

BULLETIN DE LA S. M. F.

ARNAUD BEAUVILLE

Fibrés de rang deux sur une courbe, fibré déterminant et fonctions thêta. II

Bulletin de la S. M. F., tome 119, n° 3 (1991), p. 259-291

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1991__119_3_259_0

© Bulletin de la S. M. F., 1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**FIBRÉS DE RANG DEUX SUR UNE COURBE,
FIBRÉ DÉTERMINANT ET
FONCTIONS THÊTA, II**

PAR

ARNAUD BEAUVILLE (*)

RÉSUMÉ. — Soit \mathcal{M}_d l'espace des modules des fibrés semi-stables de rang 2, de degré d et de déterminant fixé sur une courbe C . Le groupe de Picard de \mathcal{M}_d est engendré par le fibré déterminant \mathcal{L} . Soit V l'espace des fonctions thêta du second ordre sur la jacobienne de C ; l'espace $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L})$ s'identifie à V . Nous définissons des homomorphismes $S^2V \rightarrow H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ et $\Lambda^2V \rightarrow H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$, qui sont bijectifs lorsque C n'admet pas de thêta-caractéristique spéciale. Nous construisons à l'aide des thêta-caractéristiques de C des bases de $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ et $H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$, et calculons les homomorphismes ci-dessus dans ces bases.

ABSTRACT. — Let \mathcal{M}_d be the moduli space of semi-stable vector bundles of rank 2, degree d and fixed determinant on a curve C . The Picard group of \mathcal{M}_d is generated by the determinant bundle \mathcal{L} . Let V be the space of second order theta functions on the Jacobian of C ; the space $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L})$ is canonically isomorphic to V . We define homomorphisms $S^2V \rightarrow H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ and $\Lambda^2V \rightarrow H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$, which are bijective when C has no special theta-characteristic. We construct bases for $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ and $H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$ in terms of the theta-characteristics of C , and compute the above homomorphisms using these bases.

Introduction

Soit C une surface de Riemann compacte de genre g . On associe à C , pour chaque paire d'entiers (r, d) avec $r \geq 1$, une variété projective $\mathcal{M}_{r,d}$ qui paramètre les fibrés holomorphes semi-stables sur C , de rang r et de degré d , de déterminant fixé (la notation officielle est $SU_C(r, d)$). Une construction naturelle de fibré déterminant permet de définir sur cette variété un fibré en droites positif \mathcal{L} ; tout fibré en droites sur $\mathcal{M}_{r,d}$ est un multiple de \mathcal{L} [D–N].

(*) Texte reçu le 17 octobre 1990, révisé le 4 mars 1991.
A. BEAUVILLE, Université de Paris-Sud, Mathématique, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex, France.

Les espaces de sections $H^0(\mathcal{M}_{r,d}, \mathcal{L}^k)$ ont reçu récemment une attention considérable de la part des physiciens, en liaison avec la théorie conforme des champs et les polynômes de Jones [W]. Dans le cas $d = 0$, une formule remarquable pour leur dimension a été proposée par E. VERLINDE [V]; je n'arrive pas à savoir s'il en existe une démonstration mathématique. Elle est étendue dans [T] au cas $r = 2, d = 1$.

Dans cet article, nous continuons l'étude entreprise dans [B] de ces espaces dans des cas très particuliers ($r = 2, k = 1$ ou 2), du point de vue de la géométrie des espaces de modules. Nous nous bornons désormais au cas des fibrés de rang 2; nous omettrons l'indice r dans la notation. L'espace \mathcal{M}_d est isomorphe à \mathcal{M}_0 si d est pair, à \mathcal{M}_1 si d est impair.

On a mis en évidence dans [B] un isomorphisme canonique (à un scalaire près) de $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L})$ sur l'espace V des fonctions thêta du second ordre sur la jacobienne de C . Nous considérons ici les espaces $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ et $H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$. On a

$$\dim H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2) = 2^{g-1}(2^g + 1) \quad \text{et}$$

$$\dim H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L}) = 2^{g-1}(2^g - 1).$$

La première égalité est un cas particulier de la formule générale de Verlinde; une démonstration rigoureuse en a été annoncée par A. BERTRAM. La seconde est démontrée dans [L]. Le but de cet article est d'expliquer les égalités

$$\begin{aligned} 2^{g-1}(2^g + 1) &= \text{nombre de thêta-caractéristiques paires de } C \\ &= \dim S^2V, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2^{g-1}(2^g - 1) &= \text{nombre de thêta-caractéristiques impaires de } C \\ &= \dim \Lambda^2V. \end{aligned}$$

On associe d'abord à une thêta-caractéristique κ paire (resp. impaire) un diviseur D_κ sur \mathcal{M}_0 (resp. \mathcal{M}_1), formé des fibrés E tels qu'il existe une flèche non nulle $E \rightarrow E \otimes \kappa$ de trace nulle. On montre (§ 1) que D_κ est le diviseur des zéros d'une section d_κ de $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ (resp. $H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$), et que ces sections forment une base de $H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$ dans le cas impair, et de $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ dans le cas pair.

On construit ensuite des homomorphismes

$$\varphi_0^* : S^2V \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2), \quad \varphi_p^* : \Lambda^2V \longrightarrow H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$$

(le second dépend du choix d'un point p de C). Ces flèches sont des isomorphismes, sauf dans des cas spéciaux liés à l'annulation en 0 de

fonctions thêta ou de leurs dérivées. Elles font correspondre la base (d_κ) de $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}^2)$ (resp. de $H^0(\mathcal{M}_1, \mathcal{L})$) à la base naturelle (ξ_κ) de S^2V (resp. Λ^2V) formée de vecteurs propres sous l'action du groupe de Heisenberg.

Cette étude fait appel à des propriétés relativement fines de la variété de Kummer de C , qui se plonge naturellement dans \mathcal{M}_0 mais aussi, après désingularisation, dans \mathcal{M}_1 (§ 3). Ces propriétés sont établies dans l'Appendice. On y résume aussi quelques applications de la théorie de Mumford, telles que la décomposition de S^2V et Λ^2V sous l'action du groupe de Heisenberg : ces résultats sont bien connus, mais je n'ai pas trouvé de référence adéquate.

Certains des résultats exposés ici sont assez anciens ; ceux qui concernent le cas impair doivent beaucoup à des conversations avec M.S. NARASIMHAN et S. RAMANAN. C'est une discussion avec N. HITCHIN qui m'a incité à rassembler ces idées un peu éparses ; je veux le remercier de l'intérêt qu'il a manifesté pour ces remarques.

0. Notations et rappels

0.1. — On considère dans cet article une courbe C projective et lisse sur \mathbb{C} , de genre $g \geq 2$; on note J sa jacobienne. Si F est un fibré sur C , on note parfois $h^0(C, F)$, ou simplement $h^0(F)$, la dimension de l'espace vectoriel $H^0(C, F)$.

Pour $\lambda \in \text{Pic}(C)$, on désigne par \mathcal{M}_λ l'espace des modules des fibrés semi-stables sur C , de rang 2 et de déterminant λ . C'est une variété projective, dont le groupe de Picard est isomorphe à \mathbb{Z} (cf. [B]) ; on note \mathcal{L}_λ le générateur ample de $\text{Pic}(\mathcal{M}_\lambda)$. On écrira simplement \mathcal{M}_0 , \mathcal{L}_0 lorsque $\lambda = \mathcal{O}_C$, et \mathcal{M}_p , \mathcal{L}_p lorsque $\lambda = \mathcal{O}_C(p)$ ($p \in C$).

0.2. — Rappelons la définition de \mathcal{L}_λ lorsque $\text{deg}(\lambda)$ est pair (*loc. cit.*). Soit N un fibré en droites sur C , de degré $g - 1 - \frac{1}{2} \text{deg}(\lambda)$; soit Δ_N la sous-variété réduite de \mathcal{M}_λ formée des classes de fibrés E pour lesquels $H^0(C, E \otimes N)$ n'est pas nul. Alors Δ_N est un diviseur de Cartier dans \mathcal{M}_λ et l'on a $\mathcal{L}_\lambda \cong \mathcal{O}(\Delta_N)$.

0.3. — Une propriété importante du faisceau \mathcal{L}_λ est liée à la notion de fibré déterminant, que nous allons rappeler dans ce contexte.¹ Soient S une variété intègre et \mathcal{F} un fibré sur $C \times S$. Notons r et q les projections de $C \times S$ sur C et S respectivement. Le *fibré déterminant* $\det Rq_*(\mathcal{F})$

¹ Contrairement à [B], j'ai adopté ici les conventions de [K-M], qui sont parfaitement naturelles mais conduisent hélas dans notre situation à des signes désagréables.

est défini de la manière suivante [K-M] : $Rq_*(\mathcal{F})$ est représenté dans la catégorie dérivée $D(S)$ par un complexe de fibrés

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{u} F \rightarrow 0;$$

on note $\det Rq_*(\mathcal{F})$ le fibré en droites $\det(E) \otimes \det(F)^{-1}$. Il ne dépend pas du choix du complexe représentant $Rq_*(\mathcal{F})$.

Supposons de plus que u soit un isomorphisme au point générique de S : ce sera le cas si la restriction \mathcal{F}_s de \mathcal{F} à $C \times \{s\}$, pour s général dans S , satisfait à $h^0(\mathcal{F}_s) = h^1(\mathcal{F}_s) = 0$. Alors $\det u$ est une section non nulle de $(\det Rq_*(\mathcal{F}))^{-1}$; son diviseur est noté $-\operatorname{div} Rq_*(\mathcal{F})$. Son support est l'ensemble des points s de S tels que $h^0(\mathcal{F}_s) \geq 1$; sa multiplicité en un point s de S est toujours au moins égale à $h^0(\mathcal{F}_s)$.

0.4. — Soit maintenant h un morphisme de S dans \mathcal{M}_λ , et \mathcal{E} un fibré de rang 2 sur $C \times S$, possédant la propriété suivante : pour tout point s de S , le fibré \mathcal{E}_s est semi-stable de déterminant λ et sa classe dans \mathcal{M}_λ est égale à $h(s)$ (nous dirons, pour abrégé, que \mathcal{E} est un *fibré de Poincaré* sur $C \times S$ relativement à h). Avec les notations de (0.2), le faisceau $h^*\mathcal{L}_\lambda$ est alors isomorphe à l'inverse du fibré déterminant $\det Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^*N)$. Si le diviseur Δ_N ne contient pas $h(S)$, son image réciproque par h est le diviseur $-\operatorname{div} Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^*N)$. On a $\operatorname{mult}_s(h^*\Delta_N) \geq h^0(\mathcal{E}_s \otimes N)$ pour tout $s \in S$.

0.5. — Les conventions pour les espaces et fibrés projectifs sont celles des EGA : si V est un espace vectoriel, la notation $\mathbb{P}(V)$ désigne l'espace des hyperplans de V ; si E est un fibré vectoriel sur une variété S , on note $\mathbb{P}(E)$ le fibré projectif dont la fibre en un point s de S est $\mathbb{P}(E_s)$.

1. Diviseur associé à une thêta-caractéristique

Pour tout fibré E sur C , nous noterons $\mathcal{E}nd_0(E)$ le sous-fibré de $\mathcal{E}nd(E)$ formé des endomorphismes de trace nulle. Conformément à l'Appendice (A.2), nous appellerons *thêta-caractéristique* de C un fibré en droites κ sur C tel que $\kappa^{\otimes 2} \cong K_C$.

LEMME 1.1.

a) Soit E un fibré de rang 2 sur C , et soit κ une thêta-caractéristique de C . On a

$$\dim H^0(C, \mathcal{E}nd_0(E) \otimes \kappa) \equiv \deg(E) + h^0(\kappa) \pmod{2}.$$

b) Si F est un autre fibré de rang 2 sur C , de même déterminant que E , on a

$$\dim \operatorname{Hom}(E, F \otimes \kappa) \equiv \deg(E) \pmod{2}.$$

Comme $\text{Hom}(E, E \otimes \kappa)$ est somme directe de $H^0(C, \mathcal{E}nd_0(E) \otimes \kappa)$ et de $H^0(C, \kappa)$, l'assertion a) résulte de b).

Prouvons b). L'application $u \mapsto \Lambda^2 u$

$$\text{Hom}(E, F \otimes \kappa) \longrightarrow \text{Hom}(\Lambda^2 E, \Lambda^2(F \otimes \kappa)) \cong K_C$$

est une forme quadratique séparante sur le faisceau $\text{Hom}(E, F \otimes \kappa)$, à valeurs dans K_C . D'après [M2], la dimension (mod 2) de $\text{Hom}(E, F \otimes \kappa)$ est alors invariante par déformations de E et de F . Il suffit donc de démontrer b) lorsque E et F sont de la forme $L \oplus M$, avec L et M dans $\text{Pic}(C)$. On a alors

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}(E, F \otimes \kappa) &= 2h^0(\kappa) + h^0(\kappa \otimes L \otimes M^{-1}) + h^0(\kappa \otimes L^{-1} \otimes M) \\ &\equiv \chi(\kappa \otimes L \otimes M^{-1}) \pmod{2} \\ &\equiv \deg(E) \pmod{2}. \quad \square \end{aligned}$$

1.2. — Soit κ une thêta-caractéristique de C . Nous désignerons par $D_\kappa^{(\lambda)}$ la sous-variété réduite de \mathcal{M}_λ formée des classes de fibrés E pour lesquels $H^0(C, \mathcal{E}nd_0(E) \otimes \kappa)$ n'est pas nul; s'il n'y a pas d'ambiguïté sur λ nous la noterons simplement D_κ . En vertu du LEMME 1.1, elle est égale à l'espace \mathcal{M}_λ tout entier lorsque $h^0(\kappa)$ et $\deg(\lambda)$ n'ont pas la même parité. Nous ne considérerons donc les variétés $D_\kappa^{(\lambda)} \subset \mathcal{M}_\lambda$ que lorsque $h^0(\kappa) \equiv \deg(\lambda) \pmod{2}$.

