BULLETIN DE LA S. M. F.

ERIC LEICHTNAM

Régularité microlocale pour des problèmes de Dirichlet non linéaires non caractéristiques d'ordre deux à bord peu régulier

Bulletin de la S. M. F., tome 115 (1987), p. 457-489
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1987__115__457_0>

Bull. Soc. math. France,
115, 1987, p. 457–489.

RÉGULARITÉ MICROLOCALE POUR DES PROBLÈMES DE DIRICHLET NON LINÉAIRES NON CARACTÉRISTIQUES D'ORDRE DEUX A BORD PEU RÉGULIER

PAR

ERIC LEICHTNAM (*)

RÉSUMÉ. — J.-M. BONY a étudié la régularité microlocale des solutions réelles d'une équation non linéaire générale au-delà des chocs. M. TOUGERON a étudié la réflexion des singularités (en dessous de l'interaction) pour des problèmes aux limites non linéaires non caractéristiques à bord C^∞. L'objet de cet article est d'étudier, d'abord en dessous de l'interaction, le comportement (réflexion, diffraction, rayons glissants) des singularités microlocales d'une solution réelle d'un problème de Dirichlet d'ordre deux non linéaire non caractéristique au voisinage d'un bord *peu régulier*. Si les singularités du bord sont de « type conormal » et incluses dans la zone elliptique de l'opérateur linéarisé, alors la synthèse des résultats précédents permet d'obtenir, dans la zone d'interaction, un résultat global de propagation de singularités.

ABSTRACT. — J.-M. BONY has studied the microlocal regularity of real solutions of a general non linear equation beyond the shocks. M. TOUGERON has studied the reflexion of singularities (under the region of interaction) for non characteristic non linear boundary value problems with smooth boundaries. The aim of this paper is to study (under the interaction first), the behaviour (reflexion, diffraction, gliding rays) of microlocal singularities of a real solution of a non characteristic non linear Dirichlet problem of the second order with a *non smooth* boundary. If the singularities of the boundary are of "conormal type" and contained in the elliptic region of the linearized operator then the synthesis of the preceeding results allow us to obtain, in the region of interaction, a global result of propagation of singularities.

1. Introduction

Dans [5] BONY a étudié la régularité microlocale des solutions réelles d'une équation non linéaire générale au-delà de chocs et en dessous de l'interaction. Dans [21] M. TOUGERON a étudié, en autres, la réflexion des

(*) Texte reçu le 20 mai 1986, révisé le 15 octobre 1986.

E. LEICHTNAM, École Normale Supérieure, C.M.A., 45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1987/04 457 33/$5.30

singularités (en dessous de l'interaction) pour des problèmes aux limites non linéaires non caractéristiques à bord C^∞ (*voir* aussi [1]). La notion de front d'onde d'une sous-variété de régularité Sobolev (ou Hölderienne) limitée étant définie dans [12], l'objet de cet article est d'étudier, en dessous de l'interaction (*voir* cependant § 7 et § 8) le comportement (réflexion, diffraction, rayons glissants) des singularités microlocales d'une solution réelle d'un problème de Dirichlet d'ordre deux non linéaire non caractéristique au voisinage d'un bord *peu régulier.* Pour obtenir nos résultats nous redresserons le bord peu régulier (*voir* section 4) introduisant ainsi dans l'équation des termes peu réguliers à régularité microlocale additionnelle; nous paralinéariserons l'équation, nous utiliserons les espaces $H^{s,s'}$ définis par HÖRMANDER [8] et le calcul paradifférentiel tangentiel développé dans [21] dont nous rappellerons quelques résultats dans la section 3.

Dans la section 2 nous reprenons (déf. 2.1) la notion exposée dans [21] de régularité microlocale en un point du bord (non caractéristique) et énonçons nos résultats : théorèmes 2.5, 2.7, 2.10 et 2.13. Le théorème 2.5 découle des résultats de [21] et étudie la réflexion des singularités par un bord peu régulier. Le théorème 2.7 étudie la diffraction des singularités, il précise dans les espaces de Sobolev et étend au cas non linéaire le résultat établi (à partir d'IVRII [9]) dans le chapitre 24 de [8] dans le cas des singularités C^∞ et d'un bord régulier. La preuve du théorème 2.7 est exposée dans la section 5, nous suivons de près la preuve donnée dans [8] et l'adaptons au cas paradifférentiel. Nous supposerons que la projection sur la base du champ hamiltonien du symbole principal de l'équation linéarisée ne s'annule pas, cette hypothèse (vérifiée par l'opérateur des ondes) nous permettra de ne pas consommer de dérivées en x (*voir* lemme 24.4.3 de [8] et lemme 5.2). Le théorème 2.10 étudie le cas des rayons glissants ayant un contact d'ordre limité avec le bord, il précise dans les espaces de Sobolev et étend au cas non linéaire le résultat de MELROSE-SJÖSTRAND [15] dans le cas des singularités C^∞ et d'un bord régulier. La preuve du théorème 2.10 est exposée dans la section 6, nous suivons de près la preuve donnée dans [15] et l'adaptons au cas paradifférentiel.

Pour ce qui des résultats relatifs à l'interaction pour des équations semi-linéaires hyperboliques, le travail de BEALS [2] montre qu'en dimension supérieure à deux il est nécessaire de faire certaines hypothèses sur la régularité des solutions dans le passé pour limiter « l'étalement » des singularités dans l'avenir. Une condition appropriée est celle de « conormalité » par rapport à certaines hypersurfaces. Il a été prouvé dans

Bony ([6], [7]), Melrose-Ritter [14] que la régularité est préservée pour certaines interactions d'ondes conormales. Guidés par les travaux de Bony nous définissons dans la section 7 le concept de sous-variété V de classe $H^{s,k}_\Lambda$, V ayant des singularités de type « conormal » par rapport à une hypersurface Λ ($\subset V$) de classe $H^{s+k-(1/2)}$. Ceci nécessite au préalable l'étude d'algèbres de fonctions $H^{s,k}_{\Lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient des propriétés d'invariance par difféormorphisme, Λ_1 désignant une hypersurface de classe $H^{s+k-(1/2)}$ de $\mathbb{R}^n$. Le théorème 2.13 considère le cas d'une solution u assez régulière d'une équation quasi linéaire d'ordre deux et d'un bord $\partial\Omega$ de classe $H^{s,\infty}_\Lambda$. Si $u|_{\partial\Omega}$ est de classe $H^{s,\infty}_\Lambda$ et si Λ est inclus dans la zone elliptique du symbole principal de l'équation linéarisée alors le théorème 2.13 affirme (sous des hypothèses convenables) que les singularités de $\partial\Omega$ et $u|_{\partial\Omega}$ ne produiront aucune singularité hors du conormal de Λ dans la solution u. Dans la section 8, on prouve le théorème 2.13 en travaillant dans des cartes locales, en utilisant un argument de commutation analogue à celui de [5] et en invoquant les théorèmes 2.7 et 2.10. Enfin le cas où les singularités du bord sont incluses dans la zone hyperbolique du symbole principal peut être traité à l'aide de [16].

2. Énoncé des résultats

Soit Ω un ouvert à bord de $\mathbb{R}^n$ (localement) défini par une inéquation $x_1 \geqslant f(x')$ où x' désigne $(x_2, \ldots, x_n)$. f appartient à l'espace de Sobolev H^s_{loc} avec $s > 4 + n/2$. Nous considérons une solution *réelle* u de classe $H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ de l'équation du second ordre $F(x, \partial^\alpha u) = 0$ dans Ω où $F(x, z_\alpha)$ $|\alpha| \leqslant 2$ est une fonction réelle C^∞. Nous supposerons *toujours* que l'opérateur différentiel linéarisé de $F(x, \partial^\alpha u)$:

$$(1) \qquad \tilde{F}(x, D_x)v(x) = \sum_{|\alpha| \leqslant 2} (\partial_{z_\alpha} F)(x, \partial^\beta u(x))\, \partial^\alpha v(x)$$

est non caractérisque en tout point de $\partial\Omega$ et que son symbole principal $p(x, \xi)$ est de type principal reel : p est réel et $dp \neq 0$ sur $p^{-1}(0)$. Soit $\alpha^0 = (f(x'_0), x'_0, \xi'_0) = (x_0, \xi_0)$ un point de $T^*\partial\Omega \setminus 0$, on dit que α^0 n'est pas dans le front d'onde d'ordre $H^{s''}$ de $\partial\Omega$ (noté $WF_{H^{s''}}\partial\Omega$, *voir* [12]) où $s'' \leqslant 2s - 2 - n/2$ s'il existe un operateur pseudo-différentiel A d'ordre 0 elliptique en (x'_0, ξ'_0) tel que $Af \in H^{s''}$ (on dit alors que f est microlocalement de classe $H^{s''}$ en α^0 ce qu'on note $f \in H^{s''}_{\alpha^0}$), une telle proprieté ne dépend pas du choix de la carte car $s'' \leqslant 2s-((n-1)/2)-1$ (*voir* [12]). La proposition suivante est empruntée à M. TOUGERON [21], elle permet de définir de manière invariante (pour u) la notion de régularité microlocale jusqu'au bord au point $\alpha^0 \in T^* \partial\Omega$. Posons $\chi_1(x_1, x')=(x_1+f(x'), x')$ où x' désigne $(x_2, \ldots, x_n)$; dans le système de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ Ω et $\partial\Omega$ sont respectivement définis par $x_1 \geqslant 0$ et $x_1=0$.

PROPOSITION ET DÉFINITION (M. TOUGERON) 2.1. — S'il existe un opérateur pseudo-différentiel tangentiel $A \in T^0(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ (*cf.* [15]) d'ordre 0, proprement supporté, elliptique en (x_0, ξ'_0) et tel que $A(u \circ \chi_1)(x_1, \ldots, x_n)$ appartienne à $H^{s'}_{\text{loc}}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ avec $s' \leqslant s''$ alors cette propriété est vraie dans toute autre carte de bord (définie par un graphe) de $\partial\Omega$ relative à $\alpha^0 \notin WF_{H^{s'}}(\partial\Omega)$. En ce cas on dit que u est microlocalement de classe $H^{s'}$ au point α^0, ce qu'on note $u \in H^{s'}_{\alpha^0}$.

Remarque 2.2. — Le théorème d'inversion microlocale de [12] permet alors de voir qu'il existe $\varepsilon>0$ tel que u soit microlocalement de classe $H^{s'}$ aux points $(y_1, y', {}^t\chi_1^{-1'}(y), (\xi_1, \xi'))$ tels que $\xi_1 \in \mathbb{R}$, y' et ξ' soient dans des petits voisinages de x'_0 et ξ'_0, et $0<y_1-f(y')<\varepsilon$.

Preuve. — Voir appendice à la fin de l'article.

Maintenant nous rappelons quelques définitions géométriques (*cf.* [8], [15]) pour les points du bord. Notons j^* la surjection naturelle de $T^*_{x_0}\mathbb{R}^n$ sur $T^*_{x_0}\partial\Omega$, son noyau est le conormal $N^*_{x_0}\partial\Omega$. Notons $p(y, \xi)$ le symbole principal de l'opérateur linéarisé (1) et H_p le champ hamiltonien de p, il est de classe $\mathscr{C}^2$ car $s>4+n/2$. Soit η_0 un point de $N^*_{x_0}\partial\Omega\setminus 0$, $p(x_0, \eta_0)$ est non nul car $\partial\Omega$ est non caractéristique.

Ω [resp. $\partial\Omega$] étant définis par $\varphi \geqslant 0$ [resp. $=0$] où φ est de classe C^1 rappelons la classique :

DÉFINITION 2.3. — Soit $\alpha^0 \in T^*_{x_0}\partial\Omega\setminus 0$ et ξ_0 un antécédent de α^0 par j^*. α^0 est dit :

(*a*) point elliptique (au sens de MELROSE [13]) si le trinôme

$$Q(\lambda)=p(x_0, \xi_0+\lambda\eta_0)$$

n'a aucune racine réelle;

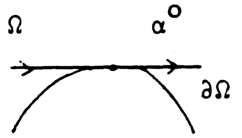
(*b*) point hyperbolique si $Q(\lambda)$ possède deux racines réelles distinctes;

(*c*) point glancing si $Q(\lambda)$ possède une racine réelle double λ_1; et si de plus $H^2_p.\varphi(x_0, \xi_0+\lambda_1\eta_0)>0$, α^0 est dit point de diffraction.

Remarque 2.4. — 1° Dans le cas (*b*), si λ_1 et λ_2 désignent les deux racines réelles, il y a (dans $\mathring{\Omega}$) deux demi-bicaractéristiques issues respectivement de $(x_0, \xi_0+\lambda_1\eta_0)$ et $(x_0, \xi_0+\lambda_2\eta_0)$. Par abus nous dirons qu'elles sont « issues de α^0 », α^0 est l'image par j^* de ces deux points.

2° Dans le cas (*c*) où α^0 est point de diffraction, les deux demi-bicaractéristiques (dans $\mathring{\Omega}$) se raccordant en $(x_0, \xi_0+\lambda_1\eta_0)$ y ont un contact d'ordre 1.

On peut parler d'un seul rayon (rasant) « issu de α^0 » :



Le théorème suivant découle des résultats de M. TOUGERON et étudie le comportement de la solution réelle u dans les régions elliptiques et hyperboliques.

THÉORÈME 2.5. — *Soient $s'<s''$ des réels inférieurs ou égaux à $2s-2-n/2$. Supposons que $u|_{\partial\Omega}$ soit de classe H^s et que α^0 ne soit pas dans le front d'onde d'ordre $H^{s''}$ de $\partial\Omega$ ni dans celui d'ordre $H^{s'}$ de $u|_{\partial\Omega}$ (cette expression a un sens,* voir [12]). *Alors on a :*

1° *Si α^0 est un point elliptique et $s'=s''$ alors $u\in H^{s'}_{\alpha^0}$ (déf. 2.1).*

2° *Si α^0 est un point hyperbolique, $s'\leqslant s''-1$, et u est microlocalement de classe $H^{s'}$ (au voisinage de x_0) sur un demi-arc de bicaractéristique de p issu de α^0, alors $u\in H^{s'}_{\alpha^0}$.*

Remarque 2.6. — Dans le cas 2°, la remarque 2.2 et le théorème de propagation de singularités de J. M. BONY [5] montrent que u est microlocalement de classe $H^{s'}$ sur l'autre demi-bicaractéristique « issue de α^0 » (tant qu'elle ne rencontre pas le bord).

