

BULLETIN DE LA S. M. F.

GANG XIAO

Finitude de l'application bicanonique des surfaces de type général

Bulletin de la S. M. F., tome 113 (1985), p. 23-51

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1985__113__23_0

© Bulletin de la S. M. F., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

FINITUDE DE L'APPLICATION BICANONIQUE DES SURFACES DE TYPE GÉNÉRAL

PAR

GANG XIAO (*)

RÉSUMÉ. — Cette thèse étudie la finitude de l'application bicanonique des surfaces complexes de type général, en montrant que cette application est génériquement finie sauf pour les surfaces ayant $p_g = q = 0, K^2 = 1$. La démonstration consiste essentiellement en une étude fine des pinceaux de courbes de genre 2 sur les surfaces de type général avec $p_g = q = 0$.

A la fin de la thèse, on donne un exemple de surfaces avec $p_g = q = 0, K^2 = 2$, qui ont un pinceau de courbes de genre 2.

ABSTRACT. — This thesis studies the finiteness of the bicanonical mapping of complex surfaces of general type, in proving that this mapping is generically finite except for (minimal) surfaces having $p_g = q = 0, K^2 = 1$. The essential part of the proof is a detailed study of pencils of curves of genus 2 on a surface of general type with $p_g = q = 0$.

We also give an example of surfaces with $p_g = q = 0, K^2 = 2$, who have a pencil of curves of genus 2.

Introduction

Les applications pluricanoniques occupent une place très importante dans la théorie de la classification des surfaces algébriques. Dans ce travail, nous nous intéressons aux surfaces lisses et projectives sur le corps complexe \mathbb{C} . Soient S une telle surface, K un diviseur canonique de S , $p_m = h^0(S, \mathcal{O}_S(mK))$ ($m \in \mathbb{Z}^+$) les pluri-genres de S . Pour un entier positif m tel que $p_m > 0$, on peut associer au système linéaire $|mK|$ une application rationnelle

$$\Phi_{mK} : S \dashrightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^{p_m - 1}$$

(*) Texte reçu le 12 avril 1983, révisé le 12 septembre 1984.

Gang XIAO, Math. Dept., East China Normal University, Shanghai, 200062, Chine.

qui est appelée l'application m -canonique. Par définition, une surface S est de type général s'il existe un $m > 0$ tel que Φ_{mK} soit génériquement finie. Dans [8], [15], [5], [10], il est démontré :

Théorème. — Soit S une surface minimale de type général.

(i) Pour $m \geq 3$, Φ_{mK} est birationnelle sauf si

a) $K^2 = 1$, $p_g = 2$, $m = 3$ ou 4 ;

b) $K^2 = 2$, $p_g = 3$, $m = 3$.

(ii) Supposons $K^2 \geq 10$, $p_g \geq 6$. Alors Φ_{2K} n'est pas birationnelle si et seulement si S contient un pinceau de courbes de genre 2, dans ce cas Φ_{2K} est génériquement de degré 2 sur une surface réglée.

On voit ici une insuffisance d'information pour Φ_{2K} quand les invariants de S sont trop petits. En réalité, la situation est un peu plus compliquée dans ce cas. Par exemple, Persson [20] a démontré que si Φ_{2K} est génériquement finie, son degré peut aller jusqu'à 8.

Le principal but de cet article est de démontrer :

THÉORÈME 1. — Soit S une surface minimale de type général. Alors l'application bicanonique de S est génériquement finie si et seulement si S n'est pas une surface avec les invariants suivants : $p_g = q = 0$, $K^2 = 1$.

Le théorème est immédiat dans un sens : si S est une surface avec $p_g = q = 0$, $K^2 = 1$, le théorème de Riemann-Roch et le théorème d'annulation pluri-canonique ci-dessous donnent $p_2(S) = 2$, donc $\Phi_{2K}(S) = \mathbb{P}^1$.

Pour démontrer l'implication inverse, on suppose que Φ_{2K} ne soit pas génériquement finie, donc son image est une courbe puisque $p_2 \geq 2$. On se réduira d'abord dans le § 2, au cas où $p_g = q = 0$ et les fibres générales de Φ_{2K} sont de genre 2. Puis dans le § 3, on démontre les théorèmes 2 et 3 qui disent que pour les surfaces avec $p_g = q = 0$, $K^2 \geq 2$, l'application bicanonique n'est pas associée à une fibration à fibres de genre 2, ce qui achève la démonstration du théorème 1. En fin, au § 4 on donne un exemple de surface avec $p_g = q = 0$, $K^2 = 2$, qui admet un pinceau de courbes de genre 2.

Je remercie M. Raynaud pour l'aide et l'encouragement qu'il m'a apportés pendant la préparation de cet article. En particulier, la démonstration du théorème 2 est bâtie sur une idée de lui. Je remercie aussi A. Beauville pour sa remarque qui m'a permis d'éviter une erreur.

1. Notations et Préliminaires

On écrit \sim pour l'équivalence numérique des diviseurs sur une surface, \equiv pour l'équivalence linéaire. Si C est une courbe dans une surface S , $p_d(C)$ et $g(C)$ désignent ses genres arithmétique et géométrique, respectivement. On note aussi par $\pi_1(S)$ le groupe fondamental algébrique (profini) d'une surface S . Si D est un diviseur effectif dans S , C une composante de D , on note par $m_D(C)$ la multiplicité de C dans D .

(1.1) SURFACES DE TYPE GÉNÉRAL

Pour une surface S minimale de type général, on a $\chi(\mathcal{L}_S) > 0$, $K_S^2 > 0$, $p_2(S) \geq 2$. Si D est un diviseur effectif sur S , on a $KD \geq 0$, et les courbes irréductibles E telles que $KE = 0$ sont isomorphes à \mathbb{P}^1 , elles sont en nombre fini et numériquement indépendantes. Une composante connexe de l'union de ces courbes E est un cycle fondamental au sens d'Artin [1], [2], qui est contracté en un point double rationnel par Φ_{mK} , $m \gg 0$.

THÉORÈME D'ANNULATION PLURICANONIQUE(cf. [8]). — *Soient S une surface minimale de type général, D un diviseur effectif numériquement équivalent à mK_S pour $m \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0, 1$. Alors $H^1(S, \mathcal{L}(D)) = 0$.*

Comme corollaire, on a

$$(1) \quad p_2(S) = K_S^2 + \chi(\mathcal{L}_S).$$

(1.2) INVOLUTION

Soient S une surface, σ une involution (automorphisme d'ordre 2) de S . Le lieu des points fixes de σ est composé d'un diviseur lisse et un nombre fini de points isolés. Soit

$$\rho: \tilde{S} \rightarrow S$$

l'éclatement des points fixes isolés de σ . Alors σ induit une involution $\tilde{\sigma}$ sur \tilde{S} , sans point fixe isolé, le quotient $X = \tilde{S}/\tilde{\sigma}$ est une surface lisse, et l'application canonique

$$\phi: \tilde{S} \rightarrow X$$

est un revêtement double ramifié le long du diviseur formé des points fixes non-isolés de σ et de l'image réciproque des points éclatés.

En particulier, si $|F|$ est un pinceau sur une surface S minimale de

type général, dont une fibre générale F est hyperelliptique, l'involution hyperelliptique de F induit une involution birationnelle σ de S , qui est automatiquement une involution globale car S est minimale. Les points fixes isolés de σ sont contenus dans les fibres singulières de $|F|$. On a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{S} & \xrightarrow{\phi} & X \\ f \downarrow & & \downarrow f' \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

où B est une courbe lisse, f et f' applications rationnelles, f associée à la factorisation de Stein du pinceau $|F|$, X une surface réglée sur base B .

Les deux lemmes suivants sont faciles à démontrer :

LEMME 1. — *Soit C une courbe irréductible et réduite, stable sous une involution σ de S , mais qui n'est pas composée de points fixes de σ . Alors la self-intersection de C a la même parité que le nombre de points fixes isolés de σ sur C , comptés avec leur multiplicité.*

LEMME 2. — *Soient C_1, C_2 deux courbes dans S , stables sous σ , qui se coupent transversalement en un point fixe non-isolé de σ . Alors C_1 ou C_2 est composée de points fixes de σ .*

(1.3) REVÊTEMENTS DOUBLES

Soient X une surface, δ un élément dans $\text{Pic}(X)$, $D \in |2\delta|$ un diviseur effectif lisse et réduit. Alors l'injection $H^0(\mathcal{C}_X) \rightarrow H^0(\mathcal{C}(2\delta))$ associée au diviseur D met une structure d'anneau sur le faisceau $\mathcal{C}_X \oplus \mathcal{C}_X(-\delta)$, telle que la variété $\text{Spec}(\mathcal{C}_X \oplus \mathcal{C}_X(-\delta)) = S$ soit une surface lisse, avec un revêtement double

$$\phi: S \rightarrow X$$

ramifié le long de D , ayant les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \phi_* \mathcal{C}_S &= \mathcal{C}_X \oplus \mathcal{C}_X(-\delta), & K_S &\equiv \phi^*(K_X + \delta), \\ K_S^2 &= 2(K_X + \delta)^2, & \phi^* C_1 \cdot \phi^* C_2 &= 2(C_1 C_2), \\ \chi(\mathcal{C}_S) &= 2\chi(\mathcal{C}_X) + \frac{1}{2}(\delta K_X + \delta^2), & h^i(\phi^* C) &= h^i(C) + h^i(C - \delta), \end{aligned}$$

où C, C_1, C_2 sont des faisceaux inversibles sur X (voir par exemple Persson [20]).

(1.4) FIBRATION D'UNE SURFACE

Par définition, une fibration est un morphisme à fibres connexes

$$f: S \rightarrow B$$

d'une surface S sur une courbe lisse B . Si les fibres générales de f sont hyperelliptiques (resp. de genre 2, etc.), alors on dit que la fibration f est hyperelliptique (resp. de genre 2, etc.).

