BULLETIN DE LA S. M. F.

ANNE-MARIE AUBERT

Conservation de la ramification modérée par la correspondance de Howe

Bulletin de la S. M. F., tome 117, nº 3 (1989), p. 297-303
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1989__117_3_297_0>

Bull. Soc. math. France,
117, 1989, p. 297–303.

CONSERVATION DE LA RAMIFICATION MODÉRÉE PAR LA CORRESPONDANCE DE HOWE

PAR

ANNE-MARIE AUBERT (*)

RÉSUMÉ. — La conjecture de Howe a été prouvée pour les paires réductives duales non ramifiées de type I, (*cf.* [1, chapitre 5]). Pour de telles paires, on étudie la correspondance de Howe pour des représentations modérément ramifiées, *i.e.* ayant un vecteur non nul invariant par un sous-groupe d'Iwahori, ou plus généralement par un sous-groupe parahorique.

Soit F un corps p-adique ($p \neq 2$) et (U_1, U_2) une paire réductive duale irréducible non ramifiée de type I sur F. Soit F' égal à F ou à son extension quadratique non ramifiée. On note $\mathcal{O}'$ l'anneau des entiers de F'. Le groupe U_i s'identifie au groupe des isométries d'un espace hermitien W_i sur F'. On considère l'espace symplectique $W = W_1 \otimes_{F'} W_2$. Notons $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ le groupe métaplectique, extension par $\mathbb{C}^\times$ du groupe symplectique $\mathrm{Sp}(W)$ et $\widetilde{U}_i$ l'image réciproque de U_i dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$. On considère des sous-groupes d'Iwahori I_1 and I_2 de U_1 et U_2 respectivement. Réalisons la représentation de Weil du groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ dans un modèle S.

Le résultat principal est le suivant : *le $\widetilde{U}_2$-module S^{I_1} formé des vecteurs I_1-invariants de S est engendré par l'espace des $I_1 \times I_2$-invariants.* Nous donnons une application de ce résultat à la correspondance de Howe.

Considérons une représentation (π_1, V_1) de $\widetilde{U}_1$ lisse irréductible telle que $V_1^{I_1} \neq \{0\}$, où I_1 est un sous-groupe d'Iwahori de U_1. Soit (π_2, V_2) l'image de (π_1, V_1) par la correspondance de Howe. Alors $V_2^{I_2} \neq \{0\}$, pour un certain sous-groupe d'Iwahori I_2 de U_2.

ABSTRACT. — The Howe conjecture has been proven for unramified irreducible reductive dual pairs of type I. We study the Howe correspondence for such pairs for tamely ramified representations, *i.e.* representations which admit a fixed vector by an Iwahori subgroup.

Let F be a p-adic field ($p \neq 2$) and let (U_1, U_2) be an unramified irreducible reductive dual pair of type I over F. Let F' be either F or its unramified quadratic extension. We denote by $\mathcal{O}'$ the ring of integers of F'. There is a natural identification of U_i with the isometry group of an hermitian space W_i over F'. Consider the symplectic space $W = W_1 \otimes_{F'} W_2$. We denote by $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ the metaplectic group, extension by $\mathbb{C}^\times$ of the symplectic group $\mathrm{Sp}(W)$ and by $\widetilde{U}_i$ the inverse image of U_i in $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$. Consider

(*) Texte reçu le 14 avril 1988, révisé le 18 juillet 1988.
A.-M. AUBERT, École Normale Supérieure, D.M.I., 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.

some Iwahori subgroups I_1 and I_2 of U_1 and U_2 respectively. We realize the Weil representation of the metaplectic group $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ in a model S.

The main result is : *The $\widetilde{U}_2$-module S^{I_1} consisting of the I_1-fixed vectors in S is generated by the space of $I_1 \times I_2$-invariants.* We give an application of that result to the Howe correspondence.

Consider an irreducible smooth representation (π_1, V_1) of $\widetilde{U}_1$ with $V_1^{I_1} \neq \{0\}$, where I_1 is an Iwahori subgroup of U_1. Let (π_2, V_2) be the image of (π_1, V_1) in the Howe correspondence. Then $V_2^{I_2} \neq \{0\}$, for some Iwahori subgroup I_2 of U_2.

La conjecture de Howe pour les paires réductives duales non ramifiées a été prouvée par HOWE, [7, chapitre 5]. Sur un corps p-adique F, $(p \neq 2)$, considérons une telle paire (U_1, U_2) dans $\mathrm{Sp}(2n, F)$ et un modèle (ω, S) de la représentation de Weil du groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}(2n, F)$.

