M. LAQUIÈRE

Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 132-158

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__132_1>

Solutions régulières du problème d'Euler sur la marche du cavalier; par M. LAQUIÈRE.

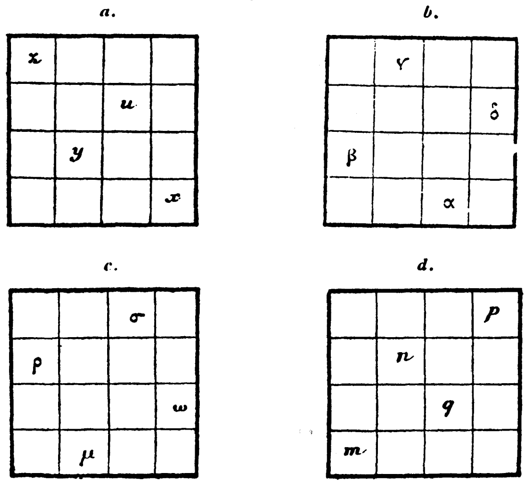
(SUITE.)

Formation des marches rentrantes régulières complètes
(de soixante-quatre sauts).

Nous n'aurons plus maintenant aucune difficulté à composer des marches rentrantes complètes de soixante-quatre cases. Il est d'abord évident qu'en parcourant successivement les quatre marches partielles et opérant les soudures de marches alternées en carré et en losange, qui sont toujours possibles, soit dans le même carré, soit dans le carré voisin de toute case terminale de l'une des marches, on formera une marche de soixante-quatre cases continue, quels que soient les sens adoptés dans chaque circuit pour sa description. En ménageant convenablement ce sens, on conçoit qu'il sera possible de diriger la case terminale de la quatrième marche dans le voisinage de la case d'entrée de la première; et au besoin, en retournant la dernière volte, d'obtenir la fermeture, les deux cases étant de couleurs différentes. La possibilité d'obtenir une marche rentrante n'est donc plus douteuse ; mais elle deviendra plus précise par la loi de formation rationnelle des marches régulières.

Supposons désignés, comme dans la *fig.* 3, les quatre types de marches élémentaires A, B, C, D.

Fig. 3.



Nous désirons composer une marche totale dans laquelle les seize cases appartenant au même type de volte soient réunies en une seule marche partielle comprenant le quart des cases de l'échiquier uniformément réparties dans les quatre quartiers, sur les huit colonnes et sur les huit bandes de l'échiquier, telles que les marches types partielles que nous avons trouvées. Nous savons qu'il en existe deux groupes qui se distinguent par la couleur de la case d'entrée dans les quartiers pour un même sens de description : groupe ABCD et groupe $A_1 B_1 C_1 D_1$. Les cases d'entrée dans une marche continue complète étant de même couleur et les cases de sortie de couleur contraire, et de plus dans le retournement des marches les cases de sortie et d'entrée se permutant l'une dans l'autre, il est dès à présent évident que, si l'on veut décrire la marche entière sans changer de sens, on devra prendre les quatre marches partielles dans le même groupe, c'est-à-dire ABCD ensemble, et de même $A_1 B_1 C_1 D_1$, le sens adopté pouvant être indifféremment positif dans l'un et l'autre groupe, et l'ordre de passage d'un type à l'autre restant à fixer pour obtenir la fermeture, mais devant toujours, comme il a été déjà établi, alterner les types en carré et les types en losange.

Si l'on veut décrire une partie de la marche dans un sens et une partie dans l'autre, on devra, toujours pour respecter la couleur d'entrée dans les quartiers que l'on ne peut modifier, prendre dans l'un des groupes les marches types que l'on désire parcourir dans un sens et dans l'autre groupe celles à parcourir en sens inverse. Ainsi, par exemple, on pourra prendre A et B avec C_1 et D_1, à condition que le sens de description des deux premiers types et celui des deux derniers soient contraires, et faire toutes les combinaisons possibles entre les types d'après ces principes, ce qui donne $2^4 = 16$ combinaisons possibles, ou trente-deux marches régulières à éléments par marches partielles en voltes semblables de seize cases, chacune de seize circuits pouvant être décrits dans les deux sens différents.

L'étude détaillée d'une de ces marches ne sera pas superflue pour montrer comment les marches types se soudent les unes aux autres pour parvenir à la fermeture; elle nous suggérera de plus la formation de diagrammes symboliques pouvant servir également à trouver promptement les cases d'entrée et de sortie de chacune des marches partielles dont la réunion constitue la marche totale, et à conserver les éléments suffisant à la reconstruction immédiate de celle-ci.

Dans ces marches régulières totales, les quatre types devront être décrits successivement sans coupures venant enchevêtrer une portion de marche appartenant à un type dans les autres. Nous savons que, pour que les quatre voltes d'une même marche se succèdent ainsi sans interruption, le sens de la marche doit être continu pour toutes les voltes de la marche partielle et le même que celui qui indique l'ordre de visite des quartiers.

La marche devant être rentrante, le point de départ est arbitraire sur l'échiquier ; nous le prendrons dans le type de marche élémentaire a et le quartier I. Remarquons d'abord que, si la case de départ était l'angulaire z de l'échiquier, la case terminale 64 serait nécessairement l'une des deux seules u ou y en communication avec elle, l'autre étant la seconde visitée ; par suite, pour ne pas couper la volte en deux parties, il faudrait rétrograder jusqu'à la case de soudure de la marche partielle avec la précédente de type précédent.

La case de départ, pour décrire sans interruption toute la marche de type déterminé, sera donc nécessairement l'une des trois x, y, u, autres que l'angulaire, ce qui donne quatre modes de description de la volte, $xyzu$, $yzux$, $xuzy$, $uzyx$, les cases reliées à l'angle n'admettant qu'un sens de parcours, la case opposée x laissant le choix entre les deux.

Choisissons le sens *dextrorsum ;* le sens *sinistrorsum*, symétrique par rapport aux médianes, ne nécessitera pas d'étude nouvelle. Il y a donc deux débuts de marches *dextrorsum* à étudier :

1er début, $yzux$, voir *fig.* 2, Tableaux A, B, C, D;

2e début, $xyzu$, voir *fig.* 5, Tableaux A_1, B_1, C_1, D_1.

Première marche dextrorsum.

Partant de la case y (ou 1 du diagramme) dans le quartier I, on aura pour 16e case de la marche la case de ce type partiel contenue dans le quartier IV et qui se relie à la case 1, case qui peut être déterminée immédiatement sans développer la marche, ainsi qu'il sera dit pour former le diagramme symbolique de la marche (*fig.* 4). Elle correspond à x par centre et à z par coulisses ([1]).

