BULLETIN DE LA S. M. F.

J. BOURGAIN

Propriétés de décomposition pour les ensembles de Sidon

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 421-428
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__421_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 421-428.

PROPRIÉTÉS DE DÉCOMPOSITION POUR LES ENSEMBLES DE SIDON

PAR

J. BOURGAIN(*)

RÉSUMÉ. — On démontre que l'étude des ensembles de Sidon dans les groupes $\prod_j \mathbb{Z}(n_j)$, où (n_j) est une suite bornée d'entiers, se ramène aux groupes $\prod \mathbb{Z}(p^r)$, où p^r est une puissance du nombre premier p. Dans le cas particulier où les n_j sont produit de nombres premiers distincts, tout ensemble de Sidon est réunion finie d'ensembles indépendants. On montre que dans le cas général, k étant un entier fixé, un ensemble de Sidon Λ se décompose en $K(\Lambda, k)$ parties n'admettant pas de relations non-triviales de longueur k. En particulier, tout ensemble de Sidon (aussi non-dénombrable) est réunion finie d'ensembles qui tendent vers l'infini.

SUMMARY. — It is shown that the study of the Sidon sets in groupes of the form $\prod_j \mathbb{Z}(n_j)$, where (n_j) is a bounded sequence of integers, reduces to the groups $\prod \mathbb{Z}(p^r)$, where p^r is a power of a prime p. In case the numbers n_j are simple products of distinct primes, each Sidon set is a finite union of independent sets. In general, if k is a fixed integer, any Sidon set Λ decomposes in $K(\Lambda, k)$ subsets admitting no non-trivial relation of lenght k. In particular, cach Sidon set (also uncountable Sidon sets) are finite unions of sets tending to infinity.

1. Introduction

Dans cette note, G sera un groupe Abélien compact. Une partie Λ du groupe dual $\hat{G}$ est appelée un ensemble de Sidon si pour une constante C et pour toute suite finie $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ de scalaires, on a

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} |\alpha_\gamma| \leqslant C \,\|\sum_{\gamma\in\Lambda} \alpha_\gamma \gamma\|_{C(G)}$$

On notera $S(\Lambda)$ la plus petite constante C ayant cette propriété. Les ensembles de Sidon peuvent être caractérisés par des conditions probabilistes ou

(*) Texte reçu le 12 avril 1983, révisé le 29 septembre 1983.

J. BOURGAIN, Département de Mathématique, Vrije Universiteit Brussel, Pleinlaan 2, F7, 1050 Bruxelles (Belgique).

0249-633X/83/04 421 08 \$ 2.80 © Gauthier-Villars.

arithmétiques. Les caractérisations probabilistes (voir [6], [7]) reposent sur le résultat suivant de Rider.

1.1. PROPOSITION. — *Soit* $(\varepsilon_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ *une suite de variables de Bernoulli et supposons qu'il existe une constante C telle que pour toute suite finie* $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ *de scalaires, on a*

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} |\alpha_\gamma| \leqslant C\mathbb{E}\ \|\sum_\Lambda \varepsilon_\gamma \alpha_\gamma \gamma\|_{C(G)}$$

Alors Σ *est un ensemble de Sidon et* $S(\Lambda) \leqslant K(C)$, *où* $K(C)$ *ne dépend que de* C.

Rappelons que $\Lambda \subset \hat{G}$ est quasi-indépendant si la seule relation de la forme $\sum_{\gamma\in A} \xi_\gamma \gamma = 0$ où A est une partie finie de Λ et où $\xi_\gamma \in \{-1, 0, 1\}$ est la relation triviale $\xi_\gamma = 0$ pour tout $\gamma \neq 0$. Le problème de savoir si tout ensemble de Sidon est une réunion finie d'ensembles quasi-indépendants est ouvert. Énonçons deux résultats dans cette direction.

1.2. PROPOSITION (voir [4]). — *Les ensembles de Sidon dans les groupes* $G = \prod \mathbb{Z}(p)$, *où* p *est un nombre premier, sont réunion finie d'ensembles (vectoriellement) indépendants.*

1.3. PROPOSITION (voir [7]). — *Une condition nécessaire et suffisante pour que* $\Lambda \subset \hat{G}$ *soit Sidon est que toute partie finie* A *de* Λ *contienne une partie* $B \subset A$, *telle que* B *est quasi-indépendant et* $|B| > \delta\,|A|$, *où* δ 0 *est une constante.*

La proposition 1.2 est une conséquence du lemme combinatoire de Rado-Horn ([2], p. 73).