Le but de ce paragraphe est d'établir le résultat suivant.

THÉORÈME 1.2. — *Soient λ un élément de $\text{Pic}(C)$ et κ une thêta-caractéristique de C . Notons \mathcal{F}_λ le faisceau \mathcal{L}_λ^2 si $\deg(\lambda)$ est pair, \mathcal{L}_λ si $\deg(\lambda)$ est impair. Il existe une section non nulle d_κ de $H^0(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$ telle que D_κ soit le diviseur des zéros de d_κ . Lorsque κ parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques telles que $h^0(\kappa) \equiv \deg(\lambda) \pmod{2}$, les sections d_κ forment une base de $H^0(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$.*

Le fibré \mathcal{F}_λ est l'unique élément de $\text{Pic}(\mathcal{M}_\lambda)$ tel que \mathcal{F}_λ^{-2} soit isomorphe au fibré canonique de \mathcal{M}_λ (cf. par exemple [D-N]); c'est d'ailleurs sous cette forme qu'il apparaît dans la démonstration.

1.3. — La clé de celle-ci est de considérer les images réciproques des sous-variétés D_κ sur certaines variétés abéliennes associées à C . Soit $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ un revêtement étale double (connexe) de C . Il lui correspond un fibré en droites η sur C tel que $\eta^2 \cong \mathcal{O}_C$. On notera σ l'involution de \tilde{C} qui échange les deux feuillets du revêtement.

LEMME 1.3. — Soit M un fibré en droites sur \tilde{C} , et soit κ une thêta-caractéristique sur C .

- a) Si $h^0(C, \kappa \otimes \eta) \neq 0$, l'espace $H^0(C, \text{End}_0(\pi_* M) \otimes \kappa)$ n'est pas nul.
- b) Si $h^0(C, \kappa \otimes \eta) = 0$, il existe un isomorphisme canonique

$$H^0(C, \text{End}_0(\pi_* M) \otimes \kappa) \xrightarrow{\sim} H^0(\tilde{C}, M \otimes \sigma^* M^{-1} \otimes \pi^* \kappa).$$

Considérons l'isomorphisme canonique

$$\text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\pi_* M, \pi_* M) \longrightarrow \pi_* \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\pi^* \pi_* M, M).$$

Le déterminant de $\pi_* M$ est isomorphe à $\text{Nm}(M) \otimes \eta$, donc celui de $\pi^* \pi_* M$ à $M \otimes \sigma^* M$. Par suite le noyau de l'homomorphisme canonique $\pi^* \pi_* M \rightarrow M$ est isomorphe à $\sigma^* M$. On en déduit une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\tilde{C}} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{O}_C}(\pi^* \pi_* M, M) \rightarrow M \otimes \sigma^* M^{-1} \rightarrow 0,$$

d'où, par application de π_* et produit tensoriel avec κ ,

$$(1.4) \quad 0 \rightarrow \eta \otimes \kappa \rightarrow \text{End}_0(\pi_* M) \otimes \kappa \rightarrow \pi_*(M \otimes \sigma^* M^{-1} \otimes \pi^* \kappa) \rightarrow 0.$$

Le lemme en résulte aussitôt. \square

1.5. — La variété de Prym $P = \text{Prym}(\tilde{C}, C)$ est l'image de l'endomorphisme $1 - \sigma^*$ de $J(\tilde{C})$. La polarisation principale de $J(\tilde{C})$ induit sur P le double d'une polarisation principale. Plus précisément, soit N un fibré en droites sur \tilde{C} tel qu'on ait $\text{Nm}(N) = K_C$ et que $h^0(N)$ soit pair; le diviseur Θ_N sur $J(\tilde{C})$ formé des fibrés L tels que $H^0(\tilde{C}, L \otimes N) \neq 0$ induit sur P le double d'un diviseur réduit Ξ_N , et celui-ci définit la polarisation principale de P .

Soit $\lambda \in \text{Pic}(C)$; choisissons un élément $\tilde{\lambda}$ de $\text{Pic}(\tilde{C})$ tel que $\text{Nm} \tilde{\lambda} = \lambda \otimes \eta$. Pour tout élément L de P , l'image directe $\pi_*(L \otimes \tilde{\lambda})$ est un fibré de rang 2 sur C , de déterminant λ ; on vérifie comme dans [B, lemme 1.2] qu'il est semi-stable. L'application $L \mapsto \pi_*(L \otimes \tilde{\lambda})$ définit donc un morphisme h de P dans \mathcal{M}_λ .

LEMME 1.5. — Supposons $h^0(\kappa) \equiv \text{deg}(\lambda) \pmod{2}$.

- a) Si $h^0(C, \kappa \otimes \eta) \neq 0$, le diviseur D_κ de \mathcal{M}_λ contient $h(P)$.
- b) Si $h^0(C, \kappa \otimes \eta) = 0$, le faisceau $N = \tilde{\lambda} \otimes \sigma^* \tilde{\lambda}^{-1} \otimes \pi^* \kappa$ satisfait à $\text{Nm}(N) = K_C$ et $h^0(N) \equiv 0 \pmod{2}$; on a (ensemblistement) $h^{-1}(D_\kappa) = 2_P^{-1}(\Xi_N)$.
- c) La sous-variété D_κ est distincte de \mathcal{M}_λ .

L'assertion a) résulte du LEMME 1.3 a).

Si M et R sont deux fibrés en droites sur \tilde{C} , avec $\text{Nm}(R) = K_C$, on déduit de [M2] la relation $h^0(M \otimes \sigma^* M^{-1} \otimes R) \equiv h^0(R) + \text{deg}(M) \pmod{2}$. Sous l'hypothèse b), on a $h^0(\pi^* \kappa) = h^0(\kappa)$, d'où

$$h^0(N) \equiv h^0(\pi^* \kappa) + \text{deg}(\lambda) \equiv 0 \pmod{2}.$$

Pour tout $L \in P$, le LEMME 1.3 fournit un isomorphisme canonique

$$H^0(C, \mathcal{E}nd_0(\pi_*(L \otimes \tilde{\lambda})) \otimes \kappa) \xrightarrow{\sim} H^0(\tilde{C}, L^2 \otimes N).$$

L'assertion b) en résulte.

La thêta-caractéristique κ étant donnée, on peut trouver $\eta \in J_2$ tel que $h^0(\kappa \otimes \eta) = 0$; choisissant $\tilde{\lambda}$ comme ci-dessus, on déduit alors de b) que D_κ est distincte de \mathcal{M}_λ . \square

1.6. — Notons r et q les projections de $C \times \mathcal{M}_\lambda$ sur C et \mathcal{M}_λ respectivement. Il n'existe pas nécessairement de fibré de Poincaré sur $C \times \mathcal{M}_\lambda$, mais il est bien connu qu'il existe toujours un fibré $\mathcal{E}nd_0$ sur $C \times \mathcal{M}_\lambda$ possédant la propriété universelle suivante : étant donné une variété S , un morphisme $h : S \rightarrow \mathcal{M}_\lambda$ et un fibré de Poincaré \mathcal{E} sur $C \times S$ relativement à h , le fibré $(1_C, h)^* \mathcal{E}nd_0$ est isomorphe à $\mathcal{E}nd_0(\mathcal{E})$ (cela résulte par exemple du lemme de descente 2.3 de [D-N]). Notons D'_κ le diviseur $-\text{div } Rq_*(\mathcal{E}nd_0 \otimes r^* \kappa)$ (0.3). On a par construction $D_\kappa = (D'_\kappa)_{\text{red}}$, de sorte que D_κ et D'_κ sont des diviseurs de \mathcal{M}_λ .

LEMME 1.6. — Avec les notations de (1.5), on a $h^* D'_\kappa = 2^*_P(2\Xi_N)$.

Choisissons un faisceau de Poincaré \mathcal{L} sur $\tilde{C} \times P$, normalisé de façon que $\text{Nm}(\mathcal{L}) = \mathcal{O}_{C \times P}$. Notons r et q les projections de $C \times P$ sur C et P respectivement, \tilde{r} et \tilde{q} celles de $\tilde{C} \times P$ sur \tilde{C} et P , et π' le morphisme $(\pi, 1_P) : \tilde{C} \times P \rightarrow C \times P$. Le fibré $\mathcal{E} = \pi'_*(\mathcal{L} \otimes \tilde{r}^* \tilde{\lambda})$ sur $C \times P$ est un fibré de Poincaré relativement à h ; on déduit de la suite exacte (1.4) une suite exacte

$$0 \rightarrow r^*(\eta \otimes \kappa) \rightarrow \mathcal{E}nd_0(\mathcal{E}) \otimes r^* \kappa \rightarrow \pi'_*(\mathcal{L}^2 \otimes \tilde{r}^* N) \rightarrow 0,$$

d'où un isomorphisme $Rq_*(\mathcal{E}nd_0(\mathcal{E}) \otimes r^* \kappa) \rightarrow R\tilde{q}_*(\mathcal{L}^2 \otimes \tilde{r}^* N)$.

L'égalité des diviseurs déterminants associés entraîne le lemme. \square

LEMME 1.7. — On a $D'_\kappa = 2D_\kappa$, $D_\kappa \in |\mathcal{F}_\lambda|$ et $h^* D_\kappa = 2^*_P \Xi_N$.

Un calcul facile, basé sur le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch et sur l'égalité $c_1(\mathcal{E}nd_0) = 0$, montre que l'élément $\det Rq_*(\mathcal{E}nd_0 \otimes r^* N)$

de $\text{Pic}(\mathcal{M}_\lambda)$ est *indépendant de* $N \in \text{Pic}(C)$. Prenons $N = \mathcal{O}_C$: le faisceau $q_*(\mathcal{E}nd_0)$ est nul, tandis que $R^1q_*(\mathcal{E}nd_0)$ s'identifie au fibré tangent $T_{\mathcal{M}_\lambda}$ (cf. [B, proposition 3.3]). Ainsi $\mathcal{O}(D'_\kappa)$ est isomorphe au fibré anti-canonique $K_{\mathcal{M}_\lambda}^{-1}$; autrement dit, on a $D'_\kappa \in |\mathcal{F}_\lambda^2|$.

Puisque $h^0(C, \mathcal{E}nd_0(E) \otimes \kappa)$ est pair pour tout fibré E de \mathcal{M}_λ (LEMME 1.1.a)), les composantes de D'_κ apparaissent toutes avec une multiplicité ≥ 2 (0.4). Si $\text{deg}(\lambda)$ est impair, la relation $D'_\kappa \in |\mathcal{L}_\lambda^2|$ implique donc $D'_\kappa = 2D_\kappa$ et $D_\kappa \in |\mathcal{L}_\lambda|$. Si $\text{deg}(\lambda)$ est pair, la relation $D'_\kappa \in |\mathcal{L}_\lambda^4|$ implique ou bien $D'_\kappa = 2D_\kappa$ et $D_\kappa \in |\mathcal{L}_\lambda^2|$, ou bien $D'_\kappa = 4D_\kappa$ et $D_\kappa \in |\mathcal{L}_\lambda|$; mais le LEMME 1.6 montre que D'_κ est le double d'un diviseur réduit, ce qui exclut la seconde possibilité. La dernière formule résulte alors du LEMME 1.6. \square

1.8. — Nous avons donc démontré la première partie du théorème ; comme la dimension de l'espace $H^0(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$ est égale au nombre des thêta-caractéristiques de même parité que $\text{deg}(\lambda)$, il suffit maintenant de prouver que les sections d_λ sont linéairement indépendantes. Considérons une relation linéaire $\sum a_\kappa d_\kappa = 0$ dans $H^0(\mathcal{M}_\lambda, \mathcal{F}_\lambda)$, où κ parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques de même parité que $\text{deg}(\lambda)$. Fixons un revêtement $\pi : \tilde{C} \rightarrow C$ et un faisceau inversible $\tilde{\lambda}$ sur \tilde{C} comme ci-dessus.

Supposons d'abord $\text{deg}(\lambda)$ impair. Notons ϑ_η^- l'ensemble des thêta-caractéristiques impaires telles que $h^0(\kappa \otimes \eta) = 0$. L'application

$$\kappa \mapsto N_\kappa = \tilde{\lambda} \otimes \sigma^* \tilde{\lambda}^{-1} \otimes \pi^* \kappa,$$

restreinte à ϑ_η^- , est injective. Par suite, les diviseurs Ξ_{N_κ} correspondant à deux éléments distincts de ϑ_η^- sont distincts, et ils diffèrent par une translation par un point d'ordre 2 de P . Les diviseurs $2_P^* \Xi_{N_\kappa}$, pour $\kappa \in \vartheta_\eta^-$, sont alors linéairement indépendants (PROPOSITION A.8). Il résulte donc du LEMME 1.7 qu'on a $a_\kappa = 0$ pour tout $\kappa \in \vartheta_\eta^-$. Il suffit pour conclure d'observer qu'étant données une thêta-caractéristique impaire κ et une thêta-caractéristique κ' telle que $h^0(\kappa') = 0$, le fibré en droites $\eta = \kappa' \otimes \kappa^{-1}$ satisfait à $\kappa \in \vartheta_\eta^-$.

Si $\text{deg}(\lambda)$ est pair, le raisonnement précédent permet seulement de conclure qu'on a $a_\kappa h^* d_\kappa + a_{\kappa \otimes \eta} h^* d_{\kappa \otimes \eta} = 0$ pour toute thêta-caractéristique paire κ telle que $h^0(\kappa \otimes \eta) = 0$. Mais si en outre $h^0(\kappa) \geq 2$, on a $h^* d_{\kappa \otimes \eta} = 0$ et $h^* d_\kappa \neq 0$ d'après (1.5), d'où $a_\kappa = 0$. On en déduit comme ci-dessus que a_κ est nul pour toute thêta-caractéristique paire κ vérifiant $h^0(\kappa) \geq 2$.

