quad \bullet \\ d_5 \end{array}, \quad (d_3^{d_2 d_4} d_5)^3 = 1.$$

Alors le groupe G admet une classe de Fischer de cardinal 165 contenant d_j pour $1 \leq j \leq 5$; il possède un sous-groupe central $\langle \hat{q} \rangle$ tel que $\hat{q}^2 = 1$ (avec \hat{q} défini en 2.1.4); G est l'extension scindée

$$1 \rightarrow C_2 \longrightarrow G \longrightarrow SU(5, 4) \rightarrow 1$$

de $SU(5, 4)$ par C_2 .

Alors, le groupe G admet une classe de Fischer E de cardinal 693 contenant d_j pour $1 \leq j \leq 6$; on a $G/Z(G) = \text{PSU}(6, 4)$. Le centre de G est d'ordre 24; il contient l'involution \hat{q} (5.1.4) et $G = \langle \hat{q} \rangle \times G_1$ où G_1 est une extension centrale non scindée de $\text{PSU}(6, 4)$ par son multiplicateur de Schur $M = \langle z \rangle \times Z_0$, où z est d'ordre 3 (et donné en 2.1.5) et Z_0 isomorphe à $C_2 \times C_2$.

Preuve. — Il existe un homomorphisme ψ de G sur $G^0 = \text{SU}(6, 4)$ qui applique d_i sur t_{v_i} pour $1 \leq i \leq 6$ (notations et conventions 0.3.6). Posons $K = \langle d_j \mid 1 \leq j \leq 5 \rangle$ et $Q = \langle d_j \mid 2 \leq j \leq 5 \rangle$. Rappelons que Q est isomorphe à \mathcal{J} et que le centre de Q est d'ordre 2; il est engendré par q (2.1.3).

2.2.4. — Le groupe K admet une classe de Fischer $D(K)$; K est isomorphe à l'extension centrale scindée de $\text{SU}(5, 4)$ par C_2 , $Z(K) = \langle \hat{q} \rangle$.

En effet, l'image de K par ψ est contenue dans le stabilisateur $F(u)$ de la droite non isotrope $u = v_1 + \omega v_3 + v_4 + \bar{\omega} v_5 + v_6$ (notations et conventions 0.3.6). Le système générateur de K s'envoie sur un système générateur de $F(u)$; il résulte alors de 2.2.1 que l'on a la suite exacte :

$$1 \rightarrow \langle \hat{q} \rangle \longrightarrow K \longrightarrow F(u) \rightarrow 1.$$

L'assertion s'en déduit immédiatement.

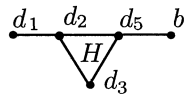
2.2.5. — L'élément \hat{q} est central dans G .

Considérons le sous-groupe K' engendré par $d_1, d_2, d_3, d_4^{d_6}, d_5$. Son image par ψ fixe le vecteur non isotrope $u' = v_1 + \omega v_3 + v_4 + \bar{\omega} v_5$. Comme ci-dessus, K' est l'extension centrale de $F(u')$ (fixateur de u' dans G^0) par $Z(K') = \langle \hat{q}' \rangle$.

Posons $b = d_1^{q d_2 d_3 d_4}$, b appartient à K ; par hypothèse, b commute à d_6 . On a $b = d_1^{q d_2 d_3 d_4} = d_1^{(d_2 d_4 y y') d_2 d_3 d_4 d_6} = d_1^{d_6 d_4 d_6 d_6 y d_6 d_6 y' d_6 d_3 d_6 d_4 d_6}$. Comme

$$d_6 y d_6 = d_2^{d_3 d_5 d_6 d_4 d_6 d_3 d_5} \quad \text{et} \quad d_6 y' d_6 = d_4^{d_6 d_3 d_5 d_2 d_3 d_5},$$

b est aussi un élément de K' . Ainsi le sous-groupe $S = \langle d_1, d_2, d_3, d_5, b \rangle$ est contenu dans $K \cap K'$. L'image de S par ψ stabilise le plan engendré par u et u' ; on a donc $\psi(S) = F \simeq \text{SU}(4, 4)$. De plus, on a les relations



car $(bd_1)^2 = (bd_2)^2 = (bd_5)^3 = 1$ (5.1.6) et $|bd_3| = |d_1^{q d_2 d_3 d_4} d_3| = |d_1^{q d_2} d_4| = |d_1 d_4|$, donc $(bd_3)^2 = 1$.

En conséquence, S est engendré par une classe de Fischer — la classe de conjugaison de d_1 dans S ; par conséquent S est un $D(K)$ -sous-groupe de K (resp. un $D(K')$ -sous-groupe de K'). On a la suite exacte :

$$1 \rightarrow Z(S) \longrightarrow S \xrightarrow{\psi} F \rightarrow 1 \quad (F \simeq \text{SU}(4, 4)).$$

Rappelons que $Z(S)$ (resp. $Z(K), Z(K')$) est engendré par le produit de cinq éléments de $D(S)$ (resp. $D(K), D(K')$) commutant deux à deux. Si $Z(K) \cap S = \{1\}$, la restriction de ψ à S est un isomorphisme; S est donc un groupe simple. En particulier d_1 est le produit de quatre involutions commutant deux à deux (car $Z(S) = \{1\}$), par suite K et K' sont aussi des groupes simples et l'on a $Z(K) = Z(S) = Z(K')$. Si $Z(K) \cap S \neq \{1\}$, alors $Z(K) = Z(K')$ et l'on a également $Z(S) = Z(K')$. Dans tous les cas, l'élément \hat{q}' , central dans K' , centralise K ; on a donc $\hat{q}'(d_4^{d_6})\hat{q}' = d_4^{d_6}$ et $\hat{q}'d_4\hat{q}' = d_4$, d'où $\hat{q}'d_6\hat{q}' = d_6$ et $\hat{q} = \hat{q}'$ est donc un élément central dans G .