Soit F' une fibre non-irréductible de f ,

$$F' = \sum_{i=1}^n m_i C_i,$$

où les C_i sont les composantes irréductibles de F' . Il est évident que les C_i sont numériquement indépendantes dans S .

LEMME 3 [3, VIII.4]. — Soient f une fibration, F' et les C_i comme ci-dessus, $D = \sum a_i C_i$ une combinaison linéaire des C_i . Alors $D^2 \leq 0$, avec égalité si et seulement si D est un multiple de F' .

LEMME 4. — Soient x_1, \dots, x_n des éléments linéairement indépendants dans un \mathbb{R} -espace E muni d'une forme négative non-dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tels que $\langle x_i, x_j \rangle \geq 0, \forall i \neq j$. Soit $\mathcal{J} = \sum a_i x_i$ un élément de E avec $\langle \mathcal{J}, x_i \rangle \leq 0, \forall i$. Alors $a_i \geq 0, \forall i$.

Démonstration. — Facile par le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.

COROLLAIRE. — Soient F', C_i comme ci-dessus. Si D est un diviseur effectif sur S , on peut écrire

$$D = D_1 + \sum_{i=1}^n a_i C_i,$$

où D_1 est un diviseur effectif sans composante contenue dans F' , $a_i \geq 0, \forall i$. Supposons qu'il existe un entier $k \geq 1$ tel que

$$D \cdot C_i \leq 0, \quad i = k+1, \dots, n$$

et un nombre $c \in \mathbb{Q}^+$ tel que

$$a_i \geq c m_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Alors $D \geq cF'$ (ce qui veut dire que $D - cF'$ est rationnellement effectif).

Démonstration. — Comme $D_1 \cdot C_i \geq 0$ pour tout i , on peut supposer $D_1 = 0$. Soit $D' = D - cF'$, et notons $b_i = a_i - c m_i$ les coefficients de D' . On doit

démontrer $b_i \geq 0, \forall i$. Par hypothèse, $b_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, k$. Comme $C_i C_j \geq 0$ pour tout couple i, j tel que $i \neq j$, on a

$$C_i \cdot \sum_{j=k+1}^n b_j C_j \leq C_i D' = C_i D \leq 0, \quad i = k+1, \dots, n.$$

Par le lemme 3, le sous-espace de $NS(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ engendré par les éléments indépendants C_{k+1}, \dots, C_n a une forme d'intersection négative non-dégénérée. Prenant

$$y = \sum_{j=k+1}^n b_j C_j.$$

le lemme 4 nous dit que $b_j \geq 0$ pour $j = k+1, \dots, n$. CQFD

Le lemme suivant est clair.

LEMME 5. — *Soit f une fibration dont les fibres générales sont isomorphes à \mathbb{P}^1 . Si F' est une fibre non-irréductible de f , toutes les composantes irréductibles sont isomorphes à \mathbb{P}^1 .*

LEMME 6. — *Soient $f: S \rightarrow B$ une fibration, σ une involution de S laissant les fibres de f stables, F' une fibre de f .*

(i) *Si C est une composante de F' composée de points fixes de σ , la multiplicité de C dans F' est un nombre pair.*

(ii) *Si x est un point fixe isolé de σ dans F' , la multiplicité de F' en x est un nombre pair. En particulier, F' n'est pas lisse et réduite en x .*

Démonstration. — (i) Gardant les notations du paragraphe 1.2, on a évidemment $\rho^*(F') = \phi^*(\phi_* \rho^*(F'))$. Mais C est dans le lieu de ramification de ϕ , donc sa multiplicité dans $\phi^*(\phi_* \rho^*(F'))$ est paire.

(ii) se ramène à (i) si l'on éclate x . CQFD

2. Réduction au cas où $p_g = 0$

On procède maintenant à la démonstration du théorème 1. Soit S une surface minimale de type général dont le système bicanonique $|2K|$ est composé d'un pinceau. On écrit par

$$\phi_{2K}: S \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}^{p_2-1}$$

la factorisation de Stein de l'application bicanonique de S , F une fibre générale de l'application rationnelle f . Il y a donc un système linéaire $|D|$

sur B tel que $|2K_S| = f^*|D| + Z$ pour Z la partie fixe de $|2K_S|$, et on a $\psi = \Phi_D$. Numériquement, on a

$$(2) \quad 2K \sim dF + Z$$

où d est le degré du diviseur D .

On démontre d'abord :

PROPOSITION 1. — Soit S comme ci-dessus. On a $B \cong \mathbb{P}^1$, $ZK=0$, $KF=2$, $\chi(\mathcal{L}_S)=1$, $d=K^2$. On est dans l'une des 5 possibilités suivantes :

(i) $p_g=1$, $F^2=0$, $p_a(F)=g(F)=2$. Par suite $Z^2 = -4K^2$, $ZF=4$.

(ii) $p_g=0$, $F^2=0$, $p_a(F)=g(F)=2$. Par suite $Z^2 = -4K^2$, $ZF=4$.

(iii) $F^2=2$, $p_g=0$, $K^2=2$, $p_a(F)=g(F)=3$, $F \sim K$, $Z=0$.

(iv) $F^2=2$, $p_g=0$, $K^2=1$, $p_a(F)=g(F)=3$, par suite $Z^2 = -2$, $ZF=2$.

(v) $F^2=4$, $p_g=0$, $K^2=1$, $p_a(F)=4$, $F \equiv 2K$, $Z=0$.

Démonstration. — Riemann-Roch sur B nous dit que

$$(3) \quad d \geq p_2 - 1,$$

donc

$$(4) \quad \begin{aligned} 2K^2 &\geq dKF && \text{(par (2))} \\ &\geq (p_2 - 1)KF \\ &= (K^2 + \chi(\mathcal{L}_S) - 1)KF. && \text{(par (1))} \end{aligned}$$

avec $\chi(\mathcal{L}_S) \geq 1$, on obtient $KF \leq 2$. D'autre part $2KF = (dF + Z)F \geq dF$ ou

$$(5) \quad F^2 \leq \frac{2}{d} KF \leq 2KF.$$

On établit d'abord l'égalité $KF=2$. Remarquons que S de type général entraîne $KF \geq 1$ d'après 1.1.

LEMME 7. — Le cas $KF=1$ ne se produit pas, donc $KF=2$.

Démonstration. — Supposons $KF=1$, alors $F^2 \leq 2$ par (5). Puisque KF et F^2 doivent avoir la même parité, on a $F^2=1$. De plus, d'après le théorème de l'index, on doit avoir

$$K^2 \times F^2 \leq (KF)^2,$$

ce qui entraîne $K^2=1$, $K \sim F$, et [8, lemma 14] donne $q=0$, donc par (4), $p_g=0$ ou 1.

Si $p_g=0$, [15, lemma 3] donne $h^0(\mathcal{L}_S(F)) \leq 1$, ce qui est une contradiction puisque $F^2=1$ entraîne $B \cong \mathbb{P}^1$; si $p_g=1$, [8, theorem 15] dit que $\text{Pic}(S)$ n'a pas de torsion, donc $K \equiv F$, ce qui donne aussi la contradiction $h^0(\mathcal{L}_S(F))=1$. CQFD

$KF=2$ entraîne les égalités dans (4), en particulier on obtient ainsi $d=p_2-1=K^2$, $\chi(\mathcal{O}_S)=1$, et Riemann-Roch sur B montre $B \cong \mathbb{P}^1$. L'égalité $ZK=0$ s'ensuit tout de suite de (2).

Pour classer les possibilités, calculons $h^0(\mathcal{O}_S(K+F))$ par Riemann-Roch :

$$\chi(\mathcal{O}_S(K+F)) = \frac{1}{2} F^2 + 2.$$

On a $h^2(\mathcal{O}_S(K+F)) = h^0(\mathcal{O}_S(-F)) = 0$, d'autre part $h^0(F, \mathcal{O}_F) = 1$, donc le théorème d'annulation de Ramanujam (cf. [8, theorem A]) donne $h^1(\mathcal{O}_S(K+F)) = 0$, par conséquent

$$(7) \quad h^0(\mathcal{O}_S(K+F)) = \frac{1}{2} F^2 + 2.$$

Si l'on suppose $p_g > 0$, on a $h^0(\mathcal{O}_S(K+F)) \geq p_g + 1$ par le fait $B \cong \mathbb{P}^1$, il en résulte que $p_g \leq 1/2 F^2 + 1$. Lorsque $F^2 = 0$, on a $p_g \leq 1$, ce qui donne les possibilités (i) et (ii). D'autre part, [8, lemma 14] dit que si $p_g \geq 1$, alors $d = K^2 \geq 2\chi(\mathcal{O}_S) = 2$, ou $F^2 \leq 2$ d'après (5). Donc $F^2 = 4 \Rightarrow p_g = 0$, et (5) implique $K^2 = d = 1$, ce qui est la possibilité (v).

Il reste le cas $F^2 = 2$. Lorsque $p_g = 0$, (5) montre $K^2 \leq 2$, ce qui donne (iii) et (iv); on va démontrer que $p_g > 0$ n'est pas possible : en effet,

$$p_g > 0 \Rightarrow K^2 = 2 \Rightarrow F \sim K, \quad Z = 0.$$

Maintenant $F^2 = 2$ implique que F n'est pas 2-divisible dans $NS(S)$, donc un diviseur effectif D dans $|K|$ est une fibre de f , ou $h^0(\mathcal{O}_S(K)) = 2$, et [8, theorem 12] donne une contradiction $q = 0$.