Nous dirons qu'une représentation irréductible, ayant un vecteur non nul invariant par un sous-groupe d'Iwahori, est *modérément ramifiée.* Nous avons montré dans [1] que, dans la correspondance de Howe, l'image d'une représentation modérément ramifiée de U_1 est une représentation modérément ramifiée de U_2.

La preuve figurant dans [1], qui utilise le modèle latticiel de la représention de Weil, est relativement technique. Le présent article fournit une démonstration plus algébrique de ce résultat. Je remercie grandement Marie-France VIGNÉRAS qui m'a suggéré cette méthode.

1. Généralités

1.1. Quelques définitions et notations. — Soient F un corps local non archimédien de caractéristique résiduelle différente de 2 à corps résiduel fini, $\mathcal{O}$ son anneau des entiers, ϖ une uniformisante de F et ψ un caractère continu de F de conducteur $\mathcal{O}$. Soit F' égal à F ou à l'extension quadratique non ramifiée de F, et $\mathcal{O}'$ son anneau des entiers.

Considérons une paire réductive duale (U_1, U_2), irréductible, non ramifiée sur F, de type I, (*cf.* [5, paragraphe 7]). Les groupes U_1 et U_2 sont, sous ces hypothèses, quasi-déployés.

Soient W l'espace symplectique associé à cette paire irréductible et (ω_ψ, S) un modèle de la représentation de Weil du groupe métaplectique $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$, extension par $\mathbb{C}^\times$ de $\mathrm{Sp}(W)$. On notera $\widehat{\mathrm{Sp}}(W)$ le revêtement à deux feuillets de $\mathrm{Sp}(W)$, extension de $\mathrm{Sp}(W)$ par le groupe à deux éléments $\{1, \eta\}$.

Pour tout sous-groupe fermé G de $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$ nous noterons $\widetilde{G}$ son image réciproque dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$.

Soit $i : \mathbb{C}^\times \to \widetilde{G}$ l'injection évidente. Dans tout l'article, les représentations (π, V) que nous considèrerons, seront supposées vérifier l'hypothèse :

$$\pi \circ i(z) = z\, \mathrm{id}_V,$$

pour tout $z \in \mathbb{C}^\times$. De telles représentations sont dites spécifiques.

Notons U l'un quelconque des membres de la paire (U_1, U_2). La paire considérée étant non ramifiée, l'espace hermitien associé à U admet un réseau autodual L. Fixons un tel réseau L.

Nous appellerons *sous-groupe parabolique* de $\widetilde{U}$, l'image réciproque $\widetilde{P}$ d'un sous-groupe parabolique P de U. Une décomposition de Lévi $P = MN$ se remonte en une décomposition dite encore de Lévi $\widetilde{P} = \widetilde{M}N$, le radical unipotent N d'identifiant canoniquement à un sous-groupe de $\widetilde{U}$. Avec ces définitions, les résultats de [2, chapitre 1, paragraphe 2] s'appliquent à $\widetilde{U}$.

Fixons un tore T de U et B un sous-groupe de Borel contenant T. Soit I le sous-groupe d'Iwahori standard de U correspondant à B. On note $\mathcal{H}(I\backslash\widetilde{U}/I)$ l'algèbre des fonctions f sur $\widetilde{U}$, bi-invariantes par I, à support compact modulo $i(\mathbb{C}^\times)$ et telles que

$$f\big(u(i(z))\big) = z^{-1} f(u)$$

pour tous $z \in \mathbb{C}^\times$, $u \in \widetilde{U}$.

1.2. Un résultat préliminaire. — La proposition suivante est une généralisation à certaines représentations lisses du théorème de CASSELMAN [4, 3.3.3]. Soit $P = MN$ un sous-groupe parabolique de U, qui contient B.

PROPOSITION. — *Soit π une représentation lisse de $\widetilde{U}$ dans un espace V. La projection canonique de V sur son module de Jacquet V_N se restreint en un isomorphisme de V^I sur $(V_N)^{\widetilde{M}\cap I}$.*

Démonstration. — Nous sommes amenés à étudier au préalable l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(I\backslash\widetilde{U}/I)$.

1. Supposons U scindé dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$. Dans ce cas l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(I\backslash\widetilde{U}/I)$ est isomorphe à l'algèbre de Hecke $\mathcal{H}(I\backslash U/I)$ pour le groupe U lui-même. Il est alors bien connu que les fonctions caractéristiques des doubles classes IuI pour $u \in I\backslash U/I$, forment une base de l'espace vectoriel $\mathcal{H}(I\backslash U/I)$ et sont inversibles dans $\mathcal{H}(I\backslash U/I)$ (*cf.* par exemple [3, théorème 3.6]).

