BULLETIN DE LA S. M. F.

ABDEL-ILAH BENABDALLAH

Générateurs de l'algèbre $\mathcal{U}(G)^K$ avec $G = SO(m)$ ou $SO_0(1, m-1)$ et $K = SO(m-1)$

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 303-326

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__303_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 303-326.

GÉNÉRATEURS DE L'ALGÈBRE $\mathcal{U}(G)^K$ AVEC $G = SO(m)$ OU $SO_0(1, m-1)$ ET $K = SO(m-1)$

PAR

ABDEL-ILAH BENABDALLAH

RÉSUMÉ. — Soient $G = SO(m)$ ou $SO_0(1, m-1)$, $K = SO(m-1)$ et $\mathcal{U}(G)^K$ l'algèbre réelle des opérateurs différentiels sur G invariants par les translations à gauche de G et les translations à droite de K. On démontre, en exhibant dans l'algèbre symétrique un système explicite de générateurs, que $\mathcal{U}(G)^K$ est engendrée par les centres de $\mathcal{U}(G)$ et de $\mathcal{U}(K)$.

ABSTRACT. — Let $G = SO(m)$ or $SO_0(1, m-1)$, $K = SO(m-1)$ and let $\mathcal{U}(G)^K$ be the real algebra of differential operators on G, left invariant by G and right invariant by K. We show that $\mathcal{U}(G)^K$ is generated by the centers of $\mathcal{U}(G)$ and $\mathcal{U}(K)$.

Introduction

Soient G un groupe de Lie connexe, K un sous-groupe compact de G, π une représentation irréductible de K d'espace V, E le fibré homogène associé à la représentation π, $\Gamma(E)$ l'espace des sections C^∞ de ce fibré, $C^\infty(G, V)^\pi$ l'espace des applications C^∞ de G dans V vérifiant : $f(gk) = \pi(k^{-1})f(g)$, $(g \in G,\ k \in K)$, et enfin $\mathcal{D}_\pi$ l'algèbre complexe des opérateurs différentiels sur E invariants par l'action naturelle de G sur $\Gamma(E)$. Rappelons que $\Gamma(E)$ est en correspondance bijective avec l'espace $C^\infty(G, V)^\pi$. Cette correspondance sera notée $\sim$ dans la suite.

Soient aussi $\mathcal{U}(G)$ (resp. $\mathcal{U}(K)$) l'algèbre réelle des opérateurs différentiels sur G (resp. sur K) invariants par les translations à gauche de G, (resp. de K) et $\mathcal{U}(G)^K$ la sous-algèbre de $\mathcal{U}(G)$ formée des éléments de $\mathcal{U}(G)$ qui sont

---

(*) Texte reçu le 7 juin 1982, révisé le 10 mai 1983.

A. I. BENABDALLAH, Université Claude Bernard, Département de Mathématiques, 43, boulevard du 11 novembre 1918, 69621 Villeurbanne Cedex

0249-633X/83/04 303 26 \$ 4.60 © Gauthier-Villars.

invariants par les translations à droite de K. On note $\mathcal{U}(G)\otimes\mathbb{C}$ (resp. $\mathcal{U}(K)\otimes\mathbb{C}$) la complexifiée de l'algèbre $\mathcal{U}(G)$ (resp. $\mathcal{U}(K)$), $(\mathcal{U}(G)\otimes\mathbb{C})^K$ le commutant de $\mathcal{U}(K)\otimes\mathbb{C}$ dans $\mathcal{U}(G)\otimes\mathbb{C}$ et enfin $d\pi$ la représentation infinitésimale de π, J le noyau de $d\pi$ dans $\mathcal{U}(K)\otimes\mathbb{C}$ et $J^* = S^*(J)$ où S^* est l'anti-automorphisme principal de $\mathcal{U}(K)\otimes\mathbb{C}$.

Minemura ([3]) a démontré le résultat suivant : pour $D\in(\mathcal{U}(G)\otimes\mathbb{C})^K$, soit $\mu(D)$ l'élément de $\mathcal{D}_\pi$ défini par

$$\widetilde{\mu(D)u} = D\tilde{u} \quad (u\in\Gamma(E)).$$

Alors $\operatorname{Ker}\mu = (\mathcal{U}(G)\otimes\mathbb{C})^K \cap (\mathcal{U}(G)\otimes\mathbb{C})J^*$ et l'application μ_K définie à partir de μ par passage au quotient est un isomorphisme d'algèbres. Ce résultat nous montre que l'étude de $\mathcal{D}_\pi$ se ramène à celle de $(\mathcal{U}(G)\otimes\mathbb{C})^K$. Nous nous proposons dans ce travail de calculer explicitement les générateurs de l'algèbre réelle $\mathcal{U}(G)^K$ dans le cas où G est le groupe $SO(m)$ ou $SO_0(1, m-1)$ et K le sous-groupe $SO(m-1)$, $(m \geqslant 3)$. Ces générateurs sont des générateurs de l'algèbre complexe $(\mathcal{U}(G)\otimes\mathbb{C})^K$. Nous démontrons qu'il y a $(m-1)$ générateurs, constitués par les générateurs du centre de $\mathcal{U}(G)$ et du centre de $\mathcal{U}(K)$. En particulier nous en déduisons que l'algèbre $\mathcal{U}(G)^K$ est commutative.