1.9. — Il reste à traiter le cas $h^0(\kappa) = 0$. On peut supposer $\lambda = \mathcal{O}_C$ (cf. remarque 1.11 ci-dessous). Toute thêta-caractéristique κ sur C définit

un diviseur thêta Θ_κ sur la jacobienne J de C (A.2). Soit i le morphisme de J dans \mathcal{M}_0 qui associe à L la classe du fibré semi-stable $L \oplus L^{-1}$.

LEMME 1.9. — Soit κ une thêta-caractéristique paire. Si $h^0(\kappa) = 0$, on a $i^*D_\kappa = 2_J^* \Theta_\kappa$; si $h^0(\kappa) \neq 0$, le diviseur D_κ contient $i(J)$.

On a $\text{End}_0(L \oplus L^{-1}) = \mathcal{O}_C \oplus L^2 \oplus L^{-2}$ et par conséquent

$$i(L) \in D_\kappa \iff h^0(\kappa \otimes L^2) + h^0(\kappa \otimes L^{-2}) + h^0(\kappa) \geq 1.$$

Cette inégalité est toujours vérifiée si $h^0(\kappa) \neq 0$; dans le cas contraire elle équivaut à $L^2 \in \Theta_\kappa$, c'est-à-dire $L \in 2_J^* \Theta_\kappa$. Comme les diviseurs i^*D_κ et $2_J^* \Theta_\kappa$ appartiennent tous deux au système linéaire $|4\Theta_\kappa|$ (cf. LEMME 1.7 et [B]), on en déduit le lemme. \square

1.10. — Comme les diviseurs $2_J^* \Theta_\kappa$ sont linéairement indépendants (PROPOSITION A.8), le LEMME 1.9 entraîne $a_\kappa = 0$ pour toute thêta-caractéristique κ avec $h^0(\kappa) = 0$; cela achève la démonstration du théorème. \square

1.11 Remarque. — Soient λ, μ, ν trois éléments de $\text{Pic}(C)$ tels que $\mu = \lambda \otimes \nu^2$. L'application $E \mapsto E \otimes \nu$ définit un isomorphisme $u : \mathcal{M}_\lambda \rightarrow \mathcal{M}_\mu$. Pour toute thêta-caractéristique κ de C , on a alors $u^*D_\kappa^{(\mu)} = D_\kappa^{(\lambda)}$. Il suffit en effet (compte tenu du THÉORÈME 1.2) de vérifier l'égalité ensembliste, et celle-ci résulte directement de la définition.

2. L'espace $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0^2)$

Dans ce paragraphe et le suivant, nous utilisons pour la jacobienne J de C les résultats et notations de l'Appendice; en particulier, \mathcal{L}_J désigne le faisceau $\mathcal{O}_J(2\Theta)$, où Θ est un diviseur thêta symétrique quelconque sur J , et V l'espace $H^0(J, \mathcal{L}_J)$. Rappelons d'autre part qu'on note \mathcal{M}_0 l'espace des modules des fibrés semi-stables sur C , de rang 2 et de déterminant trivial, et \mathcal{L}_0 le générateur ample de $\text{Pic}(\mathcal{M}_0)$.

2.1. — Commençons par rappeler les résultats de [B] dont nous aurons besoin. Soit i le morphisme de J dans \mathcal{M}_0 qui associe à un fibré en droites L la classe du fibré $L \oplus L^{-1}$ (1.10). Il définit par passage au quotient un plongement de la variété de Kummer \mathcal{K} de J dans \mathcal{M}_0 . Le faisceau $i^*\mathcal{L}_0$ sur J est isomorphe à \mathcal{L}_J , et l'homomorphisme de restriction $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0) \rightarrow H^0(J, \mathcal{L}_J) = V$ est *bijectif*. Le système linéaire $|\mathcal{L}_0|$ définit donc un morphisme $\varphi_0 : \mathcal{M}_0 \rightarrow \mathbb{P}(V)$.

Soit κ une thêta-caractéristique de C . Pour tout fibré E de \mathcal{M}_0 , le diviseur

$$\delta_\kappa(E) = \{L \in J \mid H^0(C, E \otimes \kappa \otimes L) \neq 0\}$$

appartient au système linéaire $|\mathcal{L}_J|$; on définit ainsi un morphisme $\delta_\kappa : \mathcal{M}_0 \rightarrow |\mathcal{L}_J| = \mathbb{P}(V^*)$.

D'autre part on associe à κ un élément ξ_κ de $V \otimes V$, qui définit un isomorphisme $\hat{\xi}_\kappa : V^* \rightarrow V$ (A.5 et A.6). Le diagramme

$$(2.2) \quad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{P}(V) \\ & \nearrow \varphi_0 & \downarrow \hat{\xi}_\kappa \\ \mathcal{M}_0 & & \\ & \searrow \delta_\kappa & \downarrow \\ & & \mathbb{P}(V^*) \end{array}$$

est commutatif; il induit par restriction à J le diagramme (6) de l'Appendice.

Soit E un fibré de \mathcal{M}_0 ; soit $\Delta_\kappa(E)$ la sous-variété réduite de \mathcal{M}_0 définie par

$$\Delta_\kappa(E) = \{G \in \mathcal{M}_0 \mid h^0(C, E \otimes \kappa \otimes G) \geq 1\}.$$

LEMME 2.3. — $\Delta_\kappa(E)$ est un diviseur du système linéaire $|\mathcal{L}_0|$; son image réciproque $i^* \Delta_\kappa(E)$ sur J est égale à $\delta_\kappa(E)$.

Prouvons la première assertion. En remplaçant \mathcal{M}_0 par un revêtement convenable, on peut supposer qu'il existe un fibré de Poincaré \mathcal{E} sur $C \times \mathcal{M}_0$. Notons r et q les projections de $C \times \mathcal{M}_0$ sur C et \mathcal{M}_0 . La sous-variété $\Delta_\kappa(E)$ coïncide ensemblistement avec le diviseur déterminant $\Delta'_\kappa(E) := -\text{div } Rq_* (\mathcal{E} \otimes r^*(E \otimes \kappa))$. Le théorème de Riemann-Roch entraîne que le fibré $\mathcal{O}(\Delta'_\kappa(E))$ est indépendant de l'élément E de \mathcal{M}_0 ; il est donc isomorphe à $(\det Rq_* (\mathcal{E} \otimes \kappa))^{-2} \cong \mathcal{L}_0^2$. Pour tout fibré G de \mathcal{M}_0 , le nombre $h^0(C, G \otimes E \otimes \kappa)$, égal à $\dim \text{Hom}(G, E \otimes \kappa)$, est pair en vertu du LEMME 1.1.b); par suite toutes les composantes de $\Delta'_\kappa(E)$ apparaissent avec une multiplicité ≥ 2 (0.4). Ceci implique $\Delta'_\kappa(E) = 2\Delta_\kappa(E)$ et $\Delta_\kappa(E) \in |\mathcal{L}_0|$.

Il suffit dès lors de prouver la seconde assertion ensemblistement. Soit $L \in J$; pour que le fibré $L \oplus L^{-1}$ appartienne à $\Delta_\kappa(E)$, il faut et il suffit que l'un des deux espaces $H^0(C, E \otimes \kappa \otimes L)$ ou $H^0(C, E \otimes \kappa \otimes L^{-1})$ ne soit pas nul. Comme ces deux espaces ont même dimension, cela équivaut à $H^0(C, E \otimes \kappa \otimes L) \neq 0$, c'est-à-dire $L \in \delta_\kappa(E)$. \square

Le LEMME 2.3 assure que le diagramme suivant est commutatif :

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{P}(V) \\ & \nearrow \varphi_0 & \downarrow \hat{\xi}_\kappa \\ \mathcal{M}_0 & & \\ & \searrow \Delta_\kappa & \mathbb{P}(V^*). \end{array}$$

Considérons le diagramme

$$(2.5) \quad \begin{array}{ccc} S^2V & \xrightarrow{\varphi_0^*} & H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0^2) \\ & \searrow \mu & \downarrow i^* \\ & & H^0(J, \mathcal{L}_J^2) \end{array}$$

où $\mu : S^2H^0(J, \mathcal{L}_J) \rightarrow H^0(J, \mathcal{L}_J^2)$ est l'homomorphisme de multiplication. On a $\mu(\xi_\kappa) = 0$ si $h^0(\kappa) \geq 2$, et $\mu(\xi_\kappa) = \theta_\kappa(2 \cdot)$ à un scalaire non nul près si $h^0(\kappa) = 0$ (A.9).

PROPOSITION 2.6.

a) Soit κ une thêta-caractéristique paire de C . A un scalaire non nul près, on a

$$\begin{aligned} \varphi_0^* \xi_\kappa = d_\kappa & \quad \text{et} \quad i^* d_\kappa = \theta_\kappa(2 \cdot) & \quad \text{si} \quad h^0(\kappa) = 0; \\ \varphi_0^* \xi_\kappa = 0 & \quad \text{et} \quad i^* d_\kappa = 0 & \quad \text{si} \quad h^0(\kappa) \geq 2. \end{aligned}$$

b) L'image de i^* est contenue dans $H^0(J, \mathcal{L}_J^2)^+$.

c) Les homomorphismes φ_0^* et μ ont le même noyau. Ils sont injectifs si et seulement si toutes les thêta-caractéristiques paires de C vérifient $h^0(\kappa) = 0$ (c'est-à-dire si aucune thêta-constante de C ne s'annule). Dans ce cas les homomorphismes $\varphi_0^* : S^2V \rightarrow H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0^2)$ et $i^* : H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0^2) \rightarrow H^0(J, \mathcal{L}_J^2)^+$ sont bijectifs.

Comme les sections d_κ forment une base de $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0^2)$ (THÉORÈME 1.2), la proposition décrit complètement les homomorphismes du

diagramme (2.5) : elle fournit en fait leurs matrices dans des bases appropriées.

Prouvons a). Identifions les espaces projectifs $|\mathcal{L}_0|$ et $\mathbb{P}(V^*)$ à l'aide de l'homomorphisme i^* . Considérons le diagramme (2.4); dire que la forme quadratique ξ_κ sur $\mathbb{P}(V)$ s'annule au point E de \mathcal{M}_0 signifie que $\varphi_0(E)$ est orthogonal à $\hat{\xi}(\varphi_0(E)) = \Delta_\kappa(E)$, autrement dit que E appartient à $\Delta_\kappa(E)$, c'est-à-dire que $H^0(C, \mathcal{E}nd(E) \otimes \kappa)$ n'est pas nul. Cette condition est toujours réalisée si $h^0(\kappa) \neq 0$; dans le cas contraire elle équivaut à $E \in D_\kappa$. Cela prouve la formule donnant $\varphi_0^* \xi_\kappa$; les assertions sur $i^* d_\kappa$ résultent du LEMME 1.9.

Puisque les sections d_κ forment une base de $H^0(\mathcal{M}_0, \mathcal{L}_0^2)$ (THÉORÈME 1.2), les assertions b) et c) résultent de a). \square

3. L'espace $H^0(\mathcal{M}_p, \mathcal{L}_p)$

Dans ce paragraphe, nous fixons un point p de C . Nous notons \mathcal{M}_p l'espace des modules des fibrés stables sur C de rang 2 et de déterminant $\mathcal{O}_C(p)$, et \mathcal{L}_p le générateur ample de $\text{Pic}(\mathcal{M}_p)$.

3.1. — Soit L un fibré en droites de degré 0 sur C . Notons \mathbb{C}_p le faisceau gratte-ciel de fibre \mathbb{C} au-dessus de p et 0 ailleurs. Choisissons un homomorphisme $v : L \oplus L^{-1} \rightarrow \mathbb{C}_p$ dont les restrictions à L et L^{-1} ne sont pas nulles; deux tels homomorphismes se déduisent l'un de l'autre par un automorphisme de $L \oplus L^{-1}$. Le fibré $\text{Ker } v$ est donc indépendant du choix de v ; notons F_L son dual. C'est un fibré de rang 2 sur C , de déterminant $\mathcal{O}_C(p)$, et l'on a une suite exacte

$$0 \rightarrow L \oplus L^{-1} \longrightarrow F_L \longrightarrow \mathbb{C}_p \rightarrow 0.$$

LEMME 3.2.

a) Si $L^2 \not\cong \mathcal{O}_C$, le fibré F_L est stable.

b) Choisissons un homomorphisme surjectif $K_C(p) \otimes L^2 \rightarrow \mathbb{C}_p$, d'où une forme linéaire $ev_L : H^0(C, K_C(p) \otimes L^2) \rightarrow \mathbb{C}$. Il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow L^{-1} \longrightarrow F_L \longrightarrow L(p) \rightarrow 0;$$

la classe d'extension de cette suite, vue par dualité de Serre comme élément de $H^0(C, K_C(p) \otimes L^2)^*$, est proportionnelle à ev_L .

Supposons que F_L admette un fibré en droites quotient M de degré ≤ 0 . Alors l'un des deux fibrés L ou L^{-1} s'injecte dans M , donc lui est égal. Supposons par exemple $M = L$; le fibré $F_L^* = \text{Ker } v$ contient alors L^{-1} . Or puisque $L^2 \not\cong \mathcal{O}_C$, le fibré $L \oplus L^{-1}$ contient un seul sous-fibré isomorphe à L^{-1} , sur lequel v ne s'annule pas. Cela prouve a) .