De la case 16 ou z du quartier IV, case terminale de la marche type A, composée des voltes a, avec case de départ blanche, couleur de y du quartier I dans l'échiquier pratique, il faut, pour continuer le sens *dextrorsum* de la marche, traverser le côté mitoyen dans le sens du mouvement; cette condition suffirait pour fixer la case 17 de départ de la marche suivante, que l'on savait déjà devoir être en carré, puisque la première est en losange. La position de la case 16 ne laisse d'ailleurs qu'une case de marche différente de A en communication avec elle. C'est la marche B

([1]) Pour désigner les cases dans chaque quartier, nous les supposerons en corrélation par coulisses avec les diagrammes orientés a, b, c, d (*fig.* 3) des quatre voltes types, et nous les distinguerons par la lettre de la case dans le type et le numéro du quartier qui la contient.

voisine, puisque le passage se fait sur un côté mitoyen horizontal. La case 17 est l'α du type *b* de marche en carré dans le quartier I.

La 32^e^ case, case de fermeture de la marche B *dextrorsum,* se trouvera en répétant le raisonnement déjà fait comme case de ladite marche *b* dans le quartier IV, en communication avec 17 du quartier I. C'est la case δ du quartier IV.

Cherchons maintenant la case 33 de départ de la troisième marche, qui, d'après les principes posés, doit être en losange et ne peut en conséquence être formée que du type *d*. Or, dans le quartier I, en traversant le mur mitoyen dans le sens du mouvement, on ne trouve point de case en communication avec 32, et dans le IV^e^ quartier lui-même il n'en existe qu'avec la marche A déjà parcourue. Force est donc de pousser, en conservant le sens de la marche jusqu'au quartier II, où l'on trouve la case *m*, du type en losange *d*, seule en communication avec 32. Ce sera donc elle qui devra servir d'entrée 33 à la troisième marche partielle [1].

De même que ci-dessus, on voit que la case 48, dernière de la marche partielle du système *d* (ou D), est la seule de ce système et dans le quartier I, précédant II dans le sens de la marche, en communication avec 33. La case *q* du quartier I sera donc la case n° 48 de sortie de la troisième marche D, en losange.

Dans le quartier I, la case ρ du type non encore décrit serait en communication avec 48 et pourrait servir de case d'entrée, mais elle exigerait que la marche fût continuée en sens inverse. On peut du reste s'assurer qu'elle se fermerait encore d'elle-même en décrivant le circuit de sens *sinistrorsum* et aboutissant au 64^e^ stationnement en σ du quartier I, avec coupure de la volte dans ce quartier. La case σ est d'ailleurs celle que nous allons encore trouver pour 64^e^ de la marche *dextrorsum* cherchée. Dans le quartier suivant, passant de 48 le côté mitoyen dans le sens de la marche, nous trouvons la case ρ du type *c* en communication avec 48 dans le quartier II, de même que dans le quartier I. Ce sera la case de départ 49 de la quatrième marche en carré du type C.

La dernière station de cette marche se trouvera dans le quartier

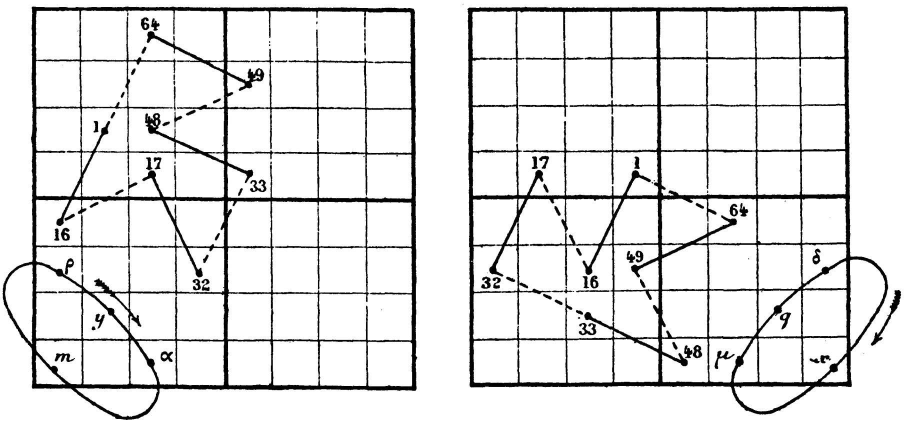
---

(1) On trouverait encore la case *m* du quartier III; mais elle obligerait à prendre la marche *sinistrorsum* pour le circuit, de même qu'on aurait rétrogradé de quartier par rapport à la première direction de visite adoptée.

précédent I et en communication avec 49, en σ que nous numéroterons 64, et qui, par sa communication avec y du même quartier, origine de la première marche, fait rentrer sur elle-même la marche complète *dextrorsum* sur les 64 cases avec case blanche d'entrée dans toutes les voltes.

Le diagramme symbolique ci-dessous résume cette marche. On le compose d'un octogone formé par les quatre résultantes de quinze sauts empruntés à chaque marche partielle type et les quatre côtés de soudure. Les quatre résultantes étant les sauts supprimés à chaque marche pris en sens inverse, l'octogone symbolique est une marche réelle de huit sauts de cavalier.

Fig. 4.



Si nous reportons (comme il est fait sur un angle du diagramme symbolique) sur un même quartier les cases correspondant à celles de départ dans les quatre marches partielles types, qui, réunies, forment la marche totale, nous trouvons pour la première marche *dextrorsum* : y, α, m, ρ, c'est-à-dire, dans les trois marches partielles succédant à la première, les cases de chacun des types qui touchent à celle choisie la première comme case de départ, et prises dans l'ordre où l'on peut former un circuit continu (ou elliptique) les traversant toutes les quatre et parcourant le circuit dans le sens *dextrorsum* ou celui de la marche.

On peut au moyen de ce circuit retrouver la marche entière. La loi de sa formation est du reste générale, comme on le verra dans le second circuit *dextrorsum*. Si l'on formait une marche totale composée de marches partielles les unes dans un sens, les autres dans l'autre, la courbe d'union des cases d'entrée se composerait de deux arcs se tournant le dos comme les branches d'une hyperbole et rappelant ainsi le sens discontinu de la marche. Nous en donnerons tout à l'heure un exemple.

Deuxième marche dextrorsum.