2.2.6. — Le groupe G admet une classe de Fischer de cardinal 693; il existe une extension centrale non scindée de G^0 telle que $G = \langle \hat{q} \rangle \times G_1$.

Notons B le centralisateur de d_6 dans K . Par hypothèse b appartient à B . En particulier le sous-groupe $S = \langle d_1, d_2, d_5, b, d_3 \rangle$ est contenu dans B . Comme $\psi(S)$ est isomorphe à $\text{SU}(4, 4)$, $\psi(S)$ est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$; on a donc $\psi(S) = \psi(B) \neq \psi(K)$ et par suite $S = B$ ($\hat{q} \in S$ et \hat{q} engendre le noyau de la restriction de ψ à K).

Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1. sont remplies pour les groupes K et B ; G admet une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_6^k \mid k \in K\}$. On a :

$$|E| = 165 + \frac{|Z(K)| \times |\text{SU}(5, 4)|}{|Z(S)| \times |\text{SU}(4, 4)|} = 165 + 2^4 \times 3 \times 11 = 693.$$

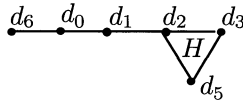
Le groupe G est alors une extension centrale de $\text{SU}(6, 4)$ (0.3.2). Comme \hat{q} est un élément central de G n'appartenant pas à $\mathcal{D}(G)$, il existe un sous-groupe central Z_1 de G , $|Z_1|$ divisant l'ordre du multiplicateur de Schur de $\text{PSU}(6, 4)$ tel que :

$$1 \rightarrow Z_1 \longrightarrow G_1 \longrightarrow \text{PSU}(6, 4) \rightarrow 1$$

et $G = \langle \hat{q} \rangle \times G_1$ (0.3.3).

2.2.7. Détermination du sous-groupe central Z_1 de G . — Rappelons que Z_1 est un $\{2, 3\}$ -groupe (0.3.2). Étudions d'abord la 3-partie de Z_1 .

Soit N le sous-groupe de G engendré par d_j pour $0 \leq j \leq 6$ et $j \neq 4$. On a



(un calcul simple prouve que $(d_6 d_0)^3 = 1$, appendice 5). Il s'ensuit que le E -sous-groupe N de G est isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}$ (il n'y a pas de E -sous-groupe isomorphe à $\mathcal{H}_{3,6}/Z(\mathcal{H}_{3,6})$ dans G^0 [10, 3.4.9]). Le centre de N est donc trivial; il est d'ordre 3, engendré par l'élément z dont l'expression est donnée en 2.1.4. On a $\psi(z) \neq 1$, il est facile de vérifier que $\psi(z)$ opère sur l'espace vectoriel associé à G^0 comme l'homothétie $v \mapsto \omega v$, avec $\omega \in \mathbb{F}_4 - \{0, 1\}$. Il s'ensuit que z est un élément de $Z(G)$. Comme l'ordre de Z_1 divise 12, sa 3-partie est $\langle z \rangle$.

Étude de la 2-partie Z_0 de Z . Le groupe $\text{PSU}(6, 4)$ admet trois classes de sous-groupes isomorphes à $G^+(6, 3)/Z(G^+(6, 3))$ et n'admet aucune classe de sous-groupe isomorphe à $G^+(6, 3)$ [10, chap. 9]. (On peut aussi, comme me l'a fait remarquer le referee, observer que si $G^+(6, 3)$ était isomorphe à un sous-groupe S de $\text{PSU}(6, 4)$, on aurait $O_2(S) \neq 1$ par le théorème de Borel-Tits, S serait alors un sous-groupe parabolique de $\text{PSU}(6, 4)$, le théorème de Lagrange entraîne une impossibilité.)

Considérons le sous-groupe $R_1 = \langle d_1, d_2, d_5, d_4, d_6, b \rangle$; tenant compte de 2.1.7 et de ce qui précède, R_1 est une extension centrale de $G^+(6, 3)$ par $\langle z \rangle$ et son image dans $\text{PSU}(6, 4)$ est isomorphe à $G^+(6, 3)/Z(G^+(6, 3))$. Désignons par $m(R_1)$ l'involution centrale de R_1 , on a

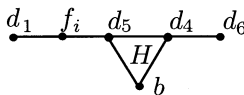
$$m(R_1) = d_2 d_6 b x_1 x'_1 x''_1$$

(2.1.6, 2.1.7 et 1.2.5). On a aussi $\psi(m(R_1)) = 1$. Ainsi $m(R_1)$ est un élément de $\ker \psi$, donc de $Z(G)$ (2.2.6).

Notons $\bar{\psi}$ la composée de ψ et de l'application canonique

$$G^0 \rightarrow G^0/Z(G^0).$$

Considérons les éléments f_2 et f_3 introduits en 2.1.6. On montre sans difficulté que l'on a les relations (appendice 6 (iii)) :



Posons $R_i = \langle d_1, f_i, d_5, d_4, d_6, b \rangle$ pour $i = 2, 3$; les sous-groupes R_2 et R_3 sont isomorphes à R_1 ; en outre ils sont distincts ($f_i \notin R_j$ pour

a donc $\psi(K) = F(u)$ et K est une extension centrale de $SU(6, 4)$ par $\langle \hat{q} \rangle \times Z_0$ (2.2.3) (resp. une extension centrale de $SU(n - 1, 4)$, hypothèse de récurrence); K admet une classe de Fischer $D(K)$.

Soit B le centralisateur de d_7 (resp. d_n) dans K .