La proposition 1.3 caractérise les ensembles de Sidon (en général) par une condition arithmétique.

Nous présenterons dans la section suivante un principe de décomposition pour les ensembles de Sidon qui mène en particulier à l'extension de la proposition 1.2 dans le cas où p est un produit simple de nombres premiers. Dans la deuxième section, on montrera que sous certaines conditions (vérifiées par les Sidon) une partie $\Lambda \subset \hat{G}$ admet une décomposition en ensembles n'admettant pas de relations non-triviales de longueur fixée. Ceci répond à la question (6) et partiellement à la question (4) dans [3] p. 171.

2. Une propriété de décomposition pour les ensembles de Sidon

Nous démontrerons le résultat suivant.

2.1. PROPOSITION. — *Soit* $\Lambda \subset \hat{G}$ *un ensemble de Sidon et considérons pour tout* $\gamma \in \Lambda$ *une décomposition* $\gamma = \gamma' + \gamma''$ $(\gamma' \in \hat{G}, \gamma'' \in \hat{G})$. *Alors* $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$ *tel* *que* Λ' (*resp.* Λ'') *sont réunion finie d'ensembles* Λ'_α (*resp.* Λ''_α) *où pour chaque* α *les caractères* $(\gamma')_{\gamma\in\Lambda'_\alpha}$ (*resp.* $(\gamma'')_{\gamma\in\Lambda''_\alpha}$) *sont distincts et forment un ensemble de Sidon.*

On utilisera un corollaire du lemme de Slépian sur les processus Gaussiens (*voir* [1], p. 1-96) *et de* [5] (chap. III, lemme 1.1).

2.2. PROPOSITION. — *Soient* $(\gamma_i)_{i\in I}$, $(\gamma_j)_{j\in J}$ *des suites finies dans* $\hat{G}$ (*admettant la répétition*) *et* $(\alpha_i)_{i\in I}$, $(\beta_j)_{j\in J}$ *des scalaires. Supposons l'inégalité suivante satisfaite pour tous* $s\in G$, $t\in G$:

$$\left(\sum_I |\alpha_i|^2\, |\gamma_i(s)-\gamma_i(t)|^2\right)^{1/2} \leqslant C\left(\sum_J |\beta_j|^2\, |\gamma_j(s)-\gamma_j(t)|^2\right)^{1/2}$$

Alors

$$\mathbb{E}\, \Big\| \sum_I \varepsilon_i\alpha_i\gamma_i \Big\|_{C(G)} \leqslant C_1 C \quad \mathbb{E}\, \Big\| \sum_J \varepsilon_j\beta_j\gamma_j \Big\|_{C(G)}$$

où C_1 *est une constante numérique.*

Démonstration de 2.1. — On montrera l'existence d'une décomposition $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$ telle que pour tous scalaires $(\alpha_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ on ait

$$\sum_{\gamma\in\Lambda'} |\alpha_\gamma| \leqslant C_\Lambda \mathbb{E}\Big\|\sum_{\gamma\in\Lambda'} \varepsilon_\gamma\alpha_\gamma\gamma'\Big\|_{C(G)} \quad \text{et} \quad \sum_{\gamma\in\Lambda''} |\alpha_\gamma| \leqslant C_\Lambda \mathbb{E}\Big\|\sum_{\gamma\in\Lambda''} \varepsilon_\gamma\alpha_\gamma\gamma''\Big\|_{C(G)}$$

On voit en effet que chaque élément γ' (resp. γ'') ne s'obtient que pour un nombre borné d'éléments γ de Λ' (resp. Λ''). Cette remarque et la proposition 1.1 mènent donc à la décomposition voulue de Λ' et Λ''.