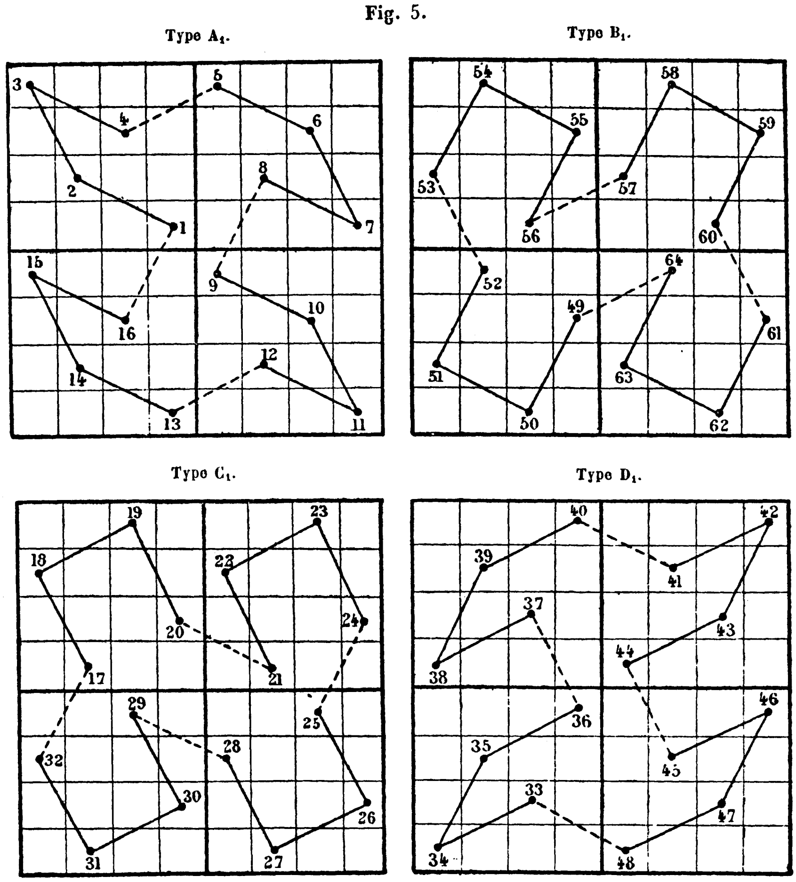
La seconde marche *dextrorsum* est celle que définit la volte $xyzu$ et pour laquelle les cases d'entrée des voltes sont noires sur l'échiquier orienté. La *fig.* 4 en donne le diagramme symbolique et la courbe d'union des origines de marches partielles, en regard de ceux de la première marche ; les *fig.* 5 en montrent le complet développement. Pour la trouver, il suffit de composer le diagramme symbolique par la série des raisonnements pareils à ceux qui nous ont fait connaître les éléments nécessaires de la première marche ; nous formons ainsi le Tableau suivant. On trouve pour :

Marche A_1...	La case	1,	case	y	du type élém.	a,	dans le quart.	I
	»	16,	»	u	»	a,	»	IV
Marche C_1...	»	17,	»	μ	»	c,	»	I
	»	32,	»	ρ	»	c,	»	IV
Marche D_1...	»	33,	»	q	»	d,	»	IV
	»	48,	»	m	»	d,	»	III
Marche B_1...	»	49,	»	δ	»	b,	»	IV
	»	64,	»	γ	»	b,	»	III

Si l'on forme la courbe d'union des cases origines des quatre marches types, ce sont encore les quatre les plus rapprochées de x, dans le diagramme qui les figure dans le même quartier ; ils se succèdent dans le sens du mouvement d'un mobile décrivant la courbe d'union dans le même sens que la marche, comme il a été observé pour la première marche, la courbe pouvant se fermer de même. D'une manière générale les marches étudiées se composent des quatre marches partielles types formées par la réunion des quatre voltes semblables, se succédant dans l'ordre alternatif de marches en voltes losanges et voltes carrées qu'indique l'ordre des cases de départ types les plus rapprochées de la case d'origine choisie de l'une des marches, les quatre cases étant réunies entre elles par un trait ou anneau continu, parcouru dans le même sens que celui qui est commun à la visite des quartiers et à la description des voltes.

Quant au diagramme symbolique relatant les cases d'entrée et de

Fig. 5.



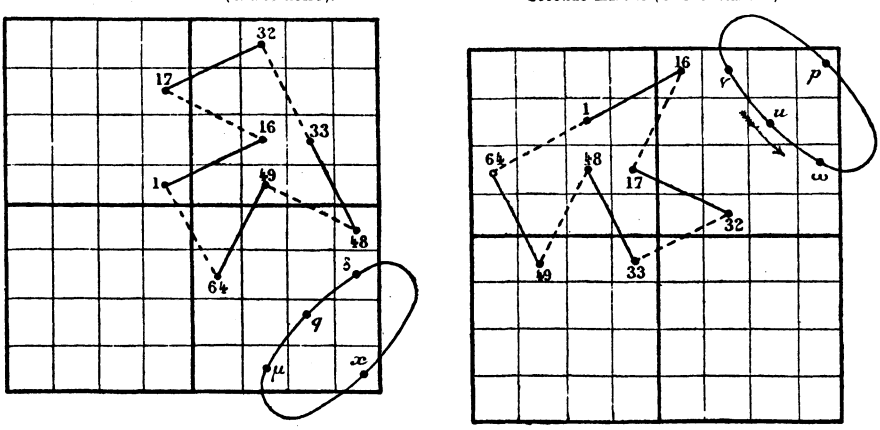
sortie, il est égal comme figure géométrique à celui de la première marche, mais orienté rectangulairement dans la seconde, ce qui nous démontre à nouveau que les deux marches n'en font qu'une seule au point de vue géométrique, c'est-à-dire abstraction faite des couleurs.

Des marches sinistrorsum.

En choisissant convenablement l'origine, les marches *sinistrorsum* ne sont évidemment autres que les marches *dextrorsum* retournées, soit leurs symétriques. Nous n'aurions rien à en dire si nous ne voulions insister sur l'emploi du diagramme symbolique qui rend si facile la combinaison des marches partielles, en réduisant celles qui sont connues d'autre part à leur résultante ; nous nous bornerons à donner les diagrammes symboliques des deux marches définies par les voltes $xuzy$ et $uzyx$. Ces diagrammes sont formés en reliant, d'après la règle exposée, la case de départ de chaque marche partielle type à celle de même type à distance de

Fig. 6.

Première marche (entrée noire). Seconde marche (entrée blanche).



cavalier dans le quartier voisin vers la droite (sens opposé au mouvement) pour avoir la résultante de la première marche, puis revenant vers la gauche (sens du mouvement) à la case possible dans le quartier voisin sur la gauche, ou, si besoin est, dans le suivant. Cette case est toujours déterminée, car la résultante d'une marche et le côté de soudure avec la marche suivante sont nécessairement symétriques par rapport à la direction des médianes ou des diagonales, et des lignes ainsi définies une seule a son extrémité dans le quartier où doit se prendre la case de départ de la marche suivante.

Les trois autres marches partielles se déterminent par la même règle.

On remarquera que toutes les marches partielles types sont symétriques par rapport au centre de l'échiquier et que, par suite, deux cases symétriques par rapport au centre de l'échiquier sont, dans toutes les marches composées de marches partielles types, marquées de numéros de station différant de huit unités.

Les marches *sinistrorsum* sont, de même que les marches *dextrorsum*, représentées par l'anneau d'union des cases d'entrée dans chaque marche que rencontre successivement le mobile décrivant l'anneau dans le sens de la marche.