Supposons d'abord $n = 7$. Alors B contient Z_0 et contient aussi le $D(K)$ -sous-groupe B' engendré par d_j pour $1 \leq j \leq 5$, isomorphe à $C_2 \times SU(5, 4)$. Le centre de B' est engendré par \hat{q} et son image dans G^0 est le stabilisateur dans $\psi(K)$ d'un plan non dégénéré contenant u . C'est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$. On a donc $\psi(B) = \psi(B')$; comme Z_0 centralise d_7 , on a $B = B'Z_0$.

Les conditions C.0 et C.1 du THÉORÈME 0.3.1 sont donc remplies pour les groupes B et K (0.3.4); le groupe G_7 admet alors une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_7^k \mid k \in K\}$ dont le cardinal est :

$$|E| = 693 + \frac{2|Z_0| \times |SU(6, 4)|}{2|Z_0| \times |SU(5, 4)|} = 2709.$$

Comme 2709 est aussi le cardinal de la classe de Fischer de $SU(7, 4)$, le groupe G_7 est une extension centrale de $SU(7, 4)$ dont $\langle \hat{q} \rangle \times Z_0$ est un sous-groupe central. Or Z_0 est contenu dans $\mathcal{D}(G_7)$ (engendré par des éléments qui sont des produits de six éléments de E) et le multiplicateur de Schur de $SU(7, 4)$ est trivial, on a donc $G \simeq C_2 \times SU(7, 4)$ (cf. [8]).

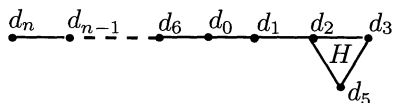
Supposons maintenant $n \geq 8$. Le centralisateur B de d_n dans K contient Z_0 et le $D(K)$ -sous-groupe $B' = \langle d_j \mid 1 \leq j \leq n - 1 \rangle$. L'image par ψ de B' stabilise un plan non dégénéré contenant u ; c'est un sous-groupe maximal de $\psi(K)$. On a donc $\psi(B) = \psi(B')$ et par suite $B = B'$ (remarque : \hat{q} et Z_0 sont contenus dans B'). Les conditions C.0 et C.1 (loc. cit.) sont remplies pour les groupes B et K , le groupe G_n admet une classe de Fischer E telle que $E = D(K) \cup \{d_n^k \mid k \in K\}$. On a :

$$\begin{aligned} |E| &= |D(SU(n - 1, 4))| + \frac{2|Z_0| \times |D(SU(n - 1, 4))|}{2|Z_0| \times |D(SU(n - 2, 4))|} \\ &= \frac{1}{3}(2^{2n-3} + (-1)^{n-1}2^{n-2} - 1) + 2^{n-2}(2^{n-1} - (-1)^{n-1}) \\ &= \frac{1}{3}(2^{2n-1} + (-1)^n 2^{n-1} - 1) = |D(SU(n, 4))|. \end{aligned}$$

Ainsi G_n est une extension centrale de $SU(n, 4)$; comme ci-dessus, on a $Z_0 = \{1\}$; ainsi G_n est isomorphe à $C_2 \times SU(n, 4)$ et \hat{q} appartient à $Z(G)$.

Supposons $n \equiv 0 \pmod 3$. L'élément z_n (défini en 2.1.8) est central dans G_n . Soit X le E -sous-groupe de G_n engendré par d_j pour $0 \leq j \leq n$ et $j \neq 4$. Il est clair que $d_0 = d_1^{q^{d_1}}$ centralise d_j pour $j \geq 7$; il résulte

de 2.2.7 que l'on a les relations :



Le E -sous-groupe X est donc isomorphe à $\mathcal{H}_{3,n}$ et son centre est engendré par z_n (0.1.2). L'image de z_n par ψ opère sur l'espace vectoriel V associé à G^0 comme une homothétie (vérification facile); z_n est donc un élément central dans G_n .

REMARQUE. — On établit, pour $n \geq 7$, que Z_0 est trivial. On peut évidemment remplacer les relations (s) de 2.2.9 par les relations (s') : $m(R_1) = m(R_2) = 1$.

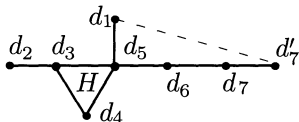
Appendice

Convention. — Pour alléger l'écriture, on notera les éléments d_j par leur indice j ; on écrit ainsi 1, 2, 3, ... au lieu de d_1, d_2, d_3, \dots . Cette convention est utilisée pour établir certaines égalités quand aucune confusion n'est possible.

2. — (Notations 1.2.2.) Soit :

$$z = d_3 d_4 (d_3 d_4)^{d_5} (d_3 d_4)^{d_5 d_6} (d_3 d_4)^{d_5 d_6 d_7} (d_3 d_4)^{d_5 d_6 d_7 d'_7}$$

un générateur du centre du groupe $H = \langle d'_7, d_j \mid 3 \leq j \leq 7 \rangle$. On rappelle que l'on a les relations suivantes :



On se propose d'établir que l'on a :

- (a) $(d_2^z d_2)^2 = 1$,
- (b) $(d_1^z d_1)^2 = 1$.

On a les assertions :

- (i) $(d_2^{s d_6 d_5 d_7 d_4} d_5)^2 = 1$. En effet, d_7 centralise d_4, d_5 donc :

$$|2^{s6547} 5| = |2^{s654} 5| = |2^{s6} 4| = |24|$$

(écriture simplifiée) ce qui donne (i).

(ii) $(d_2^{s d_6 d_5 d_7 d_4 d_5 d_3} d_2)^2 = 1$. D'après (i) on a :

$$|2^{s657453} 2| = |2^{s6} 2^{345}| = |2^{3453} 2^{3456}| = |3 6|$$

ce qui montre (ii).