I. Notations et rappels

(1.1). — Soient $e_0, \ldots, e_{m-1}$ la base canonique de $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^{m-1}$ le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ ayant pour base $e_1, \ldots, e_{m-1}$, $G = SO(m)$ le groupe des transformations orthogonales de $\mathbb{R}^m$ de déterminant 1 et $K = SO(m-1)$ le stabilisateur de e_0 pour l'action naturelle de $SO(m)$ sur $\mathbb{R}^m$. L'algèbre de Lie $\underline{SO(m)}$ de $SO(m)$ (resp. $\underline{SO(m-1)}$ de $SO(m-1)$) qui est constituée par les matrices antisymétriques, munie de la forme bilinéaire symétrique positive non dégénérée

$$B(X, Y) = -\frac{1}{2}\operatorname{tr}(X, Y), \quad (X, Y\in\underline{SO(m)}),$$

s'identifie canoniquement à l'espace euclidien $\Lambda^2\mathbb{R}^m$ (resp. à $\Lambda^2\mathbb{R}^{m-1}$) et on a la décomposition directe orthogonale

$$\Lambda^2\mathbb{R}^m = e_0\wedge\mathbb{R}^{m-1}\oplus\Lambda^2\mathbb{R}^{m-1}.$$

Moyennant ces identifications, tout élément X de $\underline{SO(m)}$ s'écrit

$$X = e_0 \wedge X_1 + X_2 \quad (X_1 \in \mathbb{R}^{m-1},\ X_2 \in \wedge^2 \mathbb{R}^{m-1}),$$

de plus pour $k \in SO(m-1)$, on a

$$Ad(k)X = e_0 \wedge k(X_1) + \wedge^2 k(X_2).$$

Identifions l'espace vectoriel $\underline{G} = \underline{SO(m)}$ et son dual algébrique par la forme B. Soit $S(G)^K$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur $\underline{G}$, invariantes par la représentation adjointe de K. On sait que les espaces vectoriels $S(G)^K$ et $\mathcal{U}(G)^K$ sont isomorphes par l'application symétrisation λ qui vérifie :

$$\lambda(P_1 P_2) = \lambda(P_1)\lambda(P_2) + \lambda(Q), \quad (P_1, P_2 \in S(G)^K),$$

avec $Q \in S(G)^K$ et $d^\circ Q < d^\circ P_1 + d^\circ P_2$.

Il est facile de voir que si $S(G)^K$ admet r générateurs $P_1, \ldots, P_r$, alors $\mathcal{U}(G)^K$ admet $\lambda(P_1), \ldots, \lambda(P_r)$ comme générateurs. Donc l'étude des générateurs de $\mathcal{U}(G)^K$ se ramène à celle de $S(G)^K$.

(1.2). — *Générateurs du centre $\mathcal{U}(SO(m))$.*

Pour $m = 2n$, on pose

$$\begin{aligned} P_\lambda(\mathrm{X}) &= \det(X - \lambda\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n}}) \quad (X \in \underline{SO(2n)}) \\ &= \lambda^{2n} + a_2(X)\lambda^{2n-2} + \ldots + a_{2p}(X)\lambda^{2n-2p} + \ldots + \det(X), \\ \bar{I}_{2p}(X) &= \|X \wedge \ldots \wedge X\|^2 = \|X^{p\wedge}\|^2, \quad (1 \leqslant p \leqslant n-1), \\ \bar{I}_{2n}(X) &= (X^{n\wedge})^* \quad (^* \text{ étant l'isomorphisme de } \wedge^{2n}\mathbb{R}^{2n} \text{ avec } \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Les fonctions polynomiales a_{2p} et $\bar{I}_{2p}$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ sont invariantes par la représentation adjointe de $SO(2n)$. Un calcul direct montre que pour t appartenant à l'algèbre de Lie du tore maximal de $SO(2n)$,

$$\begin{aligned} \bar{I}_{2p}(t) &= (p!)^2 a_{2p}(t), \quad (1 \leqslant p \leqslant n-1), \\ \bar{I}_{2n}^2(t) &= (n!)^2 \det(t). \end{aligned}$$