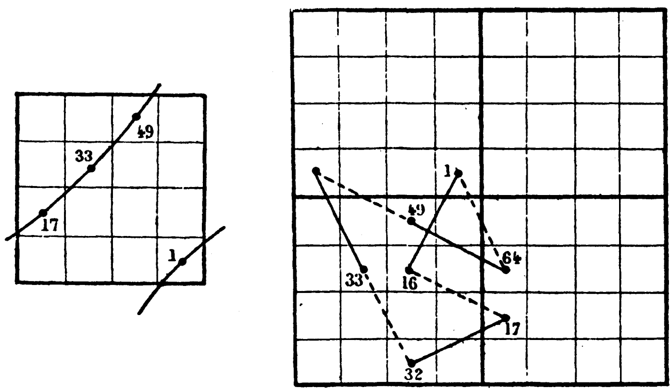
Quant aux diagrammes symboliques, ils sont symétriques de ceux des marches *dextrorsum* par rapport à la médiane verticale pour les deux premières de chaque nom, par rapport à la médiane horizontale pour les secondes; cela devait être prévu, les deux marches ayant ces axes de symétrie relative. Quant aux numéros des cases symétriques, ils diffèrent de 32, nombre de cases de deux marches complètes, en raison de la permutation qui se produit dans la symétrie linéaire entre les marches losanges d'une part et les marches carrées d'autre part, distantes de 32 sauts.

Marches régulières avec changement de sens.

Nous avons vu qu'il pouvait être formé 32 marches régulières

Fig. 7.

Diagramme symbolique et courbe d'union.

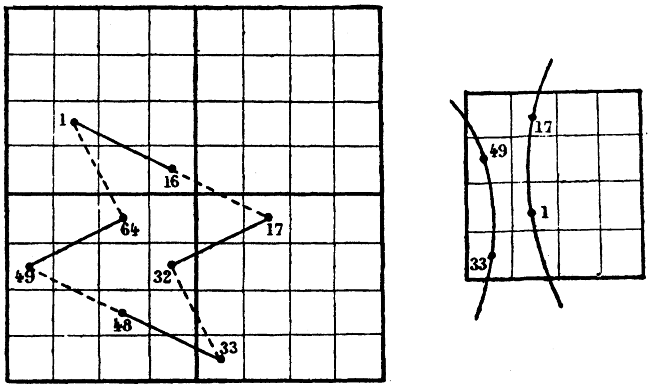


avec les diverses combinaisons des sens de marches partielles; nous ne donnerons ici que le diagramme symbolique et la courbe d'union des cases de départ des deux marches rentrantes :

$$+ A_1 - B - D + C_1 \quad \text{et} \quad A - B_1 - D_1 + C.$$

Fig. 7 *bis.*

Diagramme symbolique et courbe d'union.



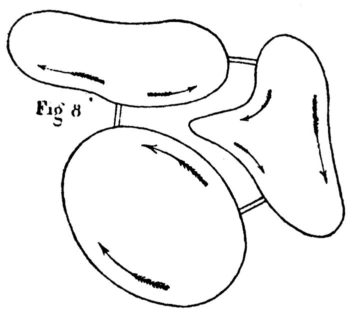
On remarquera que la courbe d'union est du genre hyperbole dans l'un et dans l'autre.

Marches régulières entrecoupées.

Les principes établis précédemment ont donné immédiatement les marches régulières à rotation continue; par l'étude du diagramme symbolique convenable, ils serviraient à déterminer les marches plus compliquées, composées de marches types entières, ou fractionnées, parcourues dans des sens divers. Nous ne nous étendrons pas davantage sur un sujet qui serait long à épuiser, mais qui est déjà convenablement élucidé; mais l'étude des marches régulières resterait incomplète si nous passions complètement sous silence celles de ces marches composées de portions de marches types entrecoupées de telle sorte que les deux moitiés de la marche totale soient symétriques par rapport au centre de l'échiquier, comme le sont entre elles les deux moitiés d'une marche partielle type. La clef de ces études nous est donnée par la substitution à une marche de sa résultante et l'application des deux théorèmes évidents ci-après :

Théorème I. — *Étant donné un certain nombre de marches rentrantes comprenant entre elles toutes les cases de l'échiquier, sans qu'une seule case fasse partie de deux marches, si l'on peut former une marche rentrante d'un certain nombre de sauts en*

Fig. 8.



empruntant dans un sens ou dans l'autre à chacune des marches une portion de son parcours et les reliant par un seul saut de soudure, les portions laissées de côté dans chaque marche formeront aussi une marche rentrante dans laquelle les portions appartenant aux mêmes marches se succéderont dans le même ordre, mais seront parcourues en sens inverse si les sauts de soudure sont exécutés dans le même sens.

Comme cas particulier, si dans une marche rentrante on remplace un certain nombre de ses côtés par des marches à cases distinctes de la marche et qui les admettent comme résultantes, on obtiendra une marche rentrante.

Si les marches substituées aux côtés supprimés au polygone rentrant primitif comprennent avec les côtés restants toutes les cases de l'échiquier, on aura composé une des marches rentrantes complètes de 64 sauts du cavalier sur l'échiquier.

Théorème II. — *Si deux séries de cases présentent une symétrie quelconque éléments par éléments, et que la dernière case de la marche non rentrante constituée par la première série soit à distance de saut de cavalier de la première marche de l'autre, il en sera réciproquement de même de la dernière case de la seconde marche et de la première case de la première marche ; les deux marches réunies formeront par suite une marche rentrante.*

Marches rentrantes dédoublées par demi-échiquier.

Corollaire. — On formera ainsi une marche rentrante complète si l'on comprend toutes les cases de deux quartiers de l'échiquier dans une marche de 32 sauts telle que la case d'arrivée, 32^e, soit en communication avec la case extérieure qui doit être considérée comme symétrique de la case de départ 1, suivant le mode de symétrie possible devant exister entre la portion parcourue et celle laissée vide sur l'échiquier.

Étant donné l'ensemble de deux quartiers de l'échiquier, ils formeront, suivant qu'ils seront adjacents ou opposés, un système symétrique des deux autres, dans le premier cas à volonté par centre ou par axe, dans le second par axe seulement. Or les cases de départ, étant nécessairement de même couleur, ne peuvent se correspondre que par symétrie par rapport au centre, et non aux axes, de l'échiquier ; on devra accoler, pour les parcourir en entier d'une course continue deux quartiers adjacents, c'est-à-dire I et II, ayant III et IV pour correspondants symétriques, ou I et IV, dont les correspondants par symétrie seront III et II. Cela posé, le côté de soudure doit être à cheval sur la médiane de l'échiquier limite commune des deux groupes, et par conséquent les cases de départ et d'arrivée 1 et 32 ne sauraient être extérieures à la bande de deux cases de largeur voisine de cette médiane. On voit de plus immédiatement que les deux cases ne sauraient être à la fois sur la tranche de cases non contiguë à la frontière et qu'une au moins doit être sur la frontière même ; nous supposerons que c'est la case de départ, ce qui s'obtiendrait par retournement de la marche dans le cas où elle serait case d'arrivée. Il suffit en outre d'étudier l'accolement de deux quartiers déterminés, I et II par exemple, l'autre s'en déduisant par symétrie axile.