Soit $(a_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ une suite de scalaires fixés. Puisque clairement, pour $\gamma\in\Lambda$ et $s, t\in G$

$$|\gamma(s)-\gamma(t)| \leqslant |\gamma'(s)-\gamma'(t)| + |\gamma''(s)-\gamma''(t)|$$

on trouve

$$\left(\Sigma |a_\gamma|^2\, |\gamma(s)-\gamma(t)|^2\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{2}\left(\Sigma |a_\gamma|^2\, |\gamma'(s)-\gamma'(t)|^2 + \Sigma |a_\gamma|^2\, |\gamma''(s)-\gamma''(t)|^2\right)^{1/2}$$

En usant de la proposition 2.2, on déduit

$$S(\Lambda)^{-1}\Sigma |a_\gamma| \leqslant \mathbb{E}\, \|\Sigma\varepsilon_\gamma a_\gamma\gamma\|_{C(G)} \leqslant C_1\sqrt{2}\, \mathbb{E}\|\Sigma\varepsilon'_\gamma a_\gamma\gamma' + \Sigma\varepsilon''_\gamma a_\gamma\gamma''\|_{C(G)}$$

où $(\varepsilon'_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ et $(\varepsilon''_\gamma)_{\gamma\in\Lambda}$ sont des systèmes indépendants de variables de Bernoulli, définies sur un espace D.

Appliquons le théorème de Hahn-Banach afin d'obtenir un élément ξ de l'espace $L^{\infty}_{M(G)}(D)$ t.q. $\|\xi\| = 1$ et pour tout $\gamma \in \Lambda$

$$\langle \xi, \varepsilon'_{\gamma} \otimes \gamma' \rangle + \langle \xi, \varepsilon''_{\gamma} \otimes \gamma'' \rangle = (\sqrt{2}\, C_1 S(\Lambda))^{-1}$$

En posant $\delta_{\Lambda}^{-1} = 2\sqrt{2}\, C_1 S(\Lambda)$, on trouve bien $\Lambda = \Lambda' \cup \Lambda''$ t.q.

$$|\langle \xi, \varepsilon'_{\gamma} \otimes \gamma' \rangle| \geqslant \delta_{\Lambda} \quad \text{et} \quad |\langle \xi, \varepsilon''_{\gamma} \otimes \gamma \rangle| \geqslant \delta_{\Lambda} \text{ pour } \gamma \in \Lambda''.$$

Posant $C_{\Lambda} = 2\,\delta_{\Lambda}^{-1}$, on obtient la décomposition annoncée.

La proposition 2.1 a le corollaire suivant (*cf.* [2], p. 50, question 3.3 et [8] p. 26).

2.3 PROPOSITION. — *Soit $\Lambda \subset (G_1 \times G_2)\hat{}$ un ensemble de Sidon. Alors Λ est réunion finie d'ensembles Λ_{α} t.q. pour tout α et pour $i = 1$ ou $i = 2$, $\pi_i|_{\Lambda_{\alpha}}$ est injective et $\pi_i(\Lambda_{\alpha})$ est Sidon dans $\hat{G}_i$(π_i étant la projection naturelle de $(G_1 \times G_2)\hat{}$ sur $\hat{G}_i$).*

Il est bien connu que si G est un groupe Abélien dont les éléments sont d'ordre borné, G s'obtient comme produit direct fini de ces p-groupes $G(p)$, chaque $G(p)$ étant produit direct fini de groupes de la forme $\Pi\, \mathbb{Z}(p^r)$. Dans ce cas aussi, la structure des ensembles de Sidon de $\hat{G}$ n'est pas comprise.

La proposition 2.3 permet clairement de ramener le problème de décomposition en parties quasi-indépendantes aux groupes $G(p)$, donc aux groupes $\Pi\, \mathbb{Z}(p^r)$ pour une puissance fixée du nombre premier p. En usant de la proposition 1.2 on obtient une réponse partielle.

2.4. PROPOSITION. — *Soit n un produit de nombres premiers distincts. Alors tout Sidon dans $\hat{G}$, $G = \Pi\, \mathbb{Z}(n)$ est réunion finie d'ensembles quasi-indépendants.*

Remarque. — Il est possible d'adapter l'argument de Radon-Horn ([2]), p. 73) afin de démontrer directement qu'une condition (R_{α}) (comme défini dans [2], p. 73) implique la conclusion de la proposition 2.4. En fait, ce résultat était déjà connu de N. Varopoulos (*cf.* [8]).