Donc, pour tout $X \in \underline{SO(2n)}$, on a

$$\begin{aligned} \bar{I}_{2p}(X) &= (p!)^2 a_{2p}(X), \quad (1 \leqslant p \leqslant n-1), \\ \bar{I}_{2n}^2(X) &= (n!)^2 \det(X). \end{aligned}$$

De même, pour $m = 2n + 1$, on pose

$$\begin{aligned} P_\lambda(X) &= \det(X - \lambda\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^{2n+1}}) \quad (X \in \underline{SO(2n+1)}) \\ &= -[\lambda^{2n+1} + b_2(X)\lambda^{2n-1} \\ &\quad + \ldots + b_{2p}(X)\lambda^{2n-2p+1} + \ldots + b_{2n}(X)\lambda], \\ \bar{J}_{2p}(X) &= \|X^{p\wedge}\|^2, \quad (1 \leqslant p \leqslant n). \end{aligned}$$

Comme précédemment, on a, pour *tout* $X \in \underline{SO(2n+1)}$,

$$\bar{J}_{2p}(X) = (p!)^2 b_{2p}(X).$$

Les fonctions polynomiales $(\bar{I}_{2p})_{1 \leqslant p \leqslant n}$ (resp. $(\bar{J}_{2p})_{1 \leqslant p \leqslant n}$) constituent donc les générateurs de $S(G)^G$, avec $G = SO(2n)$ (resp. $G = SO(2n+1)$) (*cf.* par exemple [4] page 302).

II. Générateurs de $\mathscr{U}(SO(m))^{SO(m-1)}$

Dans toute la suite, on identifie, sauf mention du contraire, l'algèbre de Lie de $SO(m)$ à $\Lambda^2\mathbb{R}^m$ et l'algèbre de Lie de $SO(m-1)$ à $\Lambda^2\mathbb{R}^{m-1}$.

(2.1). — Soit $X \in \underline{SO(m)}$. On a, d'après (1.1),

$$X = e_0 \wedge X_1 + X_2 \quad (X_1 \in \mathbb{R}^{m-1}, X_2 \in \Lambda^2\mathbb{R}^{m-1}).$$

Pour $m = 2n$, posons

$$\begin{aligned} I_{2p}(X) &= \|X_2^{p\wedge}\|^2, & 1 &\leqslant p \leqslant n-1, \\ I_{2p+1}(X) &= \|X_1 \wedge X_2^{p\wedge}\|^2, & 0 &\leqslant p < n-1, \\ I_{2n-1}(X) &= (X_1 \wedge X_2^{(n-1)\wedge})^*; \end{aligned}$$

et pour $m = 2n + 1$,

$$\begin{aligned} J_{2p}(X) &= \|X_2^{p\wedge}\|^2, & 1 &\leqslant p \leqslant n-1, \\ J_{2n}(X) &= (X_2^{n\wedge})^*, \\ J_{2p+1}(X) &= \|X_1 \wedge X_2^{p\wedge}\|^2, & 0 &\leqslant p \leqslant n-1. \end{aligned}$$

(2.2). PROPOSITION. — *Les fonctions polynomiales* $F_1, \ldots, F_{m-1}$ *définies sur* $\underline{SO(m)}$ *par*

$$F_i(X) = I_i(X) \quad (1 \leqslant i \leqslant m-1, X \in \underline{SO(m)}), \quad \textit{si} \quad m = 2n,$$

$$F_i(X) = J_i(X) \quad (1 \leqslant i \leqslant m-1,\ X \in \underline{SO(m)}), \quad si \quad m = 2n+1,$$

sont algébriquement indépendantes.

Preuve. — Il faut montrer que si $P(\xi_1, \ldots, \xi_{m-1})$ est un polynôme vérifiant

$$P(F_1(X), \ldots, F_{m-1}(X)) = 0, \quad \text{pour tout} \quad X \in \underline{SO(m)},$$

alors P est identiquement nul. Nous démontrons cette propriété par une double récurrence portant sur le degré de P et la « dimension » m.

Pour $d^\circ P = 1$, la proposition est triviale quel que soit m. Pour $m = 3$ et $m = 4$, la proposition est bien connue (*cf.* [5] p. 35 dans le cas $m = 4$). Supposons-la donc vraie pour tout polynôme P, quand la « dimension » est inférieure ou égale à $m - 1$ et pour les polynômes P de degré inférieur ou égal à r, quand la « dimension » est égale à m et démontrons la proposition pour les polynômes de degré $r + 1$, quand la « dimension » est égale à m. Il y a deux cas à considérer suivant la parité de m.

1^er^ cas : $m = 2n$

Il faut montrer que, si $P(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1})$ est un polynôme de degré $r + 1$ vérifiant

$$P(I_1(X), \ldots, I_{2n-1}(X)) = 0, \quad \text{pour tout} \quad X \in \underline{SO(2n)},$$

P est identiquement nul.