Le théorème suivant étudie le comportement de la solution (H^s_{loc}, $s>4+n/2$) réelle u au voisinage d'un point de diffraction, il précise le résultat établi dans le chapitre 24 de [8] (singularités microlocales C^∞, bord régulier) dans les espaces de Sobolev et l'étend au cas non linéaire.

THÉORÈME 2.7. — *Soient s' et s'' des réels tels que*

$$1+s'\leqslant s''\leqslant 2s-2-n/2.$$

Supposons que $u|_{\partial\Omega}$ soit de classe H^s et considérons un point de diffraction α^0 qui ne soit pas dans le front d'onde d'ordre $H^{s''}$ de $\partial\Omega$ ni dans celui *d'ordre $H^{s'}$ de $u|_{\partial\Omega}$. Supposons que, dans un petit voisinage de x_0, u soit microlocalement de classe $H^{s'}$ en un point (à l'intérieur de Ω) d'une demi-bicaractéristique de p issue de α^0. Enfin supposons que la projection sur la base de $H_p(x_0, \xi_0+\lambda_1\eta_0)$ soit non nulle, λ_1 étant le réel de la définition 2.3.c). Alors $\forall\varepsilon>0$, $u\in H^{s'-\varepsilon}_{\alpha^0}$.*

Remarque 2.8. — La dernière hypothèse est satisfaite par l'opérateur des ondes (par exemple). Sur l'autre demi-bicaractéristique (tant qu'elle ne rencontre pas le bord) u est microlocalement de classe $H^{s'-\varepsilon}$ $\varepsilon>0$.

Dans la section 6 nous démontrons le théorème 2.10 qui traite le cas des rayons glissants, il précise le résultat établi dans [15] (singularités microlocales C^∞, bord régulier) dans les espaces de Sobolev et l'étend au cas non linéaire.

HYPOTHÈSES 2.9. — Nous supposerons $s>4+n/2$, que $u|_{\partial\Omega}$ et $\partial\Omega$ sont microlocalement de classe $H^{s''}$ $(s''\leqslant 2s-2-n/2)$ hors d'un ensemble Z conique fermé inclus dans la zone elliptique du symbole principal p de l'opérateur linéarisé, et que dp et la 1-forme fondamentale ω de $T^*\bar\Omega$ sont linéairement indépendantes sur $\Sigma(p)=p^{-1}(0)\cap T^*\bar\Omega\setminus 0$. Rappelons que $\partial\Omega$ est non caractéristique pour p, nous supposerons que les restrictions à $T^*\bar\Omega|_{\partial\Omega}$ de dp et ω sont linéairement indépendantes sur $\Sigma(p)$ et que H_p est au plus tangent à $\partial T^*\Omega\setminus 0$ en $p=0$ à l'ordre $s-1-n/2$ (exclu), ceci signifie que si Ω est définie localement par une inéquation $\varphi(x)\geqslant 0$ où φ est H^s et si $\alpha^0\in T^*\partial\Omega\setminus 0$ est un quelconque point de glancing (déf. 2.3) alors il existe un entier naturel $k<s-1-n/2$ tel qu'au point $(x_0, \xi_0+\lambda_1\eta_0)$ (notation de 2.3) $H_p^j\varphi$ est nul pour $j\leqslant k-1$ et $H_p^k\varphi$ est non nul. Cette dernière hypothèse permet de montrer (*voir* [8] ou [15]) que le champ H_p définit un flot dont les courbes sont appelées bicaractéristiques généralisées. En suivant de près [15] nous démontrerons le :

THÉORÈME 2.10. — *Soit s' un réel strictement inférieur à $s''-1$. Supposons que u soit microlocalement de classe $H^{s'}$* (voir *déf.* 2.1) *en un point d'un arc Γ de bicaractéristique généralisée et que Γ ne contienne aucun point de diffraction. Alors en tout point de Γ, u est microlocalement de classe $H^{s'}$.*

Remarque 2.11. — Comme $s''-2\leqslant 2s-4-n/2$ nous nous ramènerons à une équation para-différentielle tangentielle où le second membre est microlocalement de classe $H^{s''-2}$ sur un voisinage de Γ, dans l'énoncé précédent il y a donc une perte de $1+\varepsilon$ par rapport à la régularité du second membre.

Dans la section 7 nous étudions des algèbres de fonctions $H^{s,k}_{\Lambda_1}(\mathbb{R}^n)$ qui vérifient des propriétés d'invariance par difféomorphisme et ont une régularité de « type conormal » (*voir* [6]) par rapport à une hypersurface Λ_1 de $\mathbb{R}^n$ de classe $H^{s+k-(1/2)}$. Ceci nous permet de définir de manière invariante le concept de sous-variété V de classe $H^{s,k}_{\Lambda}$ (déf. 7.10). Dans la section 8 nous démontrons un résultat d'analyse globale, avant de l'énoncer nous introduisons quelques notations.

NOTATIONS 2.12. — Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dont le bord $\partial\Omega$ est de classe $H^{s,+\infty}_{\Lambda}$ (*voir* def. 7.10) par rapport à une hypersurface C^∞ Λ. Considérons une fonction u de classe $H^s_{\text{loc}}(\bar{\Omega})$ $s>4+n/2$ solution d'une équation quasi linéaire d'ordre 2 $Pu=0$ et telle que $u|_{\partial\Omega}$ soit de classe $H^{s,\infty}_{\Lambda}$ (déf. 7.12). Nous supposerons que le conormal de Λ est inclus dans la zone elliptique du symbole principal p de l'équation linéarisée et que p vérifie toutes les hypothèses 2.9. Alors nous démontrerons le :

THÉORÈME 2.13. — *Supposons que chaque bicaractéristique (maximale) généralisée de p possède un point en lequel u est microlocalement de classe C^∞ et qu'en chaque point de diffraction la projection sur la base de H_p est non nulle. Alors u est de classe C^∞ à l'intérieur de Ω et même microlocalement de classe C^∞ en tout point de $T^*\partial\Omega\setminus 0$ qui n'appartient pas au conormal de Λ.*

Remarque 2.14. — Donnons un exemple. Soit $\alpha(x_1, \ldots, x_{n-1})$ une fonction de classe $H^{s,\infty}_{x_1=0}$ (*voir* [6]) de hessienne définie positive en tout point, et telle que les gradients de α et $(x_2, \ldots, x_{n-1}) \to \alpha(0, x_2, \ldots, x_{n-1})$ soient de norme >1. Désignons par Ω l'ouvert à bord de $\mathbb{R}^n$ défini par $t \geqslant -\alpha(x)$ et considérons une fonction u de classe $H^s(\bar{\Omega})$ où $s>n/2+4$ vérifiant dans $\bar{\Omega}$ une équation du type :

$$\partial_t^2 u - \sum_{j=1}^{n-1} \partial_{x_j}^2 u + F(t, x, u, \nabla u) = 0 \tag{2}$$

où F est de classe C^∞. Nous supposerons aussi $u|_{\partial\Omega} \in H^{s,\infty}_{\Lambda}$ et u de classe C^∞ pour tout $t \ll 0$. Comme la hessienne de α est définie positive les points glancing sont en fait des points de diffraction. Enfin le long de toute bicaractéristique généralisée t est une fonction monotone, donc toute bicaractéristique rencontrera une région où u est C^∞. Le théorème 2.13 dit alors que u est C^∞ à l'intérieur de Ω.

3. Rappel de quelques résultats de [21]

Suivant HÖRMANDER [8], pour s et s' réels et n entier, $n \geqslant 2$, on désigne par $H^{s,s'}(\mathbb{R}^n)$ l'espace des distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ dont la transformée de Fourier $\hat{u}(\xi)$ vérifie :

$$\|u\|^2_{(s,s')} = (2\pi)^{-n} \int (1+|\xi|^2)^s (1+|\xi'|^2)^{s'} |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$$

où $\xi = (\xi_1, \xi')$ est la variable duale de $x = (x_1, x')$. L'espace $H^{s,s'}(\mathbb{R}^n)$ est une algèbre quand : $s > 1/2$, $s+s' > n/2$, $s + 2s' > 1/2$. $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ désigne le demi-plan : $x_1 \geqslant 0$.

DÉFINITION 3.1. — Soient (x_0, ξ'_0) un point de $\bar{\mathbb{R}}^n_+ \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus 0)$ et u appartenant à $H^{s,s'}_{\text{loc}}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$. On dit que u est microlocalement de classe $H^{s,\sigma'}$ en (x_0, ξ'_0) s'il existe un opérateur T pseudo-différentiel tangentiel appartenant à $T^0(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ (*cf.* [15]), elliptique en (x_0, ξ'_0), tel que $Tu \in H^{s,\sigma'}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$.

DÉFINITION 3.2. — Soient s et s' des réels tels que $s+s' > n/2$ et $|s'| < (n-1)/2$. Pour m' réel, on désigne par $T^{m'}_{s,s'}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ la classe des symboles $p(x, \xi')$ de classe C^∞ en ξ' tels que $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}$, $x \to \partial^\alpha_{\xi'} p(x, \xi')$ est de classe $H^{s,s'}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ et :

$$\|\partial^\alpha_{\xi'} p(x, \xi')\|_{(s,s')} \leqslant C_\alpha (1+|\xi'|)^{m'-|\alpha|}$$

nous noterons $p(x, D')$ l'opérateur paradifférentiel tangentiel de symbole $p(x, \xi')$, cette notation n'est pas standard mais elle permettra d'alléger l'écriture.

Soient $p \in T^m_{s,s'}$ et $q \in T^{m'}_{s,s'}$ alors en procédant comme dans [21] on montre qu'il existe un opérateur $R(x, D')$ borné en $x_1 \geqslant 0$ à valeurs dans $S^{m+m'-(s+s'-n/2)}_{1,1}$ (si $s'+s-n/2$ n'est pas entier) tel que $p(x, D')\, q(x, D') - R(x, D')$ soit un opérateur paradifférentiel tangentiel ayant pour symbole :

$$p \# q = \sum_{|\alpha'| < s+s'-n/2} \frac{1}{\alpha'!} \partial^{\alpha'}_{\xi'} p(x, \xi')\, D^{\alpha'}_{x'} q(x, \xi'). \tag{3}$$

PROPOSITION 3.3. — *Soit $a(x, \xi') \in T^m_{s,s'}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ où $s > 1/2$ et $s+s' > n/2$. Soit $t \in]-s, s]$, considérons alors V de classe $H^{t,s'}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ et microlocalement de classe $H^{t,\tau}$ en un point (x_0, ξ'_0) de $\bar{\mathbb{R}}^n_+ \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus 0)$. Alors $a(x, D')V$ est* *microlocalement de classe* $H^{t,\theta}$ *en* (x_0, θ_0') *avec* $\theta = \min(\tau' - m', t' - m' + \rho')$, *et* $\rho' = \min(s' + s - n/2, s - 1/2)$ *si* s' *est distinct de* $(n-1)/2$, $\rho' < s - 1/2$ *si* $s' = (n-1)/2$.

PROPOSITION 3.4 (paralinéarisation tangentielle). — *Soit*

$$F \in C^\infty(\bar{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^N)$$

une fonction réelle à support compact en x *et soient* $u_1, \ldots, u_N$ *des fonctions réelles de classe* $H^{s,s'}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ *où* $s > 1/2$, $s + s' > n/2$ *et* $s + 2s' > 1/2$. *Alors*

$$F(x, u_1, \ldots, u_N) - \sum_{i=1}^{N} \Pi'(\partial_{u_i} F)(x, u_1, \ldots, u_N)\, u_i$$

appartient à $H^{s,s'+\rho'}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ *où* ρ' *est précisé dans la précédente proposition et* Π' *désigne le paraproduit tangentiel.*

4. Preuve du théorème 2.5

M. TOUGERON a prouvé ce résultat quand $\partial\Omega$ est C^∞. Nous allons indiquer comment modifier sa démonstration pour prouver le théorème 2.5. Le fait que $\partial\Omega$ soit non caractéristique et le théorème des fonctions implicites assurent l'existence d'une carte de bord $y' \to (f(y'), y')$ telle que si on pose $\chi_1(x_1, x') = (x_1 + f(x'), x')$ et $u \circ \chi_1 = v$ alors v est solution, dans un ouvert de $\bar{\mathbb{R}}^n_+$ contenant $x_0 = (f(x_0'), x_0')$, d'une équation :

$$\partial_{x_1}^2 v + G(x, \ldots, \partial^\beta f(x), \ldots, \partial^\alpha v(x)) = 0$$

où $|\beta| \leqslant 2$, $|\alpha| \leqslant 2$, $\alpha \neq (2, 0, \ldots, 0)$, G est de classe C^∞ à support compact, et $(x_1, x') \to f(x')$ est de classe $H^{s+\mu,-\mu}_{\mathrm{loc}}$ pour tout $\mu > 0$ et microlocalement de classe $H^{s+2,-2}$ au point (x_0, ξ_0') représentant α^0. Les résultats de M. TOUGERON permettent de voir que v possède la régularité locale $H^{s+\theta,-\theta}_{\mathrm{loc}}$, où $\theta = s - 2 - 1/2 - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Une paralinéarisation tangentielle permet d'écrire (*cf.* prop. 3.4)

$$G(x, \partial^\beta f, \partial^\alpha v) = \sum_\alpha (\Pi'(\partial_{\partial^\alpha v} G)\partial_x^\alpha v + \sum_{|\beta| \leqslant 2} \Pi'(\partial_{\partial^\beta f} G) f + k$$

où k est de classe $H^{s+\rho',-2}(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ avec $\rho' = s - n/2 - 2 > 2$. Les résultats de [21] (*cf.* § 3) montrent que :

$$(4) \qquad \sum_{|\beta| \leqslant 2} \Pi'(\partial_{\partial^\beta f} G)\partial^\beta f \in H^{s,-2}_{(x_0, \xi_0')}.$$

Enfin comme $v|_{\partial\Omega}=v(0,.)$ est de classe H^s et microlocalement de classe $H^{s'}$ en (x'_0, ξ'_0) (d'après [12]) on termine la preuve en procédant exactement comme M. TOUGERON (*voir* aussi [1]).