Les autres égalités dans l'énoncé de la proposition s'ensuivent maintenant toutes de (2) : il suffit de remarquer que quand f a moins que 4 points de base, une fibre générale de f est lisse. CQFD

PROPOSITION 2. — *La possibilité (iii) de la proposition 1 n'existe pas.*

Démonstration. — Supposons le contraire, alors $K-F$ est un élément de torsion non-nul dans $\text{Pic}(S)$. On a $h^1(\mathcal{O}_S(K-F)) = h^1(\mathcal{O}_S(F)) = 1$ par Riemann-Roch (remarquons que $B \cong \mathbb{P}^1$ entraîne $h^0(\mathcal{O}_S(F)) = 2$). D'autre part, Beauville [4, Corollaire 5.8] a démontré que quand $K^2 \leq 2\chi(\mathcal{O}_S)$ et $q = 0$, $\pi_1(S)$ est un groupe fini. Donc il suffit de remarquer le lemme suivant :

LEMME 8. — *Soit S une surface avec π_1 fini. Pour tout faisceau inversible E de torsion sur S , on a $H^1(S, \mathcal{O}(E)) = 0$.*

Démonstration. — Si n est l'ordre de E , on peut mettre une structure

d'anneau sur $\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(E) \oplus \mathcal{O}_S(E^2) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_S(E^{n-1})$ telle que la variété

$$T = \text{Spec}(\mathcal{O}_S \oplus \mathcal{O}_S(E) \oplus \mathcal{O}_S(E^2) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_S(E^{n-1}))$$

soit un revêtement étale connexe de S avec

$$H^1(T, \mathcal{O}_T) = \sum_{i=1}^n H^1(S, \mathcal{O}_S(E^i)).$$

Si l'un des $H^1(E^i)$ n'est pas nul, T aurait une infinité de revêtements étales connexes, donc S aussi, ce qui contredit l'hypothèse. CQFD

Nous éliminons ensuite la possibilité (i).

PROPOSITION 3. — Le cas $p_g = 1, I^2 = 0$ dans la proposition 1 n'existe pas.

Démonstration. — Supposons le contraire, et notons D l'unique diviseur effectif dans $|K|$. Soient f et Z comme dans le début de cette section. Z_1 la partie horizontale de Z (les composantes non-contenues dans des fibres, avec leurs multiplicités). On a $2D = Z +$ quelques fibres, disons F_1, \dots, F_r . Évidemment D contient toutes les composantes des F_1, \dots, F_r , et par l'hypothèse que $\dim |D| = 0$, D ne peut contenir aucune des F_i entièrement. On voit facilement que Z_1 a toutes ses composantes de multiplicité paire, donc on peut parler de $1/2 Z_1$, et $D - 1/2 Z_1$ a toutes ses composantes contenues dans $\bigcup_i F_i$.

Rappelons que par [8, lemma 14], $l = d = K^2 \geq 2$.

Remarquons maintenant que, d'une part, le théorème d'annulation de Ramanujam donne $H^1(\mathcal{O}_S(-F)) = 0$, donc la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_S) \rightarrow H^1(F, \mathcal{O}_F)$$

induit un homomorphisme de $\text{Pic}^0(S)$ dans $\text{Pic}(F)$ avec noyau fini, pour chaque fibre F . Puisque $q = 1$ d'après la proposition 1, il en résulte qu'une fibre de f a au moins une composante Γ avec $g(\Gamma) \geq 1$, et *a fortiori* $\Gamma K > 0$.

D'autre part, pour une F_i comme avant, il y a une composante l_i ($l_i K > 0$) avec $m_{F_i}(\Gamma_i) \geq 2$, par conséquent $\Gamma_i K = 1$, $m_{F_i}(\Gamma_i) = 2$, et $CK = 0$ pour les autres composantes C de F_i : en effet, sinon on peut utiliser le corollaire du lemme 4, en prenant $c = 1$, C_1, \dots, C_k telles que $C_i K > 0$, $i = 1, \dots, k$; et C_{k+1}, \dots, C_n telles que $C_i K = 0$, $i = k+1, \dots, n$, pour en conclure que $D \geq F_i$, ce qui est exclu par l'hypothèse $p_g = 1$.

Il résulte de la première partie de cette remarque que $l_i^2 = -1$, Γ_i lisses pour tout i . Évidemment $m_D(\Gamma_i) = 1$.

Pour la même raison, $Z_1 l_i = 0$ pour toutes les Γ_i ; sinon $D - 1/2 Z_1$ coupe toutes les composantes de F_i avec multiplicité ≤ 0 , mais

$$\left(D - \frac{1}{2} Z_1\right) F_i = 0,$$

donc toutes ces intersections sont nulles, ensuite $((D-1/2Z_1)|_{F_i})^2=0$, puis par le lemme 3, $(D-1/2Z_1)|_{F_i}=aF_i$, enfin par la congruence

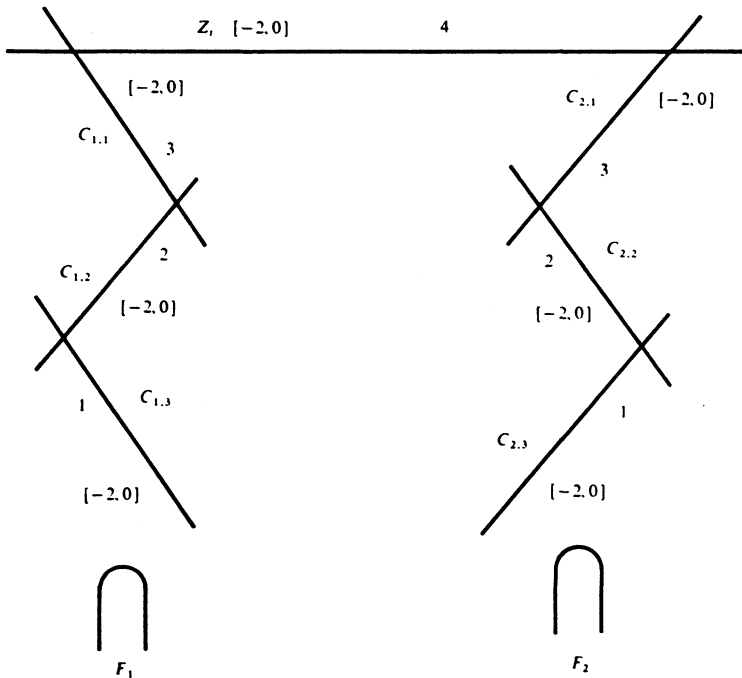
$$F_i^2 \equiv KF_i \pmod{2},$$

a doit être un entier positif, ce qui n'est pas possible.

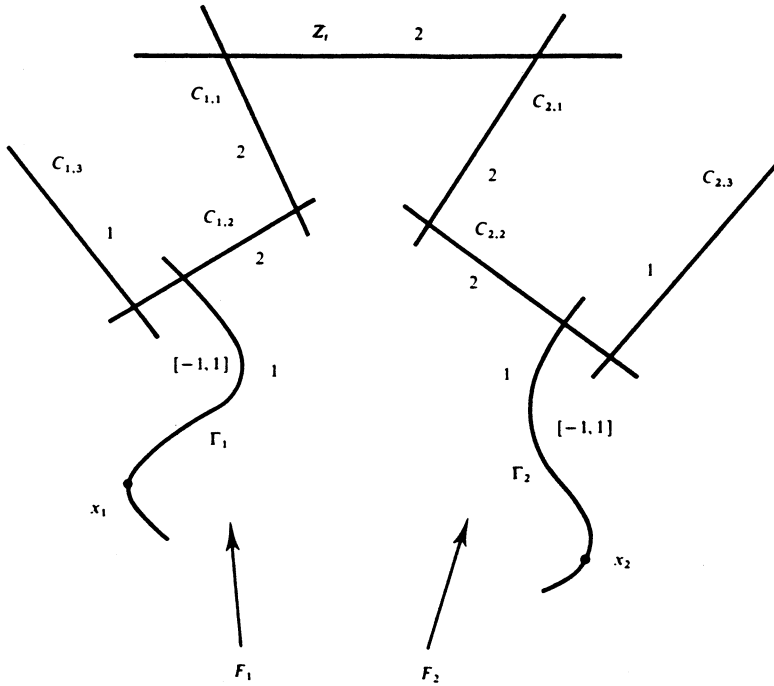
Nous distinguons maintenant 2 cas.

a) $1/2Z_1$ a une composante double Z_l .

Parce que $1/2Z_1 \cdot F = DF = 2$, Z_l est une section de f , et $Z_1 = 4Z_l$. Soit $C_{i,1}$ la composante de F_i qui coupe Z_l (notons que $Z_l F_i = 1$). On a $C_{i,1}^2 = -2$, $C_{i,1}K = 0$. Si $m_D(C_{i,1}) = 1$, $C_{i,1}$ ne peut plus intersecter d'autres composantes de D puisque $DC_{i,1} = 0$, donc $C_{i,1}$ est la seule composante de F_i , ce qui n'est pas possible. De même, si $m_D(C_{i,1}) \geq 3$, compte tenu de $DZ_l = 0$ et $Z_l^2 = -2$ (proposition 1), il existe une autre F_j , avec $m_D(C_{j,1}) = 1$, ce qui est impossible. Il reste donc la possibilité $m_D(C_{i,1}) = 2$ ($i = 1, \dots, l$), $l = d = K^2 = 2$. $Z_l F_i = 1$ nous donne $m_{F_i}(C_{i,1}) = 1$. Parce que $2K \cdot Z = 0$ et $Z^2 = -8$, on trouve une seule possibilité pour Z :



où les chiffres indiquent les multiplicités des composantes, et le crochet $[a, b]$ signifie une composante avec self-intersection a et son intersection avec K est b . Aussi y a-t-il une seule possibilité pour D :



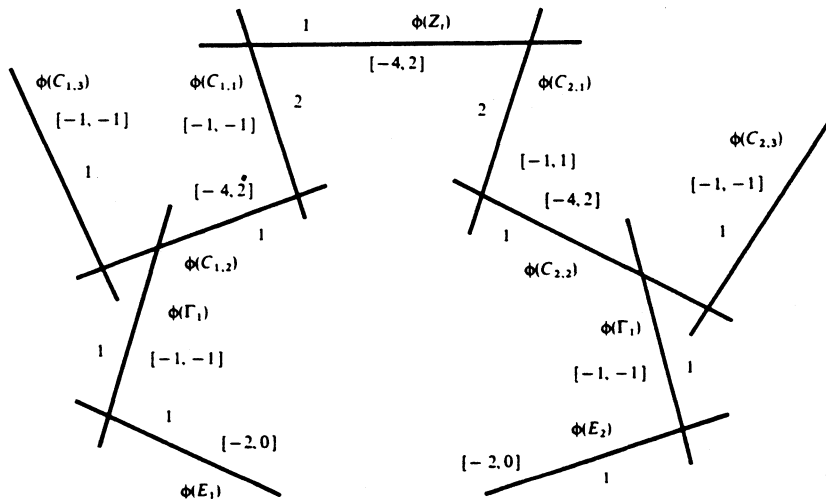
Pour la fibre F_i , les composantes Γ_i et $C_{i,2}$ ont multiplicité 2 dans F_i , tandis que $C_{i,1}$ et $C_{i,3}$ sont des composantes simples de F_i .