(iii) $(d_2^{s d_6 d_5 d_7 d_4 d_6 d_3 d_4 d_3 d_5} d_6)^2 = 1$. On a :

$$|2^{s6574343} 5| = |2^{s65734} 5| = |2^{s6} 5^{34}| = |2^{345} 5^6| = |2 6|$$

ce qui montre (iii).

(iv) $d'_7 = d_2^{s d_6 d_5 d_7 d_6 s d_2 d_3 d_5 d_6 d_7}$. En effet (1.1.5) :

$$d'_7 = d_7^{d_6 x x' d_7} = x^{d_3 d_2 d_4 d_3 d_7 x d_6 d_7},$$

ce qui donne en remplaçant x par son expression (en écriture simplifiée) :

$$\begin{aligned} 7' &= 3^{5246} 353 324 37 353 246 353 246 353 67 \\ &= 2^s 6547 5 3 2 4635324635367 \\ &= 2^s 6547 346353 24 353 67 \quad (\text{en tenant compte de (i), (ii) et (iii)}) \\ &= 2^s 6576 345345 2 3567 = 2^s 6576 s 23567, \end{aligned}$$

ce qui montre (iv).

(v) $d_7^{d_7 d_6 d_5 d_3 d_2} = d_2^{s d_6 d_5 d_7 d_6 s}$. C'est une conséquence immédiate de (iv).

(vi) $(d'_7 d_2)^2 = 1$. En utilisant (iv) et (v), on a :

$$|7'2| = |2^{s6576s23567} 2| = |2^{s6576} 3| = |2^{345363} 5| = |2^{34} 6| = |2 6|,$$

ce qui entraîne (vi).

(vii) $(d_2^{s d_6 d_5 d_3 d_4} d_5)^2 = 1$. On a :

$$|2^{s6534} 5| = |2^{3453} 6535 4| = |2^{345653} 4| = |2 6^{54}|$$

ce qui prouve (vii).

(viii) $(d_2^{s d_6 d_5 d_3 d_4} d_6)^2 = 1$. En effet, $|2^{s6534} 6| = |2^s 5| = |2 5|$ d'où l'assertion.

Observons maintenant que z s'écrit :

$$z = s(d_3 d_4)^{d_5 d_6} d_7 d_6 d_5 (d_3 d_4) d_7^{d_7 d_6 d_5} d_3 d_4 d_5 d_6 d_7 d'_7.$$

On en déduit alors (en écriture simplifiée)

$$|2^z 2| = |2^{s65} 34 56765 34 5677'765 3 2|,$$

ce qui donne en tenant compte de (v), (vi), (vii) et (viii) :

$$|2^z 2| = |2^{s65} 34 76534 7'76532| = |2^{s65} 34 76534 2^{s6576s}| = |2^{s6576} 5 2^{s6576}|.$$

Mais $|2^{s6576s} 5| = |2^{s67} 6| = |2^s 7| = |2 7|$; on a donc

$$|2^z 2| = |2^{s6576} 2^{s6576}| = 1,$$

ce qui démontre l'égalité (a).

Pour établir l'assertion (b), rappelons que x et x' s'écrivent :

$$x = 3^5 246 353 = 6^s 235 \quad \text{et} \quad x' = x^{3243} = 2^{35(6^s)43}.$$

On a alors $7^{xx'} = 6^s 2357 34 6^s 2 353 2 6^s 43$.

(i) $(d_7' d_1)^3 = 1$. En effet,

$$|7' 1| = |6^{s235734 6^s 235 32 6^s 4367} 1| = |6^{s235734 6^s 235} 1|,$$

d'où :

$$|7' 1| = |6^{s23537 543565345 4 235} 1| = |6^{s23537 54356 5342} 1^s|.$$

Mais d_1^s centralise d_6 et d_4 ; on en déduit

$$\begin{aligned} |7' 1| &= |6^{s2537436532} 1^s| = |6^{5342 343 76532} 1^s| = |6^{5323476532} 1^s| \\ &= |6^{534 765232} 1^{5345}| = |6^{5345 7 232} 1^{5345}| \quad (\text{car } 6^{53476} = 6^{5347}) \\ &= |6^{532} 1^{53}| = |6^{53235} 1| = |6 5| \end{aligned}$$

ce qui établit (i).

(ii) $(d_7^{d_7 d_6 d_1} d_5)^2 = 1$. En effet

$$|7'^{761} 5| = |7^{xx' 67 761} 5| = |7^{xx' 5} 1|,$$

d'où :

$$\begin{aligned} |7'^{761} 5| &= |2^{34536576 345345 235} 5 1| = |2^{34536576} 1^{5435}| = |2^{34546} 1^5| \\ &= |2^{354565} 1| = |2^{35465} 1| = |6^{5345} 1| = |6^s 1|. \end{aligned}$$

Comme $(d_6^s d_1)^2 = 1$, l'assertion (ii) est établie.

Observons enfin que, d'après (i)

$$|d_1^z d_1| = |1^{s6 5345 67634 7'^{765} 345677'} 1| = |1^{s5345 676 534} 7'^{765} 7'^{761} 5|;$$

d'après (ii)

$$|1^z 1| = |1^{s5345 676 5345} 7'^{76} 7'^{76} 1|.$$

Comme $|7'^{76} 1| = |7' 1|$, on a :

$$|1^z 1| = |1^{5345 5345 676 5345} 1| = |1^{5435 676} 1^{5435}| = |1^{5435} 1^{5435}|$$

puisque d_6 centralise d_1^s et d_1^{ss} (1.1.4). L'assertion (b) est démontrée.