5. Preuve du théorème 2.7

Nous suivrons de près HÖRMANDER ([8], chap. 24), préciserons sa démonstration dans le cadre Sobolev et l'adapterons au cas des opérateurs paradifférentiels tangentiels (à l'aide des résultats de [21] rappelés au chapitre 3). Posons $\rho'=s-2-(n/2)$. Reprenons ce qui a été dit dans la preuve du théorème 2.5, on se ramène à un ouvert encore noté $\Omega\subset\bar{\mathbb{R}}^n_+=\{x\in\mathbb{R}^n;\ x_1\geqslant 0\}$ et à une équation $Pv=g$ où

$$P=D_1^2-r(x, D')-\Pi'(d)D_1,\qquad g\in H^{s'-2}_{\alpha^0}\cap H^{s+\rho'-2,\,-\rho'}$$

où $d\in H^{s+\rho'-2,\rho'}$. A l'aide du calcul paradifférentiel, on vérifie aisément qu'il existe $a(x, \xi')\in T^0_{s+\rho'-2,\rho'}$ *elliptique*, vérifiant $D_1 a(x, \xi')\in T^0_{s+\rho'-2,\,-\rho'}$ tel que si $D_1 a(x, D')$ désigne l'opérateur paradifférentiel tangentiel de symbole $D_1 a(x, \xi')$ alors $\Pi'(d)\circ a(x, D')=2D_1 a(x, D')$ modulo un opérateur $(s-2-n/2)$-régularisant. En remplaçant v par $a(x, D')v$ et P par $u\to a^{-1}(x, D')$ $P(a(x, D')u)$ on se ramène alors à une équation paradifférentielle du type

$$Pv=D_1^2 v-R(x, D')v\in H^{s'}_{(0,\,x_0,\,\xi_0)}\cap H^{s+\rho'-2,\,-\rho'} \tag{5}$$

où D_1 ne figure plus dans $R(x, D')$, le point α^0 de diffraction est représenté par $(0, x'_0, \xi'_0)$, $v(0, x')$ est de classe $H^s\cap H^{s'}_{(x_0,\xi_0)}$, $R(x, D')$ est un opérateur défini par le symbole $\in T^2_{s+\rho'-2,\,-\rho'}(\Omega)$ de symbole principal $r(x, \xi')$ *réel*. Le symbole principal $p(x, \xi)$ de P est égal à $\xi_1^2-r(x, \xi')$, au point de diffraction on a $\xi_1=0$ et les hypothèses du théorème 2.7 entraînent :

$$\frac{\partial r}{\partial x_1}(0, x'_0, \xi'_0)>0,\qquad d_{\xi'}r(0, x'_0, \xi'_0)\neq 0. \tag{6}$$

Nous pourrons supposer les coefficients à support compact en x. Nous aurons à utiliser des opérateurs paradifférentiels tangentiels à symboles dans $T^m_{s+z-2,\,z}$ ou $T^m_{s+z-3,\,-z}$ (*cf.* § 3), nous imposerons z strictement inférieur à $s-3-(n/2)$ et superieur à $s-7/2$ de sorte que $H^{s+z-3,\,-z}$ soit une algèbre. Nous demanderons $|z|<(n-1)/2$ quand il faudra utiliser un calcul symbolique (*cf.* 3.2). Posons

$$Q(x, D) = Q_1(x, D')D_1 + Q_0(x, D')$$

où le symbole de Q_j appartient à $T^{-j}_{s+\sigma-2, -\sigma}$. Nous supposerons Q auto-adjoint ce qui entraine q_0 et q_1 réels. En posant $u_j = D_1^j u$ pour $u \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ nous obtenons (sous ces hypothèses) une version paradifférentielle du lemme 24.4.2 de [8] :

LEMME 5.1. — *Pour* $u \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ *on a :*

$$(7) \qquad 2\,\mathrm{Im}(Pu, Qu)_\Omega = \sum_0^1 (B_{j,k}(x', D')u_k, u_j)_{\partial\Omega} + \sum_0^1 (C_{j,k}(x, D')u_k, u_j)_\Omega$$

où les $B_{j,k}$ *sont des opérateurs paradifférentiels (au sens de* BONY) *et* $B_{1,1} = Q_1$, $B^*_{0,1} = B_{1,0} = Q_0$, $B_{0,0} = Q_1(R + R^*)/2$ *pour* $x_1 = 0$. *Le symbole de* $C_{j,k}$ *appartient à* $T^{1-j-k}_{s+\rho-3, \rho}$, *son symbole principal* $c_{j,k}$ *est réel.* $C_{0,1} = C_{1,0}$ *et :*

$$\Sigma\, c_{j,k}(x, \xi')\,\xi_1^{j+k} = \{p, q\} + 2q\,\mathrm{Im}\, P_s,$$

$P_s(x, \xi')$ *étant le symbole sous-principal de* P.

Quitte à modifier $R(x, D')$ hors d'un voisinage conique de $(0, x'_0, \xi'_0)$, nous pouvons supposer (grâce à (6)) que, dans $\Omega \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus 0)$, $(\partial r/\partial x_1) > 0$ et, $d_\xi r \neq 0$ quand $r = 0$. Dans le lemme suivant nous modifions un peu l'énoncé du lemme 24.4.3 de [8], l'hypothèse $d_\xi r \neq 0$ nous permettra de construire certaines fonctions sans « trop consommer de dérivées en x ».

LEMME 5.2. — *Soient* $a_j(x, \xi')$ *des fonctions homogènes de degré* $1-j$ *en* ξ', C^∞ *en* $\xi' \neq 0$, *de classe* $H^{s+\sigma-3, -\sigma}(\Omega)$ *en* x. *Posons*

$$A(x, \xi) = \sum_0^2 a_j(x, \xi')\,\xi_1^j$$

supposons que quand $\xi_1^2 = r(x, \xi')$ *on ait :*

$$A(x, \xi_1, \xi') = -\psi^2(x, \xi_1, \xi')$$

où ψ *est homogène de degré* $1/2$ *en* ξ, C^∞ *en* $\xi \neq 0$, *de classe* $H^{s+\sigma-3, -\sigma}$ *en* x. *Alors il existe des fonctions* $\psi_0(x, \xi')$, $\psi_1(x, \xi')$ *homogène en* ξ' *de degré respectivement* $1/2$ *et* $-1/2$, C^∞ *en* $\xi' \neq 0$, *de classe* $H^{s+\sigma-3, -\sigma}$ *en* x, *prenant au point* $(0, x'_0, \xi'_0)$ *respectivement les valeurs* $\psi(0, x'_0, 0, \xi'_0)$ *et* $\partial\psi/\partial\xi_1(0, x'_0, 0, \xi'_0)$ *telles que pour tout* ξ_1 *réel on ait :*

$$A(x, \xi_1, \xi') + (\psi_0(x, \xi') + \psi_1(x, \xi')\,\xi_1)^2 \leq g(x, \xi')(\xi_1^2 - r(x, \xi'))$$

où $g(x, \xi')$ *est homogène de degré* -1 *en* ξ', C^∞ *en* $\xi' \neq 0$ *et de classe* $H^{s+\alpha-2, -\alpha}$ *en* x.

Preuve. — En décomposant $\psi(x, \xi)$ en harmoniques sphériques on voit facilement qu'il existe des fonctions $\varphi_0(x, \xi)$, $\varphi_1(x, \xi)$, C^∞ en $\xi \neq 0$, de classe $H^{s+\alpha-3, -\alpha}$ en x telles que

$$\frac{\psi(x, \xi_1, \xi') + \psi(x, -\xi_1, \xi')}{2} = \varphi_0(x, \xi_1^2, \xi')$$

$$\frac{\psi(x, \xi_1, \xi') - \psi(x, -\xi_1, \xi')}{2\xi_1} = \varphi_1(x, \xi_1^2, \xi')$$

Posons

$$\psi_j(x, \xi') = \varphi_j(x, r(x, \xi'), \xi')$$

et

$$B(x, \xi') = A(x, \xi_1, \xi') + (\psi_0(x, \xi') + \psi_1(x, \xi')\xi_1)^2 - (a_2(x, \xi') + \psi_1^2(x, \xi'))(\xi_1^2 - r(x, \xi')),$$

c'est une forme affine en ξ_1 qui s'annule pour $\xi_1^2 = r(x, \xi')$. Écrivons :

$$B(x, \xi_1, \xi') = b_1(x, \xi')\xi_1 + b_0(x, \xi').$$

On peut construire la fonction g (du lemme) localement puis recoller les morceaux avec une partition de l'unité. Raisonnons au voisinage d'un point où, par exemple, $\partial r/\partial\xi_2 \neq 0$. Le changement de variable $(x, \xi_2, \xi'') \to (x, r(x, \xi'), \xi'')$ définit une fonction $\xi_2(x, r, \xi'')$ qui est C^∞ en (r, ξ''). Les fonctions $b_j(x, \xi_2(x, r, \xi''), \xi'')$ sont nulles pour $r \geqslant 0$, C^∞ en r, leurs dérivées en r étant bornées pour (x, r, ξ'') dans un compact. Posons pour $r < 0$

$$H(x, r, \xi'') = \frac{|b_1(x, \xi_2(x, r, \xi''), \xi'')|}{|r|^{1/2}} + \frac{|b_0(x, \xi_2(x, r, \xi''), \xi'')|}{|r|}.$$

$H(x, r, \xi'') = 0$ si $r \geqslant 0$. Nous avons l'inégalité :

$$B(x, \xi_1, \xi_2(x, r, \xi''), \xi'') \leqslant H(x, r, \xi'')(\xi_1^2 - r).$$

Le lemme 24.4.4 de [8] assure alors l'existence d'une fonction C^∞ $f(r)$ nulle pour $r \geqslant 0$ et telle que $f(r) \geqslant H(x, r, \xi'')$ pour (x, r, ξ'') dans un compact.

Une fois qu'une telle fonction f est construite globalement (par partitions de l'unité) il ne nous reste plus qu'à poser :

$$g(x, \xi') = |\xi'|^{-1} f\left(r\left(x, \frac{\xi'}{|\xi'|}\right)\right).$$

LEMME 5.3 (voir [8]). — *Soient* $A_{j,k} \in T^{1-j-k}_{s+\varepsilon-3,\,-\varepsilon}$ $(j, k=0, 1)$, *possédant des symboles principaux homogènes réels* $a_{j,k}(x, \xi')$ *nuls pour* $|x|$ *grand,* $a_{0,1}=a_{1,0}$ *et supposons que :*

$$\Sigma a_{j,k}(x, \xi')\, \xi_1^{j+k} = -\psi^2(x, \xi) \quad \textit{quand } \xi_1^2 = r(x, \xi')$$

où $\psi(x, \xi)$ *est* C^∞ *en* $\xi \neq 0$, *homogène de degré* $1/2$, *de classe* $H^{s+\varepsilon-3,\,-\varepsilon}$ *en* x. *Supposons en outre* $\partial r/\partial x_1 > 0$ *et* $d_{\xi'} r \neq 0$ *sur* $\bigcup \operatorname{supp} a_{j,k}$. *Alors il existe* $\psi_0(x, \xi') \in T^{1/2}_{s+\varepsilon-3,\,-\varepsilon}$, $\psi_1(x, \xi') \in T^{-1/2}_{s+\varepsilon-3,\,-\varepsilon}$ *de symboles principaux prenant au point* $(0, x'_0, \xi'_0)$ *respectivement les valeurs* $\psi(0, x'_0, 0, \xi'_0)$, $\partial\psi/\partial\xi_1(0, x'_0, 0, \xi'_0)$, *telles que pour tout* $u \in C_0^\infty(\bar{\mathbb{R}}^n_+)$ *et tout réel* h *on ait :*

$$\begin{aligned} (8)\quad & \operatorname{Re} \Sigma (A_{j,k}(x, D') D_1^k u, D_1^j u)_\Omega + \|\psi_0(x, D') u + \psi_1(x, D') D_1 u\|^2 \\ & \leqslant C_h (\|u\|^2_{(1-\alpha,\,-1)} + \|D_1 u(0, .)\|_{(-h-1)} \|u(0, .)\|_{(h)} + \|Pu\|_{(0,\,-1)}) \end{aligned}$$

où $\alpha \in [0, 1/2[$ *est un réel ne dépendant que de* $s-3-(n/2)\,(>1)$.

Preuve. — Comme $s-3-(n/2)>1$ il suffit de reprendre la preuve du lemme 24.4.5 de [8] et d'utiliser l'inégalité de Gärding précisée pour les opérateurs paradifférentiels. On peut prendre $\alpha=0$ si s est assez grand.

Maintenant nous pouvons aborder la preuve du théorème 2.7. On peut supposer qu'il existe W voisinage conique de $(0, x'_0, \xi'_0)$ dans $\bar{\mathbb{R}}^n_+ \times (\mathbb{R}^{n-1} \setminus 0)$ tel que :

$$(9) \quad \begin{cases} (x, \xi') \in W,\ x_1 \neq 0 & \Rightarrow \quad Pr \in H^{s,\,-2}_{(x,\,\xi)}, \qquad \forall \xi_1, \\ (0, x', \xi') \in W & \Rightarrow \quad Pr \in H^{s,\,-2}_{(0,\,x',\,\xi')} \quad \text{et} \quad r(0, .) \in H^{s}_{(x',\,\xi')}. \end{cases}$$

On a déjà supposé qu'en tout point $\partial r/\partial x_1 > 0$ et, $d_{\xi'} r \neq 0$ quand $r=0$.

Soit γ_0 un point du demi-arc (ouvert) de bicaractéristique de $p(x, \xi)$ issu de $\gamma=(0, x'_0, 0, \xi'_0)$ tel que $[\gamma_0, \gamma] \subset W$ et $r \in H^s_{\gamma_0}$. Nous supposerons que γ_0 est situé « avant γ », γ_0 comme ξ_1 croît (car $\partial r/\partial x_1 > 0$) le long de la bicaractéristique ceci signifie que $\gamma_0 = (x, \xi_1, \xi')$ avec $\xi_1 < 0$. Le théorème de propagation [5] de BONY nous permettra de supposer W très petit et γ_0 très proche de γ. Soit Γ_0 un voisinage conique de γ_0 dans $T^* \mathbb{R}^n \setminus 0$ tel que $u \in H^{s'}_{\Gamma_0}$. Notons W_0 l'ensemble de tous les (x, ξ') de W tels que si

$r(x, \xi') \geqslant 0$ alors il y a des arcs de bicaractéristiques éventuellement brisés par une réflexion ou tangence en $\partial\Omega$, vivant au-dessus de W, ayant leur point initial dans Γ_0 et leur point final en $(x, \pm r(x, \xi')^{1/2}, \xi')$. W'_0 est un ouvert conique comprenant $(0, x'_0, \xi'_0)$. Nous montrerons (après avoir diminué W' un nombre fini de fois) que si $\chi \in S^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n-1})$ et cône supp χ (le plus petit fermé conique contenant supp χ) est inclus dans W'_0 alors $\forall \varepsilon > 0$, $\chi(x, D')\, v \in H^{s'-\varepsilon}$, ce qui prouvera le théorème 2.7.