Comme F_L contient L^{-1} , on a une suite exacte

$$0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow F_L \rightarrow L(p) \rightarrow 0;$$

par construction, l'image réciproque de cette extension par la flèche $L \rightarrow L(p)$ est scindée, de sorte que la classe d'extension appartient au noyau de l'homomorphisme $H^1(C, L^{-2}(-p)) \rightarrow H^1(C, L^{-2})$. On en déduit b) par dualité. \square

La condition b) donne une autre définition du fibré F_L . On observera qu'elle entraîne que l'extension est triviale lorsque $L^2 \cong \mathcal{O}_C$: le fibré F_L est alors isomorphe à $L \oplus L(p)$.

Notons J_2 l'ensemble des points d'ordre 2 de J , et \widehat{J} la variété obtenue en éclatant J le long de J_2 . L'involution (-1_J) se prolonge à \widehat{J} , et le quotient de \widehat{J} par cette involution est la variété de Kummer éclatée $\widehat{\mathcal{K}}$.

PROPOSITION 3.3. — *L'application $L \mapsto [F_L]$ se prolonge en un morphisme $i_p : \widehat{J} \rightarrow \mathcal{M}_p$; celui-ci définit par passage au quotient un morphisme de $\widehat{\mathcal{K}}$ dans \mathcal{M}_p .*

Notons r et q les projections de $C \times J$ sur C et J respectivement. Soit \mathcal{L} un fibré de Poincaré sur $C \times J$, que l'on peut normaliser en imposant à sa restriction à $\{p\} \times J$ d'être triviale. Posons $\mathcal{E} = q_*(r^*K_C(p) \otimes \mathcal{L}^2)$; c'est un fibré vectoriel de rang g sur J , dont la fibre en un point $[L]$ de J s'identifie canoniquement à $H^0(C, K_C \otimes L^2(p))$. Le fibré projectif $\mathbb{P}_J(\mathcal{E})$ paramètre les classes d'isomorphisme d'extensions

$$0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow F \rightarrow L(p) \rightarrow 0,$$

avec $\text{deg}(L) = 0$. On vérifie comme ci-dessus que le fibré F qui apparaît dans cette extension est toujours stable, d'où un morphisme $\mathbb{P}_J(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{M}_p$.

De la suite exacte sur $C \times J$

$$0 \rightarrow r^*K_C \otimes \mathcal{L}^2 \rightarrow r^*K_C(p) \otimes \mathcal{L}^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\{p\} \times J} \rightarrow 0,$$

on déduit par application de Rq_* une suite exacte

$$\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{O}_J \rightarrow R^1q_*(r^*K_C \otimes \mathcal{L}^2) \rightarrow 0.$$

Le faisceau $R^1q_*(r^*K_C \otimes \mathcal{L}^2)$ est concentré sur le sous-ensemble J_2 des points d'ordre 2 de J ; de plus, en un point a de J_2 , il est annulé par l'idéal maximal (cela résulte de ce que le faisceau \mathcal{L}^2 ne reste trivial dans aucune direction tangente à J en a), et donc isomorphe à \mathbb{C}_a . Notons \mathfrak{m}_2 l'idéal

de J_2 dans J . On a donc défini un homomorphisme surjectif $ev : \mathcal{E} \rightarrow \mathfrak{m}_2$, qui en un point $[L]$ de $J - J_2$ coïncide (à un scalaire près) avec la flèche ev_L .

On en déduit un plongement du fibré projectif $\mathbb{P}_J(\mathfrak{m}_2)$ — qui n'est autre que \widehat{J} — dans $\mathbb{P}_J(\mathcal{E})$; l'image de ce plongement est formée des classes d'isomorphisme des extensions

$$0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow F_L \rightarrow L(p) \rightarrow 0$$

pour L dans $J - J_2$, et de toutes les extensions

$$0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow F \rightarrow L(p) \rightarrow 0$$

pour L dans J_2 . La restriction à \widehat{J} du morphisme $\mathbb{P}_J(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{M}_p$ est le morphisme i_p cherché. La dernière assertion résulte de l'isomorphisme $F_L \cong F_{L^{-1}}$. \square

3.4. — Soit F un élément de \mathcal{M}_p . Pour tout homomorphisme surjectif $u : F \rightarrow \mathbb{C}_p$, le fibré $\text{Ker } u$ est semi-stable, de déterminant trivial. On définit ainsi un morphisme h de la droite projective $\mathbb{P}(F_p)$ (qui paramètre l'ensemble des homomorphismes surjectifs de F dans \mathbb{C}_p , modulo multiplication par les scalaires) dans l'espace des modules \mathcal{M}_0 .

LEMME 3.4. — *L'image du morphisme composé*

$$\mathbb{P}(F_p) \xrightarrow{h} \mathcal{M}_0 \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{L}}} \mathbb{P}(V)$$

est une droite.

Il suffit de prouver que l'image réciproque par le morphisme $h : \mathbb{P}(F_p) \rightarrow \mathcal{M}_0$ du fibré \mathcal{L}_0 est isomorphe à $\mathcal{O}(1)$.

Posons pour alléger les notations $P = \mathbb{P}(F_p)$. Soient r et q les projections de $C \times P$ sur C et P respectivement, et soit $j_p : P \rightarrow C \times P$ le plongement $u \mapsto (p, u)$. Le fibré $j_p^* r^* F$ s'identifie à $F_p \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P$; on déduit donc de l'application canonique $F_p \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_P \rightarrow \mathcal{O}_P(1)$ un homomorphisme surjectif $r^* F \rightarrow (j_p)_* \mathcal{O}_P(1)$. Soit \mathcal{E} le noyau de cet homomorphisme; c'est un fibré de Poincaré sur $C \times P$ relativement à h (0.4).

Soit N un fibré en droites de degré $(g - 1)$ sur C ; on a $h^* \mathcal{L}_0 = (\det Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^* N))^{-1}$ (0.4). De la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{E} \otimes r^* N \rightarrow r^*(F \otimes N) \rightarrow (j_p)^* \mathcal{O}_P(1) \rightarrow 0,$$

on déduit un isomorphisme $\det Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^* N) \cong \mathcal{O}_P(-1)$, d'où le lemme. \square

On associe ainsi à tout élément F de \mathcal{M}_p une droite ℓ_F de $\mathbb{P}(V)$. L'application $F \mapsto \ell_F$ définit un morphisme de \mathcal{M}_p dans la grassmannienne $\mathbb{G}(2, V)$ qui paramètre les droites de $\mathbb{P}(V)$ (et donc les quotients de dimension 2 de V). A l'aide du plongement de Plücker, on en déduit un morphisme $\varphi_p : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.

THÉORÈME 3.5. — *Le morphisme $\varphi_p \circ i_p : \widehat{J} \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ coïncide avec l'application de Gauss γ_{D_p} associée au champ de droites D_p sur J (A.12).*

Rappelons que D_p désigne le champ de droites sur J tangent à l'origine à la courbe C plongée dans J par le morphisme $q \mapsto \mathcal{O}_C(q - p)$.

Fixons un fibré en droites M de degré 1 sur C ; posons $P = \mathbb{P}(H^0(C, K_C \otimes M^2))$. A tout élément e de P on associe (via la dualité de Serre) une extension

$$0 \rightarrow M^{-1} \rightarrow E_e \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Le système linéaire $|K_C \otimes M^2|$ est sans point base, donc définit un morphisme ψ de C dans P .

LEMME 3.6. — *Soit e un point de P .*

a) *Le fibré E_e est semi-stable.*

b) *Pour que E_e ne soit pas stable, il faut et il suffit que e appartienne à $\psi(C)$. Si $e = \psi(q)$, le fibré E_e est extension de $M^{-1}(q)$ par $M(-q)$.*

c) *Posons $L = M(-p)$, et supposons $L^2 \not\cong \mathcal{O}_C$. Pour que E_e soit contenu dans le fibré F_L associé à L (3.1), il faut et il suffit que e appartienne à la tangente à $\psi(C)$ au point $\psi(p)$.*

Soit L un sous-fibré en droites de E_e . Si $\text{deg}(L) \geq 1$, la projection $L \rightarrow M$ doit être un isomorphisme, ce qui est impossible puisque l'extension n'est pas scindée : cela prouve a). Si $\text{deg}(L) = 0$, il existe un point q de C tel que la projection $L \rightarrow M$ induise un isomorphisme de L sur $M(-q)$. Il en résulte comme dans le LEMME 3.2 que e est égal à $\psi(q)$. Dans ce cas le fibré $E_{\psi(q)}$ contient $M(-q)$, d'où b).

Prouvons c). La tangente à $\psi(C)$ au point $\psi(p)$ correspond au sous-espace $H^0(C, K_C \otimes L^2)$ de $H^0(C, K_C \otimes M^2)$ (qui est de codimension 2 par hypothèse). Elle paramètre les extensions

$$0 \rightarrow L^{-1}(-p) \rightarrow E_e \rightarrow L(p) \rightarrow 0$$

dont l'image réciproque par l'injection $L(-p) \rightarrow L(p)$ est scindée. Pour une telle extension, on a une suite exacte

$$0 \rightarrow L \oplus L^{-1} \rightarrow E_e(p) \rightarrow \mathbb{C}_{2p} \rightarrow 0,$$

où \mathbb{C}_{2p} désigne le faisceau $\mathcal{O}_C/\mathcal{O}_C(-2p)$. Le faisceau \mathbb{C}_p s'injecte dans \mathbb{C}_{2p} ; notons F son image réciproque dans $E_e(p)$. Il résulte de la suite exacte

$$0 \rightarrow L \oplus L^{-1} \rightarrow F \rightarrow \mathbb{C}_p \rightarrow 0$$

que F est isomorphe au fibré F_L ; l'injection $F_L \rightarrow E_e(p)$ fournit alors par dualité une injection de E_e dans F_L .

Inversement, si E_e est contenu dans F_L , il contient un sous-faisceau isomorphe à $L(-p)$, de sorte que l'image réciproque par l'injection $L(-p) \rightarrow L(p)$ de l'extension

$$0 \rightarrow L^{-1}(-p) \rightarrow E_e \rightarrow L(p) \rightarrow 0$$

est scindée. \square

Soit $h : P \rightarrow \mathcal{M}_0$ le morphisme qui associe au point e la classe d'isomorphisme du fibré E_e .

LEMME 3.7. — *Le morphisme $\varphi_{\mathcal{L}} \circ h : P \rightarrow \mathbb{P}(V)$ est un plongement linéaire.*

La démonstration est essentiellement la même que celle du LEMME 3.4. Notons r et q les projections de $C \times P$ sur C et P respectivement. Le théorème de Künneth fournit un isomorphisme de

$$H^1(C \times P, r^*M^{-2} \otimes q^*\mathcal{O}_P(1))$$

sur l'espace $\text{End}(H^0(C, K_C \otimes M^2))$. La classe de l'application identique définit donc sur $C \times P$ une extension canonique

$$0 \rightarrow r^*M^{-1} \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow r^*M \otimes q^*\mathcal{O}_P(-1) \rightarrow 0$$

dont la restriction à $C \times \{e\}$, pour $e \in P$, est l'extension E_e associée à e .

Soit N un fibré en droites de degré $(g-1)$ sur C . Il s'agit de calculer le fibré $\det Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^*N)$. Or les propriétés fonctorielles de Rq_* entraînent

$$Rq_*(r^*(M^{-1} \otimes N)) = \mathcal{O}_P \otimes_{\mathbb{C}} R\Gamma(M^{-1} \otimes N),$$

d'où $\det Rq_*(r^*(M^{-1} \otimes N)) = \mathcal{O}_P$;

$$Rq_*(r^*(M \otimes N) \otimes q^*\mathcal{O}_P(-1)) = \mathcal{O}_P(-1) \otimes_{\mathbb{C}} R\Gamma(M \otimes N),$$

d'où $\det Rq_*(r^*(M \otimes N) \otimes q^*\mathcal{O}_P(-1)) = \mathcal{O}_P(-1)$.

Il en résulte qu'on a $\det Rq_*(\mathcal{E} \otimes r^*N) = \mathcal{O}_P(-1)$, et par suite (0.4) $h^*\mathcal{L}_0 = \mathcal{O}_P(1)$. Puisque $\varphi_{\mathcal{L}} \circ h$ est un morphisme, l'homomorphisme $(\varphi_{\mathcal{L}} \circ h)^* : V \rightarrow H^0(P, \mathcal{O}_P(1))$ est nécessairement surjectif, de sorte que $\varphi_{\mathcal{L}} \circ h$ est un plongement linéaire. \square

3.8. — Démontrons maintenant le THÉORÈME 3.5. Soit L un élément de J , tel que $L^2 \not\cong \mathcal{O}_C$; notons $[L]$ son image dans la variété de Kummer \mathcal{K} .

Il s'agit de prouver que la tangente à \mathcal{K} en $[L]$ suivant la direction D_p coïncide avec la droite ℓ_{F_L} de $\mathbb{P}(V)$ associée au fibré F_L . Posons $M = L(p)$ et reprenons les notations des LEMMES 3.6 et 3.7. Identifions P à son image dans $\mathbb{P}(V)$. Le LEMME 3.6.b) exprime que la courbe $\psi(C)$ est contenue dans la variété de Kummer \mathcal{K} ; plus précisément, le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\alpha} & J \\
 \psi \downarrow & & \downarrow \varphi_{\mathcal{L}_J} \\
 P & \longrightarrow & \mathbb{P}(V),
 \end{array}$$

où α est l'application qui associe à un point q de C la classe du fibré $M^{-1}(q)$, est commutatif.