2. Supposons maintenant U non scindé dans $\widetilde{\mathrm{Sp}}(W)$. D'après les résultats du chapitre 3 de [7], le groupe U est dans ce cas un groupe

symplectique $U = \mathrm{Sp}(W')$. L'algèbre de Hecke considérée est alors isomorphe à la sous-algèbre $\mathcal{H}^-(I\backslash \widehat{\mathrm{Sp}}(W')/I)$ de $C_c(I\backslash \widehat{\mathrm{Sp}}(W')/I)$ formée des fonctions f qui vérifient : $f(\hat{g}\eta) = -f(\hat{g})$, pour tout $\hat{g} \in \widehat{\mathrm{Sp}}(W')$.

Notons $C(g)$ la fonction caractéristique de IgI pour $g \in \widehat{\mathrm{Sp}}(W')$. D'après un résultat de SAVIN (*cf.* [9, proposition 3.1.4]) les fonctions $C(w) - C(w\eta)$, pour w parcourant l'image réciproque dans $\widehat{\mathrm{Sp}}(W')$ du normalisateur du tore T, forment une base de $\mathcal{H}^-(I\backslash \widehat{\mathrm{Sp}}(W')/I)$ et sont inversibles.

La démonstration de la proposition I.4.3 de [8] s'applique alors sans changement.

1.3. Caractérisation des représentations modérément ramifiées.

Soit (π, V) une représentation de $\widetilde{U}$, lisse et irréductible. D'après les résultats de [2, chapitre 1, paragraphe 2], il existe un sous-groupe parabolique $\widetilde{P} = \widetilde{M}N$ de $\widetilde{U}$ et une représentation $\pi_{\widetilde{M}}$ irréductible, lisse, cuspidale de $\widetilde{M}$ telle que π soit sous-quotient de la représentation induite $\mathrm{Ind}_{\widetilde{P}}^{\widetilde{U}} \pi_{\widetilde{M}}$. Soit $\widetilde{T}$ l'image réciproque dans $\widetilde{U}$ de T, qui est commutative. Soit ν un caractère de $\widetilde{T}$, trivial sur $\widetilde{T} \cap I$. Deux tels caractères se déduisent l'un de l'autre par un caractère non ramifié de T.

Notons alors $\mathrm{Alg}(\widetilde{T}, \nu)$ la catégorie, définie par Bernstein, des représentations lisses de $\widetilde{U}$ dont tout sous-quotient irréductible intervient comme sous-quotient d'une représentation induite $\mathrm{Ind}_{\widetilde{T}N}^{\widetilde{U}} \nu \otimes \chi$, où χ est un caractère non ramifié de T, *cf.* [2, chapitre 1, proposition 2.8].

LEMME 1.3.1. — *Soit (π, V) une représentation spécifique lisse irréductible de $\widetilde{U}$. La représentation π admet un vecteur non nul invariant par I si et seulement si elle appartient à* $\mathrm{Alg}(\widetilde{T}, \nu)$.

Démonstration. — La représentation π appartient à $\mathrm{Alg}(\widetilde{T}, \nu)$ si et seulement si π_N n'admet de composant cuspidal que pour N maximal et dans ce cas les seules représentations cuspidales qui interviennent sont de la forme $\nu \otimes \chi$.

Puisque ν est trivial sur $\widetilde{T} \cap I$, cela revient à dire $(V_N)^{\widetilde{T} \cap I} \neq \{0\}$, ce qui équivaut par la PROPOSITION 1.2 à $V^I \neq \{0\}$.

PROPOSITION 1.3.2. — *Soit (π, V) une représentation lisse de $\widetilde{U}$. La représentation π appartient à* $\mathrm{Alg}(\widetilde{T}, \nu)$ *si et seulement si V est $\widetilde{U}$-engendré par V^I.*

Démonstration. — On utilise les résultats de BERNSTEIN, *cf.* [2, chapitre 1, paragraphe 2].

• Soit (π, V) telle que V soit $\widetilde{U}$-engendré par V^I. Elle se décompose en somme directe :

$$\pi = \pi_1 \oplus \pi_2,$$

où π_1 appartient à $\mathrm{Alg}(\widetilde{T}, \nu)$ et π_2 appartient à une somme de sous-catégories de la catégorie des représentations lisses de $\widetilde{U}$, en somme directe avec $\mathrm{Alg}(\widetilde{T}, \nu)$. On déduit alors de (1.3.1) que π_2 n'a pas d'invariant non nul par I et donc π appartient à $\mathrm{Alg}(\widetilde{T}, \nu)$.