LEMME 5.4. — *Sous les hypothèses précédentes, supposons que v soit microlocalement de classe $H^{(m, \sigma)}$ en $(0, x'_0, \xi'_0)$ où $m+\sigma \leqslant s''$, m étant un entier naturel $< s''-1$. Alors v est microlocalement de classe $H^{(m+1, \sigma-1)}$ en $(0, x'_0, \xi'_0)$, et en fait v est de classe $H^{([s''], \sigma+m-[s''])}$ en ce point ([ ] désigne la partie entière).*

Preuve. — En utilisant la forme (5) de P, (9), et la proposition 3.3 (le symbole de $R(x, D')$ appartient à $T^2_{s+\rho'-2, -\rho'}$, $\rho' = s-2-(n/2)$) on obtient que $D_1^2 v$ est microlocalement de classe $H^{(m-1, \sigma-1)}$ en $(0, x'_0, \xi'_0)$. Le lemme découle alors d'un résultat classique, *voir* [1] et la preuve du lemme 24.4.6 de [8].

Notons $(10)_\sigma$ l'assertion suivante :

$$(10)_\sigma \qquad v \in H^{1, \sigma-1}_{(0, x_0, \xi_0)} \qquad \text{et} \qquad D_1 v\,|_{x_1=0} \in H^{\sigma-1}_{(x_0, \xi_0)},$$

α étant un réel $< 1/2$ (celui du lemme 5.3) et qu'on pourra prendre aussi près que l'on veut de $1/2$. Si $(10)_\sigma$ est vérifiée (avec $\sigma \leqslant s''$) alors, quitte à réduire W', le lemme 5.4 nous permet de supposer que :

$$(11)_\sigma \quad \chi(x, D')\, v \in H^{1+\alpha, \sigma-1-\alpha} \qquad \text{et} \qquad \chi(x, D')\, D_1 v\,|_{x_1=0} \in H^{\sigma-1}$$

pour tout $\chi \in S^0$ tel que cône supp $\chi \subset W'_0$. Nous montrerons que $(11)_\sigma$ entraîne $(10)_{\sigma+(1/2)-\alpha}$ pour $\sigma \leqslant s'-1+2\alpha$; le lemme 5.4 entraînera alors le théorème 2.7.

Nous réduirons donc W' à chaque cran de la récurrence, l'étape décisive est l'adaptation aux opérateurs paradifférentiels du lemme 24.4.7 de [8].

LEMME 5.5. — *Posons $q(x, \xi) = q_1(x, \xi')\, \xi_1 + q_0(x, \xi')$ où les q_j sont de classe $H^{s+\alpha-2, -\alpha}$ en x, C^∞ en $\xi' \neq 0$ et homogène de degré $-j$, et ont leur support dans W'_0. Supposons que $q_1(0, x', \xi') = -t(x', \xi')^2$ pour un t de classe $H^{s-5/2}$ en x' et C^∞ en $\xi' \neq 0$. Supposons que pour une certaine* *constante M :*

$$(12)\qquad \begin{cases} \{p, q\}+qM|\xi'|=-\psi^2+\rho(\xi_1-r^{1/2}) & et \quad q=v_1^2 \\ \quad\quad quand\ p=0 \end{cases}$$

où ψ, v_1 *sont de classe* $H^{s+z-3,-z}$ *en* x, C^∞ *en* $\xi\neq 0$ *et homogène de degré* 1/2 *et* 0, *alors que* $\rho(x, \xi')$ *est de classe* $H^{s+z-3,-z}$ *en* x, C^∞ *en* $\xi'\neq 0$ *et homogène de degré* 0, *et que* $r>0$ *sur* supp ρ *qui est inclus dans* W_0. *Si la solution* v *vérifie* $(11)_\sigma$ *avec* $\sigma\leqslant s'-1+2\alpha$, *et si* M *est supérieur à un réel dépendant de* P *et de* σ *alors* $T(x', D')D_1 v|_{x_1=0}\in H^{\sigma-\alpha}$ *où* t *est le symbole principal de* T, *et* $\psi_0(x, D')\, v+\psi_1(x, D')\, D_1 v\in H^{0,\sigma-\alpha}$ *pour certains* $\psi_j\in T^{1,2-j}_{s+z-3,-z}$ *avec cône* supp $\psi_j\subset W_0$ *et de symboles principaux valant* $\partial^j\psi/\partial\xi_1^j(0, x_0', 0, \xi_0')$ *au point* $(0, x_0', 0, \xi_0')$, $j=1, 2$.

Preuve. — Nous allons reprendre la preuve du lemme 24.4.7 de [8] avec un poids plus faible; pour éviter de tout recopier nous n'insisterons que sur les point non triviaux. Choisissons $\chi\in C^\infty$ avec cône supp $\chi\subset X_0$ homogène de degré 0 pour $|\xi'|>1$ et tel que χ vaille 1 sur un voisinage de supp q_j, $j=1, 2$. On appliquera l'identité d'énergie (7) à $v_\varepsilon=\Lambda_\varepsilon\chi(x, D')v$ où $0<\varepsilon<1$ et :

$$\Lambda_\varepsilon=(1+\varepsilon^2|D'|^2)^{-1}(1+|D|^2)^{(\sigma-\alpha)/2}.$$

D'après $(11)_\sigma$ v_ε est borné dans $H^{\alpha+1,-1}$. Prenons

$$Q=Q_1(x, D')D_1+Q_0(x, D')$$

où $Q_j(x, \xi')=q_j(x, \xi')$ pour $|\xi'|>1$. On a :

$$Pv_\varepsilon=f_\varepsilon+[P, \Lambda_\varepsilon\chi(x, D')]v$$

où $f_\varepsilon=\Lambda_\varepsilon(x, D')\, Pv$ est borné (*cf.* (9)) dans $H^{s''-2-\sigma+\alpha,0}$, le second terme est borné dans $H^{0,-1}$. Comme $s'+1\leqslant s''$ et $s'-1-\sigma+2\alpha\geqslant 0$ on constate que $(f_\varepsilon, Qv_\varepsilon)$ est borné. Il faut analyser $\mathrm{Im}(Pv_\varepsilon, Qv_\varepsilon)$, on a :

$$([P, \Lambda_\varepsilon\chi(x, D')]v, Qv_\varepsilon)=\Lambda_\varepsilon[P, \chi(x, D')]v, Qv_\varepsilon)+([P, \Lambda_\varepsilon]\Lambda_\varepsilon^{-1}v_\varepsilon, Qv_\varepsilon).$$

Comme $Q_j^*\Lambda_\varepsilon[P, \chi(x, D')]$ est borné dans $T^{1+\sigma-\alpha}_{s+z-3,-z}$ à symbole identiquement nul, il est régularisant d'ordre $s-3-n/2-1-\sigma+\alpha\geqslant -\sigma+\alpha$. On en déduit que $(\Lambda_\varepsilon[P, \chi(x, D')]v, Qv_\varepsilon)$ est borné. Pour traiter le second terme du membre de droite Hörmander pose :

$$G^\varepsilon(x, D')=[P, \Lambda_\varepsilon]\Lambda_\varepsilon^{-1}=\Lambda_\varepsilon[\Lambda_\varepsilon^{-1}, P]$$

$$S(x, \xi')=(1+|\xi'|^2)^{1/4}(M+2\,\mathrm{Im}(G^\varepsilon(x, \xi')-P^s(x, \xi'))(1+|\xi'|^2)^{-1/2})^{1/2}$$

qui est borné dans $T^{1/2}_{s+z-3,\,-z}$. Pour M assez grand Hörmander obtient alors que :

$$2\,\mathrm{Im}(G^\varepsilon(x, D')v_\varepsilon, Qv_\varepsilon)\geqslant \mathrm{Re}((2\,\mathrm{Im}\,p^s(x, D')$$
$$-M(1+|D'|^2)^{1/2})v_\varepsilon, Qv_\varepsilon)+\mathrm{Re}(S^\varepsilon(x, D')v_\varepsilon, QS^\varepsilon(x, D')v_\varepsilon)-C_1$$

pour une constante C_1. En posant $w_\varepsilon=(1+|D'|^2)^{-1/4}S^\varepsilon(x, D')v_\varepsilon$ le terme faisant intervenir S peut être mis sous la forme :

$$\mathrm{Re}\,\Sigma(A_{j,k}(x, D')D_1^k w_\varepsilon, D_1^j w_\varepsilon)$$

où

$$A_{1,1}=0, \qquad A_{0,0}=(1+|D'|^2)^{1/4}Q_0(x, D')(1+|D'|^2)^{1/4}$$
$$A_{1,0}=A_{0,1}=\frac{1}{2}(1+|D'|^2)^{1/4}Q_1(x, D')(1+|D'|^2)^{1/4}.$$

Le symbole principal est $|\xi'|v_1^2$ quand $p=0$, donc on peut appliquer le lemme 5.3. Comme $\|v_\varepsilon\|_{1+\alpha,\,-1}+\|Pv_\varepsilon\|_{0,\,-1}$ est borné, on vérifie qu'il en est de même de $(\|w_\varepsilon\|_{1+\alpha,\,-1}+\|Pw_\varepsilon\|_{0,\,-1})$. On constate que $\|w_\varepsilon(0, .)\|_{s'-\sigma+\alpha}$ est bornée, $(11)_\sigma$ montre que $\|D_1 w_\varepsilon(0, .)\|_{\alpha-1}$ est bornée. Le lemme 5.3 et ce qui précède permettent alors d'affirmer que :

$$(13)\quad 2\,\mathrm{Im}(Pv_\varepsilon, Qv_\varepsilon)\geqslant \mathrm{Re}((2\,\mathrm{Im}\,p^s(x, D')-M(1+|D'|^2)^{1/2})v_\varepsilon, Qv_\varepsilon)-C_2.$$

Maintenant il va falloir obtenir un majorant du membre de droite de (7) appliqué à v_ε en utilisant le lemme 5.3 pour estimer :

$$(14)\quad \mathrm{Re}\,\Sigma(C_{j,k}(x, D')D_1^k v, D_1^j v)$$
$$+\mathrm{Re}((M(1+|D'|^2)^{1/2}-2\,\mathrm{Im}\,p^s(x, D'))v_\varepsilon, Qv_\varepsilon)$$
$$-\mathrm{Re}(\varphi(x, D')(D_1-\tilde{\Lambda}_+(x, D'))v_\varepsilon, \rho^0(x, D')v_\varepsilon).$$

Ici $C_{j,k}$ provient du lemme 5.1, $\rho^0(x, \xi')\in T^0_{s+z-3,\,-z}$ et est égal à $\rho(x, \xi')$ quand $|\xi'|>1$, $\varphi\in S^0$ et vaut sur un voisinage de supp ρ^0, cône supp $\varphi\subset W'_0$ et $r>0$ dans cône supp φ, $\tilde{\Lambda}_+\in T^1_{s+z-2,\,-z}$ et a $r^{1/2}$ pour symbole principal. Quand $p(x, \xi)=0$ le symbole principal correspondant défini comme dans le lemme 5.3 est :

$$\{p, q\}+qM|\xi'|-\rho(\xi_1-r^{1/2})=-\psi^2.$$

Les estimations pour v_ε et Pv_ε déjà utilisées dans la preuve de (13) montrent que (14) peut être majoré par

$$C_3 - \| \psi_0(x, D') v_\varepsilon + \psi_1(x, D') D_1 v \|_\Omega^2$$

où ψ_j est relié à ψ comme dans le lemme 5.3. Cela dit on vérifie aisément qu'il existe des symboles $B \in T^0_{s+z-3,\,-z}$, $\tilde{\Lambda}_\pm \in T^1_{s+z-2,\,-z}$, le symbole principal de $\tilde{\Lambda}_\pm(x, D')$ valant $\pm r^{1/2}$, tels que :

$$\varphi(x, D')(D_1 - \tilde{\Lambda}_-)(D_1 - \tilde{\Lambda}_+) v = -\varphi(x, D') Pv + \varphi(x, D') Bv$$

compte tenu de $(11)_\sigma$ le membre de droite est de classe $H^{0,\min(s''-2,\sigma)}$. ξ_1 est <0 sur la demi-caractéristique sur laquelle $(D_1 - \tilde{\Lambda}_+) v$ est de classe $H^{s'-1}$ comme $s' - 1 \leqslant s'' - 2$, l'étude du problème de Cauchy pour les opérateurs paradifférentiels (*voir* [1] ou [21]) montre alors que :

$$\varphi(x, D')(D_1 - \tilde{\Lambda}_+(x, D')) v \in H^{0,\min(\sigma, s'-1)}.$$

Comme $s' - 1 - \sigma + 2\alpha \geqslant 0$ et que $[\varphi(x, D')(D_1 - \tilde{\Lambda}_+), \Lambda_\varepsilon \chi(x, D')]$ est borné dans $T^{\sigma-\alpha}_{s+z-3,\,-z}$ on vérifie aisément que :

$$\mathrm{Re}(\varphi(x, D')(D_1 - \tilde{\Lambda}_+) v_\varepsilon, \rho^0(x, D') v_\varepsilon) \leqslant C_4.$$

Par conséquent on peut écrire que :

$$\| \psi_0(x, D') v_\varepsilon + \psi_1(x, D') D_1 v_\varepsilon \|_\Omega^2$$
$$\leqslant C_2 + C_3 + C_4 + \mathrm{Re}\, \Sigma (B_{j,k}(x', D') D_1^k v_\varepsilon(0, .), D_1^j v_\varepsilon(0, .))_{\partial\Omega}$$

Puisque $B_{1,1} + T(x', D')^* T(x', D')$ est d'ordre -2 on a :

$$\mathrm{Re}(B_{1,1}(x', D') v_{\varepsilon,1}, v_{\varepsilon,1})_{\partial\Omega} + \| T v_{\varepsilon,1} \|_{\partial\Omega}^2 \leqslant C \| v_{\varepsilon,1}(0, .) \|_{(-1)}^2 \leqslant C_5.$$

On observe que $D_1 v_\varepsilon(0, .)$ et $v_\varepsilon(0, .)$ sont respectivement bornés dans $H^{\alpha-1}$ et $H^{s'-\sigma+\alpha}$. Comme $2\alpha - 1 + s' - \sigma \geqslant 0$ on vérifie facilement que les autres termes frontières de (7) sont bornés quand $\varepsilon \to 0$. Ainsi :

$$\| \psi_0(x, D') v_\varepsilon + \psi_1(x, D') D_1 v_\varepsilon \|_\Omega^2 + \| T v_{\varepsilon,1} \|_{\partial\Omega}^2 \leqslant C_6$$

et le lemme s'en déduit quand $\varepsilon \to 0$.