Pour $Z \in \underline{SO(2n)}$

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & \cdots\cdots\cdots & x_{2n-1} \\ -x_1 & 0 & x_{12} \cdots\cdots & x_{1,2n-1} \\ \vdots & -x_{12} & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & x_{2n-2,2n-1} \\ -x_{2n-1} & -x_{1,2n-1} & \cdots -x_{2n-2,2n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

associons $Z' \in \underline{SO(2n-1)}$ obtenue à partir de Z en annulant la dernière ligne et la dernière colonne. $J_1(Z'), \ldots, J_{2n-2}(Z')$ sont les générateurs de $S(SO(2n-1))^{SO(2n-2)}$. Il est clair que, pour $Z \in \underline{SO(2n)}$ tel que

$$x_{2n-1} = x_{1,2n-1} = \ldots = x_{2n-2,2n-1} = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} I_p(Z) &= J_p(Z'), \qquad (1 \leqslant p \leqslant 2n-3), \\ I_{2n-2}(Z) &= J_{2n-2}^2(Z') \\ I_{2n-1}(Z) &= 0. \end{aligned}$$

Soit $P(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1})$ un polynôme de degré $r+1$, tel que :

$$P(I_1(Z), \ldots, I_{2n-1}(Z)) = 0, \quad \text{pour tout} \quad Z \in \underline{SO(2n)}.$$

En particulier pour $x_{2n-1} = x_{1,2n-1} = \ldots = x_{2n-2,2n-1} = 0$,

$$P(J_1(Z'), \ldots, J_{2n-3}(Z'), J_{2n-2}^2(Z'), 0) = 0.$$

Le polynôme G défini par

$$G(u_1, \ldots, u_{2n-2}, u_{2n-1}) = P(u_1, \ldots, u_{2n-3}, u_{2n-2}^2, u_{2n-1}),$$

vérifie

$$G(J_1(Z'), \ldots, J_{2n-2}(Z'), 0) = 0.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $J_1(Z'), \ldots, J_{2n-2}(Z')$ sont algébriquement indépendants. Donc,

$$G(u_1, \ldots, u_{2n-1}) = u_{2n-1} H(u_1, \ldots, u_{2n-1}),$$

où H est un polynôme. Comme

$$G(u_1, \ldots, u_{2n-3}, -u_{2n-2}, u_{2n-1}) = G(u_1, \ldots, u_{2n-2}, u_{2n-1}),$$

le polynôme H vérifie la même propriété. Par conséquent, il existe un polynôme H_0, tel que

$$H(u_1, \ldots, u_{2n-1}) = H_0(u_1, \ldots, u_{2n-3}, u_{2n-2}^2, u_{2n-1}).$$

Ainsi,

$$P(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1}) = \xi_{2n-1} H_0(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1}),$$

avec $d^\circ H_0 < d^\circ P$. On applique maintenant l'hypothèse de récurrence à H_0. Il s'ensuit que P est identiquement nul.

2^e cas : $m = 2n+1$.

La démonstration est identique à la précédente.

(2.3). PROPOSITION. — *Soient X et X' deux éléments de $\underline{SO(m)}$ vérifiant les conditions suivantes :*

$$I_l(X) = I_l(X') \quad (1 \leqslant l \leqslant m-1), \quad si \quad m = 2n,$$
$$J_l(X) = J_l(X') \quad (1 \leqslant l \leqslant m-1) \quad si \quad m = 2n+1,$$

Alors, il existe $k \in SO(m-1)$, tel que $X' = kXk^{-1}$.

Preuve. — La proposition est trivialement vraie pour $m = 3$ comme, on peut le vérifier facilement. Supposons qu'elle soit vraie à l'ordre $m-1$ et démontrons-la à l'ordre m. Il y a deux cas à considérer, suivant la parité de m.

1^er^ cas : $m = 2n$

a) Supposons $X_1 \neq 0$.

L'égalité $I_1(X) = I_1(X')$, c'est-à-dire $\|X_1\|^2 = \|X'_1\|^2$, implique qu'il existe $u \in SO(2n-1)$, tel que $u(X_1) = X'_1$. Soient $X''_2 = \Lambda^2 u^{-1}(X_2)$ et $X'' = e_0 \wedge X_1 + X''_2$. Alors,

$$\begin{aligned} X'' &= e_0 \wedge u^{-1}(X'_1) + \Lambda^2 u^{-1}(X'_2) = \mathrm{Ad}(u^{-1})[e_0 \wedge X'_1 + X'_2] \\ &= \mathrm{Ad}(u^{-1})X'. \end{aligned}$$