Par conséquent, la direction tangente en $\psi(p)$ à la courbe $\psi(C)$ est l'image par $\varphi_{\mathcal{L}_J}$ de la direction tangente à la courbe $\alpha(C)$ sur J au point $[L]$; la tangente à $\psi(C)$ en $\psi(p)$ est donc la tangente à \mathcal{K} en $[L]$ suivant la direction D_p . D'après le LEMME 3.6.c), cette tangente est égale à la droite ℓ_{F_L} . La proposition en résulte. \square

COROLLAIRE 3.9. — *Le morphisme i_p induit un plongement de la variété de Kummer éclatée $\widehat{\mathcal{K}}$ dans \mathcal{M}_p , sauf si C est hyperelliptique et que p est un point de Weierstrass de C .*

En dehors du cas exceptionnel, γ_{D_p} induit un plongement de $\widehat{\mathcal{K}}$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2(V))$ (PROPOSITION A.17), de sorte que notre assertion résulte du THÉORÈME 3.5.

Supposons que C soit hyperelliptique et que p soit un point de Weierstrass; notons σ l'involution hyperelliptique de C . Soient q, r deux points de C ; on supposera que les points $p, q, r, \sigma q, \sigma r$ sont distincts. Soit L un fibré en droites sur C tel que $L^2 = \mathcal{O}_C(q - r)$; notons $\psi : C \rightarrow \mathbb{P}(H^0(C, K_C(p) \otimes L^2))$ le morphisme défini par le système linéaire $|K_C(p) \otimes L^2|$. Rappelons (LEMME 3.2) que le point $\psi(p)$ correspond par dualité de Serre à la classe de l'extension

$$0 \rightarrow L^{-1} \rightarrow F_L \rightarrow L(p) \rightarrow 0.$$

Comme $h^0(C, K_C(-q) \otimes L^2) = g - 1$, on a $\psi(p) = \psi(q)$; cela entraîne que l'image réciproque de l'extension ci-dessus par l'injection $L(p - q) \rightarrow L(p)$ est scindée, donc que F_L contient un sous-fibré isomorphe à $M := L(p - q)$. On a de même $\psi(p) = \psi(\sigma r)$, de sorte que le fibré $L(p - \sigma r)$, qui est

isomorphe à M^{-1} , s'injecte dans F_L . On conclut que F_M est isomorphe à F_L ; on a ainsi construit une surface S dans \mathcal{K} telle que la restriction de i_p à S soit de degré 2 sur son image. \square

COROLLAIRE 3.10. — *Le faisceau $\mathcal{L}_p := \varphi_p^*(\mathcal{O}_P(1))$ est le générateur de $\text{Pic}(\mathcal{M}_p)$. Son image réciproque sur \widehat{J} est le faisceau $\varepsilon^*\mathcal{L}_J^2(-E)$ (où $\varepsilon : \widehat{J} \rightarrow J$ désigne l'éclatement de J_2 dans J et E le diviseur exceptionnel).*

La seconde assertion résulte du COROLLAIRE A.15. Comme le faisceau $\varepsilon^*\mathcal{L}_J^2(-E)$ n'est pas divisible dans $\text{Pic}(\widehat{J})$, la première assertion en résulte. \square

Dans ce qui suit, nous identifierons l'espace $H^0(\widehat{J}, \varepsilon^*\mathcal{L}_J^2(-E))$ au sous-espace de $H^0(J, \mathcal{L}_J^2)$ formé des sections de \mathcal{L}_J^2 qui s'annulent aux points d'ordre 2 de J .

COROLLAIRE 3.11. — *Le diagramme*

$$(3.11) \quad \begin{array}{ccc} \Lambda^2 V & \xrightarrow{\varphi_p^*} & H^0(\mathcal{M}_p, \mathcal{L}_p) \\ & \searrow w_{D_p} & \downarrow i_p^* \\ & & H^0(J, \mathcal{L}_J^2) \end{array}$$

est commutatif. \square

D'après A.11 et A.12, on a $w_{D_p}(\xi_\kappa) = \theta_\kappa(2\cdot)$ à un scalaire non nul près si $h^0(\kappa(-p)) = 0$; dans le cas contraire $w_{D_p}(\xi_\kappa)$ est nul.

PROPOSITION 3.12.

a) *Soit κ une thêta-caractéristique impaire de C . A un scalaire non nul près, on a*

$$\varphi_p^*\xi_\kappa = d_\kappa \quad \text{et} \quad i_p^*d_\kappa = \theta_\kappa(2\cdot) \quad \text{si} \quad h^0(\kappa(-p)) = 0;$$

$$\varphi_p^*\xi_\kappa = 0 \quad \text{et} \quad i_p^*d_\kappa = 0 \quad \text{dans le cas contraire.}$$

b) *L'image de i_p^* est contenue dans $H^0(J, \mathcal{L}_J^2)^-$.*

c) *Les homomorphismes φ_p^* et w_{D_p} ont le même noyau. Ils sont injectifs si et seulement si toutes les thêta-caractéristiques impaires de C vérifient $h^0(\kappa(-p)) = 0$. Dans ce cas les homomorphismes*

$$\varphi_p^* : \Lambda^2 V \rightarrow H^0(\mathcal{M}_p, \mathcal{L}_p) \quad \text{et} \quad i_p^* : H^0(\mathcal{M}_p, \mathcal{L}_p) \rightarrow H^0(J, \mathcal{L}_J^2)^-$$

sont bijectifs.

Tout comme dans le cas pair (PROPOSITION 2.6), la proposition décrit précisément les homomorphismes du diagramme (3.11), puisqu'elle fournit leurs matrices dans des bases naturelles.

Prouvons a). Soit F un fibré de \mathcal{M}_p . Soient u et v deux homomorphismes de F dans \mathbb{C}_p , non proportionnels; posons $E_u = \text{Ker } u$, $E_v = \text{Ker } v$. Dire que la forme alternée ξ_κ est orthogonale au bivecteur correspondant à la droite ℓ_F signifie que $\varphi_{\mathcal{L}}(E_u)$ est orthogonal à $\widehat{\xi}(\varphi_{\mathcal{L}}(E_v)) = \Delta_\kappa(E_v)$ (cf. diagramme (2.4)), c'est-à-dire que E_u appartient à $\Delta_\kappa(E_v)$; cela se traduit par la relation $\text{Hom}(E_u, E_v \otimes \kappa) \neq 0$.

Supposons d'abord que κ admette une section non nulle s_κ qui s'annule en p . L'homomorphisme $1_F \otimes s_\kappa$ de F dans $F \otimes \kappa$ applique F dans $F(-p) \otimes \kappa$, donc en particulier E_u dans $E_v \otimes \kappa$; ainsi la forme ξ_κ s'annule en tout point F de \mathcal{M}_p , et l'on a $\varphi_p^* \xi_\kappa = 0$.

Supposons maintenant que κ admette à un scalaire près une unique section s_κ , et que celle-ci ne s'annule pas en p . Il s'agit de prouver que la relation $\text{Hom}(E_u, E_v \otimes \kappa) \neq 0$ équivaut à $H^0(C, \text{End}_0(F) \otimes \kappa) \neq 0$.

Si $H^0(C, \text{End}_0(F) \otimes \kappa)$ n'est pas nul, on a $\dim \text{Hom}(F, F \otimes \kappa) \geq 2$, et l'on peut trouver un homomorphisme non nul f de F dans $F \otimes \kappa$ tels que $v \circ f$ soit proportionnel à u ; alors f définit un élément non nul de $\text{Hom}(E_u, E_v \otimes \kappa)$.

Inversement, si l'espace $\text{Hom}(E_u, E_v \otimes \kappa)$ n'est pas nul, il est de dimension ≥ 2 (LEMME 1.1.b)). La définition de E_u et E_v donne par dualité des suites exactes

$$0 \rightarrow F(-p) \rightarrow E_u \xrightarrow{\bar{u}} \mathbb{C}_p \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow F(-p) \rightarrow E_v \xrightarrow{\bar{v}} \mathbb{C}_p \rightarrow 0.$$

On peut trouver comme ci-dessus un homomorphisme g de E_u dans $E_v \otimes \kappa$ tel que $\bar{v} \circ g$ soit proportionnel à \bar{u} . Il induit un homomorphisme de $F(-p)$ dans $F(-p) \otimes \kappa$, d'où un élément g' de $\text{Hom}(F, F \otimes \kappa)$. Un peu de chasse au diagramme montre que $v \circ g'$ doit être proportionnel à u ; par suite g' n'est pas proportionnel à $1_F \otimes s_\kappa$, et l'espace $H^0(C, \text{End}_0(F) \otimes \kappa)$ n'est pas nul. On a donc prouvé les assertions de b) relatives à $\varphi_p^* \xi_\kappa$.

Lorsque aucune section non nulle de $H^0(C, \kappa)$ ne s'annule en p , on peut déduire de ce qui précède la valeur de $i_p^* d_\kappa$, grâce au COROLLAIRE 3.11 et à (A.11). Supposons que κ admette une section non nulle s_κ qui s'annule en p ; il s'agit de prouver que le diviseur D_κ contient la variété de Kummer éclatée \widehat{K} , c'est-à-dire que le fibré F_L associé à un élément arbitraire L de J satisfait à $H^0(C, \text{End}_0(F_L) \otimes \kappa) \neq 0$. Considérons

l'homomorphisme $f : L \oplus L^{-1} \rightarrow (L \otimes \kappa) \oplus (L^{-1} \otimes \kappa)$ défini par la matrice $\begin{pmatrix} 1_L \otimes s_\kappa & 0 \\ 0 & -1_L \otimes s_\kappa \end{pmatrix}$. Il est nul en p , donc induit un homomorphisme f' de $F_L(-p)$ dans $F_L(-p) \otimes \kappa$, et par suite un homomorphisme (non nul) f'' de F_L dans $F_L \otimes \kappa$. On a $\text{Tr } f'' = \text{Tr } f' = \text{Tr } f = 0$, d'où notre assertion.

Puisque les sections d_κ forment une base de $H^0(\mathcal{M}_p, \mathcal{L}_p)$, les assertions b) et c) résultent de a). \square

3.13. — Notons ϑ_p l'ensemble des thêta-caractéristiques κ de C telles que $h^0(\kappa) = 1$ et que l'unique diviseur de $|\kappa|$ ne contienne pas p . Il résulte du COROLLAIRE 3.11 et de la PROPOSITION 3.12 que φ_p est composée du morphisme $\mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{P}(k^{\vartheta_p})$ défini par les sections $(d_\kappa)_{\kappa \in \vartheta_p}$ et d'un plongement linéaire de $\mathbb{P}(k^{\vartheta_p})$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. Compte tenu de la remarque 1.11, on voit que si ϑ_q est contenu dans ϑ_p (ce qui est toujours le cas si p est générique), il existe un isomorphisme $u : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{M}_q$ et un endomorphisme v de $\Lambda^2 V$ tel qu'on ait $\varphi_q \circ u = v \circ \varphi_p$. Si $\vartheta_q = \vartheta_p$, on peut prendre pour v un automorphisme.

Pour p assez général, on peut donc considérer que le morphisme φ_p ne dépend pas de p (à automorphisme près), tout comme γ_{D_p} (A.13). Il n'en est pas de même du plongement i_p de $\widehat{\mathcal{K}}$ dans \mathcal{M}_p : l'isomorphisme $u : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathcal{M}_q$ ci-dessus n'applique pas en général $i_p(\widehat{\mathcal{K}})$ sur $i_q(\widehat{\mathcal{K}})$.

3.14 Remarque. — Lorsque C est hyperelliptique, le fibré \mathcal{L}_p est très ample : cela résulte de la description explicite de \mathcal{M}_p donnée dans [D-R]. Il en est donc de même lorsque la courbe C est assez générale. Compte tenu de la PROPOSITION 3.12, on voit que *lorsque C est générale et que le point p n'est situé sur aucun des diviseurs effectifs A_κ tels que $2A_\kappa \in |K_C|$, le morphisme φ_p est un plongement.*

Une étude plus poussée permet de montrer que φ_p est de degré 1 ou 2 sur son image, et que pour toute courbe C et tout point p assez général, ce degré est un. Il peut cependant être égal à 2, comme le montre l'exemple habituel où C est hyperelliptique et où p est un point de Weierstrass. Dans ce cas l'involution hyperelliptique σ définit une involution $F \mapsto \sigma^* F$ de \mathcal{M}_p ; on vérifie sans peine que cette involution n'est pas triviale et satisfait à $\varphi_p \circ \sigma^* = \varphi_p$. L'image de $\widehat{\mathcal{K}}$ est contenue dans le lieu fixe de cette involution.

3.15 Exemple. — $g = 2$. Supposons d'abord que p ne soit pas un point de Weierstrass. Il résulte de [N-R] que le morphisme $\varphi_p : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \cong \mathbb{P}^5$ est un plongement; son image est l'intersection de la grassmannienne $\mathbb{G}(2, V)$ et d'une autre quadrique. La variété de Kummer éclatée $\widehat{\mathcal{K}}$ (plongée par i_p) est la trace sur \mathcal{M}_p d'une troisième quadrique.

Si p est un point de Weierstrass, l'image de φ_p est contenue dans un hyperplan $\mathbb{P}^4 \subset \mathbb{P}^5$, et $\varphi_p : \mathcal{M}_p \rightarrow \mathbb{P}^4$ est un morphisme de degré 2 sur une quadrique, ramifié le long d'une surface de Del Pezzo S_4 (3.14). Dans ce cas l'image de $\widehat{\mathcal{K}}$ coïncide avec le lieu de ramification $S_4 \subset \mathcal{M}_p$; le morphisme i_p réalise $\widehat{\mathcal{K}}$ comme revêtement double de S_4 .

Appendice : géométrie de la variété de Kummer

Thêta-caractéristiques et groupe de Heisenberg.

Nous rappelons dans cette section les définitions et résultats de base de [M1] .