3. Décomposition de certains ensembles en parties sans relations de longueur fixée

Pour $A \subset \hat{G} = \Gamma$, posons pour tout entier $l = 1, 2, \ldots$

$$S_l(A) = \{\textstyle\sum_{\gamma \in A} \xi_{\gamma}\gamma;\ \xi_{\gamma} = -1, 0, 1 \text{ et } \sum_A |\xi_{\gamma}| \leqslant l\}$$

et

$$R_l(O, A) = |\{(\xi_\gamma)_{\gamma \in A} \in \{-1,, 0, 1\}^A; \quad \sum_A |\xi_\gamma| \leqslant l \text{ et } \sum_A \xi_\gamma \gamma = 0\}$$

Nous supposerons pour commodité que $0 \notin A$. Convenons d'appeler A l-indépendant si $R_l(O, A) = 1$ (c'est-à-dire la seule relation $-1, 0, 1$ de longueur l est la relation triviale).

Nous allons démontrer la propriété suivante

3.1. PROPOSITION. — *Il existe une fonction $\Phi(l, C)$ t.q. si $\Lambda \subset \Gamma$ satisfait*

$$|S_l(A) \cap \Lambda| \leqslant C|A|$$

pour toute partie finie A de Γ, alors Λ est réunion de $\Phi(l, C)$ parties $(1 + l)$-quasi-indépendantes.

Ce résultat s'appliquant aux ensembles de Sidon (voir [3], p. 73), on obtient

3.2. PROPOSITION. — *Tout ensemble de Sidon est réunion finie d'ensembles l-quasi-indépendants, pour tout entier l.*

Afin de démontrer proposition 3.1, on usera de quelques propriétés combinatoires simples.

Soit $P_l[A]$ l'ensemble des parties de A de cardinal l.

3.3. LEMME. — *Soient I, A des ensembles finis et l un entier positif. Soit $(B_i)_{i \in I}$ un système de parties de $P_l[A]$, t.q. pour tout $i \in I$:*

$$|B_i| = K \text{ et } \pi \cap \pi' = \phi \quad \text{pour} \quad \pi \neq \pi' \text{ dans } B_i$$

Pour $0 < \delta < \frac{1}{8}$ fixé, il existe $I' \subset I$, $A' \subset A$ t.q.

(i) $|I'| > \frac{1}{2}|I|$

(ii) $|A'| < \delta |A|$

(iii) $|\{\pi \in B_i; \pi \subset A'\}| > [\delta^{2l} K]$ pour tout $i \in I'$.

Démonstration. — Soit $Q = [\delta |A|]$ et fixons $i \in I$. Pour $A' \in P_Q[A]$, posons

$$\varphi(A') = \sum_{\pi \in B_i} \Pi_{x \in \pi} \chi_{A'}(x)$$

où χ dénote la fonction indicatrice. Si on munit $\Omega=P_Q[A]$ de la mesure de comptage, on a

$$\int_\Omega \Pi_{x\in\pi}\, \chi_{A'}(x) = \frac{\binom{|A|-l}{Q-l}}{\binom{|A|}{Q}} \sim \delta^l$$

d'où

$$\int_\Omega \varphi \sim K\,\delta^l$$

et de même, puisque les membres de B_i sont mutuellement disjoints

$$\int_\Omega \varphi^2 \sim K\,\delta^l + K(K-1)\,\delta^{2l}$$

Si $K\,\delta^{2l} \geqslant 1$, on voit que $\mathbb{P}_\Omega[\varphi > K\,\delta^{2l}] > \frac{1}{2}$, c'est-à-dire que la condition (iii) est vérifiée avec une probabilité $> \frac{1}{2}$. Le lemme en résulte immédiatement.

Démontrons maintenant la propriété suivante

3.4. Lemme. — *Supposons $\Lambda \subset \Gamma$ vérifiant l'hypothèse de la proposition 3.1. Fixons une partie finie Γ_0 de Γ et posons (l et K étant des entiers fixés)*

$$\Lambda_0 = \{\gamma\in\Lambda;\ \gamma\in S_l(A) \textit{ pour au moins } K \textit{ parties disjointes } A \textit{ de } \Gamma_0\}$$

Alors

$$|\Lambda_0| \leqslant 2C\,K^{-1/2l}\,|\Gamma_0|.$$

Démonstration. — Appliquons le lemme 3.3 où $I=\Lambda_0$, $A=\Gamma_0$ et où pour $\gamma\in\Lambda_0$

$$B_\Lambda = \{\pi\in P_l[\Gamma_0]\quad;\quad \gamma\in S_l(\pi)\}$$

(qui contient au moins K éléments disjointement supportés).
Posons $\delta = K^{-1/2l}$. On obtient donc $\Lambda_0' \subset \Lambda_0$ et $\Gamma_0' \subset \Gamma_0$ t.q.