Remarque importante 5.6. — Du lemme 5.5 nous déduisons que $D_1 v|_{x_1=0}$ est microlocalement de classe $H^{\sigma-1/2-\alpha}$ en tout (x', ξ') tel que $t(x', \xi') \neq 0$. Si en utilisant des choix différents de q on obtient

$\psi_0(x, D')v+\psi_1(x, D')D_1 v \in H^{(0, \sigma-\alpha)}$ pour deux systèmes distincts ψ_0 et ψ_1 d'ordre $1/2$, $-1/2$ formant un système elliptique dans cône supp χ où $\chi \in S^0$ alors on obtient $\chi(x, D')v \in H^{(0, \sigma+1/2-\alpha)}$ et $\chi(x, D')D_1 v \in H^{(0, \sigma-1/2-\alpha)}$, ce qui entraîne $(10)_{\sigma+1/2-\alpha}$ et donc le théorème 2.7.

Preuve du théorème 2.7. — Dans le cas C^∞ Hörmander construit des opérateurs vérifiant les properties mentionnées dans le lemme 24.4.7 et la remarque 5.6.

Nous allons essentiellement vérifier qu'en supposant $r(x, \xi')$ de classe $H^{s+\rho'-2, -\rho}$ en x dans la construction de [8] nous obtiendrons des opérateurs vérifiant les propriétés mentionnées dans le lemme 5.5 et la remarque 5.6. Nous n'insisterons que sur les points non triviaux. Posons :

$$\varphi(x, \xi')=\varphi_1(x, \xi')\xi_1+\varphi_0(x, \xi')$$

$$\varphi_1(x, \xi')=\frac{1}{|\xi'|}, \qquad \varphi_0(x, \xi')=x_1^2+|x'-x'_0|^2+\left|\frac{\xi'}{|\xi'|}-\frac{\xi'_0}{|\xi'_0|}\right|^2.$$

On vérifie qu'il existe des constantes C et c telles que $H_p\varphi>0$ pour $|\xi_1|C \leqslant c|\xi'|$. Pour $\delta>0$ petit on prend pour valeur préliminaire de q :

$$f=\chi_2(\varphi_0/\delta)^2\chi_0(1-\varphi/\delta)$$

où $\chi_0(t)=\exp(-1/t)$ si $t>0$, $\chi_0(t)=0$ si $t \leqslant 0$, $\chi_2 \in C_0^\infty(-3, 3)$ est non négative et vaut 1 sur $]-1, 1[$. On utilisera aussi une fonction troncature $\chi_1 \in C_0^\infty(-2, 2)$ valant 1 sur $]-1, 1[$. Hörmander montre que si $p(x, \xi)=0$ pour un point de supp f alors $r \geqslant \delta^2|\xi'|^2$ et que

$$H_p f+fM|\xi'|=-\psi^2+\rho(\xi_1^2-r^{1/2}) \quad \text{quand } p(x, \xi)=0,$$

où

$$\psi=\chi_1(\xi_1/\delta|\xi'|)N^{1/2}$$

$$-2r^{1/2}\rho=-(1-\chi_1^2(\xi_1/\delta|\xi'|))N+\chi_0(1-\varphi/\delta)H_p\chi_2(\varphi_0/\delta)^2$$

évalué pour $\xi_1=-r^{1/2}$ si $r>0$, et $\rho=0$ si $r \leqslant 0$. Ici :

$$N=\chi_2(\varphi_0/\delta)^2(\chi'_0(1-\varphi/\delta)H_p(\varphi/\delta)-\chi_0(1-\varphi/\delta)M|\xi'|).$$

Pour $t \leqslant 3$ et $|10a| \leqslant 1$ posons :

$$G(a, t)=(1-a\chi_0(t)/\chi'_0(t))^{1/2}=(1-at^2)^{1/2}$$

$G(a, t)$ est C^∞. On a alors :

$$N^{1/2} = \chi_2(\varphi_0\,\delta)\,(\chi_0'(1-\varphi\,\delta)\,H_p\varphi\,\delta)^{1/2}\,G(M\,|\xi'|\,\delta\,H_p\varphi,\ 1-\varphi\,\delta).$$

Pour δ petit on vérifie que ψ est C^∞ en $\xi \neq 0$ et en x de classe $H^{s+z-3,-z}$ (qui est une algèbre d'après les conditions imposées à z). Sur le support de ρ on a $r \geqslant \delta^2 |\xi'|^2$, on vérifie alors que ρ est de classe $H^{s+z-3,-z}$ en x. Hörmander montre aussi qu'il existe $r_1 \in C^\infty$ tel que $r_1^2 = f$ quand $p=0$ et δ est assez petit. Le théorème de préparation de Malgrange (dans un cas simple) donne :

$$f(x, \xi) = (\xi_1^2 - r(x, \xi'))\,g(x, \xi) + q_1(x, \xi')\,\xi_1 + q_0(x, \xi').$$

On vérifie aisément que q_0 et q_1 sont C^∞ en $\xi' \neq 0$ et de classe $H^{s+z-2,-z}$ en x. On a $\{p, f\} = \{p, q\}$ quand $p=0$ donc (12) est vérifiée. Quand $r(x, \xi') > 0$ on a :

$$q_1(x, \xi') = \frac{f(x, \xi_1, \xi') - f(x, -\xi_1, \xi')}{2\xi_1} \qquad \text{si} \quad \xi_1^2 = r(x, \xi').$$

Hörmander montre que ce second membre est égal à $-F^2(\xi_1^2, x, \xi')$ où F est C^∞. Sans perdre (12) on peut changer q_1 en $-t^2$ où

$$t = F(r(x, \xi'), x, \xi'),$$

et toutes les hypothèses du lemme 5.5 sont vérifiées. Enfin Hörmander montre que t est non caractéristique en (x_0', ξ_0') et que $\psi_1\ \psi_0$ prend en $(0, x_0, \xi_0)$ des valeurs distinctes pour deux petites et distinctes valeurs de δ. D'après la remarque 5.6 on peut alors affirmer que le théorème 2.7 est prouvé.

6. Preuve du théorème 2.10

Nous suivons de près [15]. En redressant le bord on peut se ramener à $\Omega = I \times B$ où $I = [0, 1[$ et $B = \{y \in \mathbb{R}^{n-1}, |y| < 1\}$. Les variables duales de $x \in I$, $y \in B$ seront notées ξ, η. Comme au début du paragraphe 5 on se ramène à une équation paradifférentielle du type :

$$Pu = D_x^2 u + R(x, y, D_y)u \in H^{s-2}$$

où R a pour symbole principal réel r, $r \in T^2_{s-2,0}(\bar{\Omega})$ (*voir* déf. 3.2), Pu est microlocalement de classe $H^{s''-2}$ ($s'' \leqslant 2s-2-(n/2)$) aux points de $T^* \partial\Omega \setminus 0$ qui n'appartiennent pas à la partie conique fermée Z incluse dans la zone elliptique; $u(0, y)$ est de classe H^s et microlocalement de classe $H^{s''}$ en dehors de Z. Comme dans [15] on obtient le :

LEMME 6.1. — *Soit* $v \in C^2(\bar{\Omega})$ ($v(1, .) \equiv 0$) *et* $Q \in T^{-\infty}_{s-2,0}(\bar{\Omega})$ *à support compact. Alors*

$$\langle ([P, Q]+(R^*-R)Q)v, v\rangle_\Omega = \langle Qv, Pv\rangle_\Omega - \langle QPv, v\rangle_\Omega + \left\langle Q\frac{\partial v}{\partial x}, v\right\rangle_B - \left\langle Qv, \frac{\partial v}{\partial x}\right\rangle_B + \langle Q'_x v, v\rangle_B$$

R^* est l'adjoint formel de R et $\langle\ ,\ \rangle_\Omega$, $\langle\ ,\ \rangle_B$ désignent les produits scallaires L^2.

Nous écrirons $H_{r_0} = H_{r|_{x=0}}$. Si $q(x, y, \eta) \in T^2_{s-2,0}(\bar{\Omega})$ est le symbole principal de $Q(x, D')$ et si $k(x, y, \eta)$ est le symbole principal (d'ordre 1) de $i(R^*-R)$, alors le symbole principal de $i([P, Q]+(R^*-R)Q)$ est :

$$(H_p+k)q = 2\xi\frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial q}{\partial \xi} + H_r q + kq.$$

Soit $G \subset T^* B \setminus 0$ l'hypersurface glancing définie par $r(0, y, \eta) = 0$ et soit $(y_0, \eta_0) \in G$ un point fixé. Soit $U \subset T^* B \setminus 0$ un petit voisinage ouvert conique de (y_0, η_0), et $L \subset U$ une hypersurface C^∞ conique contenant (y_0, η_0) et transverse à H_{r_0}. Pour ε, τ petits nous reprenons, en rappelant leurs définitions, les ensembles suivants introduits dans [15] :

$$L^\pm(\varepsilon, \tau) = \{\exp\{tH_{r_0}\}(y, \eta) \in U ;\ (y, \eta) \in L,$$
$$|(y, \eta/|\eta|) - (y_0, \eta_0/|\eta_0|)| \leqslant \varepsilon,\ 0 \leqslant \pm t \leqslant \tau/|\eta|\}.$$

Soient $C_1 > 0$ assez grand, $\tau_0 > 0$, $\varepsilon_0 > 0$ assez petits tels que

$$|r(x, y, \eta)| \leqslant \left(\frac{1}{2}C_1|\eta|\varepsilon\right)^2$$

dans $F^\pm(\varepsilon, \tau)$ pour $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, $0 < \tau \leqslant \tau_0$, où

$$F^\pm(\varepsilon, \tau) = \{(x, y, \eta) ;\ 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon^2,\ (y, \eta) \in L^\pm(\varepsilon, \tau)\}.$$

Pour τ_0 petit mais fixé, posons :

$$F(\varepsilon)=F^+(\varepsilon,\tau_0)\cup F^-(\varepsilon,\tau_0).$$

Considérons aussi les ensembles coniques fermés

$$V^\pm(\varepsilon,\tau)=\left\{(x,y,\xi,\eta):\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon^2,\ (y,\eta)\in L^\pm(\varepsilon,\tau)\right.$$

$(\bigstar)$ ou

$$\left.\frac{1}{2}\varepsilon^2\leqslant x\leqslant\varepsilon^2,\ (y,\eta)\in L^\pm(\varepsilon,\tau),\ |\xi|\leqslant C_1\varepsilon|\eta|\right\}$$

$(\bigstar\bigstar)$ $$V(\varepsilon)=V^+(\varepsilon,\tau_0)\cup V^-(\varepsilon,\tau_0).$$

- On définit $W^\pm(\varepsilon,\tau)$, $W(\varepsilon)$ en remplaçant C_1 par $2C_1$ dans $(\bigstar)$ et $(\bigstar\bigstar)$.
- Comme dans [15], on obtient le :

LEMME 6.2. — *Il existe δ, $\varepsilon_0>0$ et, pour $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$, des fonctions $q_\varepsilon\in C_0^\infty(I\times U)$, $g_\varepsilon(x,y,\xi,\eta)$ et $h_\varepsilon(x,y,\xi,\eta)$ de classe H^{s-3} en (x,y) et de classe C^∞ en (ξ,η) telles que :*

$$q_\varepsilon\geqslant 0,\qquad \operatorname{supp}q_\varepsilon\subset F^+(\varepsilon,\delta\varepsilon)\cup F^-(\varepsilon,\varepsilon^2)$$

$$q_\varepsilon(0,\exp\{tH_{r_0}\}(y_0,\eta_0))\neq 0\qquad \textit{pour}\quad 0\leqslant t<\delta\varepsilon$$

$$q_\varepsilon>0\quad \textit{sur}\ \operatorname{supp}q_{\varepsilon'}\qquad \textit{si}\quad 0<\varepsilon<\varepsilon'\leqslant\varepsilon_0$$

$$q_\varepsilon\ \textit{est indépendant de}\ x\ \textit{pour}\ 0\leqslant x<\frac{1}{2}\varepsilon^2$$

$$g_\varepsilon+h_\varepsilon=-(H_p+k)q_\varepsilon$$

$$\textit{dans}\ W(\varepsilon),\ g_\varepsilon\geqslant 0\ \textit{avec inégalité stricte là où}\ q_\varepsilon\neq 0$$

$$\operatorname{supp}h_\varepsilon\subset I\times L^-(\varepsilon,\varepsilon^2)\times\mathbb{R}_\xi,\ \operatorname{supp}g_\varepsilon\cup\operatorname{supp}h_\varepsilon\subset\operatorname{supp}q_\varepsilon$$

$$g_\varepsilon,\ h_\varepsilon\ \textit{sont indépendantes de}\ \xi\ \textit{pour}\ 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

Preuve. — On suit de près [15]. Comme $\eta\to r_0(y_0,\eta)$ est C^∞ il existe un nouveau système C^∞ de coordonnées $(s,t)=(s_1,\ldots,s_{2n-1},t)$ dans U, tel que (y_0,η_0) est l'origine, L est donnée par $t=0$ et $H_{r_0(y_0,\eta)}$ est $\partial/\partial t$. Reprenons alors les fonctions χ, f, β définies dans [15], comme dans [15] posons :

$$-g_\varepsilon=\beta(t/\varepsilon^2)(H_p+k)\chi(v), \qquad q_\varepsilon(x, s, t)=\beta(t/\varepsilon^2)\chi(v)$$

où v désigne $(t/\delta\varepsilon)+(s^2/\varepsilon^4)+f(x/\varepsilon^2)$. La différence entre H_{r_0} et $\partial/\partial t$ est $O(s)\partial/\partial s$; comme on a $s=O(\varepsilon^2)$ dans $W(\varepsilon)$ et dans le support de q_ε, et que $O(\varepsilon^2)\partial/\partial s(s^2/\varepsilon^4)$ est de la forme $O(1)$ on trouve que :

$$-g_\varepsilon=\beta\left(\frac{1}{\delta\varepsilon}+O(1)+O\left(\frac{\varepsilon}{\delta}\right)+O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)\chi'.$$

On conclut alors exactement comme dans [15].