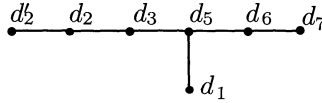
2. — (Notations et conventions 1.2.2.) Posons :

$$d'_2 = d_7^{d_7 d_6 d_5 d_3 d_2}, \quad d' = d_5^{d_3 d_1 d_6 d_5}, \quad d'' = d_2^{d_2 d_3 d' d_2},$$

$$d = d_1^{d_5 d_6 d_7 d_3 d_5 d_6 d_2 d_3 d_5 d_1 d_2 d_2 d_3 d_5 d_6 d_7}.$$

On a alors les assertions suivantes :

(i) Les éléments d'_2, d_j pour $1 \leq j \leq 7$ et $j \neq 4$ satisfont aux relations :



(ii) $W = \langle d'_2, d_j \mid 1 \leq j \leq 7, j \neq 4 \rangle$ est isomorphe à $W(E_7)$.

(iii) $m_7 = d'_2 d_3 d_1 d_6 d' d'' d$ est une involution qui engendre le centre de W .

(iv) Soit v_e un vecteur de l'espace vectoriel V associé à $G^+(7, 3)$ définissant la réflexion orthogonale e ; alors $v_{d'_2}, v_{d_3}, v_{d_1}, v_{d_6}, v_{d'}, v_{d''}, v_d$ est une base orthonormale de V . On a :

$$v_{d'_2} = -v_2 - v_3 - v_4 - v_6 + v_7,$$

$$v_{d'} = v_1 + v_3 - v_5 + v_6,$$

$$v_{d''} = -v_1 + v_2 - v_3 - v_4 + v_5 + v_6 + v_7,$$

$$v_d = -v_1 + v_2 - v_3 - v_4 + v_5 - v_6.$$

(v) m_7 est une involution centrale de G .

La vérification de ces assertions ne présente pas de difficulté.

3. — (Notations et conventions 1.2.6.) Pour l'élément z défini en 1.1.10, on se propose de démontrer $d_6^z d_6 = 1$.

On a les assertions suivantes :

(i) $d_6^{s d_6} = d_6^{s s}$ car

$$d_6^{s d_6} = d_6^{d_5 d_3 d_4 d_5 d_6} = d_5^{d_3 d_4 d_6 d_5 d_6} = d_5^{d_3 d_4 d_5 d_6 d_5} = d_5^{d_4 d_3 d_6 d_5} = d_6^{s s}.$$

(ii) $(d_6^{s s d_2 d_3 d_1 d_2 d_4 d_5} d_6)^2 = 1$. Avec l'écriture simplifiée, on a :

$$|6^{5435 \ 231245} 6| = |6^{5435 \ 623124} 5| = |6^{5345 \ 234} 5| = |6^{534 \ 2 \ 5^{34}}| = |6^2{}^3| = |6 \ 2|,$$

ce qui entraîne (ii).

(iii) $(d_6^{ssd_2d_3d_1d_2d_5d_4d_3d_5}d_2)^2 = 1$. En effet :

$$|6^{5435\ 23125435\ 2}| = |6^{5435\ 23154\ 3}| = |6^{5435\ 2\ 3^5}| = |6^{543\ 2\ 3}| = |6^{54\ 2}| = |6\ 2|,$$

ce qui démontre (iii).

(iv) $(d_0^{d_1d_2d_3d_5d_6}d_3)^2 = 1$. Cette égalité résulte de :

$$|0^{12356\ 3}| = |0^{1235\ 3}| = |0\ 5|.$$

(v) $d_0^{d_1d_2d_3d_5d_6} = d_6^{ssd_2d_3d_1d_2d_5d_4d_3d_5d_4}$.

En écriture simplifiée, d_0 se met sous la forme $x^{54651x356}$. On a donc :

$$\begin{aligned} 0^{12356} &= 5^{3246\ 5346\ 135\ 642\ 535\ 243} = 6^{5345\ 234\ 6\ 135642\ 535\ 243} \\ &= 6^{s65\ 343\ 15642\ 353\ 243} = 6^{ss231245\ 64\ 535\ 243} \quad \text{d'après (i),} \\ &= 6^{ss231245\ 45\ 35243} \quad \text{d'après (ii),} \\ &= 6^{ss2312\ 543\ 543} \quad \text{d'après (iii)} \\ &= 6^{ss2312\ 54354} \quad \text{d'après (iv),} \end{aligned}$$

ce qui donne l'assertion

(vi) $(d_6^{ssd_2d_3d_5d_4}d_3)^2 = 1$. En effet, on a :

$$|6^{ss2354\ 3}| = |6^{ss2353\ 4}| = |6^{ss24\ 3^5}| = |6^{5435\ 2\ 3^5}| = |6^{5432\ 3}| = |6^{54\ 2}| = |6\ 2|$$

ce qui entraîne (vi).

Observons alors que z (qui se note $54(54)^3(54)^{32}(54)^{321}(54)^{3210}$ en écriture simplifiée) s'écrit aussi :

$$ss\ 2354\ 3212\ 354\ 0^{123}\ 543210.$$

On a donc, d'après (iv),

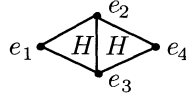
$$6^z = 6^{ss2354\ 212\ 354\ 3210123\ 543210},$$

puis, en utilisant le fait que d_2 centralise d_4 et d_5 et que $6^{ss232} = 6^{ss23}$ (en écriture simplifiée), on obtient :

$$|6^z\ 6| = |6^{ss235412354\ 3210123\ 5\ 6}| = |6^{ss2312534\ 0^{12356}}|.$$

En vertu de (v), l'assertion est alors démontrée.

4. Le groupe \mathcal{J} . — On appelle groupe \mathcal{J} un groupe engendré par des éléments e_1, e_2, e_3, e_4 sur lesquels



est une formule de présentation.