A.1. — Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique $\neq 2$, et soit A une variété abélienne principalement polarisée sur k , de dimension g . Si Θ est un diviseur thêta symétrique sur A , le faisceau $\mathcal{O}_A(2\Theta)$ est indépendant du choix de Θ ; nous le noterons \mathcal{L}_A (ou simplement \mathcal{L}), et nous désignerons par V le k -espace vectoriel $H^0(A, \mathcal{L})$. Nous noterons A_2 le groupe des points d'ordre 2 de A , et nous le munirons de la forme bilinéaire alternée $\langle \cdot, \cdot \rangle : A_2 \times A_2 \rightarrow \{\pm 1\}$ définie par la polarisation principale. Pour $a \in A$, on note T_a la translation $x \mapsto x + a$ dans A .

On appelle *thêta-caractéristique* de la variété abélienne principalement polarisée A toute fonction $\kappa : A_2 \rightarrow \{\pm 1\}$ satisfaisant à

$$\kappa(a + b) = \kappa(a)\kappa(b)\langle a, b \rangle.$$

Le \mathbb{F}_2 -espace vectoriel A_2 opère sur l'ensemble $\vartheta(A)$ des thêta-caractéristiques de A par la formule

$$(a \cdot \kappa)(b) = \langle a, b \rangle \kappa(b);$$

cette action fait de $\vartheta(A)$ un espace affine sous A_2 . Soit $\kappa \in \vartheta(A)$. Il existe un nombre $\varepsilon(\kappa) \in \{\pm 1\}$ tel que la fonction κ sur A_2 prend $2^{g-1}(2g + 1)$ fois la valeur $\varepsilon(\kappa)$, et $2^{g-1}(2g - 1)$ fois la valeur $-\varepsilon(\kappa)$. On dit que la thêta-caractéristique κ est *paire* si $\varepsilon(\kappa) = 1$, *impaire* dans le cas contraire. Pour $a \in A_2$, on a

$$(1) \quad \varepsilon(a \cdot \kappa) = \kappa(a)\varepsilon(\kappa).$$

A toute thêta-caractéristique κ de A est associé un diviseur thêta symétrique Θ_κ sur A , caractérisé par la formule

$$\kappa(a) = (-1)^{m_a(\Theta_\kappa) + m_0(\Theta_\kappa)},$$

où $m_a(\Theta_\kappa)$ désigne la multiplicité au point a du diviseur Θ_κ . On a $\Theta_{a \cdot \kappa} = T_a^* \Theta_\kappa$ pour tout $a \in A$, et

$$\varepsilon(\kappa) = m_0(\Theta_\kappa);$$

par suite, κ est paire ou impaire suivant qu'une équation locale de Θ_κ à l'origine est paire ou impaire. Autrement dit, soit θ_κ une section non nulle de $\mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$, et soit ι l'unique isomorphisme de $(-1_A)^* \mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$ sur $\mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$ qui induit l'identité à l'origine (isomorphisme normalisé dans la terminologie de [M1]); on a

$$(2) \quad \iota((-1_A)^* \theta_\kappa) = \varepsilon(\kappa) \theta_\kappa.$$

A.2. — Supposons que A soit la jacobienne J d'une courbe lisse C de genre g , munie de sa polarisation principale. On appelle *thêta-caractéristique* de C un fibré en droites κ sur C tel que $\kappa^{\otimes 2} \cong K_C$. On associe à un tel fibré une *thêta-caractéristique* $\tilde{\kappa}$ de J en posant, pour $a \in J_2$,

$$\tilde{\kappa}(a) = (-1)^{h^0(\kappa \otimes a) + h^0(\kappa)}.$$

Cette correspondance permet d'identifier les *thêta-caractéristiques* de C et celles de J , ce que nous ferons désormais.

Le diviseur Θ_κ associé à κ est l'ensemble des éléments de J de la forme $\mathcal{O}_C(E) \otimes \kappa^{-1}$, où E est un diviseur effectif de degré $(g - 1)$. On a $\varepsilon(\kappa) = (-1)^{h^0(\kappa)}$, de sorte que la parité de κ est par définition celle de $h^0(\kappa)$.

A.3. — Le *groupe de Heisenberg* (ou *groupe thêta*) H associé à \mathcal{L} est formé des couples (a, φ) , où a appartient à A et φ est un isomorphisme de $T_a^* \mathcal{L}$ sur \mathcal{L} . Il opère de manière évidente sur V . On a une suite exacte

$$0 \rightarrow k^* \rightarrow H \xrightarrow{p} A_2 \rightarrow 0,$$

avec $p(a, \varphi) = a$. Si u, v sont deux éléments de H , le commutateur (u, v) est l'image dans H de l'élément $\langle p(u), p(v) \rangle$ de k^* .

Pour tout $\alpha \in H$, l'élément α^2 appartient au centre k^* de H ; notons-le $\|\alpha\|$. La fonction $\|\cdot\| : H \rightarrow k^*$ satisfait à

$$(3) \quad \begin{aligned} \|\alpha\beta\| &= \|\alpha\| \|\beta\| \langle p(\alpha), p(\beta) \rangle \quad \text{et} \\ \|t\alpha\| &= t^2 \|\alpha\| \quad \text{pour tout } t \in k^*. \end{aligned}$$

Soit κ une *thêta-caractéristique* de A . Pour tout $\alpha \in H$, nous poserons $\chi_\kappa(\alpha) = \|\alpha\| \kappa(p(\alpha))$. Nous appellerons *caractère de poids 2* de H un homomorphisme de H dans k^* qui induit sur le centre k^* de H le caractère $t \mapsto t^2$.

LEMME A.4. — *L'application $\kappa \mapsto \chi_\kappa$ définit une bijection de l'ensemble des thêta-caractéristiques de A sur l'ensemble des caractères de poids 2 de H .*

On déduit aussitôt des formules (3) que χ_κ est un caractère de poids 2. Inversement, soit χ un caractère de poids 2 de H . Pour tout $\alpha \in H$, le nombre $\chi(\alpha)\|\alpha\|^{-1}$ ne dépend que de l'image a de α dans A_2 ; notons-le $\kappa(a)$. Il résulte encore des formules (3) que κ est une thêta-caractéristique; on a $\chi_\kappa = \chi$, d'où le lemme. \square

La représentation de H dans $H^0(A, \mathcal{L})^{\otimes 2}$ et $H^0(A, \mathcal{L}^2)$.

Nous allons décrire la représentation de H sur le produit tensoriel $V^{\otimes 2}$. Notons p et q les deux projections de $A \times A$ sur A ; nous identifierons à l'aide du théorème de Künneth l'espace $V^{\otimes 2}$ à $H^0(A \times A, p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L})$.

Désignons par m et d les applications de $A \times A$ dans A définies par $m(a, b) = a + b$ et $d(a, b) = a - b$. Pour toute thêta-caractéristique κ , il résulte du théorème du carré que le diviseur $m^*\Theta_\kappa + d^*\Theta_\kappa$ appartient au système linéaire $|p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}|$. Soit ξ_κ une section non nulle de $p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}$ qui s'annule le long de ce diviseur. Si θ_κ est une section non nulle de $\mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$, on a à un scalaire près

$$(4) \quad \xi_\kappa(a, b) = \theta_\kappa(a + b)\theta_\kappa(a - b).$$

PROPOSITION A.5. — *Pour toute thêta-caractéristique κ de A , l'élément ξ_κ de $V^{\otimes 2}$ est un vecteur propre pour l'action de H , relativement au caractère ξ_κ . Ces vecteurs forment une base de $V^{\otimes 2}$. De plus, lorsque κ décrit l'ensemble des thêta-caractéristiques paires (resp. impaires), les vecteurs ξ_κ forment une base de S^2V (resp. Λ^2V).*

Notons s l'automorphisme de $V^{\otimes 2}$ tel que $s(\varphi \otimes \psi) = \psi \otimes \varphi$. Il est induit par l'isomorphisme canonique de $q^*\mathcal{L} \otimes p^*\mathcal{L}$ sur $p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}$, que nous noterons encore s . Soit κ une thêta-caractéristique de A ; notons M le fibré $\mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$. Soit i l'automorphisme de $A \times A$ qui échange les facteurs; on a des isomorphismes canoniques

$$i^*(p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}) = q^*\mathcal{L} \otimes p^*\mathcal{L} \quad \text{et}$$

$$i^*(m^*M \otimes d^*M) = m^*M \otimes d^*(-1_A)^*M.$$

Choisissons un isomorphisme u de $m^*M \otimes d^*M$ sur $p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}$; notons

$$\iota : (-1_A)^*M \rightarrow M$$

l'isomorphisme normalisé (cf. A.1). Le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 m^*M \otimes d^*(-1_A)^*M & \xrightarrow{i^*u} & q^*L \otimes p^*L \\
 \downarrow 1 \otimes \iota & & \downarrow s \\
 m^*M \otimes d^*M & \xrightarrow{u} & p^*L \otimes q^*L
 \end{array}$$

est commutatif : en effet, il suffit de vérifier cette commutativité au-dessus de l'origine, où elle est immédiate. Compte tenu de la formule (1) de (A.1), on en déduit

$$(5) \quad s(\xi_\kappa) = \varepsilon(\kappa)\xi_\kappa.$$

On voit en particulier que ξ_κ est un tenseur symétrique si κ est paire, antisymétrique si κ est impaire.

L'action de H sur chaque facteur du produit tensoriel définit une action de $H \times H$ sur $V^{\otimes 2}$; l'action de H qui nous intéresse est celle déduite du plongement diagonal de H dans $H \times H$. Soit α un élément de H , et soit a son image dans A_2 . Le diviseur de $(\alpha, 1)\xi_\kappa$ est $T_{(a,0)}^*(m^*\Theta_\kappa + d^*\Theta_\kappa) = m^*\Theta_{a \cdot \kappa} + d^*\Theta_{a \cdot \kappa}$. Il existe donc un scalaire t tel qu'on ait $(\alpha, 1)\xi_\kappa = t\xi_{a \cdot \kappa}$, et par conséquent, d'après (5),

$$s((\alpha, 1)\xi_\kappa) = \varepsilon(a \cdot \kappa)(\alpha, 1)\xi_\kappa.$$

On en déduit

$$(1, \alpha)\xi_\kappa = (s \circ (\alpha, 1) \circ s)(\xi_\kappa) = \varepsilon(\kappa)\varepsilon(a \cdot \kappa)(\alpha, 1)\xi_\kappa,$$

et, compte tenu de (1),

$$(\alpha, \alpha)\xi_\kappa = \varepsilon(\kappa)\varepsilon(a \cdot \kappa)(\alpha^2, 1)\xi_\kappa = \kappa(a)\|\alpha\|\xi_\kappa = \chi_\kappa(\alpha)\xi_\kappa.$$

Comme la dimension de $V^{\otimes 2}$ est égale au nombre de thêta-caractéristiques, la proposition en résulte. \square

A.6 Remarque. — Soit G un groupe commutatif, et $\widehat{G} = \text{Hom}(G, k^*)$ son dual de Pontryagin. Notons $H(G)$ l'ensemble $k^* \times G \times \widehat{G}$, muni de la loi de groupe définie par

$$(t, a, \chi)(s, b, \omega) = (t\omega(a), a + b, \chi\omega).$$

Prenons pour G un espace vectoriel de dimension g sur le corps \mathbb{F}_2 ; il existe alors un isomorphisme de $H(G)$ sur H qui induit l'identité sur k^* . Choisissons un tel isomorphisme (c'est-à-dire, dans la terminologie de [M1], une thêta-structure sur (A, \mathcal{L})). Il définit par passage au quotient un isomorphisme de $G \times \widehat{G}$ sur A_2 .

Le groupe $H(G)$ opère alors sur V . Il existe une base $(\psi_b)_{b \in G}$ de V (unique à un scalaire multiplicatif près) telle qu'on ait

$$(t, a, \chi)\psi_b = t\chi(a + b)\psi_{b+a} \quad \text{pour } (t, a, \chi) \in H(G), b \in G.$$

Soient $c \in G, \gamma \in \widehat{G}$. L'application $(t, a, \chi) \mapsto t^2\gamma(a)\chi(c)$ est un caractère de poids 2 de $H(G)$; la thêta-caractéristique $\kappa = \kappa \begin{bmatrix} c \\ \gamma \end{bmatrix}$ correspondante est donnée (via l'isomorphisme $G \times \widehat{G} \rightarrow A_2$) par la formule

$$\kappa(a, \chi) = \gamma(a)\chi(a + c);$$

elle vérifie $\varepsilon(\kappa) = \gamma(c)$. L'élément

$$Q_\kappa = \sum_{b \in G} \gamma(b)\psi_b \otimes \psi_{b+c}$$

de $V^{\otimes 2}$ est un vecteur propre pour l'action de $H(G)$, relativement au caractère χ_κ ; il est donc proportionnel à ξ_κ .

Cette égalité admet la traduction géométrique suivante. Notons $\varphi_{\mathcal{L}} : A \rightarrow \mathbb{P}(V)$ le morphisme défini par le système linéaire $|\mathcal{L}|$ (rappelons que la notation $\mathbb{P}(V)$ désigne l'espace des hyperplans de V). D'autre part, soit κ une thêta-caractéristique de A . Pour tout point a de A , le diviseur $T_a^*\Theta_\kappa + T_{-a}^*\Theta_\kappa$ appartient à $|2\Theta| = \mathbb{P}(V^*)$; on définit ainsi un morphisme $\delta_\kappa : A \rightarrow \mathbb{P}(V^*)$. On peut considérer ξ_κ comme une forme bilinéaire sur $V^* \otimes V^*$, symétrique ou alternée suivant la parité de κ . Ce qui précède entraîne qu'elle est inversible, c'est-à-dire qu'elle définit un isomorphisme $\hat{\xi}_\kappa : V^* \rightarrow V$; de plus, le diagramme

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} & & \mathbb{P}(V) \\ & \nearrow \varphi_{\mathcal{L}} & \downarrow \hat{\xi}_\kappa \\ A & & \mathbb{P}(V^*) \\ & \searrow \delta_\kappa & \end{array}$$

est commutatif.