Maintenant regardons l'involution σ de S induite par l'involution hyperelliptique de F . Parce que D coupe des diviseurs hyperelliptiques sur les F générales, Z_i est formée de points fixes de σ . D'après le lemme 1 et le lemme 2, $C_{1,2}$ et $C_{2,2}$ le sont aussi. Le lemme 1 montre ensuite que Γ_i a un point fixe isolé x_i . Si l'on note par R le diviseur sur S formé de points fixes non-isolés de σ , on a par Riemann-Hurwitz sur F générale $RF=6$. Il en résulte que x_i est le seul point fixe isolé sur F_i . Soit $\phi : \tilde{S} \rightarrow X$ le revêtement double comme dans le paragraphe 1.2. On a $\rho^*(D) + \sum_j E_j \in |K_{\tilde{S}}|$.

où E_j sont les points fixes isolés éclatés; et (paragraphe 1.3)

$$\rho^*(D) + \sum_j E_j = \phi^*(T), \quad T \in |K_X + \delta|.$$

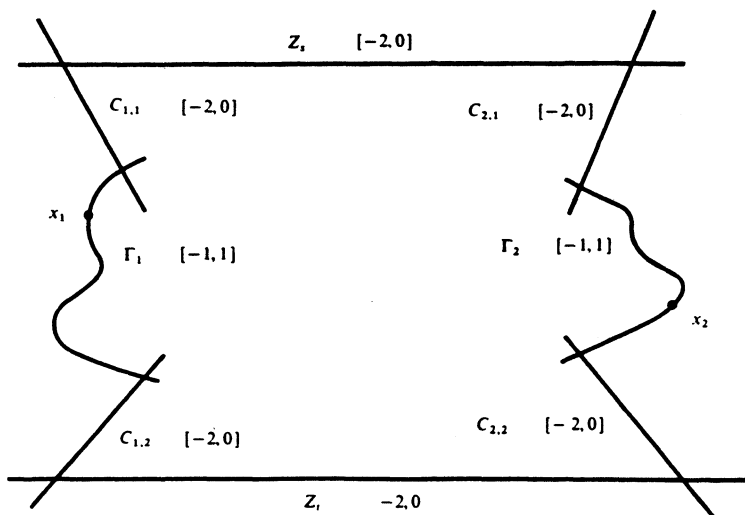
Comme les E_j sont dans le lieu de ramification de ϕ , on en conclut que x_1 et x_2 sont les seuls points fixes isolés de σ , et T est comme suit :



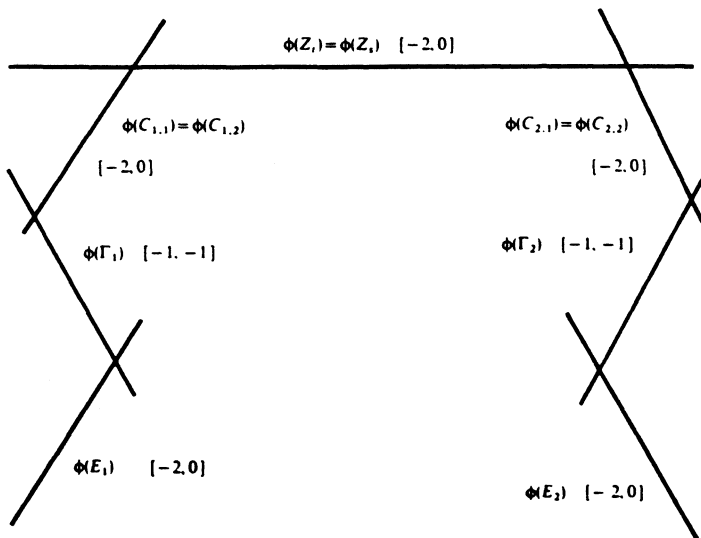
où les notations sont comme avant. On en tire tout de suite $T^2=0$, $TK_X = -2$, donc $\chi(\mathcal{C}_X(K_X + \delta))=2$, ce qui donne $\chi(\mathcal{C}_S)=3$, contradiction avec notre hypothèse.

b) Les composantes de $1/2 Z_1$ sont simples.

Soit Z_s une telle composante. On a $(D - Z_s)Z_s = -Z_s^2 = 2$, mais chaque F_i contribue au moins par 1 à cette intersection, et d'après [8, lemma 14], on a $l = K^2 \geq 2$, donc $l=2$, et il y a deux composantes $C_{1,1}$ et $C_{2,1}$, toutes simples dans D , qui intersectent Z_s transversalement, et Z_s n'a pas de contact avec d'autres composantes de D . Pour la même raison, $C_{i,1}$ ne peut intersecter qu'une seule autre composante Γ_i de F_i , qui est simple dans D . Par conséquent $m_{F_i}(C_{i,1}) = m_Z(C_{i,1}) = 1$, Z_s est une section de f . De plus Γ_i n'est pas dans Z , donc $\Gamma_i K = 1$. On a une autre section Z_t dans Z_1 , symétrique de Z_s , puisque $DF = 2$. Donc la seule possibilité pour D est la suivante :



Toutes ces composantes sont simples dans D . On voit facilement que $\sigma(Z_s) = Z_t$, $\sigma(C_{i,1}) = C_{i,2}$, et *vice versa*. Comme dans le premier cas, il y a deux points fixes isolés x_1 et x_2 . Si on éclate puis on descend par le revêtement double, le diviseur T dans $|K_X + \delta|$ est comme suit (où toutes les composantes sont simples) :



Comme dans le cas *a*), on obtient $\chi(\mathcal{O}_S) = 3$, contradiction. CQFD

Nous éliminerons le cas (ii) de la proposition 1 pour $K^2 > 1$ dans la section suivante, ce qui achèvera la démonstration du théorème 1.

3. Fibrations de genre 2 sur surfaces avec $p_g = 0$

On fixe d'abord quelques notations. Dans cette section, on note par S une surface minimale de type général avec $p_g = 0$. Parce que $q(S) = 0$, la base de toute fibration de S est isomorphe à \mathbb{P}^1 . D'autre part, si S a un pinceau de courbes de genre 2, ce pinceau n'a pas de point de base sauf si $K^2 = 1$, d'après [14, theorem 5]. Or selon Bombieri [8, § 13], une surface minimale avec $p_g = 0$, $K^2 = 1$ n'a pas de pinceau de courbes de genre 2, donc à un pinceau de courbes de genre 2 sur S , on peut associer une fibration de genre 2

$$f: S \rightarrow \mathbb{P}^1.$$

Soit F une fibre générale de f , alors $F^2 = 0$, $KF = 2$. On note par

$$F' = \sum_i m_i C_i$$

une fibre de f , éventuellement non-irréductible.

On a une suite exacte

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_S(K+F)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{F'}(K_{F'})) \rightarrow 0,$$

qui donne $h^0(\mathcal{O}_S(K+F)) = 2$, c'est-à-dire $|K+F|$ est aussi un pinceau que l'on note

$$|K+F| = |M| + Y,$$

pour M un diviseur général dans la partie mobile et Y la partie fixe. Remarquons que S non-réglée entraîne l'irréductibilité de M et

$$(8) \quad MF = 2, \quad YF = 0,$$

d'où le fait qu' Y est contenue dans des fibres de f .

Pour un diviseur effectif D , on va écrire $M^2|_D$ pour le nombre de points de base de $|M|$ sur le support de D (compté avec les multiplicités), $Y|_D$ la partie de Y contenue dans le support de D . Si $D = F'$ est une fibre spéciale de f , on écrira aussi simplement Y' pour $Y|_{F'}$. Il est évident que

$$(9) \quad Y = \sum_{F_i \in |F|} Y|_{F_i}; \quad M^2 = \sum_{F_i \in |F|} M^2|_{F_i}.$$

Enfin, $N_{F'}$ est le nombre de composantes irréductibles de F' , σ l'involution de S induite par l'involution hyperelliptique des fibres de f .

THÉORÈME 2. — Soit S une surface de type général avec $p_g=0$, qui admet une fibration de genre 2. Alors $K_S^2 \leq 2$.

Démonstration. — On peut évidemment supposer S minimale. L'idée de la démonstration est comme suit : on va montrer que sur chaque fibre F' de f , la somme de $M \cdot Y'$ et $M^2|_{F'}$ est majorée par $N_{F'} - 1$. Passant au global, on obtient une minoration du nombre de composantes des fibres non irréductibles. Vu l'indépendance relative de ces composantes, cela entraîne une incompatibilité avec le rang de $NS(S)$ (calculé à l'aide des invariants de S), qui n'est pas assez grand lorsque $K^2 > 2$.

Pour commencer, on examine la partie fixe Y . Soit donc F' une fibre de f où Y' n'est pas vide. On peut écrire d'une façon unique

$$(10) \quad F' - A = Y' - B$$

où A et B sont deux diviseurs effectifs sans composante commune : en effet, si $F' = \sum m_i C_i$, $Y' = \sum n_i C_i$, alors

$$(11) \quad A = \sum_{m_i > n_i} (m_i - n_i) C_i, \quad B = \sum_{n_i > m_i} (n_i - m_i) C_i.$$

On peut dire que $Y' - B$ est Y' « tranché » à la hauteur de F' .