Quelques essais suffisent à se convaincre que les marches en voltes doivent être, en raison du rapprochement des quatre angles, décrites sans interruption dans leur intégrité, sous peine de ne pouvoir relier à la portion ultérieure de la marche les cases omises de ces voltes sans s'exposer à un arrêt immédiat.

Nous pouvons choisir le quartier I pour celui de départ, le départ dans le quartier II s'en déduisant par symétrie axile. Il n'y a donc que quatre cases de départ à considérer, celles de la tranche inférieure du quartier I. L'étude se fera par diagramme symbolique, en représentant chaque volte par sa résultante et traçant son côté de soudure avec la suivante, ce qui réduit à 16 le nombre de côtés du diagramme symbolique. On formera aisément des marches issues de chacune des cases x, α, μ, m; mais elles viendront toutes se terminer également sur la tranche inférieure aux diverses cases en communication avec la symétrique de la case de départ par rapport au centre de l'échiquier.

Il n'y a donc sur la seconde tranche de case de départ ni d'arrivée possible. Nous signalons ce fait au lecteur en avouant que la raison théorique nous en a échappé; mais la démonstration empirique n'en est ni longue ni difficile : il suffit de prendre successivement les quatre cases de la seconde tranche comme cases de départ et l'on s'aperçoit bien vite que l'on ne peut par voltes complètes remplir à partir d'elles, d'un circuit continu, que les seize cases appartenant à deux systèmes de voltes, l'une en carré et l'autre en losange.

Les éléments en voltes permettront de trouver ainsi, avec un travail peu considérable de tâtonnements, des marches régulières satisfaisant aux conditions voulues. Quelle que soit la case d'entrée dans une volte, on peut en effet choisir le sens de sa description, puisqu'elle est rentrante, et par suite la terminer sur une case voisine de la frontière ; la couleur se réglant d'elle-même en raison du nombre de sauts, on comprend que toutes les marches de 32 sauts obtenues par ce procédé se ramèneront à la condition exigée par de légères modifications, si elles n'ont pas été du premier coup entièrement satisfaisantes. Nous signalerons comme exemple la marche *dextrorsum*

$$x, \text{I (A, C)}, \text{II (A, C)}, \text{I (D, B)}, \text{II (D, B)},$$

c'est-à-dire commençant à la case x du premier quartier, et décrivant successivement dans le sens positif les voltes A et C dans le quartier I, A et C dans le quartier II, puis D et B dans le quartier I, et enfin D et B dans le quartier D. La case de départ est la case x ou 4 de la marche A; la case d'arrivée, 32ᵉ, est la case 23, marche B, quartier II, en communication avec 12, symétrique centrale dans le quartier IV (marche A) de la case de départ. La marche symétrique au centre débutant à la case 12 se terminera à la case 31, marche B (quartier IV), en communication avec 4 (marche A), case origine. La réunion des deux marches symétriques donne donc une marche totale rentrante.

Autres exemples; marches de sens variés dans l'indication desquelles le signe + ou — précédant une suite de voltes désignées comme ci-dessus indique le sens de la marche des voltes comprises depuis ce signe jusqu'au suivant :

2e marche α, B (I, II) — D (I, II) — II, C + II, A + I (C, A),

partant de la seconde case à partir du centre pour aboutir à la première dans le même quartier; suivant les voltes décrites de sens positif, B dans les quartiers successifs I et II ; puis D dans le sens négatif d'abord dans le quartier I, puis dans le quartier II ; C dans le sens négatif, quartier II ; A dans le quartier II, sens positif ; enfin C et A dans le quartier I et le sens positif.

3e marche m, D (I, II) + B (II, I) + A (I — II) + C (I, II),

de la 4e case à partir du centre sur l'horizontale à la 3e dans l'autre quartier.

Les diagrammes complets ou symboliques seront formés sans peine; nous ne les donnerons point, pour ne pas augmenter inutilement le nombre des figures.

Marches spirales sur la circonférence et le centre.

Signalons maintenant une marche, ou plutôt un type de marches, régulière, fort belle, formant une spirale continue à spires décrites alternativement sur le pourtour ou circonférence de l'échiquier et sur le centre ou quartier central. Cette marche nous a été inspirée par le désir de marier l'idée géométrique de régularité symétrique des éléments à combiner avec la tendance naturelle à tout joueur d'échecs étranger à la science de diriger ses tâtonnements en longeant le plus longtemps possible le contour de l'échiquier. Elle dérive du reste très simplement de nos types de marches en voltes, groupés en deux systèmes d'après la couleur de la case d'entrée.

Si l'on isole sur l'échiquier la partie centrale de dimension égale à un quartier, c'est-à-dire le quartier doublement dérivé des quatre, l'échiquier sera divisé en un quartier central de quatre cases de côté et un cadre de deux cases de largeur. Le carré central sera formé de la case la plus rapprochée du centre dans les 16 voltes, et le pourtour formant cadre renfermera les trois cases éloignées de toutes ces voltes.

Cela posé, considérons sur l'une des marches types quelconques deux cases en communication par saut de cavalier à cheval sur la limite des deux régions, c'est-à-dire dont l'une soit intérieure au carré central, l'autre extérieure ; elle sera la ligne de fermeture d'une marche rentrante dans laquelle les 12 cases de pourtour forment un premier circuit extérieur parcouru dans un sens déterminé, le second circuit intérieur composé des quatre cases du quartier central étant parcouru postérieurement dans le sens opposé. Il sera, dès lors, facile de former des marches rentrantes totales composées avec ces nouveaux types de marches rentrantes, partielles comme on l'avait déjà fait avec les types primitifs.

L'étude empirique, extrêmement prompte et facile, se réduira, comme pour les marches partielles en voltes à l'établissement d'un polygone de huit côtés formé alternativement de la résultante d'une marche partielle rentrante du nouveau type en spirale et de sa ligne de soudure à la marche suivante. Ces soudures sont évidemment réglées par les mêmes conditions que précédemment. Sans entrer dans de plus grands détails, nous nous bornerons à un exemple dont la *fig.* 9 ci-après donne la représentation des éléments et le diagramme symbolique.

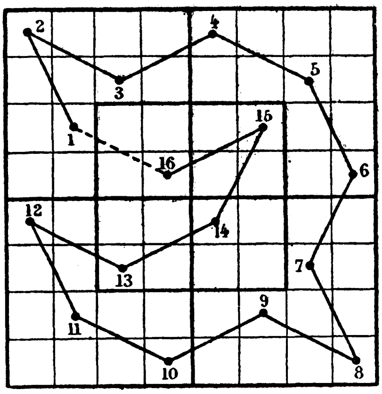
Prenons le type α (ou A modifié ainsi qu'il vient d'être dit), et conservons les cases extrêmes ; le pourtour sera parcouru de gauche à droite, puis le carré central de droite à gauche, ce que nous désignerons par la notation expressive $+ A - \alpha$; la partie extérieure du type étant représentée par la lettre majuscule et la partie intérieure par la minuscule, le signe qui précède désignant le sens de la description. Représentant de même par B, β ; Γ, γ ; Δ, δ les portions extérieures et intérieures des types en spirale modifiés de B, C, D, et sans se préoccuper bien entendu des points de départ, qui s'imposent d'eux-mêmes, on formera sans peine la marche complète en spirale la plus régulière, commençant à la case 1,

$$1\,A - \alpha - B + \beta - D + \delta + \Gamma - \gamma,$$

dans laquelle chaque marche partielle spirale type est décrite d'un seul parcours, la spirale extérieure la première, la spirale intérieure postérieurement avec rebroussement entre les deux.