• Réciproquement, soit $\pi \in \mathrm{Alg}(\widetilde{T}, \nu)$ et (π', V') la sous-représentation engendrée par V^I. Soit E un sous-quotient irréductible de V/V'. Puisque V/V' n'a pas d'invariant non nul par I, il résulte du LEMME 1.3.1 appliqué à E que $E = \{0\}$. On a donc $V/V' = \{0\}$.

2. Application à la représentation métaplectique

2.1. Le résultat fondamental. — Pour $i \in \{1, 2\}$, soient I_i, (resp. B_i), (resp. T_i), le sous-groupe d'Iwahori, (resp. le sous-groupe de Borel), (resp. le tore), associés comme en 1 à U_i.

THÉORÈME. — *L'espace S^{I_1} est $\widetilde{U}_2$-engendré par ses I_2-invariants.*

Démonstration. — On utilise les calculs explicites des coinvariants de [6, théorème 2.8].

1. Supposons U_1 compact.

(a) Supposons U_2 compact. Dans ce cas $U_1 \times U_2$ est inclus dans le stabilisateur d'un réseau autodual de W. Sous ces hypothèses S est semi-simple sous l'action de $U_1 \times U_2$ et le résultat cherché résulte de $S^{U_1 \times U_2} \neq \{0\}$ et de la conjecture de Howe.

(b) Supposons maintenant U_2 non compact. Calculons le module de Jacquet S_{N_2} pour un sous-groupe parabolique $P_2 = M_2 N_2$ de U_2, stabilisateur d'un sous-espace totalement isotrope maximal.

• Supposons U_2 déployé. On utilise le théorème 2.8 (ii) de [6]. Le module de Jacquet S_{N_2} est de dimension 1, le groupe U_1 opère trivialement : $S_{N_2} = S_{N_2}^{U_1}$, et $\widetilde{M_2}$ opère par un caractère non ramifié :

$$S_{N_2}^{U_1} = S_{N_2}^{U_1 \times (M_2 \cap I_2)}. \tag{1}$$

Donc : $S^{U_1 \times I_2} \neq 0$. Et S^{U_1}, étant $\widetilde{U}_2$-irréductible, est engendré par $S^{U_1 \times I_2}$ comme $\widetilde{U}_2$-module.

• Supposons U_2 non déployé. Notons U_2^0 sa partie anisotrope. D'après [6, théorème 2.8 (ii)] :

$$S_{N_2} = \chi \otimes S^0,$$

où χ est un caractère non ramifié de U_1M_2 et S^0 l'espace de la représentation métaplectique associé à la paire (U_1, U_2^0). Le raisonnement précédent s'applique à cette paire et (1) est encore vérifié, d'où la même conclusion.

2. Supposons maintenant U_1 non compact. On va maintenant appliquer la partie (i) du théorème 2.8 de [6]. On fait une récurrence sur l'indice de Witt m_1 de U_1. Soit $P_1 = M_1N_1$ un sous-groupe parabolique de U_1, stabilisateur d'une droite isotrope et contenant B_1.

D'après la PROPOSITION 1.2 l'espace S^{I_1} est isomorphe à $S_{N_1}^{M_1\cap I_1}$ en tant que $\widetilde{U}_2$-module, et nous sommes ramenés à montrer que $S_{N_1}^{M_1\cap I_1}$ est $\widetilde{U}_2$-engendré par ses I_2-invariants.

Pour une paire réductive duale (G_1, G_2), si m_1' et m_2' sont les indices de Witt respectifs de G_1 et G_2, on notera $(\omega_{m_1',m_2'}, S_{m_1',m_2'})$ la représentation de $\widetilde{G}_1\widetilde{G}_2$ associée par KUDLA, (*cf.* [6, paragraphe 2]), à (ω, S). Soit m_2 l'indice de Witt de U_2.

(a) Supposons U_2 compact. D'après [6, théorème 2.8 (i)], appliqué avec $j = 1$ et $k = 0$ (notations de KUDLA) :

$$S_{N_1} = \chi \otimes \omega_{m_1-1,0},$$

où χ est un caractère non ramifié de $\widetilde{M_1}\widetilde{U}_2$. L'hypothèse de récurrence s'applique à $S_{m_1-1,0}^{M_1\cap I_1}$, et

$$S_{N_1}^{M_1\cap I_1} = \chi \otimes S_{m_1-1,0}^{M_1\cap I_1}$$

est donc engendré par ses I_2-invariants.