Le problème revient donc à démontrer que X et X'' sont conjugués par un élément de $SO(2n-1)$. Pour cela, nous allons montrer que X_2 et X''_2, qui appartiennent à $\Lambda^2 \mathbb{R}^{2n-1} = \underline{SO(2n-1)}$, vérifient l'hypothèse de récurrence. Posons $E = \mathbb{R}^{2n-1}$, $\varepsilon_1 = \dfrac{X_1}{\|X_1\|}$ et $E_1 = \varepsilon_1^{\perp}$. E se décompose en somme directe orthogonale

$$E = \mathbb{R}\varepsilon_1 \oplus E_1,$$

d'où les décompositions suivantes en somme directe orthogonale

$$\begin{aligned} \Lambda^{2p} E &= \varepsilon_1 \wedge [\Lambda^{2p-1} E_1] \oplus \Lambda^{2p} E_1, \quad (1 \leqslant p \leqslant n-1), \\ \Lambda^{2p+1} E &= \varepsilon_1 \wedge [\Lambda^{2p} E_1] \oplus \Lambda^{2p+1} E_1, \quad (1 \leqslant p \leqslant n-2), \\ \Lambda^{2n-1} E &= \varepsilon_1 \wedge [\Lambda^{2n-2} E_1]. \end{aligned}$$

Les éléments X_2 et X''_2, qui appartiennent à $\Lambda^2 E$, se décomposent en

$$X_2 = \varepsilon_1 \wedge Y_1 + Y_2 \quad (Y_1 \in E_1,\ Y_2 \in \Lambda^2 E_1),$$
$$X''_2 = \varepsilon_1 \wedge Y'_1 + Y'_2 \quad (Y'_1 \in E_1,\ Y'_2 \in \Lambda^2 E_1).$$

On a :

$$X_2^{p\wedge} = p\varepsilon_1 \wedge Y_1 \wedge Y_2^{(p-1)\wedge} + Y_2^{p\wedge}, \quad (1 \leqslant p \leqslant n-1), \quad (*)$$
$$\varepsilon_1 \wedge X_2^{p\wedge} = \varepsilon_1 \wedge Y_2^{p\wedge},$$

d'où,

$$X_1 \wedge X_2^{p\wedge} = X_1 \wedge Y_2^{p\wedge}.$$

Par suite, on a,

$$\begin{aligned} \|X_1 \wedge X_2^{p\wedge}\| &= \|X_1\| \; \|Y_2^{p\wedge}\| \\ &= \|X_1\| \; \|Y_2'^{p\wedge}\|, \end{aligned}$$

du fait que $I_{2p+1}(X) = I_{2p+1}(X') = I_{2p+1}(X'')$; donc,

$$\|Y_2^{p\wedge}\|^2 = \|Y_2'^{p\wedge}\|^2, \quad \text{c'est-à-dire} \quad J_{2p}(X_2) = J_{2p}(X_2''), \quad (1 \leqslant p \leqslant n-2),$$

et

$$\begin{aligned} \|X_2^{p\wedge}\|^2 &= p^2 \, \|Y_1 \wedge Y_2^{(p-1)\wedge}\|^2 + \|Y_2^{p\wedge}\|^2 \\ &= \|X_2''^{p\wedge}\|^2 \quad (\text{du fait que } I_{2p}(X) = I_{2p}(X') = I_{2p}(X'')) \\ &= p^2 \, \|Y_1' \wedge Y_2^{(p-1)\wedge}\|^2 + \|Y_2'^{p\wedge}\|^2. \end{aligned}$$

D'où,

$$\|Y_1 \wedge Y_2^{(p-1)\wedge}\|^2 = \|Y_1' \wedge Y_2'^{(p-1)\wedge}\|^2 \text{ i.e.}$$
$$J_{2p-1}(X_2) = J_{2p-1}(X_2'') \quad (1 \leqslant p \leqslant n-2).$$

Maintenant, d'après l'égalité (*), on a :

$$\varepsilon_1 \wedge X_2^{(n-1)\wedge} = \varepsilon_1 \wedge Y_2^{(n-1)\wedge},$$

soit encore, en multipliant les deux membres par $\|X_1\|$,

$$\begin{aligned} X_1 \wedge X_2^{(n-1)\wedge} &= X_1 \wedge Y_2^{(n-1)\wedge} \\ &= X_1 \wedge X_2''^{(-n1)\wedge} \quad (\text{du fait que } I_{2n-1}(X) = I_{2n-1}(X'')) \\ &= X_1 \wedge Y_2'^{(n-1)\wedge}. \end{aligned}$$

Ceci entraîne que

$$Y_2^{(n-1)\wedge} = Y_2'^{(n-1)\wedge}.$$

Donc

$$J_{2n-2}(X_2) = J_{2n-2}(X''_2),$$

et

$$\| Y_1 \wedge Y_2^{(n-1)\wedge} \|^2 = \| Y'_1 \wedge Y_2'^{(n-1)\wedge} \|^2 \text{ i.e. } J_{2n-3}(X_2) = J_{2n-3}(X''_2).$$