A.7 Exemple. — Supposons $k = \mathbb{C}$. La variété A s'identifie alors au quotient de l'espace vectoriel complexe $T_0(A)$ par un réseau Γ ; la polarisation principale définit une forme bilinéaire alternée inversible sur Γ . Choisissons une *base symplectique* $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g})$ de Γ . On sait que $(\gamma_1, \dots, \gamma_g)$ est une base de $T_0(A)$, ce qui permet d'identifier cet espace à \mathbb{C}^g ; il existe alors une matrice carrée τ symétrique d'ordre g , dont la partie imaginaire est positive séparante, telle que le réseau Γ soit égal à $\mathbb{Z}^g \oplus \tau(\mathbb{Z}^g)$. L'espace V s'identifie à l'espace des fonctions thêta d'ordre 2 relativement à Γ .

Posons $G = \mathbb{Z}^g/2\mathbb{Z}^g$; le groupe \widehat{G} s'identifie canoniquement à G . La base $(\gamma_1, \dots, \gamma_{2g})$ définit un isomorphisme de $G \times G$ sur A_2 , qui se prolonge naturellement en un isomorphisme de $H(G)$ sur H . Soit $b \in G$, et soit \tilde{b} un représentant de b dans \mathbb{Z}^g . La fonction

$$\psi_b(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp 2\pi i \left({}^t(m + \frac{1}{2}\tilde{b})\tau(m + \frac{1}{2}\tilde{b}) + {}^t(m + \frac{1}{2}\tilde{b})z \right)$$

est une fonction thêta d'ordre 2, donc définit un élément ψ_b de V . La famille $(\psi_b)_{b \in G}$ est une base de V satisfaisant aux propriétés de (A.6).

Soient c, γ deux éléments de G , et soit $\kappa = \kappa \begin{bmatrix} c \\ \gamma \end{bmatrix}$ la thêta-caractéristique associée (A.6). Le diviseur Θ_κ est défini par la fonction

$$\begin{aligned} \theta_\kappa(z) &= \theta \begin{bmatrix} c \\ \gamma \end{bmatrix} (z, \tau) \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}^g} \exp \pi i \left({}^t(m + \frac{1}{2}\tilde{c})t(m + \frac{1}{2}\tilde{c}) + {}^t(m + \frac{1}{2}\tilde{c})(z + \frac{1}{2}\tilde{\gamma}) \right), \end{aligned}$$

où \tilde{c} et $\tilde{\gamma}$ ont la même signification que ci-dessus. La proportionalité de Q_κ et ξ_κ (A.6) n'est autre que la *formule d'addition*

$$\theta_\kappa(z + u)\theta_\kappa(z - u) = \sum_{b \in G} (-1)^{{}^t\tilde{b} \cdot \tilde{\gamma}} \psi_b(z)\psi_b(u).$$

A.8. — Considérons maintenant la représentation de H dans l'espace $H^0(A, \mathcal{L}^2)$. L'isomorphisme normalisé de $(-1_A)^*\mathcal{L}$ sur \mathcal{L} définit une involution ι de $H^0(A, \mathcal{L}^2)$; nous désignerons par $H^0(A, \mathcal{L}^2)^+$ le sous-espace des sections invariantes, et par $H^0(A, \mathcal{L}^2)^-$ celui des sections anti-invariantes. Ils sont de dimension $2^{g-1}(2^g + 1)$ et $2^{g-1}(2^g - 1)$ respectivement. Par contre toutes les sections de $H^0(A, \mathcal{L}) = V$ sont invariantes.

Soit κ une thêta-caractéristique; notons 2_A l'endomorphisme $a \mapsto 2a$ de A . Le diviseur $2_A^*\Theta_\kappa$ appartient au système linéaire $|\mathcal{L}^2|$; on peut donc considérer $2_A^*\theta_\kappa$ comme une section de $H^0(A, \mathcal{L}^2)$, bien définie à une constante près. Nous la noterons $\theta_\kappa(2\cdot)$.

PROPOSITION A.8. — *Pour toute thêta-caractéristique κ de A , l'élément $\theta_\kappa(2\cdot)$ de $H^0(A, \mathcal{L}^2)$ est un vecteur propre pour l'action de H , relativement au caractère χ_κ . Ces sections forment une base de $H^0(A, \mathcal{L}^2)$. De plus, lorsque κ décrit l'ensemble des thêta-caractéristiques paires (resp. impaires), les sections $\theta_\kappa(2\cdot)$ forment une base de $H^0(A, \mathcal{L}^2)^+$ (resp. $H^0(A, \mathcal{L}^2)^-$).*

L'application $\alpha \mapsto \alpha^{\otimes 2}$ est un homomorphisme de H dans le groupe de Heisenberg $H(\mathcal{L}^2)$; le groupe H opère sur $H^0(A, \mathcal{L}^2)$ à travers cet homomorphisme. Il est commode de considérer un élément de $H(\mathcal{L}^2)$ (resp. l'involution ι) comme un automorphisme de \mathcal{L}^2 au-dessus d'une translation de A (resp. de l'involution (-1_A)).

Soit $\alpha \in H$. Il existe un élément β de $H(\mathcal{L}^2)$ tel que $\alpha^{\otimes 2} = \beta^2$. L'application $\beta \mapsto \iota\beta\iota$ est un automorphisme de $H(\mathcal{L}^2)$ (noté δ_{-1} dans [M1]). Prouvons la formule

$$(7) \quad \beta\iota\beta\iota = \|\alpha\|.$$

Posons $G_4 = (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g$, et identifions le groupe $G_2 = (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^g$ au sous-groupe $(2\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^g$ de G_4 . D'après [M1] (cf. p. 316–319), on peut identifier $H(\mathcal{L}^2)$ à $H(G_4)$ et H à $H(G_2)$ de façon qu'on ait

$$\begin{aligned} \delta_{-1}(t, a, \chi) &= (t, -a, \chi^{-1}) \quad \text{pour } (t, a, \chi) \in H(G_4), \\ (s, b, \omega)^{\otimes 2} &= (s^2, a, \chi(2\cdot)) \quad \text{pour } (s, b, \omega) \in H(G_2). \end{aligned}$$

Soit alors $(t, a, \chi) \in H(G_4)$, et soit t' un scalaire tel que $t'^2 = t^2\chi(a)$. Notant encore χ la restriction de χ à $G_2 \subset G_4$, on a

$$(t, a, \chi)^2 = (t^2\chi(a), 2a, \chi^2) = (t', 2a, \chi)^{\otimes 2},$$

et

$$\|(t', 2a, \chi)\| = t'^2\chi(2a) = t^2\chi(a)^3.$$

D'autre part on a $(t, a, \chi)\delta_{-1}(t, a, \chi) = (t^2\chi(a)^{-1}, 0, 1)$, ce qui prouve (7).

Soit κ une thêta-caractéristique de A ; la formule (2) entraîne

$$(8) \quad \iota\theta_\kappa(2\cdot) = \varepsilon(\kappa)\theta_\kappa(2\cdot).$$

Posons $a = p(\alpha)$ et $b = p(\beta)$. On a

$$T_b^* 2_A^* \Theta_\kappa = 2_A^* T_a^* \Theta_\kappa = 2_A^* \Theta_{a \cdot \kappa},$$

de sorte que la section $\beta\theta_\kappa(2\cdot)$ est proportionnelle à $\theta_{a\cdot\kappa}(2\cdot)$. Cela implique

$$(\beta\iota\beta\iota)\theta_\kappa(2\cdot) = \varepsilon(a\cdot\kappa)\beta^2\theta_\kappa(2\cdot);$$

compte tenu de (7) et (1) on en déduit $\alpha^{\otimes 2}\theta_\kappa(2\cdot) = \chi_\kappa(\alpha)\theta_\kappa(2\cdot)$. Il en résulte que les sections $\theta_\kappa(2\cdot)$ sont linéairement indépendantes dans $H^0(A, \mathcal{L}^2)$, donc en forment une base puisque la dimension de cet espace est égale au nombre des thêta-caractéristiques. Enfin la formule (8) montre que $\theta_\kappa(2\cdot)$ est invariante ou antiinvariante suivant la parité de κ . \square

L'homomorphisme $S^2V \rightarrow H^0(A, \mathcal{L}^2)$.

A.9. — Nous allons définir des homomorphismes de S^2V et Λ^2V dans $H^0(A, \mathcal{L}^2)$, compatibles avec l'action de H . D'après les PROPOSITIONS A.5 et A.8, un tel homomorphisme applique le tenseur ξ_κ sur $\lambda_\kappa\theta_\kappa(2\cdot)$, avec $\lambda_\kappa \in k$; son noyau est engendré par les tenseurs ξ_κ pour lesquels $\lambda_\kappa = 0$, et son image par les sections $\theta_\kappa(2\cdot)$ pour les κ telles que $\lambda_\kappa \neq 0$.

Considérons d'abord le cas symétrique. L'application de multiplication $\mu : S^2V \rightarrow H^0(A, \mathcal{L}^2)$ est compatible avec l'action de H ; son image est contenue dans $H^0(A, \mathcal{L}^2)^+$. Via l'identification

$$V^{\otimes 2} \cong H^0(A \times A, p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}),$$

μ est la restriction à S^2V de l'image réciproque

$$\delta^* : H^0(A \times A, p^*\mathcal{L} \otimes q^*\mathcal{L}) \rightarrow H^0(A, \mathcal{L}^2)$$

par l'application diagonale $\delta : A \rightarrow A \times A$. Soit κ une thêta-caractéristique paire. Par définition de ξ_κ (formule (4)), on a, à une constante non nulle près,

$$\mu(\xi_\kappa) = \theta_\kappa(2\cdot)\theta_\kappa(0).$$

Ainsi $\mu(\xi_\kappa)$ s'annule si et seulement si la thêta-constante $\theta_\kappa(0)$ est nulle. On obtient donc la proposition suivante, due à D. MUMFORD :

PROPOSITION A.9.

a) Le noyau de μ est engendré par les tenseurs ξ_κ , où κ parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques paires de A telles que $\theta_\kappa(0) = 0$.

b) L'image de μ admet pour base les sections $\theta_\kappa(2\cdot)$, où κ parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques paires de A telles que $\theta_\kappa(0) \neq 0$.

c) Si aucune des thêta-constantes $\theta_\kappa(0)$ (pour κ paire) ne s'annule, l'application $\mu : S^2V \rightarrow H^0(A, \mathcal{L}^2)^+$ est bijective. \square

L'homomorphisme $w_D : \Lambda^2 V \rightarrow H^0(A, \mathcal{L}^2)$ et l'application de Gauss.

A.10. — Commençons par quelques généralités. Soient X une variété algébrique et L un fibré en droites sur X . Soient s, t deux sections de L ; alors $t^{\otimes 2}d(s/t)$ est une section régulière de $L^2 \otimes \Omega_X^1$. On définit ainsi un homomorphisme $w : \Lambda^2 H^0(X, L) \rightarrow H^0(X, L^2 \otimes \Omega_X^1)$, appelé application de Wahl. Si D est un champ de vecteurs sur X , on en déduit un homomorphisme

$$w_D : \Lambda^2 H^0(X, L) \longrightarrow H^0(X, L^2).$$

Revenons à notre variété abélienne principalement polarisée A . Pour tout $D \in H^0(A, T_A)$, on dispose d'un homomorphisme

$$w_D : \Lambda^2 V \longrightarrow H^0(A, \mathcal{L}^2);$$

en termes de fonctions thêta, il satisfait à $w_D(\theta \wedge \varphi) = D\theta \cdot \varphi - \theta \cdot D\varphi$. Il est compatible à l'action de H , et son image est contenue dans le sous-espace $H^0(A, \mathcal{L}^2)^-$.

Soit κ une thêta-caractéristique impaire. Par définition de ξ_κ , on a, à une constante non nulle près,

$$w_D(\xi_\kappa) = \theta_\kappa(2 \cdot) D\theta_\kappa(0);$$

ainsi la section $w_D(\xi_\kappa)$ s'annule si et seulement si le champ de vecteurs D est tangent au diviseur Θ_κ à l'origine. Par conséquent :

PROPOSITION A.11.

a) Le noyau de w_D est engendré par les bivecteurs ξ_κ , où κ parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques impaires de A telles que D soit tangent à Θ_κ à l'origine.

b) L'image de w_D admet pour base la famille des sections $\theta_\kappa(2 \cdot)$, où κ parcourt l'ensemble des thêta-caractéristiques impaires de A telles que $D(0) \notin T_0(\Theta_\kappa)$.

c) Lorsque D est assez général, la dimension de $\text{Ker } w_D$ est égale au nombre de thêta-caractéristiques impaires de A pour lesquelles la multiplicité de Θ_κ à l'origine est ≥ 3 . En particulier, si Θ_κ est lisse à l'origine pour toute thêta-caractéristique impaire κ , l'application $w_D : \Lambda^2 V \rightarrow H^0(A, \mathcal{L}^2)^-$ est bijective (pour D assez général). \square

A.12 Exemple. — Considérons le cas où A est la jacobienne J d'une courbe C (A.2). L'espace $H^0(J, T_J)$ s'identifie canoniquement au dual de $H^0(C, K_C)$; pour tout point p de C , l'application $\omega \mapsto \omega(p)$ définit

donc un champ de vecteurs D_p sur C , bien défini à un scalaire non nul près (plus correctement, un *champ de droites* sur J). Le vecteur $D_p(0)$ est tangent à la courbe C plongée dans J par le morphisme $q \mapsto \mathcal{O}_C(q-p)$.