Soit D la classe de conjugaison de e_1 dans \mathcal{J} ; on a les assertions suivantes :

- (i) D est une classe de Fischer de \mathcal{J} , $|D| = 36$ et $|\mathcal{J}| = 2^8 3^3$.
- (ii) Les D -sous-groupes $\langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ et $\langle e_2, e_3, e_4 \rangle$ sont isomorphes à \mathcal{H} ; leurs centres sont respectivement engendrés par $z = (e_1 e_2 e_3)^2$ et $z' = (e_2 e_3 e_4)^2$; le sous-groupe $\langle z, z' \rangle$ est isomorphe à $SL(2, 3)$.
- (iii) D est la réunion de neuf cliques de cardinal 4 (sous-ensemble maximal formé d'éléments de D commutant deux à deux); soient \mathcal{C} une clique et x un élément de $D - \mathcal{C}$. Le sous-groupe $\langle x, \mathcal{C} \rangle$ est isomorphe à $W(D_4)$, le produit z_0 des éléments de la clique \mathcal{C} est une involution qui engendre le centre de $\langle x, \mathcal{C} \rangle$. Cette involution z_0 ne dépend ni du choix de \mathcal{C} ni de celui de x (avec $x \in D - \mathcal{C}$); z_0 engendre le centre de \mathcal{J} et on a $z_0 = (z^2 z')^2$.
- (iv) $O_2(\mathcal{J})$ est un 2-groupe extra-spécial d'ordre 2^7 ; c'est le produit central de trois groupes de quaternions; on a $Z(O_2(\mathcal{J})) = Z(\mathcal{J}) = \langle z_0 \rangle$.
- (v) $\mathcal{J}/O_2(\mathcal{J})$ est isomorphe à \mathcal{H} et la suite exacte

$$1 \rightarrow O_2(\mathcal{J}) \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}/O_2(\mathcal{J}) \rightarrow 1$$

est scindée (cf. [10, chap. 4] et [13, chap. 4]).

5. — (Notations et hypothèses 2.2.3.) On rappelle que ψ est un homomorphisme de G sur $G^0 = SU(6, 4)$ dont le noyau est un sous-groupe central $\langle \hat{q} \rangle \times Z_1$. Le groupe G admet une classe de Fischer E de cardinal $|E| = 693$, qui s'envoie sur la classe des transvections unitaires de G^0 ; la restriction de ψ à E est un isomorphisme. Pour $1 \leq i \leq 6$, on a $\psi(d_i) = t_{v_i}$ et $\{v_i \mid 1 \leq i \leq 6\}$ est une base de l'espace vectoriel V , associé à G^0 , formée de vecteurs isotropes tels que

$$\begin{aligned} \phi(v_1, v_2) = \phi(v_2, v_3) = \phi(v_3, v_4) = \phi(v_4, v_5) = \phi(v_4, v_6) = \phi(v_2, v_5) = 1, \\ \phi(v_5, v_3) = \omega \quad (\text{avec } \omega \in \mathbb{F}_4 - \{1, 0\}) \end{aligned}$$

et $\phi(v_i, v_j) = 0$ pour les autres paires $\{i, j\}$ telles que $1 \leq i, j \leq 6$.

Avec ces notations, on a :

$$\begin{aligned} \psi(y) &= t_{v_2 + \bar{\omega}v_4} \quad \text{pour } y = d_2^{d_3d_5d_4d_3d_5}, \\ \psi(y') &= t_{\bar{\omega}v_2 + v_4} \quad \text{pour } y' = d_4^{d_3d_5d_2d_3d_5}, \\ \psi(d_0) &= t_{v_2 + v_4} \quad \text{pour } d_0 = d_1^{qd_1} = d_1^{d_2yy'd_4d_1}. \end{aligned}$$

On a donc $(\psi(d_0)\psi(d_6))^3 = 1$ et par suite $(d_0d_6)^3 = 1$.

NOTATION (n). — Soient a et a' des éléments distincts dans E qui commutent. On note $\ell(a, a')$ l'ensemble des cinq éléments de E dont les images par ψ correspondent aux transvections relatives aux cinq droites du plan isotrope engendré par v_a et $v_{a'}$. Ainsi on a :

$$\ell(d_2, d_4) = \{d_2, d_4, y', y, d_0\} \quad \text{et} \quad \hat{q} = d_2d_4y'd_0.$$

6. — (Avec les notations et les conventions précédentes.)

(i) Rappelons que $b = d_0^{d_1d_2d_3d_4}$; on a alors $\psi(b) = t_{v_1 + v_3}$. On a :

$$\begin{aligned} \psi(x'_1) &= t_{v_2 + \bar{\omega}(v_1 + v_3) + v_6}, & x'_1 &= d_5^{d_4d_2bd_6(d_4d_5d_4)}; \\ \psi(x''_1) &= t_{\bar{\omega}v_2 + \bar{\omega}(v_1 + v_3) + \omega v_6}, & x''_1 &= d_5^{d_2x'_1bd_5}; \\ \psi(x_1) &= t_{v_2 + \omega(v_1 + v_3) + \omega v_6}, & x_1 &= d_1^{d_2x'_1x''_1d_1}. \end{aligned}$$

(ii) Rappelons que $e = (d_2^{d_5d_4})d_1d_3d_6(d_2^{d_5d_4})d_5d_3$. Alors :

$$\psi(e) = t_{v_1 + v_5 + v_6} \quad (\text{d'après 2.1.6}).$$

On pose :

$$v_e = v_1 + v_5 + v_6, \quad v_b = v_1 + v_3.$$

On a $\psi(e^b) = t_{v_e + \omega v_b}$.