(b) Supposons maintenant U_2 non compact. D'après [6, théorème 2.8 (i)], appliqué avec $j = 1$ et $k = 1$, on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ind}_{\widetilde{M}_1\widetilde{P}_2}^{\widetilde{M}_1\widetilde{U}_2} \chi' \otimes \rho \otimes \omega_{m_1-1,m_2-1} \longrightarrow S_{N_1} \longrightarrow \chi \otimes \omega_{m_1-1,m_2} \longrightarrow 0,$$

où P_2 est un sous-groupe parabolique de U_2, stabilisateur d'une droite isotrope, χ et χ' des caractères non ramifiés de $\widetilde{M_1}\widetilde{P}_2$ et ρ la représentation naturelle de $F^\times \times F^\times$ dans $C_c^\infty(F^\times)$. On remarque que tout vecteur invariant par $\widetilde{T}_1 \cap I$ dans ρ est aussi invariant par $\widetilde{T}_2 \cap I$. Soit X l'espace de la représentation $\chi' \otimes \rho \otimes \omega_{m_1-1,m_2-1}$ et Y celui de $\chi \otimes \omega_{m_1-1,m_2}$. Par exactitude du foncteur $V \to V^\Gamma$ pour un module lisse V et un sous-groupe compact Γ, on obtient donc :

$$0 \longrightarrow \big(\mathrm{Ind}_{\widetilde{M}_1\widetilde{P}_2}^{\widetilde{M}_1\widetilde{U}_2} X\big)^{M_1\cap I_1} \longrightarrow S_{N_1}^{M_1\cap I_1} \longrightarrow Y^{M_1\cap I_1} \longrightarrow 0.$$

La catégorie $\mathrm{Alg}(\widetilde{T},\nu)$ est stable par induction et extension, *cf.* [2]. Par hypothèse de récurrence, il résulte donc de (1.3.2), appliqué à $X^{M_1\cap I_1}$ et à $Y^{M_1\cap I_1}$, que $S_{N_1}^{M_1\cap I_1}$ est $\widetilde{U}_2$-engendré par ses I_2-invariants.

2.2. Correspondance de Howe.

THÉORÈME. — *Dans la correspondance de Howe, l'image d'une représentation (π_1,V_1) de $\widetilde{U}_1$, qui a un vecteur invariant par le sous-groupe d'Iwahori I_1 est une représentation (π_2,V_2) de $\widetilde{U}_2$, qui a un vecteur invariant par le sous-groupe d'Iwahori I_2.*

Démonstration. — Puisque I_1 est compact, on déduit de la surjection $\widetilde{U}_1\times\widetilde{U}_2$-équivariante de S sur $V_1\otimes V_2$, une surjection $\widetilde{U}_2$-équivariante de S^{I_1} sur $V_1^{I_1}\otimes V_2$. D'après le théorème précédent, l'image de $S^{I_1\times I_2}$ par cette surjection est non nulle et contenue dans $V_1^{I_1}\otimes V_2^{I_2}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] AUBERT (A.-M.). — Représentation métaplectique et sous-groupes d'Iwahori, *Prépublication.*

[2] BERNSTEIN (J.), DELIGNE (P.), KAZHDAN (D.) et VIGNERAS (M.-F.). *Représentations des groupes réductifs sur un corps local.* — Paris, Hermann, 1984.

[3] CARTIER (P.). — Representations of reductive p-adic groups : a survey, *Proc. Sympos. Pure Math.*, t. **33**, 1979, p. 111–155.

[4] CASSELMAN (W.). — Introduction to the theory of admissible representations of p-adic reductive groups, *Prépublication.*

[5] HOWE (R.). — θ-series and invariant theory, *Proc. Sympos. Pure Math.*, t. **33**, 1979, p. 275–285.

[6] KUDLA (S.). — On the local theta-correspondence, *Invent. Math.*, t. **83**, 1986, p. 229–255.

[7] MOEGLIN (C.), VIGNÉRAS (M.-F.) et WALDSPURGER (J.-L.). — Correspondances de Howe sur un corps p-adique, *Springer Lecture Notes.*

[8] MOEGLIN (C.) et WALDSPURGER (J.-L.). — Sur l'involution de Zelevinski, *J. Reine Angew. Math.*, t. **372**, 1986, p. 136–177.

[9] SAVIN (G.). — Local Shimura Correspondence, *Prépublication.*