Ainsi,

$$J_l(X_2) = J_l(X''_2), \quad (1 \leqslant l \leqslant 2n - 2).$$

On applique l'hypothèse de récurrence à X_2 et X''_2. Il existe $v \in SO(2n-2)$, telle que

$$X''_2 = vX_2v^{-1}.$$

Définissons $w \in SO(2n-1)$ sur E, en posant

$$w(\varepsilon_1) = \varepsilon_1,$$
$$w(x) = v(x) \quad \text{si} \quad x \in E_1.$$

Alors,

$$w(X_1) = X_1, \ \Lambda^2 w(X_2) = \Lambda^2 w(\varepsilon_1 \wedge Y_1 + Y_2) = \varepsilon_1 \wedge Y'_1 + Y'_2,$$

et

$$\operatorname{Ad}(w)X = \Lambda^2 w(e_0 \wedge X_1 + X_2) = e_0 \wedge X_1 + X''_2 = \operatorname{Ad}(u^{-1})X'.$$

D'où

$$X' = \operatorname{Ad}(u \circ w)X.$$

b) Si $X_1 = 0$, alors $X'_1 = 0$, du fait que $I_1(X) = I_1(X')$. Donc, $X = X_2$ et $X' = X'_2$ appartiennent à $SO(2n-1)$, avec

$$\overline{J}_{2p}(X) = \overline{J}_{2p}(X'), \quad (1 \leqslant p \leqslant n - 1).$$

Il est bien connu que dans ce cas X et X' sont conjugués par un élément de $SO(2n-1)$.

2^e cas : $m = 2n + 1$.

La démonstration ne présente aucune difficulté. Elle est analogue à la précédente. Elle est laissée au soin du lecteur.

(2.4). THÉORÈME. — *Soit F une fonction polynomiale sur* $\underline{SO(m)}$ *et vérifiant*

$$F(kXk^{-1}) = F(X), \quad \textit{pour tout} \quad k \in SO(m-1) \quad \textit{et} \quad X \in \underline{SO(m)}.$$

Alors, il existe un polynôme G à $(m-1)$ *variables, tel que*

$$F(X) = G(I_1(X), \ldots, I_{m-1}(X)), \quad si \quad m = 2n,$$
$$F(X) = G(J_1(X), \ldots, J_{m-1}(X)), \quad si \quad m = 2n+1.$$

Preuve. — Le théorème est trivialement vrai pour $m = 3$, comme on peut le vérifier aisément. Supposons qu'il soit vrai à l'ordre $m - 1$ et démontrons-le à l'ordre m. Il y a deux cas à considérer, suivant la parité de m.

1^er^ cas : $m = 2n$.

Nous allons montrer, dans une première étape, qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ et un polynôme $G_1(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1})$, tels que

$$I_1^\alpha(X)F(X) = G_1(I_1(X), \ldots, I_{2n-1}(X)) \qquad (*),$$

puis dans une seconde étape, qu'il existe $\beta \in \mathbb{N}$ et deux polynômes $Q(\xi_2, \ldots, \xi_{2n-2})$ et $H(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1})$, tels que

$$Q^\beta(I_2(X), \ldots, I_{2n-2}(X))F(X) = H(I_1(X), \ldots, I_{2n-1}(X)).$$

Ceci étant admis, démontrons le théorème :

Le polynôme

$$Q^\beta(\xi_2, \xi_4, \ldots, \xi_{2n-2})G_1(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1}) - \xi_1^\beta H(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1})$$

est identiquement nul, lorsqu'on fait la substitution $\xi_i = I_i(X)$. D'après la proposition (2.2), les $(I_i(X))_{1 \leq i \leq 2n-1}$ sont algébriquement indépendants. Donc ce polynôme est identiquement nul; ce qui entraîne que le polynôme $G_1(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1})$ est divisible par ξ_1^α, c'est-à-dire

$$G_1(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1}) = \xi_1^\alpha G(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1}),$$

d'où la conclusion d'après l'égalité $(*)$.

(2.4.1). — *1^ère^ étape :*

Comme $\underline{SO(2n)} = \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n} = e_0 \wedge \mathbb{R}^{2n-1} \oplus \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n-1}$, on peut considérer F comme une fonction polynomiale sur $\mathbb{R}^{2n-1} \times \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n-1}$. Soit