Fig. 9.

Type α (A modifié).



Type β (B modifié).

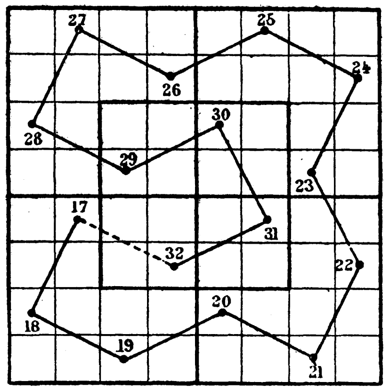
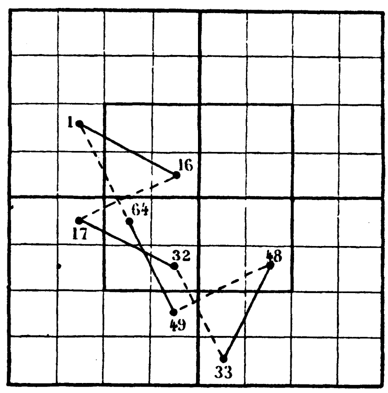


Diagramme symbolique.



On remarquera que les spires α, β, γ, δ se confondent avec les voltes *d*, *c*, *b*, *a* du type conjugué dans les marches en voltes du type qui fournit la marche. Comme pour les fonctions périodiques la dérivation double reproduit la quantité primitive, identique ici, dans deux directions opposées, en raison même de sa symétrie centrale relativement à elle-même.

On remarque que, pour obtenir des marches partielles de deux spires, l'une intérieure, l'autre extérieure, rentrantes, on doit admettre un rebroussement (changement de sens de parcours) entre la spire extérieure et la spire intérieure; cette condition étant supprimée, on obtient des marches de deux spirales extérieure et intérieure sans rebroussement intermédiaire, qui, bien que n'étant pas rentrantes sur elles-mêmes, pourront néanmoins entrer dans la composition d'une marche totale rentrante. Ainsi la marche rentrante

$$1\,\mathrm{A} - \alpha - \mathrm{B} - \beta - \Delta - \delta + \Gamma + \gamma$$

n'a que deux rebroussements, l'un entre les deux spires d'une même marche spirale partielle, l'autre entre deux marches partielles, le nombre des rebroussements étant toujours pair.

Enfin on peut obtenir une marche totale en spirale sans rebroussement, telle que la marche *dextrorsum*

$$\underset{14}{\mathrm{A}}\,\overset{5}{\alpha}\,\underset{22}{\mathrm{B}}\,\overset{17}{\beta}\,\underset{46}{\Delta}\,\overset{41}{\delta}\,\underset{62}{\Gamma}\,\overset{53}{\gamma},$$

dans la notation de laquelle la case d'entrée dans une marche est indiquée au-dessous et la case de sortie au-dessus de la lettre indicatrice de sa spire (¹). La marche *sinistrorsum* sur le même circuit se noterait

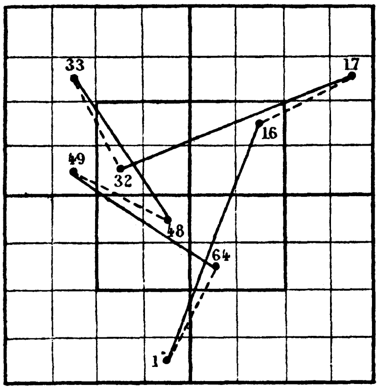
$$-\underset{53}{\gamma}\,\Gamma\,\delta\,\Delta\,\beta\,\mathrm{B}\,\alpha\,\mathrm{A} \quad \text{ou} \quad \underset{5}{\alpha}\,\mathrm{A}\,\gamma\,\Gamma\,\delta\,\Delta\,\beta\,\mathrm{B},$$

en en réduisant la notation aux indications indispensables; on comprend en effet que la case de départ doit être indiquée, puisque la portion extérieure et la portion intérieure de la marche partielle en voltes mère peuvent se souder dans l'un quelconque des quartiers de l'échiquier et de deux manières dans chacun, donnant ainsi naissance à huit marches spirales partielles, spires externe et interne de même sens, et à autant de marches spirales partielles à rebroussement ou spires interne et externe de sens inverses; quatre seulement de ces dernières sont rentrantes sur elles-mêmes.

(¹) Les numéros des cases se rapportent à ceux de la *fig.* 2 (types A, B, C, D), bases de tous les autres. Il en sera ainsi toutes les fois qu'il n'y aura pas mention contraire.

La *fig.* 10 donne le diagramme symbolique et le développement de la marche spirale à sens continu *dextrorsum* signalée la dernière.

Fig. 10.



5	26	51	34	7	28	53	36
50	33	6	27	52	35	8	17
25	4	45	62	29	16	37	54
44	49	32	15	46	63	18	9
3	24	61	48	13	30	55	38
60	43	14	31	64	47	10	19
23	2	41	58	21	12	39	56
42	59	22	1	40	57	20	11

Observation pratique. — Pour arriver très promptement et quasi sans travail à la composition des diverses marches fort nombreuses que l'on peut composer avec les éléments étudiés, il est bon de s'aider de quatre diagrammes représentant développées et séparément les quatre types primitifs en voltes, avec une ligne de démarcation entre le quartier central et le pourtour, ainsi que les médianes divisant l'échiquier en ses quatre quartiers, ou bien de les noter sur un même diagramme en coloriant de quatre teintes différentes les cases appartenant à chacune de ces marches, et dessinant par un filet les deux médianes et le carré central. Par ce procédé extrêmement simple et commode, les résultantes de marches ou de portions de marches sautent immédiatement aux yeux, et les tâtonnements qu'exige la composition des diagrammes symboliques se réduisent à presque rien, en même temps que les erreurs provenant d'une inadvertance seront presque absolument évitées. Ces mêmes diagrammes serviront pour composer les marches spirales, et les cases de l'échiquier pourront toujours être désignées par le numéro d'ordre de passage du cavalier dans la première marche régulière *dextrorsum* trouvée que portent les diagrammes de la *fig.* 2.