Traduisons dans cet exemple les conditions de la PROPOSITION A.11. Soit κ une thêta-caractéristique impaire de C (A.2). La multiplicité en 0 du diviseur Θ_κ est $h^0(\kappa)$; en particulier, Θ_κ est lisse à l'origine si et seulement si $h^0(\kappa) = 1$. Supposons cette condition satisfaite; identifions l'espace projectif tangent à l'origine de J avec $\mathbb{P}(H^0(C, K_C))$, et notons $\varphi_K : C \rightarrow \mathbb{P}(H^0(C, K_C))$ l'application canonique. Dire que D_p est tangent à Θ_κ en 0 signifie alors que le point $\varphi_K(p)$ appartient à l'hyperplan de $\mathbb{P}(H^0(C, K_C))$ engendré par l'unique diviseur A_κ de $|\kappa|$. Comme cet hyperplan découpe sur C le diviseur $2A_\kappa$, cela signifie simplement que p appartient au support de A_κ . Ainsi la relation $D\theta_\kappa(0) \neq 0$ équivaut à $h^0(\kappa(-p)) = 0$.

A.13. — L'application w_D admet l'interprétation géométrique suivante. Notons \mathcal{K} la variété de Kummer de A ; c'est l'image de A par le morphisme $\varphi_{\mathcal{L}} : A \rightarrow \mathbb{P}(V)$. Pour tout point a de $A - A_2$, notons $\gamma_D(a)$ la tangente à \mathcal{K} en $\varphi_{\mathcal{L}}(a)$ suivant la direction D . On définit ainsi, via le plongement de Plücker, une application rationnelle γ_D de A dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. On a alors $\gamma_D^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1) = \mathcal{L}^2$, et l'homomorphisme $\gamma_D^* : \Lambda^2 V \rightarrow H^0(A, \mathcal{L}^2)$ n'est autre que w_D . Remarquons qu'on a $\gamma_{\lambda D} = \gamma_D$ pour tout scalaire non nul λ ; autrement dit, l'application γ_D ne dépend que du *champ de droites* sur A défini par D .

Notons ϑ_D l'ensemble des thêta-caractéristiques impaires κ de A telles que D ne soit pas tangent à Θ_κ à l'origine. Il résulte de ce qui précède et de la PROPOSITION A.11 que γ_D est composée de l'application rationnelle $A \rightarrow \mathbb{P}(k^{\vartheta_D})$ défini par les sections $(\theta_\kappa(2))_{\kappa \in \vartheta_D}$ et d'un plongement linéaire de $\mathbb{P}(k^{\vartheta_D})$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$. En particulier, si $\vartheta_D = \vartheta_{D'}$, il existe un automorphisme u de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ tel qu'on ait $\gamma_{D'} = u \circ \gamma_D$. Nous allons utiliser cette remarque pour étudier la structure de l'application γ_D . Par construction, celle-ci définit par passage au quotient une application rationnelle de \mathcal{K} dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, que nous noterons encore abusivement γ_D ; nous noterons $\widehat{\mathcal{K}}$ la variété (lisse) obtenue en éclatant les points singuliers de \mathcal{K} .

PROPOSITION A.14. — *Pour tous les champs de droites D sur A sauf un nombre fini, l'application γ_D définit un plongement de $\widehat{\mathcal{K}}$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$.*

a) *L'ensemble exceptionnel.*

Considérons les ensembles I de thêta-caractéristiques impaires telles que l'intersection des sous-espaces $T_0(\Theta_\kappa)$ pour $\kappa \in I$ soit une droite ℓ_I . On obtient ainsi un ensemble fini de droites ℓ_I dans $T_0(A)$; nous supposons

dans la suite que $D(0)$ n'appartient à aucune de ces droites. Cela implique qu'il existe un champ de vecteurs D' non proportionnel à D tel que $D\theta_\kappa(0)$ s'annule si et seulement si $D'\theta_\kappa(0)$ s'annule; d'après la remarque précédant la proposition, l'application $\gamma_{D'}$ se déduit de γ_D par un automorphisme de $\mathbb{P}(\Lambda^2(V))$.

b) *La restriction de γ_D à $\mathcal{K} - \text{Sing}(\mathcal{K})$ est un plongement.*

Soient x, y deux points distincts de \mathcal{K} tels que $\gamma_D(x) = \gamma_D(y)$. D'après a), on a aussi $\gamma_{D'}(x) = \gamma_{D'}(y)$. La droite $\vartheta(x, y)$ est alors tangente à \mathcal{K} en x suivant les directions D et D' , ce qui est impossible.

D'autre part, un calcul élémentaire montre que $T_x(\gamma_D)$ n'annule pas les vecteurs de $T_x(\mathcal{K})$ non proportionnels à D , et l'on conclut comme ci-dessus que $T_x(\gamma_D)$ est injective.

c) *Étude de γ_D au voisinage d'un point d'ordre 2.*

Soit a un point d'ordre 2 de A , et soit (u_1, \dots, u_g) un système de coordonnées locales sur A en a , tel que $D = \partial/\partial u_1$ et $(-1_A)^*u_i = -u_i$ pour tout i . Soit φ_0 une section de \mathcal{L} qui ne s'annule pas en a . Puisque le système linéaire $|\mathcal{L}|$ plonge le quotient $A/\{\pm 1_A\}$ dans $\mathbb{P}(V)$, il existe des sections φ_{ij} de \mathcal{L} telles qu'on ait

$$\frac{\varphi_{ij}}{\varphi_0} = u_i u_j + \text{termes de degré } \geq 4.$$

On en déduit que le terme linéaire du développement de Taylor de $\varphi_0 D\varphi_{1j} - \varphi_{1j} D\varphi_0$ à l'origine est proportionnel à u_j . Soit \hat{A} la variété obtenue en éclatant les points d'ordre 2 de A , et E_a le diviseur exceptionnel au-dessus de a . Ce qui précède entraîne que l'homomorphisme de restriction $\text{Im } w_D \rightarrow H^0(E_a, \mathcal{O}_{E_a}(1))$ est surjectif. Par conséquent l'application γ_D définit un morphisme de \hat{A} dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, et la restriction de ce morphisme à E_a est un plongement linéaire.

On vérifie aussitôt que l'image d'un point de E_a , correspondant à une direction tangente Δ , est la droite passant par $\varphi_{\mathcal{L}}(a)$, de vecteur directeur $D\Delta\varphi_{\mathcal{L}}(a)$. Dès lors l'argument de b) s'applique encore pour montrer que $\gamma_D(E_a)$ ne peut rencontrer $\gamma_D(\hat{A} - E_a)$. Ainsi le morphisme $\gamma_D : \hat{\mathcal{K}} \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ est injectif.

d) *Étude au voisinage d'un point de E_a .*

Soit δ un point de E_a , correspondant à une direction tangente Δ . On peut supposer d'après a) que Δ n'est pas proportionnel à D , et choisir les coordonnées locales (u_1, \dots, u_g) de façon que $\Delta = \partial/\partial u_g$. Au voisinage de δ , on peut trouver des coordonnées locales $(v_1, \dots, v_{g-1}, u_g)$ telles que $u_i = v_g v_i$ pour $1 \leq i < g$; on en déduit des coordonnées locales (v_1, \dots, v_g) sur $\hat{\mathcal{K}}$, avec $v_g = u_g^2$. Dans ces coordonnées, le terme linéaire

du développement de Taylor de $\varphi_0 D\varphi_{1j} - \varphi_{1j} D\varphi_0$ en δ est proportionnel à v_j pour $j < g$, et celui de $\varphi_0 D\varphi_{gg} - \varphi_{gg} D\varphi_0$ est proportionnel à v_g . Par suite γ_D est un plongement au voisinage de δ , ce qui entraîne la proposition. \square

COROLLAIRE A.15. — Notons $\varepsilon : \widehat{A} \rightarrow A$ l'éclatement de A le long de A_2 , et E le diviseur exceptionnel. L'image réciproque de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ par le morphisme $\gamma_D : \widehat{A} \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2(V))$ est le faisceau $\varepsilon^* \mathcal{L}^2(-E)$. \square

A.16 Remarque. — Notons \mathfrak{m}_2 l'idéal de A_2 dans A . L'espace

$$H^0(\widehat{A}, \varepsilon^* \mathcal{L}^2(-E))$$

s'identifie canoniquement à $H^0(A, \mathfrak{m}_2 \mathcal{L}^2)$, c'est-à-dire au sous-espace de $H^0(A, \mathcal{L}^2)$ formé des sections qui s'annulent aux points d'ordre 2. Nous allons voir que cet espace est engendré par les sections $\theta_\kappa(2\cdot)$ qui s'annulent à l'origine (c'est-à-dire telles que κ soit impaire, ou que κ soit paire et que la thêta-constante $\theta_\kappa(0)$ s'annule).

Soit en effet \mathfrak{m} l'idéal de 0 dans A , et soit λ une thêta-caractéristique de A . On a $\mathfrak{m}_2 \mathcal{L}^2 \cong 2_A^*(\mathfrak{m} \mathcal{O}_A(\Theta_\lambda))$; comme le faisceau $(2_A)_* \mathcal{O}_A$ est somme directe des éléments d'ordre 2 de $\text{Pic}(A)$, le faisceau $(2_A)_*(\mathfrak{m}_2 \mathcal{L}^2)$ est somme directe des faisceaux $\mathfrak{m} \mathcal{O}_A(\Theta_\kappa)$ pour $\kappa \in \vartheta(A)$, et $H^0(A, \mathfrak{m}_2 \mathcal{L}^2)$ est somme directe des espaces $2_A^* H^0(A, \mathfrak{m} \mathcal{O}_A(\Theta_\kappa))$, ce qui est exactement notre assertion. On voit en particulier que $H^0(A, \mathfrak{m}_2 \mathcal{L}^2)$ contient $H^0(A, \mathcal{L}^2)^-$ et que ces deux espaces sont égaux si et seulement si aucune thêta-constante de A ne s'annule.

PROPOSITION A.17. — Supposons que A soit la jacobienne d'une courbe C ; soit p un point de C , et soit D_p le champ de droites sur J associé à p (A.12). L'application de Gauss γ_{D_p} définit un plongement de \widehat{K} dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$, sauf si C est hyperelliptique et p est un point de Weierstrass de C .

Vu la définition de l'ensemble exceptionnel dans la démonstration de la PROPOSITION 14, il s'agit de prouver que la droite $D_p(0)$ n'est pas l'intersection des espaces $T_0(\Theta_\kappa)$ qui la contiennent. Avec les notations de (A.12), cela signifie que le point $\varphi_K(p)$ n'est pas l'intersection des hyperplans de $\mathbb{P}(H^0(C, K_C))$ engendré par les diviseurs A_κ contenant p , tels que $2A_\kappa \in |K_C|$ et $h^0(A_\kappa) = 1$. Or si C n'est pas hyperelliptique, cette intersection contient la tangente à $\varphi_K(C)$ en p ; si C est hyperelliptique et si p n'est pas un point de Weierstrass, il n'appartient à aucun des A_κ .

Lorsque C est hyperelliptique et que p est un point de Weierstrass, l'application $\gamma_{D_p} : \widehat{K} \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ n'est pas injective (3.9) : si q et r sont deux points de C distincts de p et L un élément de J tel que

$L^2 = \mathcal{O}_C(q - r)$, les fibrés L et $L(p - q)$ ont même image par γ_{D_p} (mais des images distinctes dans \mathcal{K}). \square

A.18 Remarque. — Il semble probable que le cas ci-dessus (A jacobienne hyperelliptique, D champ de droites associé à un point de Weierstrass) est le seul où γ_D ne plonge pas $\widehat{\mathcal{K}}$ dans $\mathbb{P}(V)$. Cela résulterait d'une variante (affaiblie) de la conjecture de la trisécante, qui énonce que l'existence d'une trisécante à la variété de Kummer caractérise les jacobiniennes.

BIBLIOGRAPHIE

- [B] BEAUVILLE (A.). — Fibrés de rang 2 sur une courbe, fibré déterminant et fonctions thêta, *Bull. Soc. Math. France*, t. **116**, 1988, p. 431–448.
- [D–N] DREZET (J.-M.) et NARASIMHAN (M.S.). — Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques, *Invent. Math.*, t. **97**, 1989, p. 53–94.
- [D–R] DESALE (R.V.) et RAMANAN (S.). — Classification of vector bundles of rank 2 on hyperelliptic curves, *Invent. Math.*, t. **38**, 1976, p. 181–185.
- [K–M] KNUDSEN (F.) et MUMFORD (D.). — The projectivity of the moduli space of stable curves, I, *Math. Scand.*, t. **39**, 1976, p. 19–55.
- [L] LASZLO (Y.). — Dimension de l'espace des sections du diviseur thêta généralisé, *Bull. Soc. Math. France*, t. **119**, 1991, p. 293–306.
- [M1] MUMFORD (D.). — On the equations defining Abelian varieties, *Invent. Math.*, t. **1**, 1966, p. 287–354.
- [M2] MUMFORD (D.). — Theta characteristics of an algebraic curve, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, t. **4**, 1971, p. 181–192.
- [N–R] NARASIMHAN (M.S.) et RAMANAN (S.). — Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface, *Ann. of Math.*, t. **89**, 1969, p. 19–51.
- [T] THADDEUS (M.). — *Conformal field theory and the cohomology of the moduli space of stable bundles*. — Preprint, 1990.
- [V] VERLINDE (E.). — Fusion rules and modular transformations in 2D-conformal field theory, *Nuclear Phys.*, t. **B300**, 1988, p. 360.
- [W] WITTEN (E.). — Quantum field theory and the Jones polynomial, *Comm. Math. Phys.*, t. **121**, 1989, p. 351–399.