Un calcul simple prouve que l'on a les relations suivantes :

$$\begin{array}{c} d_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ H \quad H \\ \nwarrow \quad \nearrow \\ d_2 \quad d_5 \end{array} e^b, \quad (d_3^{d_2e^b}d_5)^3 = 1.$$

Le sous-groupe $Q_2 = \langle d_2, d_3, d_5, e^b \rangle$ est isomorphe à \mathcal{J} , son centre $d_2e^by'_2y''_2$ est d'ordre 2 ; les expressions de y'_2 et de y''_2 sont données en 2.1.6 et on a :

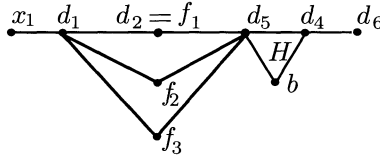
$$\psi(y'_2) = t_{v_2 + v_e + \omega v_b}, \quad \psi(y''_2) = t_{v_2 + \omega v_e + \bar{\omega}v_b}.$$

Posons $y_2 = d_1^{y_2''} d_2 d_1$; on a $\psi(y_2) = t_{v_2 + \bar{\omega}v_e + v_b}$ et par suite le sous-ensemble $\ell(d_2, e^b) = \{d_2, e^b, y_2', y_2'', y_2\}$ correspond aux cinq droites du plan isotrope engendré par v_2 et $v_e + \omega v_b$ (notation (n)).

(iii) Considérons les éléments $f_2 = x_1^{b e y_2''}$ et $f_3 = x_1^{b e b y_2'}$ introduits en 2.1.6; un calcul simple prouve que :

$$\psi(f_2) = t_{v_2 + v_b + v_6} \quad \text{et} \quad \psi(f_3) = t_{\omega v_2 + v_b + v_6}.$$

On a alors les relations :



et les sous-groupes $R_i = \langle d_1, f_i, d_5, d_4, d_6, b \rangle$ pour $i = 1, 2, 3$ sont isomorphes entre eux; leurs images dans $\text{PSU}(6, 4)$ ne sont pas conjugués entre elles. Les intersections de $\psi(R_1)$ avec ses conjugués ont été classifiées, aucune ne contient de sous-groupes isomorphes à $\langle d_5, d_4, d_6, b \rangle$ (cf. [7]); $\psi(R_1), \psi(R_2), \psi(R_3)$ sont des représentants des trois classes de conjugaison de sous-groupes isomorphes à $G^+(6, 3)/Z(G^+(6, 3))$ dans $\text{PSU}(6, 4)$ (cf. [10, chap. 8]).

(iv) Les involutions centrales de R_i sont des produits de six éléments commutant deux à deux (c'est le produit des éléments d'une clique de $E \cap R_i$). Avec les notations introduites en 2.1.6, on a :

$$m(R_i) = f_i d_6 b x_i x_i' x_i''$$

avec $x_1' = d_5^{d_4 f_i b d_6 d_5 d_4 d_5}$, $x_i'' = d_5^{x_i' f_i b d_5}$ et $x_1 = d_1^{x_i' x_i'' f_i d_1}$. On a alors :

$$\begin{aligned} \psi(x_i') &= t_{u_i'} \quad \text{avec} \quad u_1' = v_2 + \omega v_b + v_6, \quad u_2' = v_2 + \bar{\omega} v_6, \quad u_3' = v_2 + v_b; \\ \psi(x_i'') &= t_{u_i''} \quad \text{avec} \quad u_1'' = v_2 + v_b + \bar{\omega} v_6, \quad u_2'' = v_2 + \bar{\omega} v_b, \quad u_3'' = v_2 + v_6; \\ \psi(x_i) &= t_{u_i} \quad \text{avec} \quad u_1 = u_2 = u_3 = v_2 + \omega v_b + \omega v_6. \end{aligned}$$

On peut alors calculer $m(R_1)m(R_2)$.

Conservons les notations (n) introduites au numéro 5 et considérons les sous-ensembles suivants :

- $L_1 = \ell(x_1', x_2'') = \{x_1', x_2'', d_6, f_3, a_1\}$ associé au plan $\langle v_2 + \bar{\omega} v_b, v_6 \rangle$ avec $\psi(a_1) = t_{v_2 + \bar{\omega} v_b + \omega v_6}$;

- $L_2 = \ell(d_6, x''_1) = \{d_6, x''_1, x'_3, f_2, a_2\}$ associé au plan $\langle v_2 + v_b, v_6 \rangle$ avec $\psi(a_2) = t_{v_2+v_b+\omega v_6}$;
- $L_3 = \ell(a_1, a_2) = \{a_1, a_2, b, x_3, a_3\}$ associé au plan $\langle v_2 + \omega v_6, v_b \rangle$ avec $\psi(a_3) = t_{v_2+\omega v_6}$;
- $L_4 = \ell(x'_2, d_6) = \{x'_2, d_6, d_2, x''_3, a_3\}$ associé au plan $\langle v_2, v_6 \rangle$.

On a alors

$$m(R_1)m(R_2) = (x_1x'_1x''_1bd_6d_2)(x_2x'_2x''_2bd_6f_2) = (x'_1x''_2)(x''_1f_2)(x'_2d_2)$$

en observant que les éléments x'_i, x''_i, x_i, f_i, b et d_6 commutent entre eux puisqu'ils correspondent, par ψ , à des droites du sous-espace isotrope engendré par v_2, v_b et v_6 . Le produit des cinq éléments de L_1, L_2, L_3 et L_4 est \hat{q} . On obtient donc :

$$\begin{aligned} m(R_1)m(R_2) &= (\hat{q}d_6f_3a_1)(\hat{q}d_6x'_3a_2)(\hat{q}d_6a_3x''_3) \quad (\text{en utilisant } L_1, L_2, L_4), \\ m(R_1)m(R_2) &= (\hat{q}a_1a_2a_3)(d_6f_3x'_3x''_3) \quad (\text{en utilisant } L_3), \\ m(R_1)m(R_2) &= (bd_6f_3)x_3x'_3x''_3 = m(R_3). \end{aligned}$$

7. — Soit (K, D) un couple fischérien avec une présentation (X, \mathcal{R}) satisfaisant aux conditions suivantes :

- (i) X est un sous-ensemble de D ;
- (ii) les relations composant la donnée \mathcal{R} sont toutes de la forme $(xx')^2 = 1$ ou $(xx')^3 = 1$ (pour tous $x, x' \in X$ tels que $x \neq x'$) et $(x^kx')^m = 1$ avec x et x' dans X , k dans K et m dans $\{2, 3\}$. Une telle présentation est dite *fischérienne*.

