

# BULLETIN DE LA S. M. F.

S. KANTOR

## **Sur les transformations linéaires successives dans le même espace à $r$ dimensions**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 8 (1880), p. 208-212

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1880\\_\\_8\\_\\_208\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__208_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Sur les transformations linéaires successives dans le même espace  
à  $r$  dimensions; par M. S. KANTOR.*

(Séance du 7 mai 1880.)

Étant donnée une variété (un espace)  $V_r$  à  $r$  dimensions, on peut établir entre ses éléments une relation linéaire, c'est-à-dire telle, qu'à une variété linéaire à  $r - 1$  dimensions, contenue dans  $V_r$ , corresponde une autre variété linéaire à  $r - 1$  dimensions de  $V_r$ . Soit  $p$  un élément de  $V_r$  et supposons que l'élément correspondant soit  $p_1$ . Alors à  $p_1$  correspond par notre transformation un autre élément  $p_2$ , et à celui-ci également un autre  $p_3$ , etc. Nous appellerons  $p_n$  le  $n^{\text{lem}}$  transformé de  $p$ . La transformation linéaire sera fixée, si l'on connaît  $r + 2$  couples d'éléments correspondants.

Prenons donc  $r + 1$  couples  $a_1, a'_1, a_2, a'_2, \dots, a_{r+1}, a'_{r+1}$  et un

élément fixe  $p$ . La transformation ne sera déterminée que si nous faisons correspondre à  $p$  un certain élément  $p_1$ , lequel nous voulons faire varier dans toute la variété. Par ce mouvement, nous obtiendrons  $\infty^r$  diverses transformations linéaires. Selon chacune d'elles le  $p$  aura un  $n^{\text{ième}}$  transformé  $p_n$ . Voici le théorème qui se rapporte au lien entre  $p$  et  $p_n$ .

**THÉORÈME.** — *Les éléments  $p$  et  $p_n$  sont liés entre eux par une relation telle qu'à un élément  $p_1$  correspond un seul  $p_n$ , à un  $p_n$ ,  $n^r$  éléments  $p_1$ . Si le  $p_n$  se meut dans une variété linéaire à  $n - 1$  dimensions, le  $p$  se mouvra dans une variété à  $n - 1$  dimensions et du  $n^{\text{ième}}$  degré.*

*Toutes ces variétés forment un système linéaire, dans lequel se trouvent  $r + 1$  variétés spéciales (dégénérées), qui se composent d'une variété linéaire formée par  $r$  des éléments  $a_i$ , et de la variété du  $(n - 1)^{\text{ième}}$  degré à laquelle elle correspond par la transformation  $p_{n-1} - p_1$ .*

Nous emploierons, dans ce qui suit, les dénominations indiquées ci-après.  $n$  étant un nombre entier et composé des facteurs simples  $f_1, f_2, \dots, f_n$ , c'est-à-dire, de la forme  $f_1^{m_1} f_2^{m_2} \dots f_n^{m_n}$ , soit

$$n - \sum \frac{n}{f_i} + \sum \frac{n}{f_i f_j} - \dots + (-1)^v \frac{n}{f_1 f_2 \dots f_v} = Z_1 \quad (1),$$

où les sommes s'étendent sur tous les facteurs  $f$  et  $i \geq j$ .

Alors nous désignerons par  $Z_k$  cette fonction

$$n^k - \sum \frac{n^k}{f_i^k} + \sum \frac{n^k}{f_i^k f_j^k} - \dots + (-1)^v \frac{n^k}{f_1^k f_2^k \dots f_v^k} = Z_k,$$

laquelle n'est plus de la même nature que  $Z_1$ , parce qu'à ce bout il faudrait mettre  $f_i \dots$  au lieu de  $f_i^k \dots$ .

Remarquons de plus que, si la transformation linéaire est périodique pour un seul élément de la variété, sans que tous les éléments d'un cycle puissent constituer une variété à  $r - 1$  dimensions,

(1) Cette fonction offre un très grand intérêt aussi au point de vue de la théorie des nombres. Voir la Note de l'auteur : *Wie viele cyclische Gruppen gibt es in einer quadratischen Transformation der Ebene* (Annali di Matematica, t. X).

elle l'est de même pour tous les éléments. Il y a  $r + 1$  éléments doubles. Si la transformation est périodique pour  $V_r$ , elle est périodique pour toutes les variétés à  $r - 1, r - 2, \dots$  dimensions, qui sont déterminées respectivement par  $r, r - 1, \dots$  des points doubles. Cela posé, je dis :

*Parmi toutes les transformations, il y en a  $Z_r$  qui ne réduisent l'élément  $p$  à lui-même qu'après  $n$  applications successives.*

Mais ce n'est pas que toutes ces transformations soient périodiques pour tous les éléments; il n'y en a que

$$\begin{aligned} & (n - 1)(n - 2) \dots (n - r) - \sum \left( \frac{n}{f_i} - 1 \right) \left( \frac{n}{f_i} - 2 \right) \dots \left( \frac{n}{f_i} - r \right) \\ & + \sum \left( \frac{n}{f_i f_j} - 1 \right) \left( \frac{n}{f_i f_j} - 2 \right) \dots \left( \frac{n}{f_i f_j} - r \right) \\ & + (-1)^v \sum \left( \frac{n}{f_1 \dots f_v} - 1 \right) \dots \left( \frac{n}{f_1 \dots f_v} - r \right). \end{aligned}$$

La manière dont tous ces résultats géométriques s'appliquent à l'analyse me paraît remarquable.

Soient  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r+1}$  les paramètres arbitraires dont dépend linéairement la variété  $V_r$ , et supposons que pour l'élément  $a'_i$  tous les  $\xi$  s'annulent, sauf  $\xi_i$ .