Remarque 6.3. — Dans [15] les auteurs utilisent la racine carrée d'un opérateur construit à partir de g_ε, ici cela ne sera pas possible car g_ε n'est plus C^∞ en x. Aussi nous utiliserons plus loin l'inégalité de Gärding.

Pour a réel et $1\leqslant\lambda\leqslant+\infty$ posons comme dans [15] :

$$q_\varepsilon^{a,\lambda}(x, y, \eta)=\int_0^\lambda q_\varepsilon\left(x, y, \frac{\eta}{r}\right)r^a\frac{dr}{r}$$

$$g_\varepsilon^{a,\lambda}(x, y, \xi, \eta)=\int_0^\lambda g_\varepsilon\left(x, y, \frac{\xi}{r}, \frac{\eta}{r}\right)r^a\frac{dr}{r}.$$

On définit $h_\varepsilon^{a,\lambda}$ par une formule analogue et on vérifie que :

$$-(H_p+k)q_\varepsilon^{a,\lambda}=h_\varepsilon^{a+1}+g_\varepsilon^{a+1,\lambda}.$$

Les propriétés du lemme 6.2 sont encore valables si on remplace q_ε, g_ε, h_ε par $q_\varepsilon^{a,\lambda}$, $g_\varepsilon^{a,\lambda}$, $h_\varepsilon^{a+1,\lambda}$. Reprenons les fonctions (dépendant de ε) $\sigma_1\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\sigma_2\in C^\infty(\Omega\times\mathbb{R}^{n+1}\setminus 0)$ de [15] :

$$\sigma_1(x)=1 \quad \text{si } 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{4}\varepsilon^2; \qquad \sigma_1(x)=0 \quad \text{si } x\geqslant\frac{1}{2}\varepsilon^2.$$

$\sigma_2(x, y, \xi, \eta)$ est positivement homogène de degré 0 et s'annule quand $x\geqslant 1/4\varepsilon^2$ ou $|\xi|\geqslant 3/2\varepsilon C_1|\eta|$ ou quand (x, y) n'appartient pas à un certain compact de Ω. Enfin, on exige que $\sigma_1^2+\sigma_2^2$ vaille 1 sur un voisinage de $V(\varepsilon)$. Posons $g_{\varepsilon,j}^{a,\lambda}=\sigma_j^2 g_\varepsilon^{a,\lambda}$ pour $j=1, 2$. Reprenons les fonctions troncatures $\beta_2(\eta)$ et $\beta_3(y)$ de [15] :

$\beta_2(\eta)\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ est nulle sur un voisinage de 0 et vaut 1 pour $|\eta|\geqslant 1$. $\beta_3(y)\in C_0^\infty(B)$ vaut 1 sur un voisinage de y_0 de sorte que

$\beta_3(y)q_\varepsilon(x, y, \eta)=q_\varepsilon(x, y, \eta)$ pour $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Notons $Q_\varepsilon^{a,\lambda}$ l'opérateur paradifférentiel tangentiel de symbole :

$$(2\pi)^{-n}\beta_3(y)q_\varepsilon^{a,\lambda}\beta_2(\eta)\beta_3(y).$$

On définit de même l'opérateur paradifférentiel $G_{\varepsilon,2}^{a,\lambda}$ de symbole $g_{\varepsilon,2}^{a,\lambda}$ et l'opérateur paradifférentiel tangentiel $G_{\varepsilon,1}^{a,\lambda}$ de symbole $g_{\varepsilon,1}^{a,\lambda}$. Les familles d'opérateurs $(Q_\varepsilon^{a,\lambda})_{\lambda\geqslant 1}$ et $(G_{\varepsilon,1}^{a,\lambda})_{\lambda\geqslant 1}$ sont bornées dans $T_{s-3,0}^a(\bar\Omega)$, et la famille $(G_{\varepsilon,2}^{a,\lambda})_{\lambda\geqslant 1}$ est bornée dans $\mathrm{Op}(\Sigma_{s-n/2-3}^a)$ (notation de Bony [5]). En outre pour tout $a'>a$, $Q_\varepsilon^{a,\lambda}\to Q_\varepsilon^{a,\infty}$ et $G_{\varepsilon,1}^{a,\lambda}\to G_{\varepsilon,1}^{a,\infty}$ dans $T_{s-3,0}^{a'}(\bar\Omega)$, $G_{\varepsilon,2}^{a,\lambda}\to G_{\varepsilon,2}^{a,\infty}$ dans $\mathrm{Op}(\Sigma_{s-3-n/2}^{a'})$ quand $\lambda\to\infty$. Enfin pour les familles $(Q_\varepsilon^{a,\lambda})_{\lambda\geqslant 1}$, $(G_{\varepsilon,j}^{a,\lambda})_{\lambda\geqslant 1}$ $j=1, 2$ on définit $WFQ_\varepsilon^{a,\lambda}$, $WFG_{\varepsilon,j}^{a,\lambda}$ comme les plus petits fermés coniques en dehors desquels les symboles de ces opérateurs forment un ensemble borné dans $S^{-\infty}$ ou $T^{-\infty}$. On a la :

PROPOSITION 6.4. — *On peut écrire :*

$$N_\varepsilon^{a+1,\lambda}=\frac{1}{i}([P, Q_\varepsilon^{a,\lambda}]+(R^*-R)Q_\varepsilon^{a,\lambda})$$
$$=\sum_{j=1}^{2} G_{\varepsilon,j}^{a+1,\lambda}+\sum_{j=1}^{3} B_{\varepsilon,j}^{a+1,\lambda}+\sum_{j=1}^{2} M_{\varepsilon,j}^{a,\lambda}$$

où

$$(B_{\varepsilon,1}^{a+1,\lambda})_{\lambda\geqslant 1}\subset T_{s-3,0}^{a+1}(\bar\Omega),\qquad (M_{\varepsilon,1}^{a,\lambda})_{\lambda\geqslant 1}\subset T_{s-3,0}^{a}(\bar\Omega)$$

sont des familles bornées, et

$$(B_{\varepsilon,2}^{a+1,\lambda})_{\lambda\geqslant 1}\subset \mathrm{Op}(\Sigma_{s-3-n/2}^{a+1}),\qquad (M_{\varepsilon,2}^{a,\lambda})_{\lambda\geqslant 1}\in \mathrm{Op}(\Sigma_{s-3-n/2}^{a})$$

sont des familles bornées. En outre on a :

$$WF(B_{\varepsilon,1}^{a+1,\lambda})\subset F^-(\varepsilon,\varepsilon^2),\qquad WF(B_{\varepsilon,2}^{a+1,\lambda})\subset W^-(\varepsilon,\varepsilon^2)$$
$$WF(M_{\varepsilon,1}^{a,\lambda})\subset WFQ_\varepsilon^{a,\lambda}$$
$$WFM_{\varepsilon,2}^{a,\lambda}\subset\left\{(x, y; \xi, \eta),\ (x, y, \eta)\in WFQ_\varepsilon^{a,\eta},\ x\geqslant\frac{\varepsilon^2}{4},\ |\xi|\leqslant 2C_1\varepsilon|\eta|\right\}.$$

Enfin si u est microlocalement de classe H^σ sur un voisinage de $WFQ_\varepsilon^{a,\infty}$ et si $2\sigma-a-4+s-n/2\geqslant 0$ alors la quantité $\langle B_{\varepsilon,3}^{a+1,\lambda}u, u\rangle$ reste bornée.

Preuve. — Il suffit de reprendre la preuve de la proposition 2.36 de [15] et de remplacer $(A_{\varepsilon,j}^{(a+1)/2,\lambda})^*(A_{\varepsilon,j}^{(a+1)/2,\lambda})$ dans [15] par $G_{\varepsilon,j}^{a+1,\lambda}$.

Nous désignerons parfois un point du front d'onde de u par (x, y, ξ, η) même quand $x=0$ alors que la notation correcte serait (y, η).

THÉORÈME 6.5. — *Rappelons que* $s'+1 < s'' \leqslant 2s-2-n/2$ *et qu'en dehors d'une partie conique fermée* Z *de* $T^*\partial\Omega\setminus 0$ *incluse dans la zone elliptique* Pu *est microlocalement de classe* $H^{s''-2}$ *et* $u|_{x=0}$ *est microlocalement de classe* $H^{s''}$. *Soit* $(y_0, \eta_0)\in G$. *Alors il existe* ε_0, $\delta > 0$ *tel que si*

$$\{(x, y, \xi, \eta)\in WF_{H^{s'}}u;\ 0 \leqslant x \leqslant \varepsilon_1^2,\ (y, \eta)\in L^-(\varepsilon_1, \varepsilon_1^2)\} = \varnothing$$

pour un certain $0 < \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ *alors* $\exp\{tH_{r_0}\}(y_0, \eta_0)\notin WF_{H^{s'}}u$ *pour* $0 \leqslant t < \delta\varepsilon_1$.

Preuve. — Nous suivons de près [15] et choisissons ε_0 et $\delta > 0$ suffisamment petits dans la suite de sorte que Pu et $u(0, y)$ soient microlocalement de classe $H^{s''-2}$ et $H^{s''}$ sur les domaines que nous considérons. Désignons par $\mathrm{Ell}\, Q_\varepsilon^{a',\alpha}$, $\mathrm{Ell}\, G_{\varepsilon,j}^{a'+1,\alpha}$ les ensembles où $Q_\varepsilon^{a',\alpha}$ et $A_{\varepsilon,j}^{a'+1,\alpha}$ sont non caractéristiques. Ces ensembles sont indépendants de a', et dans un voisinage conique de $\{x=0\}\cup P^{-1}(0)$ on a :

$$\mathrm{Ell}\, G_{\varepsilon,1}^{a'+1,\alpha} \cup \mathrm{Ell}\, G_{\varepsilon,2}^{a'+1,\alpha} = \mathrm{Ell}\, Q_\varepsilon^{a',\alpha}$$

dans le domaine que nous considérons u est microlocalement de classe $H^{s''}$ aux points n'appartenant pas à Z et en lesquels p est elliptique. Nous raisonnerons par récurrence sur les valeurs de s' pour montrer que $\forall\varepsilon < \varepsilon_1$ u est microlocalement de classe $H^{s'}$ en tout point de $\mathrm{Ell}\, Q^{a',\alpha}$, ce qui prouvera le théorème. Soit $\alpha < 1/2$ proche de $1/2$, dans la suite nous considérons un réel $a \leqslant 2s'-1$, *nous supposerons que* $\forall\varepsilon < \varepsilon_1$ u *est microlocalement de classe* $H^{a/2+\alpha}$ *en tout point de* $\mathrm{Ell}\, Q_\varepsilon^{a,\alpha}$ et nous montrerons, en utilisant l'hypothèse du théorème, que u est microlocalement de classe $H^{(a+1)/2}$ en tout point de $\mathrm{Ell}\, Q_\varepsilon^{a,\alpha}$. *Le lemme* 6.2 *assure alors que* $\forall\varepsilon < \varepsilon_1$ u *est microlocalement de classe* $H^{(a/2)+\alpha}$ *sur un voisinage de* $WFQ_\varepsilon^{a,\alpha}$. Avec les notations de la proposition 6.4 considérons $\langle N_\varepsilon^{a+1,\lambda}u, u\rangle$. Reprenons le lemme 6.1, comme $s''+(a/2)+\alpha-3/2-a \geqslant 0$ on peut supposer avoir choisi ε_0 et δ assez petits de sorte que le terme de bord $(Q_\varepsilon^{a,\lambda}\partial u/\partial x(0, y)$ est de classe H^τ où $\tau = a/2+\alpha-a-3/2)$:

$$\left\langle Q_\varepsilon^{a,\lambda}\frac{\partial u}{\partial x}, u\right\rangle_B, \qquad \left\langle Q_\varepsilon^{a,\lambda}u, \frac{\partial u}{\partial x}\right\rangle_B, \qquad \langle Q'^{a,\lambda}_{\varepsilon,x}u, u\rangle_B$$

restent bornés quand $\lambda \to +\infty$. Comme $s'' > 1+s'$ on peut choisir α tel que $s''-2-a+a/2+\alpha \geqslant 0$ de sorte que les quantités $\langle Q_\varepsilon^{a,\lambda} u, Pu \rangle_\Omega$ et $\langle Q_\varepsilon^{a,\lambda} Pu, u \rangle_\Omega$ restent bornées quand $\lambda \to +\infty$ (ε_0 et δ étant assez petits). Donc $\langle N_\varepsilon^{a+1,\lambda} u, u \rangle$ reste bornée quand $\lambda \to +\infty$. La proposition 6.4 permet alors d'écrire :

$$\langle G_{\varepsilon,1}^{a+1,\lambda} u, u \rangle + \langle G_{\varepsilon,2}^{a+1,\lambda} u, u \rangle \leqslant C_{\varepsilon,a} + \sum_{j=1}^{3} |\langle B_{\varepsilon,j}^{a+1,\lambda} u, u \rangle| + \sum_{j=1}^{2} |\langle u, M_{\varepsilon,j}^{a,\lambda} u \rangle|.$$

Comme $a+2\alpha-a-1-s-n/2-3 \geqslant 0$ la proposition 6.4 montre que $\langle B_{\varepsilon,3}^{a+1,\lambda} u, u \rangle$ reste borné. L'hypothèse faite sur le front d'onde d'ordre $H^{(a+1)/2}$ de u et la proposition 6.4 montrent que les $\langle B_{\varepsilon,j}^{a+1,\lambda} u, u \rangle$ $j=1, 2$ restent bornés. Pour tout $\varepsilon < \varepsilon' < \varepsilon_1$, $WF(M_{\varepsilon,1}^{a,\lambda})$ et $WF(M_{\varepsilon,2}^{a,\lambda})$ sont inclus dans la réunion de $E11\, G_{\varepsilon',1}^{a,\lambda}$ et $E11\, G_{\varepsilon',2}^{a,\lambda}$ si σ_1 et σ_2 sont convenablement choisis (*voir* [15]), comme $2(a/2+\alpha) \geqslant a$ l'hypothèse de récurrence assure alors que les quantités $|\langle u, M_{\varepsilon,j}^{a,\lambda} u \rangle|$ restent bornées $j=1, 2$. Considérons maintenant $\varepsilon'' < \varepsilon$, pour $j \in \{1, 2\}$ et pour un choix convenable de σ_1 et σ_2 le lemme 6.2 montre (*voir* [15]) que $G_{\varepsilon,j}^{a+1,\infty}$ est elliptique sur un voisinage conique des $WFG_{\varepsilon'',j}^{a+1,\lambda}$ et que son symbole principal est positif ou nul. On peut mettre alors le symbole principal de $G_{\varepsilon,j}^{a+1,\lambda}$ sous la forme $d_{\lambda,j}+c_{\lambda,j}^2$ où les symboles réels $c_{\lambda,j}$, $d_{\lambda,j}$ définissent respectivement des familles bornées d'opérateurs paradifférentiels $C_{\lambda,j}$, $D_{\lambda,j}$ d'ordre $(a+1)/2$, $a+1$ tels que $d_{\lambda,j} \geqslant 0$, et $C_{\lambda,j}$ converge (en un sens plus faible) vers un opérateur paradifférentiel d'ordre a $C_{\infty,j}$ qui soit elliptique en tout point de $WFG_{\varepsilon'',j}^{a+1,\infty}$, $j=1, 2$. L'hypothèse de récurrence dit que $\forall \varepsilon' < \varepsilon_1$ u est microlocalement de classe $H^{a/2+\alpha}$ sur un voisinage conique de $WFQ_{\varepsilon'}^{a,\infty}$ et donc aussi sur un voisinage conique des $WFC_{\lambda,j}$, $WFD_{\lambda,j}$, d'où :

$$\forall \lambda \geqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{2} \|C_{\lambda,j} u\|_{L^2}^2 \leqslant \sum_{j=1}^{2} \langle D_{\lambda,j} u, u \rangle + \mathrm{Cte}.$$

En outre pour $0 < (1/2)-\alpha$ petit l'inégalité de Gärding donne :

$$\forall \lambda \geqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{2} \|C_{\lambda,j} u\|_{L^2}^2 \leqslant \mathrm{Cte}.$$

En faisant tendre λ vers $+\infty$ on obtient alors le résultat voulu.