LEMME 9. — Aucun diviseur dans $|M| + Y = |K + F|$ ne peut contenir une fibre de f .

Démonstration. — Immédiat parce que $p_g=0$.

Maintenant si un diviseur D est numériquement un multiple de F' , la multiplicité sera un entier : c'est la conséquence directe de la congruence $D^2 \equiv KD \pmod{2}$. En particulier, le lemme 9 nous dit que sous l'hypothèse $Y' \neq 0$, on a $A \neq 0$, et les self-intersections de Y' , $Y' - B$ et A sont négatives (lemme 3). Par conséquent,

$$AY' = AB - A^2 \geq 1; \quad 2 = FK \geq AK = AM + AY' \geq 1.$$

Aussi

$$(12) \quad AM = 0.$$

En effet, on a $0 \leq AM = A(K - Y') \leq 2 - AY' \leq 1$. Mais $AM = 1$ entraîne $AK = 2$, $A^2 = A(B - Y') = AB - 1 = -1$, ce qui est impossible.

LEMME 10. — $KY' = 0$. Par suite $KY = 0$, $MY = -Y^2$.

Démonstration. — Il suffit de démontrer $AK = 2$, car cela entraîne $(Y' - B)K = 0$ par (10), et d'après (11), Y' et $Y' - B$ ont le même support. Supposons au contraire $AK = 1$, on a alors

$$(Y' - B)K = FK - AK = 1; \quad (Y' - B)^2 = (F - A)^2 = A^2 = -1,$$

donc $h^0(\mathcal{O}_S(K + Y' - B)) \geq 1$, autrement dit il existe un diviseur effectif D dans $|K + Y' - B|$. Or $p_g = 0$ implique que D ne contient pas $Y' - B$, et *a fortiori* le diviseur $D + A$ dans $|K + F|$ ne contient pas Y , ce qui est contraire à l'hypothèse que Y est la partie fixe de $|K + F|$. CQFD

LEMME 11. — Y' est connexe.

Démonstration. — Il suffit de montrer la connexité de $Y' - B$. On a

$$(Y' - B)^2 = -A(Y' - B) \geq -AY' = -AK = -2,$$

donc forcément

$$(13) \quad (Y' - B)^2 = A^2 = -2.$$

Si $Y' - B = D_1 + D_2$, le lemme 10 dit que $D_i^2 \leq -2$, ce qui donne $D_1 D_2 > 0$. CQFD

Les lemmes 10 et 11 montrent que le support de Y' est une partie connexe d'un cycle fondamental. D'après Artin [1] et [2], sa configuration est l'un des types A_n ($n \geq 1$), D_n ($n \geq 4$), E_6 , E_7 ou E_8 . Avant d'examiner séparément ces différentes possibilités de Y' , il faut éclairer un peu le comportement des points de base de $|M|$.

LEMME 12. — Soient x un point de base de $|M|$, F' la fibre qui le contient. Alors on est dans l'une des deux situations suivantes :

(i) x est un point d'intersection transversale de deux composantes simples C_1 et C_2 de F' ;

(ii) une seule composante C passe par x , $m_F(C) = 2$, C lisse en x .

Dans tous les cas, x est un point fixe isolé de σ , $M^2|_{F'} = 1$. En particulier M générique est lisse.

Démonstration. — Comme $MF' = 2$ par (8), il y a 3 possibilités.

a) M passe par 2 points x, y dans F' , F' lisse et réduite en x et y (On ne suppose pas $x \neq y$.)

b) x est un point singulier de F' , mais F' est réduite en x .

c) F' n'est pas réduite en x , donc x est dans une seule composante C avec $m_{F'}(C)=2$, C lisse en x .

On va démontrer que a) n'existe pas, b) entraîne (i), c) entraîne (ii).

a) Parce que M coupe un diviseur hyperelliptique sur une fibre générale F , l'image de M par ϕ (notations du paragraphe 1.2) est une section de f' . Donc x et y sont conjugués sous σ , et y est aussi un point de base de $|M|$. Soit C (resp. C') la composante de F' contenant x (resp. y). Il y a un diviseur M' dans $|M|$ qui contient C . Par conjugaison, M' contient aussi C' . Mais pour toutes autres composantes C'' de F' , $M'C''=MC''=0$. Donc le corollaire du lemme 4 montre $M' \geq F'$, ce qui est impossible par le lemme 9.

b) Pour la même raison qu'en haut, x n'est pas contenu dans une seule composante de F' , donc il est un point d'intersection de deux composantes simples C_1 et C_2 , chacune lisse en x . Soient

$$\rho: \tilde{S} \rightarrow S$$

l'éclatement de x , $E = \rho^*(x)$, \tilde{M}, \tilde{C}_i transformés stricts. $|\tilde{M}|$ n'a pas de point de base sur E , donc $M^2|_x = M^2|_{F'} = 1$: en effet, un point de base de $|\tilde{M}|$ entraîne un \tilde{M}' contenant E , par conséquent on a

$$\tilde{C}_i E = 1, \quad \rho^*(M')\tilde{C}_i = \rho^*(M)\rho^*(C_i) = 1, \quad \rho^*(M') = \tilde{M}' + E \geq 2E \quad (i=1, 2),$$

ce qui implique que $\rho^*(M') \supset \tilde{C}_i$, ou $M' \supset C_i$ ($i=1, 2$), donc on peut utiliser le corollaire du lemme 4 pour arriver à $M' \geq F'$, contradiction.

Maintenant $\tilde{M}E = 1/2\tilde{M}$, $\rho^*(F') = 1$, ce qui veut dire que $\tilde{M} \cap E$ est fixe par l'involution $\tilde{\sigma}$ sur \tilde{S} , donc $|\tilde{M}|$ bouge sur E implique que E est composé de points fixes de $\tilde{\sigma}$, c'est-à-dire x est un point fixe isolé de σ .

De plus, le diviseur M_i dans $|M|$ contenant C_i ($i=1, 2$) a son transformé strict \tilde{M}_i qui passe par $E \cap \tilde{C}_i$. Comme $|\tilde{M}|$ n'a pas de point de base sur E , $M_1 \neq M_2 \Rightarrow E \cap \tilde{C}_1 \neq E \cap \tilde{C}_2 \Rightarrow C_1 C_2 = 1$, et le lemme est démontré dans ce cas.

c) Notons $M' \in |M|$ le diviseur qui contient C . D'abord, la partie P de M' non-contenue dans F' ne passe pas par x : sinon $F'P = FP = 2$ entraîne $x = F' \cap P$, et que $(M' - P)D = 0$ pour toute composante D de F' , donc la remarque après le lemme 9 nous conduit à l'impossibilité

$$M' \geq M' - P = nF', \quad n \in \mathbb{Z}^+.$$

Soit encore $\rho: \tilde{S} \rightarrow S$ l'éclatement de x . Alors

$$m_{M'}(C) = m_{\rho^*(M')}(E) = m_{\tilde{M}}(E) + 1.$$

qui nous conduit comme dans le cas *b*) à la conclusion que $|\tilde{M}|$ n'a pas de point de base sur E , E est composé de points fixes de $\tilde{\sigma}$, tout ce que nous avons à démontrer. CQFD

Signalons que lorsque $Y|_{F'}$ n'est pas vide, les C_i ou C du lemme 12 sont dans le support de $Y|_{F'}$ par (12).

A partir du même principe, on a

LEMME 13. — *Quand Y' n'est pas vide, F' ne contient pas de composante irréductible Γ avec $\Gamma K = 2$.*

Démonstration. — Sinon Γ est la seule composante de F' en dehors des cycles fondamentaux, et $m_{F'}(\Gamma) = 1$. Comme $M\Gamma = 0$, il y a un $M' \in |M|$ contenant Γ . Mais alors $M' + Y$ contient Γ et $(M' + Y)C = 0$ pour toutes les autres composantes C de F' , donc il remplit les conditions du corollaire du lemme 4 pour $c = 1$, $C_1 = \Gamma$, $k = 1$, impossible. CQFD

LEMME 14. — *Supposons $Y|_{F'} \neq 0$, et que F' ait deux composantes Γ_1, Γ_2 avec $\Gamma_i K = 1$. Soit Δ l'ensemble des points d'intersection d'un M générique avec F' . Alors topologiquement, tout chemin Λ dans F' qui relie Γ_1 et Γ_2 contient un point de Δ . En particulier, par (12), si G' est la partie de F' formée de composantes non-contenues dans Y' , Γ_1 et Γ_2 ne sont pas dans une même composante connexe de G' .*

Démonstration. — Supposons que $M_i \in |M|$ contienne Γ_i , $i = 1, 2$. Puisque $M_1 \cap \Gamma_2 = M_2 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, Λ doit contenir un point de $M_1 \cap M_2 \cap F'$. Mais $M_1 \cap M_2 \cap F'$ est l'ensemble de points de base de $|M|$ contenus dans F' , donc il est un sous-ensemble de Δ . CQFD

Maintenant on peut examiner les différentes configurations d'une composante connexe de Y . Éliminons d'abord les E_6, E_7, E_8 ; d'après la formule de Noether.

$$(14) \quad \text{Rang } \mathcal{N}S(S) \leq b_2(S) = 10 - K^2.$$

L'indépendance numérique des composantes d'une fibre et leur indépendance avec M montrent donc

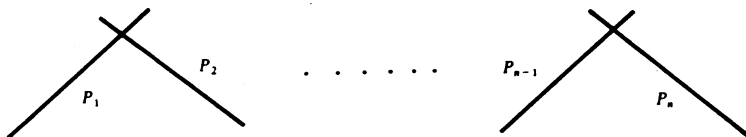
$$(15) \quad N_{F'} \leq b_2(S) - 1 = 9 - K^2 \leq 8$$

pour n'importe quelle fibre F' . On peut fouiller la classification des fibres non-irréductibles d'une fibration de genre 2 de Ogg [19] (en tenant compte que Ogg a laissé échapper 3 cas [18]). On s'aperçoit tout de suite qu'aucun

type qui contient un E_6 , E_7 ou E_8 ne remplit nos conditions (lemmes 13, 14, inégalité 15).