LEMME. — Soit (G, E) un couple fischérien et soit N un sous-groupe normal de G , non central dans G tel que $K = G/N$ admette une présentation fischérienne (X, \mathcal{R}) avec X contenu dans l'image D de la classe E de G . Alors, l'extension

$$(*) \quad 1 \rightarrow N \rightarrow G \rightarrow K \rightarrow 1$$

est scindée.

Preuve. — Notons f l'application canonique de G sur K . Soit Y une image réciproque de X dans G telle que, pour tout x dans X , on ait $|f^{-1}(x) \cap Y| = 1$.

Soit G_0 le sous-groupe de G engendré par Y , i.e. $G_0 = \langle Y \rangle$, et soit f_0 la restriction de f à G_0 ; f_0 est un homomorphisme surjectif.

Soient x et x' des éléments distincts dans X . Soient y et y' des éléments dans Y tels que $f_0(y) = x$ et $f_0(y') = x'$. On a alors $f_0(yy') = xx'$. L'ordre de yy' divise celui de xx' qui est 2 ou 3. Il s'ensuit que f_0 induit un isomorphisme du graphe porté par Y sur le graphe porté par X (graphe dont les sommets sont les éléments de Y (resp. X) et dont les arêtes joignent les points y, y' tels que yy' est d'ordre 3).

Considérons une relation de la forme $(x^k x')^m = 1$, avec k dans K , m dans $\{2, 3\}$, x et x' distincts dans X . Il existe des éléments y et y' dans Y dont les images par f_0 sont respectivement x et x' . Puisque X engendre K , il existe des éléments $x_{v(1)}, \dots, x_{v(n)}$ de X dont le produit est k . Notons $y_{v(1)}, \dots, y_{v(n)}$ les éléments de Y (uniques) dont les images par f_0 sont $x_{v(1)}, \dots, x_{v(n)}$; leur produit g est un élément de G_0 tel que $f_0(g) = k$. On a alors : $f_0(y^g y') = f_0(x)^{f_0(g)} f_0(x') = x^k x'$; comme $(x^k x')^m = 1$, l'ordre de $y^g y'$ divise m ; la relation $(y^g y')^m = 1$ est satisfaite.

Désignons par h l'application de K dans G_0 définie par $h(x) = y$ où y est l'élément de Y satisfaisant à $f_0(y) = x$. Puisque les relations \mathcal{R} sont satisfaites dans $G_0 = \langle Y \rangle$, l'application h se prolonge en un homomorphisme du groupe K sur le groupe G_0 . Par construction $f_0 \circ h$ est l'identité sur X , donc sur K puisque X engendre K . L'extension (*) est scindée.

REMARQUE. — Les groupes de type classique suivants possèdent une présentation fischérienne :

- $C_2 \times Sp(2n, 2)$ si $n \geq 3$;
- $O_\nu(2n, 2)$ si $n \geq 3$;
- $G^-(5, 3)$, $G^+(5, 3)$, $G^-(6, 3)$, $3 \cdot G^+(6, 3)$, $3 \cdot G^+(7, 3)$
(extensions centrales non scindées),
- $C_2 \times SU(4, 4)$, $C_2 \times SU(5, 4)$
(lemme ci-dessus; 1.1.7; 1.1.1; 1.2.1; 1.2.2; 2.1.1; 2.2.1 et [12] pour les groupes sur \mathbb{F}_2).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI (N.). — *Groupes et algèbres de Lie*. — Masson, 1982.
 [2] CHEVALLEY (C.). — *Algebraic theory of spinors*. — Columbia University Press, New York, 1951.

- [3] CONWAY (J.H.), CURTIS (R.T.), NORTON (S.P.), PARKER (R.A.) and WILSON (R.A.). — *Atlas of Finite Groups*. — Clarendon Press, Oxford, 1985.
- [4] CUYPERS (H.) and HALL (J.I.). — *3-transposition Groups of orthogonal type*. — (à paraître).
- [5] DIEUDONNÉ (J.). — *La géométrie des groupes classiques*. — Springer-Verlag, 1963.
- [6] FISCHER (B.). — *Groups generated by 3-transpositions*. — Université de Warwick, Lectures notes 1969 (unpublished).
- [7] FISCHER (B.). — *Groups generated by 3-transpositions*, Invent. Math., t. **13**, 1971, p. 232–246.
- [8] GRIESS (R.L.). — *Schur multipliers of finite simple groups of Lie type*, Trans. Amer. Soc., t. **183**, 1973, p. 355–421.
- [9] LINDSEY (J.H.). — *Finite linear group of degree six*, Canada J. Math., t. XXIII, n° 5, 1971, p. 771–790.
- [10] VIROTTE-DUCHARME (M.M.). — *Couples fischériens presque simples*, Thèse, Université Paris 7, 1985.
- [11] VIROTTE-DUCHARME (M.M.). — *Une construction du groupe de Fischer F_{24}* , Mémoire n° 27, Bull. SMF, t. **11**, fasc. 2, 1987.
- [12] VIROTTE-DUCHARME (M.M.). — *Présentation des groupes de Fischer (I)*, Geom. Dedicata, t. **41**, 3, 1992, p. 275–335.
- [13] ZARA (F.). — *Classification des couples fischériens*, Thèse, Université de Picardie, 1985.