Fin de la preuve du théorème 2.10. — Les propriétés géométriques du flot hamiltonien « brisé » (*voir* [8]) ou [15]) et le théorème 6.5 permettent de prouver le résultat voulu de propagation de singularités près des points glancings vérifiant, avec les notations de la définiton 2.3, $H_p^2\varphi(x_0, \xi_0+\lambda_1\eta_0) < 0$. On termine alors la preuve en reprenant la récurrence conduite dans la section 4 de [15].

7. Espaces de fonctions et géométrie

On commence par observer qu'une hypersurface Λ de $\mathbb{R}^n$ de classe $H^{s+(1/2)}(s > n/2)$ admet un système générateur de vecteurs tangents de classe H^s (définis sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$). En effet considérons une carte de Λ du type :

$$(x_2, \ldots, x_n)=x' \to (h_1(x'), x') \tag{15}$$

où h_1 est de classe $H^{s+(1/2)}_{\text{loc}}$, considérons aussi une fonction $h(x_1, x')$ de classe H^{s+1}_{loc} telle que $h(0, .)=h_1$ et $\forall x'\, D_1 h(0, x') \neq 0$. Les champs de vecteurs suivants répondent alors à la question :

$$\begin{aligned} Y_1 &= (x_1-h_1)\times\left(\frac{\partial h}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial h}{\partial x_n}\right), \\ Y_j &= \left(\frac{\partial h}{\partial x_j}, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0\right), \qquad j \geq 2 \end{aligned} \tag{16}$$

dans Y_j le terme 1 se trouve à la j-ième place. Nous aurons beoin du difféomorphisme local de classe H^{s+1} défini par $H(y_1, y')=(h(y_1, y'), y')$. On vérifie aisément que :

$$(dH^{-1}.Y_j)\circ H(y_1, y')=\frac{\partial}{\partial y_j}, \qquad j \geq 2. \tag{17}$$

Nous définirons par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$ les espaces $H^{s,k}_\Lambda$, Λ étant alors de classe $H^{s+k-(1/2)}$. Nous définissons $H^{s,1}_\Lambda$:

DÉFINITION 7.1. — Λ étant une hypersurface de classe $H^{s+(1/2)}$ $(s > n/2)$ de $\mathbb{R}^n$, on désigne par $H^{s,1}_\Lambda$ l'ensemble des fonctions f de classe $H^s_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ telles que $X.f\in H^s_{\text{loc}}$ pour tout champ de vecteurs X de classe H^s tangent à Λ. Il est clair que de telles f sont de classe H^{s+1}_Λ hors du fibré conormal de Λ et que $H^{s,1}_\Lambda$ est une algèbre.

Nous allons établir quelques propriétés valables pour $H^{s,1}_\Lambda$.

THÉORÈME 7.2. — *Soit $f \in H_\Lambda^{s,1}$ alors $f|_\Lambda$ est de classe $H^{s+(1/2)}$. Par conséquent si χ est un difféomorphisme de classe $H_\Lambda^{s,1}$, $\chi(\Lambda)$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$ de classe $H^{s+(1/2)}$.*

Preuve. — Reprenons une carte de Λ du type (15), les champs de vecteurs Y_j notés (16), et le difféomorphisme $H(y_1, y') = (h(y_1, y'), y')$. Nous voulons montrer que $f \circ H(0, y')$ est de classe $H_{loc}^{s+(1/2)}$, f étant de classe H_{loc}^s, on peut déjà affirmer que $f \circ H(0, y')$ est de classe $H_{loc}^{s-(1/2)}$. Pour $2 \leqslant j \leqslant n$ la relation (17) entraîne :

$$\frac{\partial}{\partial y_j}(f \circ H) = (dH^{-1}.Y_j) \circ H.f \circ H = (df.Y_j) \circ H.$$

Par hypothèse $df.Y_j$ est de classe H_{loc}^s, on en déduit alors que, pour $j \geqslant 2$, les $\partial/\partial y_j(f \circ H)(0, y')$ sont de classe $H^{s-(1/2)}$, ce qui prouve le théorème.

PROPOSITION 7.3. — *Soit χ un difféomorphisme de classe $H_\Lambda^{s,1}$. Si les M_j ($1 \leqslant j \leqslant n$) forment un système générateur de vecteurs tangents à Λ de classe H^s alors les $(d\chi.M_j) \circ \chi^{-1}$ vérifient la même propriété pour $\chi(\Lambda)$.*

COROLLAIRE 7.4. — *Soient f une fonction et χ un difféomorphisme appartenant à $H_\Lambda^{s,1}$. Alors $f \circ \chi^{-1}$ et χ^{-1} sont de classe $H_{\chi(\Lambda)}^{s,1}$.*

Maintenant nous définissons les espaces $H_\Lambda^{s,k}$:

DÉFINITION 7.5. — Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $s > n/2$, supposons qu'on ait défini l'espace $H_\Lambda^{s,k}$ lorsque Λ est de classe $H^{s+k-(1/2)}$. Λ désignant maintenant une hypersurface de classe $H^{s+k+(1/2)}$, on désigne par $H_\Lambda^{s,k+1}$ l'ensemble des fonctions $f \in H_{loc}^s(\mathbb{R}^n)$ telles que pour tous champs de vecteurs $M_1, \ldots, M_j$ ($j \leqslant k+1$) de classe $H_\Lambda^{s,k}$ tangents à Λ on ait $M_1.M_2 \ldots M_j f \in H_{loc}^s$.

Par récurrence sur k on démontre aisément la :

PROPOSITION 7.6. — *$H_\Lambda^{s,k}$ est une algèbre (stable par opérations non linéaires) qui contient $H_{loc}^{s+k}(\mathbb{R}^n)$ et est incluse dans $H_\Lambda^{s,l}$ pour $l \leqslant k$. Tout élément de $H_\Lambda^{s,k}$ est de classe H^{s+k} hors du fibré conormal de Λ.*

THÉORÈME 7.7. — *Λ désigne une hypersurface de classe $H^{s+k-(1/2)}$. Soit $f \in H^{s,k}$ alors $f|_\Lambda$ est de classe $H^{s+k-(1/2)}$. Par conséquent si Λ est un difféomorphisme de classe $H^{s,k}$, $\chi(\Lambda)$ est une hypersurface de classe $H^{s+k-(1/2)}$.*

Preuve. — Reprenons les notations de la preuve du théorème 7.2, $H(y_1, y')$ est ici de classe H^{s+k} et les Y_j ($j \geqslant 1$) sont de classe H^{s+k-1} et donc de classe $H_{\Lambda}^{s,k-1}$ si $k \geqslant 2$ (proposition 7.6). Nous voulons montrer que $f \circ H(0, y')$ est de classe $H_{\mathrm{loc}}^{s+k-(1/2)}$. Pour $j \geqslant 2$ la relation (17) permet de voir que :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^k f \circ H = ((dH^{-1} . Y_j) \circ H)^k . f \circ H = (Y_j^k . f) \circ H.$$

Comme par hypothèse $Y_j^k . f$ est de classe H_{loc}^s, ceci prouve le théorème 7.7.

En utilisant une récurrence et la proposition 7.6 on démontre facilement la :

PROPOSITION 7.8. — *Λ étant de classe $H^{s+k+(1/2)}$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et $s > n/2$, considérons un difféomorphisme χ de classe $H_{\Lambda}^{s,k+1}$. Si les M_j ($1 \leqslant j \leqslant n$) forment un système générateur de vecteurs tangents de classe $H_{\Lambda}^{s,k}$ à Λ alors les $(d\chi . M_j) \circ \chi^{-1}$ vérifient la même propriété pour $\chi(\Lambda)$.*

COROLLAIRE 7.9. — *Λ étant comme dans la proposition 7.8, soient f une fonction et χ un difféomorphisme de classe $H_{\Lambda}^{s,k+1}$. Alors $f \circ \chi^{-1}$ et χ^{-1} sont de classe $H_{\chi(\Lambda)}^{s,k+1}$.*

Maintenant nous pouvons définir le concept de sous-variétés de classe $H_{\Lambda}^{s,k}$.

Définition et proposition 7.10. — Soient $k \in \mathbb{N}^*$, V une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+p}$ de classe H^s ($s > 1 + (n/2)$), et Λ une hypersurface de V.

Supposons qu'en chacun de ses points V admette une paramétrisation par un graphe :

$$x = (x_1, x') = (x_1, \ldots, x_n) \to (x, h_1(x), \ldots, h_p(x))$$

telle que, dans cette carte Λ soit définie (quitte à réordonner les indices) par la relation $x_1 = g(x_2, \ldots, x_n)$ où g est de classe $H^{s+k-(1/2)}$, et que les h_j ($j \leqslant p$) soient de classe $H_{\Lambda_1}^{s,k}$ où Λ_1 désigne l'hypersurface de $\mathbb{R}^n$ paramétrée par $x' \to (g(x'), x')$. Le théorème 7.7 montre alors que la paramétrisation de Λ définie par :

$$x' \to (g(x'), x', h_1(g(x'), x'), \ldots, h_p(g(x'), x'))$$

est de classe $H^{s+k-(1/2)}$. Alors les propriétés précédentes sont vérifiées dans toute autre carte de V définie par un graphe. On dit alors que V est de classe $H^{s,k}_{\Lambda}$, Λ apparaissant comme une hypersurface de classe $H^{s+k-(1/2)}$ de V.

Preuve. — Considérons un C^{∞} difféomorphisme

$$(x_1, \ldots, x_{n+p}) \rightarrow (y_1, \ldots, y_{n+p}),$$

tel que V admette une paramétrisation du type :

$$y=(y_1, y')=(y_1, \ldots, y_n) \rightarrow (y, f_1(y), \ldots, f_p(y))$$

où les f_j sont de classe H^s. Le difféomorphisme χ défini par :

$$\chi(x)=(y_1(x, h_1(x), \ldots, h_p(x)), \ldots, y_n(x, h_1(x), \ldots, h_p(x)))$$

est de classe $H^{s,k}_{\Lambda_1}$ d'après la proposition 7.6. Le corollaire 7.9 et les relations $h_j \circ \chi^{-1}(y)=f_j(y)$ $(1 \leqslant j \leqslant p)$ assurent alors que les f_j sont de classe $H^{s,k}_{\chi(\Lambda_1)}$. Ceci prouve la proposition.

Remarque importante 7.11. — On peut « redresser » l'hypersurface Λ de V de la manière suivante : considérons une paramétrisation de V comme dans la proposition 7.10, considérons un relèvement $g_1(x_1, x')$ de classe H^{s+k} de $g(x')$ tel que $g_1(0, x')=g(x')$ et $\partial g_1/\partial x_1(0, x') \neq 0$. On définit un difféomorphisme G de classe H^{s+k} en posant $G(y)=(g_1(y), y')$. $G^{-1}(\Lambda)$ est défini par $y_1=0$ et est paramétrée par des fonctions de classe $H^{s+k-(1/2)}$, en effet les $h_j \circ G$ sont de classe $H^{s,k}_{G^{-1}(\Lambda_1)}$ d'après le corollaire 7.9.

DÉFINITION 7.12. — Soit V une sous-variété de dimension n de $\mathbb{R}^{n+p}$ et de classe $H^{s,k}_{\Lambda}$ $(s > 1+n/2, k \in \mathbb{N})$. On dit qu'une fonction $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $H^{s,k}_{\Lambda}$ si en chaque point de V il existe une paramétrisation $x \rightarrow (x, h_1(x), \ldots, h_p(x))$ vérifiant les propriétés de la définition 7.10 et telle que $x \rightarrow f(x, h_1(x), \ldots, h_p(x))$ soit de classe $H^{s,k}_{\Lambda_1}$ (Λ_1 est défini en 7.10). Une telle propriété ne dépend pas du choix de la paramétrisation. L'intersection des $H^{s,k}_{\Lambda}$ pour $k \in \mathbb{N}$ sera notée $H^{s,\infty}_{\Lambda}$.