On étudie séparément A_n et D_n . Soit F' la fibre contenant une telle configuration de Y' .

A_n :



où d'après (13), toutes les composantes P_i sont simples dans $Y' - B$.

Soient $m_i = m_{F'}(P_i)$, $k_i = m_{Y'}(P_i)$, l l'indice tel que $k_l = \max_i \{ k_i \}$. On a

$$(16) \quad \begin{aligned} -(Y')^2 &= k_1^2 + (k_2 - k_1)^2 + \dots + (k_{n-1} - k_n)^2 + k_n^2 \\ &\geq k_1 + \dots + (k_l - k_{l-1}) + (k_l - k_{l+1}) + \dots + k_n \\ &= 2k_l. \end{aligned}$$

Évidemment $MY' \leq 2k_l$: combiné avec le lemme 10, on obtient

$$(17) \quad MY' = -(Y')^2 = 2k_l.$$

donc il y a égalité dans (16), en particulier $k_1 = k_n = 1$, $|k_i - k_{i+1}| \leq 1$ pour tout i . Aussi $m_i = 1$ pour les P_i telles que $MP_i \neq 0$. Il y a 2 situations différentes :

a) M générique ne passe pas par le centre de la configuration. Dans ce cas σ replie le A_n par rapport à son centre : $\sigma(P_i) = P_{n-i+1}$, donc tout est symétrique. En particulier, un seul M' peut contenir les Γ avec $\Gamma K > 0$, donc $m_{F'}(\Gamma) = 2$, Γ passe par le centre du A_n , qui ne peut qu'être une droite par le fait que $\Gamma Y' = \Gamma K = 1$, ainsi n est impair ≥ 3 . Γ est la seule composante de F' en dehors de Y' , qui intersecte Y' . La condition $F'P_i = 0$ et la récurrence sur i donnent

$$m_i = im_1, \quad i = 1, \dots, \frac{n+1}{2};$$

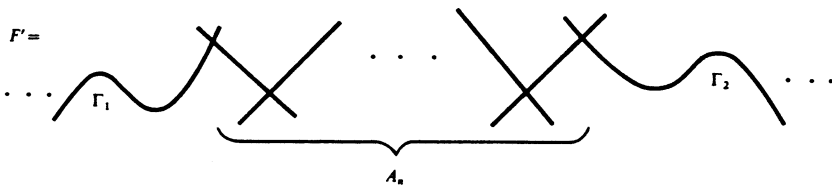
et de même pour l'autre côté. Faisant intervenir M , on obtient $m_1 = m_n = 1$, $m_i = m_{n-i+1} = i$; $MP_i = 1 \Leftrightarrow i = 1$ ou n ; $MY' = 2$, $M^2|_{F'} = 0$. En somme,

$$(18) \quad MY' + M^2|_{F'} \leq N_{F'} - 2.$$

b) M passe par le centre. Dans ce cas la condition $(M + Y')P_i = 0$ montre

$$(19) \quad k_i = i \quad \text{pour} \quad i \leq \frac{n+1}{2}$$

et la même chose de l'autre côté, ensuite la simplicité des composantes dans $Y' - B$ donne $m_i = 1$ pour $i = 2, \dots, n-1$, ce qui implique à son tour $m_1 = m_n = 1$ (pour $n \leq 2$, $m_1 = m_n = 1$ est trivialement vrai). Quand $n \geq 2$, $P_1^2 = P_n^2 = -2$ implique que chacune de P_1 et P_n intersecte transversalement une composante de F' en dehors de Y' , et on est dans la situation suivante :



Enfin, le lemme 12 montre que $M^2|_{F'}$ a la même parité que $n + 1$, et (17), (19) donnent

$$MY' = \begin{cases} n & n \text{ pair} \\ n+1 & n \text{ impair} . \end{cases}$$

En somme, on a

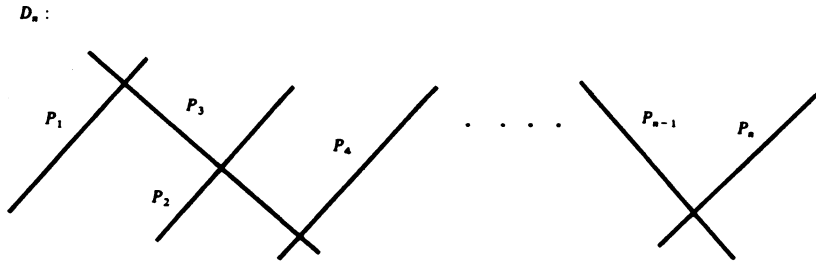
$$(20) \quad MY' + M^2|_{F'} \leq N_{F'} - 1 ,$$

avec égalité si et seulement si les points des deux bouts ne représentent plus rien, $\Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 = -1$.

Il reste le cas $n = 1$ qui mérite une petite explication. Ici le seul ennui vient du cas $F' = P_1 + 2\Gamma$. Mais cette configuration est impossible : $F'P_1 = F'\Gamma = 0$ entraîne $P_1\Gamma = 1$, puis

$$4. \Gamma^2 = (2\Gamma)^2 = -P_1 \cdot 2\Gamma = -2 .$$

Remarquons enfin que d'après le lemme 2 et le lemme 6, (i), et parce que les composantes dans la figure de la page 25 sont simples dans F' , toutes ces composantes sont stables sous σ , et les points d'intersection sont fixes et isolés.



Prenons F' , m_i , k_i comme dans le cas A_n . Il est clair que $m_i \geq 2$ pour $i=3, \dots, n-1$. On a

$$(21) \quad \begin{aligned} -(Y')^2 &= (k_1 - k_2)^2 + (k_2 + k_1 - k_3)^2 + \sum_{i=3}^{n-1} (k_i - k_{i+1})^2 + k_n^2 \\ &\geq |k_1 - k_2| + |k_2 + k_1 - k_3| + \sum |k_i - k_{i+1}| + k_n^2 \\ &\geq (k_1 - k_2) + (k_2 + k_1 - k_3) + \sum (k_i - k_{i+1}) + k_n = 2k_1. \end{aligned}$$

Ensuite nous distinguons 3 cas.

a) M traverse P_l transversalement, $3 \leq l \leq n$. Dans ce cas nous avons aussi

$$(22) \quad \begin{aligned} -(Y')^2 &\geq (-k_1 + k_2) + (k_3 - k_1 - k_2) + (k_4 - k_3) + \dots + (k_l - k_{l-1}) \\ &\quad + (k_l - k_{l+1}) + \dots + k_n = 2k_1 - 2k_l \end{aligned}$$

Ajouter (21) et (22), $-(Y')^2 \geq k_l = MY'$. Cela donne égalité partout, en particulier $k_n = 1$. Compte tenu de $(Y' + M)P_i = 0$, on obtient par récurrence

$$\begin{aligned} 2k_1 &= 2k_2 = k_3 = \dots = k_l, \\ k_{l+i} &= k_l - i, \quad i = 1, \dots, n-l. \end{aligned}$$

D'où $MY' = k_l \leq k_l + l - 3 = n - 2$, et

$$(23) \quad MY' + M^2|_{F'} \leq N_{F'} - 2.$$

b) $MP_1 = MP_2 = 1$; $MP_i = 0$; $i \geq 3$. Par (21) et sa symétrie $-(Y')^2 \geq 2k_2$, $-(Y')^2 \geq k_1 + k_2 = MY'$. Comme dans le cas a), on obtient $k_1 = k_2$, $k_i = 2k_1 - i + 2$ pour $i = 3, \dots, n$, ou $n = MY' + 1$. Le lemme 12 donne $M^2|_{Y'} = 0$, donc

$$(24) \quad MY' + M^2|_{F'} \leq N_{F'} - 2.$$

c) $MP_1 = 2$ (ou $MP_n = 2$). On va éliminer cette possibilité, en le faisant pour $MP_1 = 2$, car l'autre cas est une traduction mot à mot. Maintenant $m_{F'}(P_1) = 1 \Rightarrow m_{F'}(P_3) = 2 \Rightarrow P_1$ n'intersecte pas d'autre composante de F' .

Soit $M' \in |M|$ le diviseur contenant P_3 , il est évident que $m_{M'}(P_3) = 2$. On regarde le diviseur $M' + P_1$. Pour toutes les composantes C de F' sauf P_1 et P_3 , on a $(M' + P_1)C = MC = 0$, donc $M' + P_1$ remplit les conditions du corollaire du lemme 4 pour $c = 1$, et $Y + M' \geq P_1 + M' \geq F'$, impossible.

Enfin, remarquons que (21) montre l'impossibilité du cas $MP_1 = 1$, $MP_i = 0$ pour $i > 1$.

Maintenant qu'on a examiné tous les cas, (9) combinée avec lemme 12, (18), (20), (23), (24) donnent une borne

$$(25) \quad MY + M^2 \leq \sum_{F_i \in |F'} (N_{F_i} - 1).$$

D'autre part, la formule de Noether montre comme avant

$$(26) \quad 8 - K^2 = b_2(S) - 2 \geq \sum_{F_i \in |F'} (N_{F_i} - 1),$$

donc

$$(27) \quad 8 - K^2 \geq M(K + F) = (M + Y)(K + F) = (K + F)^2 = K^2 + 4,$$

d'où l'on conclut que $K^2 \leq 2$.

CQFD

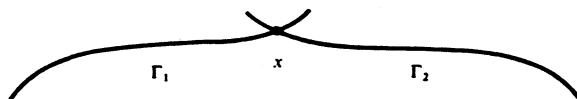
Dans le cas $K^2 = 2$, il existe de telles surfaces avec une fibration de genre 2, un exemple sera donné au § 4. Mais pour l'application bicanonique, on a quand même le résultat suivant.