$X = (X_1, X_2) \in \mathbb{R}^{2n-1} \times \Lambda^2 \mathbb{R}^{2n-1}$. Il existe $k \in SO(2n-1)$, tel que $X_1 = k(\|X_1\| e_1)$. Alors,

$$F(X_1, X_2) = F(\|X_1\| e_1, X_2'),$$

avec $X_2' = \Lambda^2 k^{-1}(X_2)$. Posons

$$X' = \|X_1\| e_0 \wedge e_1 + X_2' = \Lambda^2 k^{-1}(e_0 \wedge X_1 + X_2).$$

Les éléments X et X', étant conjugués par un élément de $SO(2n-1)$, on a

$$I_l(X) = I_l(X'), \quad (1 \leqslant l \leqslant 2n-1).$$

Posons $E = \mathbb{R}^{2n-1}$ et $E_1 = e_1^{\perp}$. Alors,

$$E = \mathbb{R}e_1 \oplus E_1 \quad \text{et} \quad \Lambda^2 E = e_1 \wedge E_1 \oplus \Lambda^2 E_1.$$

L'élément X_2' de $\Lambda^2 E$ se décompose en

$$X_2' = e_1 \wedge Y_1 + Y_2.$$

Soit s une transformation orthogonale de $\mathbb{R}^{2n-2}$, de déterminant égal à -1 et

$$k' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & s \\ 0 & \end{pmatrix}.$$

L'élément k' appartient à $SO(2n-1)$. On a alors

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2) &= F(\|X_1\| e_1, X_2') = F(k'(\|X_1\| e_1), \Lambda^2 k'(X_2')) \\ &= F(-\|X_1\| e_1, X_2''), \quad (\bigstar) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} X_2'' &= \Lambda^2 k'(X_2') = \Lambda^2 k'(e_1 \wedge Y_1 + Y_2) \\ &= -e_1 \wedge s(Y_1) + \Lambda^2 s(Y_2) = e_1 \wedge Y_1' + Y_2' \end{aligned}$$

où on a posé

$$Y_1' = -s(Y_1), \quad Y_2' = \Lambda^2 s(Y_2).$$

F étant polynomiale, il existe des fonctions polynomiales uniques G_i, définies sur $\Lambda^2 E$, telles que

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2) &= F(\|X_1\| e_1, X'_2) = \textstyle\sum_i \|X_1\|^{\alpha_i} G_i(X'_2) \\ &= F(-\|X_1\| e_1, X''_2) = \textstyle\sum_i (-1)^{\alpha_i} \|X_1\|^{\alpha_i} G_i(X''_2) \quad (\bigstar\bigstar), \end{aligned}$$

d'après l'égalité ($\bigstar$). Il est clair, que pour chaque i, la fonction G_i est invariante par $SO(2n-2)$. Appliquons l'hypothèse de récurrence aux G_i. Donc, pour chaque i, il existe un polynôme F_i, tel que, pour tout $Z \in \Lambda^2 E$, l'on ait

$$G_i(Z) = F_i(J_1(Z), \ldots, J_{2n-2}(Z)).$$

On a

$$\begin{aligned} J_{2p}(X''_2) &= \|Y_2'^{p\wedge}\|^2, && (1 \leqslant p \leqslant n-2), \\ J_{2n-2}(X''_2) &= (Y_2'^{(n-1)\wedge})^*, && \\ J_{2p+1}(X''_2) &= \|Y_1 \wedge Y_2'^{p\wedge}\|^2, && (0 \leqslant p \leqslant n-2). \end{aligned}$$

Sachant que $Y'_1 = -s(Y_1)$ et $Y'_2 = \Lambda^2 s(Y_2)$, il s'ensuit que

$$\begin{aligned} J_{2p}(X''_2) &= J_{2p}(X'_2), && (1 \leqslant p \leqslant n-2), \\ J_{2n-2}(X''_2) &= -J_{2n-2}(X'_2), && \\ J_{2p+1}(X''_2) &= J_{2p+1}(X'_2), && (0 \leqslant p \leqslant n-2). \end{aligned}$$

Donc, pour chaque i, on a

$$\begin{aligned} G_i(X''_2) &= F_i(J_1(X''_2), \ldots, J_{2n-2}(X''_2)) \\ &= F_i(J_1(X'_2), \ldots, J_{2n-3}(X'_2), -J_{2n-2}(X'_2)). \end{aligned}$$

Par suite, d'après l'égalité ($\bigstar\bigstar$), on a

$$\begin{aligned} F(X_1, X_2) &= \textstyle\sum_i \|X_1\|^{\alpha_i} F_i(J_1(X'_2), \ldots, J_{2n-2}(X'_2)) \\ &= \textstyle\sum_i (-1)^{\alpha_i} \|X_1\|^{\alpha_i} F_i(J_1(X'_2), \ldots, J_{2n-3}(X'_2), -J_{2n-2}(X'_2)), \end{aligned}$$

ce qui entraîne que F s'exprime comme un polynôme de $J_1(X'_2), \ldots, J_{2n-3}(X'_2)$, $\|X_1\|^2$, $\|X_1\| J_{2n-2}(X'_2)$, $J^2_{2n-2}(X'_2)$. Calculons maintenant les $J_p(X'_2)$ en fonction des $I_p(X)$.