(i) $|\Lambda_0'| > \frac{1}{2}|\Lambda_0|$

(ii) $|\Gamma'_0| < \delta|\Gamma_0|$

(iii) $\Lambda'_0 \subset S_l(\Gamma'_0)$.

D'où par hypothèse

$$\frac{1}{2}|\Lambda_0| \leqslant |\Lambda \cap S_l(\Gamma'_0)| \leqslant C|\Gamma'_0| \leqslant CK^{-1/2l}|\Gamma_0|$$

ce qui est le résultat annoncé.

Démonstration de la proposition 3.1. — Il est clair qu'on peut supposer Λ fini. On peut donc considérer une partie minimale Λ_0 de Λ n'admettant pas de décomposition en $\Phi(l, C)$ parties l-quasi-indépendantes, si on suppose Λ non-décomposable. Par hypothèse, pour tout $\gamma \in \Lambda_0$, il existe une décomposition de $\Lambda_0 \setminus \{\gamma\}$ en $K = \Phi(l, C)$ parties disjointes $(1 + l)$-quasi-indépendantes $A_{\gamma,1}, \ldots, A_{\gamma,K}$ et pour tout $k = 1, \ldots, K$ on a $\gamma \in S_\ell(A_{\gamma,k})$. D'où :

$$\Lambda_0 \subset \{\gamma \in \Sigma;\ \gamma \in S_l(A) \text{ pour au moins } K \text{ parties disjointes de } \Lambda_0\}$$

Puisque le lemme 3.4 donne l'estimation

$$|\Lambda_0| \leqslant 2CK^{-1/2l}|\Lambda_0|$$

il suffira de choisir

$$\Phi(l, C) > (2C)^{2l}$$

afin d'obtenir la conclusion de la proposition 3.1.

Une partie $\Lambda \subset \Gamma$ tend vers l'infini si pour toute partie finie E de Γ il existe une partie finie F de Λ telle que $\gamma'\gamma^{-1} \notin E$ pour tout $\gamma \neq \gamma'$ dans $\Lambda \setminus F$. En usant de la remarque p. 112 (*c*) [3] on déduit de la proposition 3.2 pour $l = 4$ (ce qui répond à la question (6) p. 171 de [3]); le corollaire suivant :

3.5 COROLLAIRE. — *Chaque ensemble de Sidon est la réunion finie d'ensembles tendant vers l'infini.*

RÉFÉRENCES

[1] FERNIQUE (X.). — *Régularité des trajectoires des processus gaussiens*, École d'Été de St.-Flour, Springer LNM 480.

[2] LINDAHL (L. A.), POULSEN (F.). — *Thin sets in harmonic analysis*, *Lect. Notes in Pure and Applied Math.*, M. Dekker Inc., New York, 1971.

[3] LOPEZ (J. M.), ROSS (K. A.). — *Sidon sets, Lect. Notes in Pure and Applied Math.*, M. Dekker Inc., New York, 1975.

[4] MALLIAVIN-BRAMERET (M. P.), MALLIAVIN (P.). — *Caractérisation arithmétique des ensembles de Helson*, C.R.A.Sc. Paris, Série A, 264 (1967), 192-193.

[5] MARCUS (M. B.), PISIER (G.). — *Random Fourier series with applications to harmonic analysis*, Annals of Math. Studies n° 101, Princeton University Press (1981).

[6] PISIER (G.). — *De nouvelles caractérisations des ensembles de Sidon*, Advances in Maths, Supplementary studies, Mathematical Analysis and Applications (Part B), vol. 7, 1981.

[7] PISIER (G.). — *Conditions d'entropie et caractérisations arithmétiques des ensembles de Sidon, preprint.*

[8] VAROPOULOS (N. Th.). — *Some combinatorial problems in Harmonic Analysis, Summer School in Harmonic Analysis*, University of Warwick, 1968.