THÉORÈME 3. — *Soit S une surface minimale de type général avec $p_g = 0$, $K^2 = 2$. Alors Φ_{2K} n'est pas associée à une fibration de genre 2 (donc est une surjection sur \mathbb{P}^2).*

Démonstration. — Soit au contraire f la fibration de genre 2 associée à Φ_{2K} , et l'on garde les notations du début de cette section. L'égalité dans (27) dit qu'on a égalité dans (25) et (26), donc quand Y' n'est pas nul, elle est du type $A_n(b)$, avec $\Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 = -1$ dans la figure de la page 25, par conséquent si l'on note par R le diviseur formé de points fixes non-isolés de σ (on a $RF = 6$), il est clair que $R\Gamma_1 = R\Gamma_2 = 3$, $RP_i = 0$, et que R n'a pas de composante dans F' . Donc restreint à F' , R est numériquement équivalent à $3K$.

D'autre part, si $Y' = 0$ et F' n'est pas irréductible, on doit avoir $M^2|_{F'} \geq N_{F'} - 1$ par l'égalité dans (25), donc $N_{F'} = 2$, $M^2|_{F'} = 1$ par le lemme 12. Le lemme suivant dit que cette situation entre dans le cadre du type $A_0(b)$, en particulier on a aussi $R|_{F'} \sim 3K|_{F'}$.

LEMME 15. — Soient S comme dans l'énoncé du théorème, F' une fibre de f telle que $N_{F'}=2$, $M^2|_{F'}=1$, $Y'=0$. Alors F' est comme suit :



où $-\Gamma_1^2 = -\Gamma_2^2 = K\Gamma_1 = K\Gamma_2 = \Gamma_1\Gamma_2 = 1$, M passe par x .

Démonstration. — Soient Γ_1, Γ_2 les deux composantes de F' . Dans le cas où M passe par un point d'intersection de Γ_1 et Γ_2 , le lemme 12 a tout dit, donc il suffit d'exclure le cas où $m_{F'}(\Gamma_1)=2$, $M\Gamma_1=1$, $M\Gamma_2=0$ (voir lemme 13). Mais alors $K\Gamma_1=1$, $K\Gamma_2=0$, et la formule d'adjonction et le théorème de l'index montrent que $\Gamma_1^2 = -1$ ou -3 , $\Gamma_2^2 = -2$. Compte tenu de $F'\Gamma_2=0$, on trouve $\Gamma_2\Gamma_1 = m_{F'}(\Gamma_2)$; aussi $F'\Gamma_1=0$ donne $\Gamma_1\Gamma_2 = \frac{2 \text{ ou } 6}{\text{CQFD } m_{F'}(\Gamma_2)}$, soit $(m_{F'}(\Gamma_2))^2 = 2$ ou 6 , impossible.

Par conséquent, on sait que R est numériquement équivalent à $3K$ dans toutes les fibres de f . Or par égalité dans (26), les composantes des fibres de f et K engendrent l'espace $NS(S) \otimes \mathbb{Q}$, donc on doit avoir

$$(28) \quad R \sim 3K + nF$$

pour un entier n .

Pour calculer n , rappelons que par Riemann-Hurwitz, une courbe M générique a

$$(29) \quad \begin{aligned} r(M) &= 2g(M) + 2 \\ &= M^2 + KM + 4 \\ &= M^2 + K(M + Y) + 4 \\ &= M^2 + K^2 + 6 \\ &= M^2 + 8 \end{aligned}$$

points de Weierstrass (il est évident que M est hyperelliptique sous σ). On sait d'après ce qui précède que chaque point de base de $|M|$ est un point de Weierstrass de M . Les autres points de Weierstrass de M sont alors les points d'intersection transversale de M avec R , ainsi $MR=8$. On a déjà vu que $RY=0$, donc $RK = R(K+F) - 6 = 2$. Par conséquent,

$$2 = RK = 3K^2 + nFK = 6 + 2n,$$

ce qui donne $R \sim 3K - 2F$, et l'on en obtient tout de suite

$$(30) \quad KR=2, \quad R^2=-6.$$

Maintenant on regarde la partie fixe Z de $|2K|$ donnée dans la proposition 1, (ii). (30) et $FR=6$ donnent $ZR=-8$. Soit Z_1 une composante irréductible de Z , si Z_1 n'est pas une composante de R , on a $Z_1R \geq 0$; si Z_1 est une composante de R , $Z_1R = -2$ (rappelons que R est un diviseur lisse et réduit, cf. [20]). Donc Z a au moins 4 composantes dans R (comptées avec leurs multiplicités). Or les composantes irréductibles de R (égales aussi aux composantes connexes à cause de la lissité de R) sont toutes horizontales par rapport à f , par conséquent $ZF=4$ montre que Z a justement 4 composantes (comptées avec multiplicités) dans R , et la partie Z' de Z formée de ces 4 composantes n'intersecte pas les autres composantes de Z . Donc $Z^2 \leq (Z')^2$, avec égalité si et seulement si $Z=Z'$. D'autre part les différentes composantes de Z' ne s'intersectent pas du tout de la lissité de R , ensuite quitte à énumérer tous les cas, on voit que $(Z')^2 \leq -8$, avec égalité si et seulement si les 4 composantes de Z' sont toutes différentes. Parce que l'on a $Z^2 = -8$ dans notre cas (proposition 1), c'est la seule possibilité, et $Z=Z'$. Mais cela n'est évidemment pas possible, parce que R coupe 6 points de Weierstrass d'une F générale, tandis que Z représente $2K_F$ dans F , qui est 2 fois le diviseur hyperelliptique de F , donc si Z coupe un point de Weierstrass x dans F , il doit le couper par 2 fois, c'est-à-dire la composante de Z passant par x doit être de multiplicité 2 dans Z , contraire à notre possibilité. CQFD

Le théorème 1 est entièrement démontré.

Pour les surfaces avec $p_g=0$, $K^2=1$, on peut aussi dire quelque chose sur la fibration associée à Φ_{2K} . D'abord, selon Bombieri [8, § 13], une telle surface n'a pas de fibration de genre 2, donc le cas (ii) de la proposition 1 ne se produit pas. D'autre part, le lemme 0.1 dans [24] nous conduit facilement à la non-existence du cas (iv) sous la condition que $\text{Tor}(S) = \mathbb{Z}_4$ ou \mathbb{Z}_5 . Aussi, la birationalité de Φ_{3K} [15] montre que les fibres générales dans le cas (v) ne sont pas hyperelliptiques. Enfin, signalons que la surface de Godeaux et l'exemple de Miyaoka [15] tombent dans le cas (v), tout simplement parce que les groupes de torsion sont \mathbb{Z}_5 et \mathbb{Z}_4 , respectivement.

4. Exemple

Nous donnons dans cette section un exemple de surface minimale de type général avec $p_g=q=0$, $K^2=2$, qui a une fibration de genre 2 sur \mathbb{P}^1 .

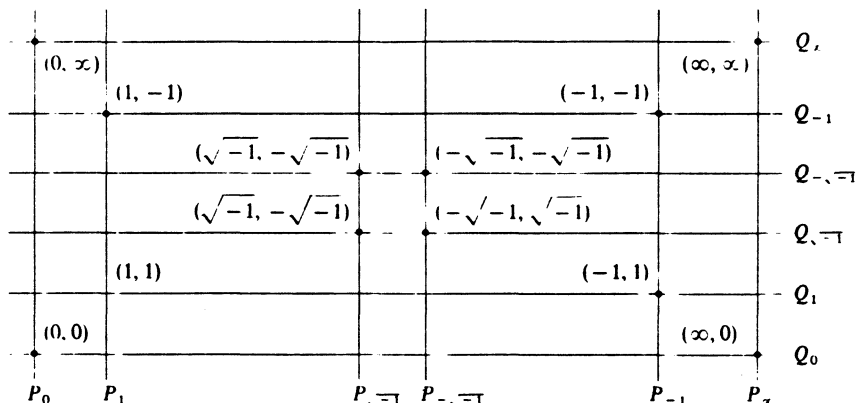
Nous démontrons aussi que cette surface est une surface de Campedelli (proposition 6).

On prend la surface rationnelle $F_0 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ comme point de départ, pour construire un revêtement double ramifié, qui sera l'exemple en question. Soient D_1, D_2, D_3, D_4 4 diviseurs de classe $(1, 1)$ sur F_0 (où un diviseur de classe (a, b) est un diviseur dans le système linéaire $|p_2^* \mathcal{O}(a) + p_1^* \mathcal{O}(b)|$), tracés respectivement par les points $(x, x), (x, -x), (x, 1/x), (x, -1/x)$, pour $x \in \mathbb{P}^1$. Ces 4 diviseurs sont lisses, et ils ont 12 points d'intersection : $(0, 0), (0, \infty), (\infty, 0), (\infty, \infty), (\pm 1, \pm 1), (\pm\sqrt{-1}, \pm\sqrt{-1})$. On définit

$$\psi : X \rightarrow F_0$$

l'éclatement de ces 12 points, $E_i (i=1, \dots, 12)$ les droites exceptionnelles des points éclatés.

Pour visualiser un peu la situation, on dessine l'emplacement de ces 12 points dans F_0 comme suit :



où les P_i et Q_i sont respectivement des fibres de la première et la deuxième projections de F_0 . Chacune de ces lignes contient deux des points d'intersection des diviseurs D_i .