Remarque. — La marche spirale *dextrorsum* à sens continu donne lieu à quelques remarques intéressantes par comparaison avec la première marche spirale donnée, qui possédait un rebroussement entre chaque spire. Pour les marches de sens continu, les points de passage ont lieu dans la description *dextrorsum* de la spirale intérieure d'une marche partielle à la spirale extérieure de la marche suivante, et suivant une marche de trois cases en ligne droite, c'est-à-dire que la ligne de soudure est le prolongement en ligne droite du dernier saut dans la marche intérieure. C'est en réalité une inflexion double remplaçant deux changements de sens successifs dans la courbure de la spirale, existant dans la première en ses points de rebroussement. Les quatre inflexions sont, dans les quatre directions différentes, perpendiculaires deux à deux, que prennent les huit pas de cavalier, et leurs tangentes s'inclinent successivement dans le sens de la rotation.

Solution condensée en nébuleuse, ou carrousel du cavalier.

Une dernière solution, également fort curieuse, est celle où l'on cherche à remplir le plus possible de cases consécutives dans le carré central. On reconnaît immédiatement que ce nombre maximum sera de 12 en pénétrant dans le carré par un angle et en sortant par l'un des angles adjacents. Cette solution, décrite dans les quatre diagrammes ci-joints (*fig.* 11), emprunte aux marches spirales leurs éléments extérieurs. On remarquera que les deux marches qui contiennent les angles de l'échiquier, dérivées de A et Δ, se succèdent l'une à l'autre par l'intermédiaire d'une soudure formée de la volte carrée qui reste encore à décrire dans le carré central. A proprement parler, cette solution se compose de six marches partielles, soit, en commençant par le quatrième diagramme 54, 55, ... et continuant par les premier, deuxième et troisième diagrammes : deux marches circulaires extérieures simples de douze cases chacune, uniformément réparties entre les quartiers, se succédant par l'intermédiaire d'une nébuleuse centrale de douze cases également; enfin deux marches circulaires extérieures faussées chacune en deux des angles opposés de l'échiquier par un saillant, ces deux marches, de douze cases chacune, unies par la petite couronne intérieure de quatre marches.

Dans la marche notée, il y a changement de sens d'une marche à l'autre lorsque le cavalier traverse de dehors en dedans la limite entre le pourtour et le carré central. D'autres marches de composition analogue présenteront au contraire le changement de sens

Fig. 11.

		17				19	
16				18			
		3		7	10		20
	15	6	9	4			
			2	11	8	21	
14		12	5		1		
			24				22
	13				23	•	

			34				32
	35				33		
			•			31	
36					•		
		•					30
	25			•			
		27				29	
26				28			

45				47			
		46				48	
	44		38				
					39		49
43		37					
				40		50	
	42				52		
			41				51

	58				56		
			57				55
59							
						54	
	60						
					•		53
61				63			
		62				64	

dans la marche lorsque le cavalier franchira la limite de dedans en dehors.

Cette marche, qui offre une succession de figures d'une grâce particulière, pourrait être désignée sous le nom de *carrousel du cavalier* et rappelle très fidèlement la figure du carrousel qui est connue en équitation sous le nom de la *mêlée.*

La combinaison des éléments de cette marche, diversement groupés et orientés, peut fournir d'autres marches dessinant de même les diverses phases de la mêlée du carrousel, alors que les marches en voltes, les demi-échiquiers successifs et les spirales ne sont encore que différentes figures également décrites par les quadrilles d'écuyers.

On peut de la marche précédente, et en groupant ses éléments successifs, déduire la suivante (chiffres des derniers diagrammes),

$$1, \ldots, 12, \ \overline{61, \ldots, 62}, \ 25, \ldots, 52, \ \overline{21, \ldots, 22},$$

dans laquelle les polygones formant les quatre groupes interrompus sont décrits les deux impairs dans le sens du diagramme, les deux pairs en sens inverse.

Observations générales.

Étant donnée une marche, rentrante ou non sur l'échiquier, on en déduit de même nature :

1° Une symétrique par rapport à la médiane verticale ;

2° Une symétrique par rapport à la médiane horizontale ;

3° Une symétrique par rapport au centre, symétrique de chacune des précédentes par rapport à l'axe différent de celui qui lui a donné naissance.

Cette série de quatre se double encore par les séries qui leur sont symétriques par rapport aux diagonales, ce qui porte à huit le nombre des marches irrégulières se correspondant par symétrie.

Chaque marche peut, en outre, être parcourue dans les deux sens contraires, et l'on a définitivement un nombre de seize marches pour lesquelles les cases homologues sont parcourues dans le même ordre ou en ordre inverse.

Ces seize marches, si elles sont rentrantes, donnent lieu à $16.64 = 2^{10} = 1024$ marches différentes entre elles par l'orientation, le sens, ou la case de départ, qui est arbitraire sur l'échiquier, mais que l'on peut considérer comme appartenant à un type unique et ne formant en réalité qu'une solution distincte du problème.

Lorsqu'une marche possède une ou plusieurs symétries sur elle-même, le nombre des marches qui s'en déduit doit être divisé par autant de fois le facteur 2 qu'il existe de symétries.

Par exemple, dans les marches régulières étudiées, les types élémentaires sont tous symétriques d'eux-mêmes par rapport au centre ; les deux types en losange sont symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe horizontal ainsi qu'à l'axe vertical, et de même les deux types en carré. Les trois premières symétries ne donnent point de multiplication de marche, et la symétrie diagonale seule reste pour en doubler le nombre, car elle existe dans la marche même pour les marches losanges et d'une marche à l'autre pour les carrés. Les marches que l'on composera avec les types réguliers entiers par l'interversion d'ordre et de sens dans les marches se doubleront simplement par la symétrie diagonale et donneront lieu à quatre marches seulement, deux dans un sens et deux dans l'autre, soit deux cent cinquante-six en tout, avec les changements d'origine pour les marches rentrantes.

La symétrie par rapport au centre respecte le sens de la marche ; celle par rapport aux axes la change de signe, et par conséquent change également la couleur d'entrée dans les quartiers ; les lignes de soudure se changent également en leurs symétriques par rapport à l'axe de symétrie. Les quartiers sont également permutés entre symétriques par rapport audit axe, ce qui renverse l'ordre de visite.

Si pour rétablir le sens de description, indépendant du circuit sur lequel on l'exécute et arbitraire, on renverse la marche symétrique de la première, la nouvelle permutation entre les cases d'entrée et de sortie rétablit la couleur primitive de ces cases, mais laisse le passage s'effectuer sur les lignes de soudure symétriques des premières. Toutes ces modifications reviennent, suivant l'axe de symétrie choisi, à des permutations faciles à trouver entre les types en losange, et de même entre les types en carré, avec modifications dans les quartiers de début de certaines marches. A ce sujet on se souviendra, pour l'indication des marches obtenues par symétrie d'une marche connue, que les types A et A_1 ne diffèrent que par une rotation d'un quadrant, c'est-à-dire une permutation tournante dans les quartiers de voisin à voisin, et qu'il en est de même entre les types B et B_1, les types C et C_1 et les types D et D_1.

Par symétrie suivant les diagonales, les types en losange sont maintenus, les types en carré échangés ; la symétrie par rapport aux médianes permute au contraire à la fois les deux types en losange, ainsi que les deux types en carré.