Preuve du théorème 2.13

Pour chaque point de Λ la remarque 7.11 montre qu'il existe une carte (X, φ) de coordonnées locales C^{∞} $(t, x_1, \ldots, x_{n-1})=(t, x)$ et une fonction $f(x) \in H^{s}_{\mathrm{loc}}$ (définition de [5]) telles que Ω, $\partial\Omega$ et Λ sont respectivement définis localement $t \geqslant -f(x)$, $t=-f(x)$, $x_1=0$. Par hypothèse $u|_{\partial\Omega} \in H^{s,\infty}_{\Lambda}$ (déf. 7.12) et u est solution d'une équation quasi linéaire du type :

$$Pu=\sum_{|\beta|=2} F(t, x, \partial^\delta u)_{|\delta|\leqslant 1} \partial^\beta u + F(t, x, \partial^\delta u)_{|\delta|\leqslant 1}=0.$$

Pour redresser le bord $\partial\Omega$ considérons le changement de variables $\chi(t, x)=(t+f(x), x)$, posons

$$v \circ \chi = u \qquad \text{et} \qquad \tilde{P} v=(Pu)\circ\chi^{-1}.$$

Alors les résultats de la section 7 montrent que $v(0, x)$ est de classe $H^{s,\infty}_{x_1=0}$ et on a :

$$\tilde{P} v=\sum_{|\beta|=2} G_\beta(t, x, \partial^\delta v, \partial^\lambda f)\partial^\beta v + G(t, x, \partial^\delta v, \partial^\lambda f)=0,$$

où dans chaque terme $|\delta| \leqslant 1$, $|\lambda| \leqslant 2$. Nous poserons $Qv=\Sigma G_\beta \partial^\beta v$. Notons $\xi=(\xi_1, \xi')$ la variable duale de x. Par hypothèse $\partial\Omega$ est non caractéristique pour $\tilde{P}$ et le conormal de Λ est inclus dans la zone elliptique de $\tilde{P}$ donc, quitte à réduire le domaine X de la carte nous pourrons supposer qu'il existe $C>0$ tel que Q soit elliptique en tout point $(t, x; \tau, \xi)$ de $T^* X$ tel que $|\xi_1| \geqslant C/2|\xi'|$ et $t \geqslant 0$. On peut écrire :

$$\xi_1=\sum_{j=1}^{n-1} R_j(\xi)\xi_j+T(\xi) \tag{18}$$

où T est une fonction C^∞ à support compact, les R_j sont C^∞ nulles près de 0, homogène de degré 0 pour $|\xi| \geqslant 1$, $R_1(\xi)$ est nul pour $|\xi_1| < C|\xi'|$, $R_j(\xi)$ est nul si $|\xi_1| > 2C|\xi'|$ pour $j \geqslant 2$. Q est donc elliptique sur un voisinage de $\operatorname{supp} R_1$. Nous considérons dans la suite un recouvrement ouvert localement fini de Λ par de tels domaines de cartes (X, φ). Dans le système C^∞ de coordonnées (t, x) Λ est défini par $t=0$ et $x_1=0$; nous désignerons par m l'un des champs de vecteurs suivants : $t\partial_t$, $x_1\partial_{x_1}$, ∂_{x_j} $j \geqslant 2$. Si $\alpha=(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$ est un multi-indice m^α désignera $m^{\alpha_0} m^{\alpha_1} \ldots m^{\alpha_{n-1}}$. Dans chaque carte (X, φ) nous utiliserons un argument de commutation analogue à celui de Bony [5], on vérifie que :

$$[Q, m]=_{|\beta|=2, |\delta|\leqslant 1, |\mu|\leqslant 1} H_{\beta,\delta,\mu}(t, x, \partial^j v, m^{\delta'}\partial^\lambda f)\partial^\mu m^\delta v \partial^\beta$$

où les $H_{\beta,\delta,\mu}$ sont des fonctions C^∞ et $|j| \leqslant 1$, $|\lambda| \leqslant 2$, $|\delta'| \leqslant 1$. Une récurrence sur la longueur de α montre que $Qm^\alpha v=$

$$\sum_{|\beta|\leqslant 2, |\mu|\leqslant 1} \sum_{|\alpha'|\leqslant|\alpha|-1, |\gamma|\leqslant|\alpha|} H_{\beta,\alpha',\mu,\gamma} \times (t, x, \partial^\delta v, m^{\delta'}\partial^\lambda f)\partial^\mu m^\gamma v \partial^\beta m^{\alpha'} v \tag{19}$$

où $H_{\beta,\alpha',\mu,\gamma}$ est une fonction C^∞ et $|\delta| \leqslant 1$, $|\lambda| \leqslant 2$, $|\delta'| \leqslant |\alpha|$. Nous allons prouver le théorème 2.13 en procédant par récurrence sur $l \in \mathbb{N}$. Soit $l \in \mathbb{N}$ et supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ u soit de classe $H^{s+l-\varepsilon}$ hors de $\bar{\Lambda}$ et jusqu'au bord, et que dans chaque carte du type précédent et pour tout multi-indice α de longueur $\leqslant l$, les $m^\alpha v$ sont de classe $H^{s-\varepsilon}$, $Qm^\alpha v$ est microlocalement de classe $H^{s-1-\varepsilon}$ hors du conormal de $x_1 = 0$.

Considérons alors un multi-indice α de longueur $l+1$; dans l'expression (19) de $Qm^\alpha v$ nous remplaçons $\partial^{\beta_0} = \partial_t^2$ par $G_{\beta_0}^{-1}[Q - \sum_{\beta \neq \beta_0} G_\beta \partial^\beta]$, il n'y a donc plus de termes du type ∂_t^2 mais il y a peut-être des termes du type $\partial_{x_1}\partial_t$, $\partial_{x_1}^2$. On rappelle alors (*cf.* (18)) que $\partial_{x_1} = T + \Sigma R_j \partial_{x_j}$, $R_1 \partial_{x_1} m^{\alpha'} v$ est ($|\alpha'| \leqslant l$) de classe $H^{s-1-\varepsilon}$ et microlocalement C^∞ en chaque point où Q n'est pas elliptique. Enfin, dans l'expression (19) $m^\delta \partial^\lambda f$ sera de classe $H^{s-2,\alpha}_{x_1=0}$ donc $H_{\beta,\alpha',\mu,\gamma}(t, x, \partial^\delta v, m^\delta \partial^\lambda f)$ sera de classe $H^{s-2-\varepsilon}$ et microlocalement de classe $H^{s-1-\varepsilon}$ hors du conormal de $x_1 = 0$. Désignons par V le vecteur colonne constitué de tous les $m^\alpha v$ où $|\alpha| \leqslant l+1$, compte tenu de ce qui précède, une paralinéarisation tangentielle (comme dans la section §4) permet d'écrire :

$$QV + RV = U$$

où R est une matrice d'opérateurs paradifférentiels tangentiels dont les symboles appartiennent à $T^1_{s-2-\varepsilon,0}$, et U est (d'après ce qui précède et l'hypothèse de récurrence) de classe $H^{s-2-\varepsilon}$ et microlocalement de classe $H^{s-1-\varepsilon}$ hors du conormal de $x_1 = 0$. $V(0, x)$ est de classe $H^{s,\alpha}_{x_1=0}$. Aux points situés hors du conormal de Λ en lesquels P [resp. Q] est elliptique u [resp. V] est microlocalement de classe $H^{s-\varepsilon}$. Les méthodes d'inégalités d'énergie utilisées dans la preuve des théorèmes 2.7 et 2.10 montrent qu'on peut étendre ces derniers au cas d'un système paradifférentiel tangentiel à partie principale diagonale.

Considérons enfin un arc Γ de bicaractéristique généralisée paramétré par $\theta \in [0, h] \to j(\theta)$ tel que u soit microlocalement C^∞ en $j(0)$. Soit $\varepsilon' > \varepsilon$; si $v = u \circ \chi^{-1}$ est microlocalement de classe $H^{s+l+1-\varepsilon}$ en un point situé hors du conormal de $x_1 = 0$ alors u sera microlocalement de classe $H^{s+l+1-\varepsilon}$ au point correspondant (*voir* [12] ou déf. 2.1). Les théorèmes 2.7 et 2.10 (étendus au cas d'un système) prouvent alors ceci : pour tout $\varepsilon' > \varepsilon$ et tout $\theta \in [0, h]$ u est microlocalement de classe $H^{s+l+1-\varepsilon'}$ en $j(\theta)$ si la projection $\pi(\theta)$ de $j(\theta)$ sur la base n'appartient pas à Λ, si $\pi(\theta)$

appartient à Λ et à un domaine de carte X alors les $Qm^\alpha v$ ($|\alpha| \leqslant l+1$) sont microlocalement de classe $H^{s+l+1-\varepsilon'}$ en $j(\theta)$. L'hypothèse de récurrence est donc vérifiée au rang $l+1$ et le théorème est donc prouvé.

Appendice. Esquisse de la preuve de la proposition 2.1

• On suit de près [21] où le résultat est prouvé lorsque $\partial\Omega$ est de classe C^∞.

• Considérons deux cartes de bord basées en x_0, de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ (celles de la prop. 2.1) et $z_1, \ldots, z_n$ (Ω défini par $z_1 \geqslant 0$); notons $\xi_1, \ldots, \xi_n$ et $\eta_1, \ldots, \eta_n$ les coordonnées duales. Pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ à support assez petit et égale à 1 au voisinage de x_0, on note v_+ $(=(\varphi u) \circ \chi_1)$ et w_+ l'image de φu dans ces deux cartes. Soit (z_0, η_0') le point correspondant à (x_0, ξ_0') dans le système de coordonnées $z_1, \ldots, z_n$. Le théorème d'inversion microlocale de [12] montre que $v_+ \circ \chi(z) = w_+(z)$ où χ est un difféomorphisme de classe H^s et microlocalement de classe $H^{s''}$ au point (z_0, η_0'), η_0' est égal à ${}^t\chi'(z_0) \cdot \xi_0'$. Par hypothèse v_+ est microlocalement de classe $H^{s'}$ en (x_0, ξ_0') donc pour $j < 2s-2-1$ les traces $\partial_{x_1}^j v_+(0)$ sont de classe $H^{s-j-(1/2)}$ et microlocalement de classe $H^{s'-j-(1/2)}$ en (x_0', ξ_0'). Le théorème d'inversion microlocale de [12] et les résultats de Bony et Meyer sur la régularité microlocale des produits intervenant dans « la formule » exprimant $\partial_{z_1}^j (v_+ \circ \chi)(z)$ montrent que pour $j < 2s-2-1$, $\partial_{z_1}^j w_+(0)$ est de classe $H^{s-j-(1/2)}$ et microlocalement de classe $H^{s'-j-(1/2)}$ en (z_0, η_0'). Nous avons vu dans la section 4 que $v = u \circ \chi_1$ est solution d'une équation de la forme

$$\bullet \qquad \partial_{x_1}^2 v + G(x, \ldots, \partial^\beta f(x), \ldots, \partial^\alpha v(x)) = 0;$$

une paralinéarisation tangentielle permet d'écrire :

$$G(x, \partial^\beta f, \partial^\alpha v) - \sum_\alpha (\Pi'(\partial_{\partial^\alpha v} G)\, \partial_x^\alpha v = \sum_{|\beta| \leqslant 2} \Pi'(\partial_{\partial^\beta f} G)\, f + k$$

où le second membre est (*voir* section 4) microlocalement de classe $H^{s'-2}$ en (x_0', ξ_0'). Pour conclure, il suffit maintenant de reprendre mot à mot la preuve de [21].

BIBLIOGRAPHIE

[1] ALABIDI (A.). — Réflexion transverse des singularités pour un problème aux limites non linéaires d'ordre 2, *Thèse de 3e cycle*, Rennes, 1984.

[2] BEALS (M.). — Self-spreading and strength of singularities for solutions to semi-linear wave equations, *Ann. of Math.*, t. 118, 1983, p. 187-214.

[3] BEALS (M.). — Nonlinear wave equations with data singular at one point. *Contemp. Math.*, t. 27, 1984, p. 83-95.

[4] BERNING (J.) et REED (M.). — Reflection of singularities of one-dimensional semi-linear wave equations at boundaries. *J. Math. An. Appl.*, t. 72, 1979, p. 635-653.

[5] BONY (J.-M.). — Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Ann. Scien. de l'École Norm. Sup.*, t. 14, 1981.

[6] BONY (J.-M.). — Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. *Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz*, exp. n 2, 1981-1982.

[7] BONY (J.-M.). — Interactions des singularités pour les équations de Klein-Gordon non linéaires. *Sém. Goulaouic-Meyer-Schwartz*, exp. n 10, 1983-1984.

[8] HÖRMANDER (L.). — *The analysis of linear partial differential operators III*. Springer, 1985.

[9] IVRII (V.). — Wave fronts for solutions of boundary value problems for a class of symmetric hyperbolic systems. *Sibirian Math. J.*, t. 21, 1981, p. 527-534.

[10] LEBEAU (G.). — Inegalités relatives aux deuxièmes microlocalisations et applications à la diffraction. *Thèse d'État*, Orsay, 1983.

[11] LEICHTNAM (E.). — Interactions de singularites pour une classe d'équations à caractéristiques doubles. *Annales de l'Institut Fourier* (à paraitre), 1985.

[12] LEICHTNAM (E.). — Front d'onde d'une sous-variete; applications aux équations aux dérivées partielles non lineaires. *Communications in Partial Differential Equations*, (à paraitre), 1985.

[13] MELROSE (R.). — Microlocal parametrices for diffractive boundary value problems. *Duke Math. J.*, t. 42, n 4, 1975, p. 605-635.

[14] MELROSE (R.) et RITTER (N.). — Interaction of non linear progressing waves for semi linear wave equations. *Annals of Math.*, t. 121, 1985, p. 187-213.

[15] MELROSE (R.) et SJOSTRAND (J.) — Singularities of boundary value problems I. *Comm. in pure and applied Math.*, vol XXXI, 1978, p. 593-617.

[16] METIVIER (G.) et BEALS (M.) — *Progressing wave solutions to certain nonlinear mixed problems*, preprint, 1985.

[17] MEYER (Y.). — Remarques sur un theoreme de J.-M. Bony, Suppl. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, n 1, 1980, p. 1-20.

[18] OBERGUGGENBERGER (M.) — Propagation of singularities for semi-linear mixed hyperbolic systems in two variables. *Ph. D. thesis*, Duke Univ., 1981.

[19] RAUCH (J.). — Singularities of solutions to semi-linear wave equations. *J. Math. Pures et Appl.*, t. 58, 1979, p. 299-308.

[20] RAUCH (J.) et REED (M.) — Propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations in one space variable. *Ann. of Math.*, t. 111, 1980, p. 531-552.

[21] TOUGERON (M.). — Regularite microlocale pour des problemes aux limites non lineaires. *Thèse d'État*, 1985.