Regardons maintenant le système linéaire $|\psi^*(2, 4) - \sum_{i=1}^{12} E_i|$ sur X , Riemann-Roch nous donne $h^0(\psi^*(2, 4) - \sum E_i) \geq 3$. De plus, il est clair que les transformés stricts par ψ des 3 diviseurs suivants

$$\begin{aligned} P_0 + P_\infty + P_1 + P_{-1} + Q_{-1} + Q_{-\sqrt{-1}}; \\ P_0 + P_\infty + P_{\sqrt{-1}} + P_{-\sqrt{-1}} + Q_1 + Q_{-1}; \\ P_1 + P_{-1} + P_{\sqrt{-1}} + P_{-\sqrt{-1}} + Q_0 + Q_\infty \end{aligned}$$

sont dans ce système linéaire. Par conséquent ce système n'a ni point de base ni partie fixe, donc Bertini nous garantit un diviseur lisse et irréductible

$$\tilde{D} \in |\psi^*(2, 4) - \sum_{i=1}^{12} E_i|,$$

qui est le transformé strict d'un diviseur (lisse) D de classe (2, 4) dans F_0 . Prenant toujours $\tilde{}$ pour un transformé strict, on voit facilement que le diviseur

$$R = \tilde{D} + \sum_{i=1}^4 \tilde{D}_i + \tilde{P}_1 + \tilde{P}_{-1} + \tilde{P}_{-1} + \tilde{P}_{-1} + \tilde{P}_{-1} + \tilde{P}_0 + \tilde{P}_1,$$

est un diviseur lisse sur X , qui est linéairement équivalent à 2δ , où

$$\delta \equiv \psi^*(3, 7) - 2 \sum_{i=1}^{12} E_i.$$

Soit

$$\phi: \tilde{S} \rightarrow X$$

le revêtement double de X ramifié le long de R (paragraphe 1.3). On a :

PROPOSITION 4. — $p_g(\tilde{S}) = 0$.

Démonstration. — On a $p_g(\tilde{S}) = h^0(\mathcal{O}_X(K_X)) + h^0(\mathcal{O}_X(K_X + \delta)) = h^0(\mathcal{O}_X(K_X + \delta))$.
Mais $K_X = \psi^*(-2, -2) + \sum E_i$, donc

$$(31) \quad K_X + \delta = \psi^*(1, 5) - \sum E_i.$$

Il nous suffit de prouver qu'il n'existe pas de diviseur effectif C sur F_0 de classe (1, 5) qui passe par tous ces 12 points. Ceci est immédiat : comme $(1, 5)(0, 1) = 1$ dans F_0 , et C passe par 2 points sur les droites verticales P_i , C doit contenir les 6 P_i , ce qui n'est pas possible pour un diviseur effectif de classe (1, 5). CQFD

PROPOSITION 5. — \tilde{S} est de type général.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que $\Phi_{2K}(\tilde{S})$ a pour image une surface. Mais

$$(32) \quad \begin{aligned} 2K_{\tilde{S}} &\equiv \phi^*(2K_X + 2\delta) \\ &\equiv \phi^*(\psi^*(2, 10) - \sum 2E_i) \\ &\equiv \phi^*[(\psi^*(2, 4) - \sum E_i) + \sum \tilde{P}_i]. \end{aligned}$$

On sait déjà que $|\psi^*(2, 4) - \sum E_i|$ n'a ni point de base ni partie fixe, que sa self-intersection est 4, et que $h^0(\psi^*(2, 4) - \sum E_i) \geq 3$, donc l'application

induite de $|\psi^*(2, 4) - \sum E_i|$ est génériquement finie. Et évidemment, le système $\phi^*|\psi^*(2, 4) - \sum E_i|$ est un sous-système linéaire de $|2K_S|$.

CQFD

On a $K_S^2 = 2(K_X + \delta)^2 = -4$ d'après (31). D'autre part, les droites $\phi^{-1}(\tilde{P}_i)$ ont self-intersection -1 dans \tilde{S} , donc elles sont des droites exceptionnelles. Soit alors

$$\rho: \tilde{S} \rightarrow S$$

la contraction de ces 6 droites exceptionnelles. On a :

$$p_g(S) = q(S) = 0, \quad K_S^2 = 2,$$

et S est de type général. Il est maintenant clair que l'image réciproque sur S de la projection p_1 de F_0 est une fibration de genre 2, donc par le théorème 2, S est minimale. Cette fibration de S a 6 fibres non-irréductibles de type $A_0(b)$, et on a $Y=0$, $M^2=6$, $g(M)=6$. On voit aussi par (1) et (32) que Φ_{2K_S} se factorise par

$$S \xrightarrow{\mu} X \xrightarrow{\nu} \mathbb{P}^2,$$

où μ est l'application associée à $|\psi^*(2, 4) - \sum E_i|$, donc Φ_{2K_S} est génériquement finie de degré 8, sans point de base ni partie fixe.

PROPOSITION 6. — $\text{Tor}(S) = (\mathbb{Z}_2)^3$.

Démonstration. — Il y a 7 diviseurs effectifs dans S linéairement équivalents à $2K_S$, qui sont 2-divisibles en tant que diviseurs : on prend $2D_i$ différents dans F_0 ; il y a 6 choix. Ajoutant les $2P_i$ qui passent par les deux points d'intersection des deux D_i choisis, le tout forme un diviseur de classe $(2, 4)$. notons B_i , $i=1, \dots, 6$. On prend D pour B_7 , et les images dans S de $\phi^*(\psi^*B_i - \sum_{i=1}^{12} E_i) = \tilde{B}_i$ sont les diviseurs cherchés.

Pour un tel diviseur \tilde{B}_i , sa moitié A_i est un diviseur numériquement équivalent à K_S , donc $K_S - A_i$ est un diviseur de torsion η_i . Ces η_i sont tous différents, parce que le lemme 8 nous dit que $H^1(A_i) = H^1(\eta_i) = 0$, donc $h^0(A_i) = 1$. Comme ces η_i sont tous d'ordre 2 dans $\text{Tor}(S)$, on constate facilement que $\text{Tor}(S)$ ne peut avoir d'autre élément que ces η_i et l'élément neutre : sinon on doit avoir $\text{Card Tor}(S) > 10$, contradiction avec [4]. D'où $\text{Tor}(S) = (\mathbb{Z}_2)^3$. CQFD

Il est facile de constater que, modulo les automorphismes de la surface F_0 , il n'y a qu'une possibilité pour 4 sections $(1, 1)$ de s'intersecter en points

doubles sur 6 fibres verticales. La construction de cette section dépend donc uniquement du choix du diviseur \tilde{D} , qui varie dans une famille de dimension 2.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN (M.). — Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces, *Amer. J. Math.*, vol. 84, 1962, p. 485-496.
- [2] ARTIN (M.). — On isolated rational singularities of surfaces, *Amer. J. Math.*, vol. 88, 1966, p. 129-136.
- [3] BEAUVILLE (A.). — *Surfaces Algébriques Complexes*, astérisque 54, S.M.F., 1978.
- [4] BEAUVILLE (A.). — L'application canonique pour les surfaces de type général, *Inv. Math.*, vol. 55, 1979, p. 121-140.
- [5] BENVENISTE (X.). — L'application rationnelle tricanonique des surfaces de type général avec $K^2=2$, $p_g=0$, $q=0$, *C.R. Acad. Sc. Paris*, vol. 286, Série A, 1978, p. 219-221.
- [6] BERNIAT (P.). — Sur les surfaces de genre $P_{12}>0$, *Ann. Math. Pura Appl.*, (4) vol. 71, 1966.
- [7] BOMBIERI (E.). — The pluricanonical map of a complex surface, *Springer Lecture Notes*, vol. 155, 1970, p. 35-87.
- [8] BOMBIERI (E.). — Canonical models of surfaces of general type, *Publication I.H.E.S.*, n° 42, 1973, p. 171-219.
- [9] BOMBIERI (E.). — Superfici irregolari canoniche e pluricanoniche, *Symposia Math.*, vol. XI, 1973, p. 313-322.
- [10] BOMBIERI (E.), CATANESE (F.). — The tricanonical map of a surface with $K^2=2$, $p_g=0$, in *C.P. Ramanujam, a tribute*, Springer 1978.
- [11] BOMBIERI (E.), HUSEMOLLER (D.). — Classification and embeddings of surfaces, in *Algebraic Geometry*, Arcata, 1974, p. 329-420, A.M.S. Proc. XXIX.
- [12] ENRIQUES (F.). — *Le superficie algebriche*, Zanichelli, 1949.
- [13] HORIKAWA (E.). — On deformations of quintic surfaces, *Inv. Math.*, vol. 31, 1975, p. 43-85.
- [14] HORIKAWA (E.). — On algebraic surfaces with pencils of curves of genus 2, in *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, a volume dedicated to Kodaira, p. 79-90, Cambridge, 1977.
- [15] MIYAOKA (Y.). — Tricanonical maps of numerical Godeaux surfaces, *Inv. Math.*, vol. 34, 1976, p. 99-111.
- [16] MIYAOKA (Y.). — On the Chern numbers of surfaces of general type, *Inv. Math.*, vol. 42, 1977, p. 225-237.
- [17] MIYAOKA (Y.). — On numerical Campedelli surfaces, in *Complex Analysis and Algebraic Geometry*, a volume dedicated to Kodaira, p. 113-118, Cambridge, 1977.
- [18] NAMIKAWA (Y.), UENO (K.). — The complete classification of fibres in pencils of curves of genus two, *Manuscripta Math.*, vol. 9, 1973, p. 143-186.
- [19] OGG (A. P.). — On pencils of curves of genus two, *Topology*, vol. 5, 1966, p. 355-362.
- [20] PERSSON (U.). — Double covering and surfaces of general type, *Springer Lecture Notes*, vol. 687, 1978, p. 168-195.

- [21] PETERS (C. A. M.). — On two types of surfaces of general type with vanishing geometric genus, *Inv. Math.*, vol. 32, 1976, p. 33-47.
- [22] PETERS (C. A. M.). — On certain examples of surfaces with $p_g=0$ due to Berniat, *Nagoya Math. J.*, vol. 66, 1977, p. 109-119.
- [23] RAMANUJAM (C. P.). — Remarks on the Kodaira vanishing theorem, *J. of Indian Math. Soc.*, vol. 36, 1972, p. 41-51.
- [24] REID (M.). — Surfaces with $p_g=0$, $K^2=1$, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. I.A. Math.*, vol. 25, n° 1, 1978, p. 75-92.
- [25] REID (M.). — π_1 for surfaces with small c_1^2 , *Springer Lecture Notes*, vol. 732, 1978, p. 534-544.
- [26] REID (M.). — Surfaces with $p_g=0$, $K^2=2$, à paraître.