Comme exemple, prenons la marche rentrante désignée par les voltes qu'elle emprunte à chaque marche partielle (types sans indices pour les numéros) :

$$\overset{24}{\underset{17}{B}}(I,II) - \overset{34}{\underset{47}{D}}(I,II) + \overset{52}{\underset{61}{C}}(I - II) + \overset{16}{\underset{9}{A}}(III,IV).$$

Formons sa symétrique par rapport à la diagonale gauche, commune aux quartiers impairs :

$$- \overset{60}{\underset{61}{C}}(I,IV) + \overset{44}{\underset{45}{D}}(I,IV) - \overset{32}{\underset{17}{B}}(I - IV) - \overset{6}{\underset{11}{A}}(III,II);$$

le sens de toutes les marches est renversé, les types losanges sont conservés, les types en carrés permutés; enfin les quartiers impairs traversés par la diagonale axe de symétrie conservée, et les quartiers pairs en dehors de la diagonale axe permutés.

Si nous retournons la marche pour lui rendre le sens primitif général, nous obtiendrons :

$$\overset{61}{\underset{60}{C}}(IV,I) + \overset{11}{\underset{6}{A}}(II,III) - \overset{17}{\underset{32}{B}}(IV - I) - \overset{45}{\underset{44}{D}}(IV,I).$$

Nous n'avons pas voulu distinguer dans ce qui précède les marches similaires avec ou sans indice, à cause des numéros d'entrée et de sortie, que nous tenions à indiquer pour faciliter la vérification au lecteur, et qui ne pouvaient, sous peine de compliquer et embrouiller les séries, être empruntés tantôt aux diagrammes de la *fig.* 2, tantôt à ceux de la *fig.* 5. L'écriture serait plus correcte en inscrivant pour la première des trois marches

$$(\text{de } 17)\, B(I,II) - D_1(I,II) + C(I - II) + A(III,IV)\,(\text{à } 16),$$

pour la seconde

$$(\text{de } 20) - C_1(I,IV) + D(I,IV) - B_1(I - IV) - A_1(III,II)\,(\text{à } 5),$$

où l'on reconnaît toutes les règles de transformation par symétrie : changements de sens, permutations de quartiers avec indice et sans indice, en raison du changement d'orientation des lignes de soudure; maintien des losanges, permutation des carrés, maintien des quartiers impairs et permutation des quartiers pairs. On aurait enfin pour la dernière

$$(\text{de } 29)\ C_1(\mathrm{IV}, \mathrm{I}) + A_1(\mathrm{II}, \mathrm{III}) - B_1(\mathrm{IV} - \mathrm{I}) - D(\mathrm{IV}, \mathrm{I})\ (\text{à } 45),$$

dans la notation de laquelle les fractions de marches sont indiquées telles qu'on les trouverait sur les diagrammes de l'une ou l'autre *fig.* 2 et 5, avec le numéro correspondant.

Nous terminerons ici ce travail encore fort imparfait, nous ne craignons pas de l'avouer, mais qui, même dans ces conditions, nous a paru présenter assez d'intérêt pour nous permettre de le porter à la connaissance des géomètres; car il n'en est pas moins, à notre connaissance, l'un des premiers pas d'exploration en des régions encore inconnues et qu'Euler n'avait pas dédaigné d'aborder. Mais, en terminant, nous donnerons, avec quelques observations qui lui viennent en aide, le principe rudimentaire énoncé par Vandermonde, principe qui s'impose et se présente de lui-même dans la pratique des tâtonnements au point que, sans le connaître et sans songer à le formuler, nous nous en étions dès le premier jour presque continuellement servi; il nous paraît néanmoins convenable de ne pas le passer sous silence.

Principe. — S'il existe (restriction oubliée par Vandermonde) un certain nombre (au moins une) de marches reliant par saut de cavalier toutes les cases de l'échiquier, on arrivera nécessairement à en obtenir une par le tâtonnement suivant :

Le cavalier partant d'une case origine quelconque, on lui fait parcourir par sauts (en la notant) une marche quelconque composée d'un certain nombre de cases et évitant de visiter deux fois la même, jusqu'au point d'arriver à une case dont il ne puisse plus sortir sans passer par une case déjà vue.

Cela fait, ou bien les soixante-quatre cases auront été parcourues, ou bien il restera des cases vides. Dans le premier cas, le problème est résolu, mais la marche n'est pas rentrante en général.

Dans le second cas, soient A la case d'arrivée et B l'une de celles déjà vues en communication avec elle. Si B est la case origine O, la marche partielle est rentrante et peut être coupée en un quelconque de ses points. On l'y coupera en un point convenable que l'on va déterminer, et l'on agira sur elle à partir de la nouvelle origine comme il va immédiatement être expliqué.

Dans le cas général, on suivra d'abord la marche primitive de O à B; puis, passant de B à A immédiatement, on décrira en sens inverse la portion de cette marche comprise entre A et la case C qui suivait immédiatement B. De la case C on pourra généralement trouver une case libre, et l'on poursuivra la marche O,..., B,..., A,..., C jusqu'à nouvel arrêt.

Si ce nouvel arrêt fait retomber sur une case X comprise dans la marche O,..., B et suivie de la case R dans la description de cette partie de la marche, on changera l'origine et la prendra en R, décrivant à partir de R (et dans le sens déjà adopté) le circuit précédent jusqu'à la case X, à partir de laquelle on reprend en sens inverse, de X à O, la portion de la marche que l'on avait laissée de côté au début. On revient ainsi à la première origine par une marche constituée de la manière suivante :

R, . . . , B, . . . , A, . . . , C, . . . , X, . . . , O.

Ces tâtonnements amèneront nécessairement soit à une marche comprenant toutes les cases de l'échiquier, soit à une marche rentrante sur elle-même, dernière observation négligée par Vandermonde, si, ce que nous ne pouvons vérifier, nos souvenirs ne nous trompent pas. Toutefois, si la marche est rentrante, laissant des vides sur l'échiquier, en coupant la marche en une case en communication avec l'une des cases étrangères, on peut y englober celle-ci et toutes celles également étrangères qui formeraient avec celle-ci une marche continue, rentrante on non. La marche totale résultante pourra n'être point rentrante; mais on décomposera sans la moindre difficulté l'échiquier en un certain nombre de marches rentrantes que l'on soudera ensuite deux à deux et qui serviront de base au travail définitif.

Remarque. — Lorsque l'on procède par tâtonnements à la formation d'une marche, il est commode de considérer en même temps une ou plusieurs des marches symétriques, soit au centre, soit par diagonales, soit par médianes, en évitant de les faire empiéter les unes sur les autres; on soudera ensuite entre eux les divers éléments obtenus. Cette simple remarque a été la base de nos recherches et, avec l'application quasi inconsciente du principe de Vandermonde, nous a permis de trouver avec très peu de travail les marches types, dont nous avons par la suite donné l'explication raisonnée, à la fois rationnelle et analytique, qui constitue le corps du présent essai.