L'équation d'une variété à  $r - 1$  dimensions et du premier degré qui fait partie de  $V_r$  est

$$(1) \quad a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + \dots + a_{r+1} \xi_{r+1}.$$

Appelons

$$A_i \equiv \alpha_i^{(1)} \xi_1 + \alpha_i^{(2)} \xi_2 + \dots + \alpha_i^{(r+1)} \xi_{r+1}$$

l'équation de la variété à  $r - 1$  dimensions qui est déterminée par les éléments  $a_1, \dots, a_2, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{r+1}$ , et  $X_1, X_2, \dots, X_{r+1}$  les paramètres de  $p$ .

Alors, si la variété (1) est constituée par des éléments  $p_n$ , la variété correspondante constituée par  $p_1$  a pour équation

$$(2) \quad \frac{a_1}{L_1} \xi_1 \Omega_1^{(n-2)} + \frac{a_2}{L_2} \xi_2 \Omega_2^{(n-2)} + \dots + \frac{a_{r+1}}{L_{r+1}} \xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{(n-2)}.$$

Dans l'équation (2),  $L_i$  désigne le résultat de la substitution des

$X_1, X_2, \dots, X_{r+1}$  à la place des  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r+1}$  dans le polynôme  $A_i$ .

$\Omega_i^{(n-2)}$  désigne une fonction du  $(n-2)^{\text{ième}}$  degré qui s'obtient par le procédé suivant :

On fait

$$\Omega_i^{(1)} = \frac{\alpha_i^{(1)}}{L_1} \xi_1 A_1 + \frac{\alpha_i^{(2)}}{L_2} \xi_2 A_2 + \dots + \frac{\alpha_i^{(r+1)}}{L_{r+1}} \xi_{r+1} A_{r+1},$$

puis

$$\Omega_i^{(2)} = \frac{\alpha_i^{(1)}}{L_1} \xi_1 \Omega_i^{(1)} + \frac{\alpha_i^{(2)}}{L_2} \xi_2 \Omega_i^{(1)} + \dots + \frac{\alpha_i^{(r+1)}}{L_{r+1}} \xi_{r+1} \Omega_i^{(1)},$$

et l'on continue jusqu'à ce que l'on trouve

$$\Omega_i^{(n-2)} = \frac{\alpha_i^{(1)}}{L_1} \xi_1 \Omega_i^{(n-3)} + \frac{\alpha_i^{(2)}}{L_2} \xi_2 \Omega_i^{(n-3)} + \dots + \frac{\alpha_i^{(r+1)}}{L_{r+1}} \xi_{r+1} \Omega_i^{(n-3)}.$$

C'est donc l'opération successive exprimée par le symbole  $\Omega$  qu'il faut appliquer.

Pour avoir les paramètres appartenant aux éléments  $p_1$ , qui reproduisent le  $p$  comme  $p_n$ , il faut résoudre le système des équations

$$\frac{\xi_1 \Omega_1^{(n-2)}}{L_1 X_1} = \frac{\xi_2 \Omega_2^{(n-2)}}{L_2 X_2} = \dots = \frac{\xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{(n-2)}}{L_{r+1} X_{r+1}}.$$

Les racines de ce système doivent jouir de relations singulières, parce qu'il est satisfait par le groupe des racines des équations

$$\frac{\xi_1 \Omega_1^{(f-2)}}{L_1 X_1} = \frac{\xi_2 \Omega_2^{(f-2)}}{L_2 X_2} = \dots = \frac{\xi_{r+1} \Omega_{r+1}^{(f-2)}}{L_{r+1} X_{r+1}},$$

si  $f$  est facteur de  $n$ .

Il ne sera pas sans intérêt, je l'espère, d'indiquer les énoncés de ces théorèmes et de quelques autres pour l'espace à trois dimensions (1) :

Si quatre couples de points correspondants  $a_1, a'_1, \dots, a_4, a'_4$  sont donnés et si  $p$  est un point fixe, il y a  $n^3$  transformations linéaires qui contiennent ces couples et par lesquelles le  $n^{\text{ième}}$  transformé du point  $p$  devient un point donné  $p_n$ .

(1) Voir un Mémoire de l'auteur : *Ueber successive lineare Transformationen* (Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien, 1880).

$p$  restant fixe et  $p_n$  décrivant un plan,  $p_1$  (c'est-à-dire le premier transformé de  $p$ ) décrira une surface du  $n^{\text{ième}}$  degré. Toutes ces surfaces forment un système linéaire, dont font partie les quatre surfaces composées par un plan  $a'_1, a'_2, a'_3, \dots$  et la surface du  $(n-1)^{\text{ième}}$  degré lui correspondant dans la transformation  $p_{n-1} - p_1$ .

Il y a  $Z_3$  transformations, qui ne reproduisent  $p$  que comme  $p_n$ .

Il y a  $7Z_1$  transformations qui contiennent un tétraèdre double, dont une arête seulement porte une série cyclique de points et l'arête opposée porte une série cyclique de plans avec des cycles de  $n$  éléments.

Il y a  $6Z_2 - 18Z_1$  transformations qui contiennent un tétraèdre double, dont une face porte une transformation plane cyclique avec des cycles de  $n$  points, et dont le sommet opposé porte etc.

Il y a  $Z_3 - 6Z_2 + 11Z_1$  transformations qui sont périodiques pour tout l'espace.

Les points  $p_1$  et les points doubles des transformations ont une relation telle qu'un point  $p_1$  détermine quatre points doubles et un point double détermine un seul point  $p_1$ . Si  $p_1$  décrit un plan, les points doubles décrivent une surface du quatrième ordre, dont  $a'_1, a'_2, a'_3, a'_4$  sont des points doubles.

---