(1) On a,

$$X_2'^{p\wedge} = p e_1 \wedge Y_1 \wedge Y_2^{(p-1)\wedge} + Y_2^{p\wedge},$$

par suite,

$$\|X_2'^{p\wedge}\|^2 = p^2 \|Y_1 \wedge Y_2^{(p-1)\wedge}\|^2 + \|Y_2^{p\wedge}\|^2,$$

c'est-à-dire

$$I_{2p}(X) = p^2 J_{2p-1}(X_2') + J_{2p}(X_2'), \quad (1 \leqslant p < n-1).$$

(2) On a,

$$e_1 \wedge X_2'^{p\wedge} = e_1 \wedge Y_2^{p\wedge};$$

d'où,

$$\|X_1 \wedge X_2^p\|^2 = \|X_1\|^2 \|Y_2^{p\wedge}\|^2,$$

c'est-à-dire,

$$I_{2p+1}(X) = \|X_1\|^2 J_{2p}(X_2'), \quad (1 \leqslant p < n-1).$$

De (1) et (2), on déduit que

$$J_{2p-1}(X_2') = \frac{1}{p^2}\left[I_{2p}(X) - \frac{I_{2p+1}(X)}{\|X_1\|^2}\right].$$

(3) On a,

$$X_2'^{(n-1)\wedge} = (n-1)e_1 \wedge Y_1 \wedge Y_2^{(n-2)\wedge} + Y_2^{(n-1)\wedge};$$

d'où,

$$\|X_2'^{(n-1)\wedge}\|^2 = (n-1)^2 \|Y_1 \wedge Y_2^{(n-2)\wedge}\|^2 + \|Y_2^{(n-1)\wedge}\|^2,$$

c'est-à-dire,

$$I_{2n-2}(X') = I_{2n-2}(X) = (n-1)^2 J_{2n-3}(X_2') + J_{2n-2}^2(X_2').$$

(4) On a,

$$e_1 \wedge X_2'^{(n-1)\wedge} = e_1 \wedge Y_2^{(n-1)\wedge};$$

d'où,

$$\|X_1\|\, e_1 \wedge X_2'^{(n-1)\wedge} = X_1 \wedge X_2^{(n-1)\wedge} = \|X_1\|\, e_1 \wedge Y_2^{(n-1)\wedge}.$$

Ceci entraîne que

$$(X_1 \wedge X_2^{(n-1)\wedge})^* = \|X_1\| (Y_2^{(n-1)\wedge})^*,$$

c'est-à-dire,

$$I_{2n-1}(X) = \|X_1\| \, J_{2n-2}(X_2').$$

Par suite,

$$J_{2n-3}(X_2') = \frac{1}{(n-1)^2} \left[I_{2n-2}(X) - \frac{I_{2n-1}^2(X)}{\|X_1\|^2} \right].$$

En résumé, $F(X)$ s'exprime comme un polynôme en les variables

$$I_1(X), \ldots, I_{2n-1}(X), \frac{I_3(X)}{I_1(X)}, \ldots, \frac{I_{2n-3}(X)}{I_1(X)}, \frac{I_{2n-1}^2(X)}{I_1(X)}.$$

Ainsi, il existe $\alpha \in \mathbb{N}$ et un polynôme $G_1(\xi_1, \ldots, \xi_{2n-1})$, tels que

$$I_1^\alpha(X) F(X) = G_1(I_1(X), \ldots, I_{2n-1}(X)).$$

(2.4.2). — *2ème étape :*

Soit $X \in \underline{SO(2n)}$. X se décompose en

$$X = e_0 \wedge X_1 + Y, \quad (X_1 \in \mathbb{R}^{2n-1}, \quad Y \in \underline{SO(2n-1)}).$$

Il existe une base orthonormale de $\mathbb{R}^{2n-1}$ $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n-1}$, telle que la matrice de l'application Y s'écrive relativement à cette base :

$$Y' = \begin{bmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_{n-1} & \\ & & & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec} \quad D_i = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_i \\ -\alpha_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Donc, il existe $k \in SO(2n-1)$, tel que

$$kYk^{-1} = Y' = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \varepsilon_{2i-1} \wedge \varepsilon_{2i}.$$

Posons

$$X_1' = k \,.\, X_1 = \sum_{i=1}^{2n-1} x_i' \varepsilon_i \quad \text{et} \quad X' = e_0 \wedge X_1' + Y_1' = \Lambda^2 k(X).$$

On a

$$F(X) = F(X') = F(X'_1,\ Y').$$

Soient T le tore maximal de $SO(2n-1)$ et $N(T)$ le normalisateur de T dans $SO(2n-1)$; exprimons que F est invariante par $N(T)$. Posons

$$S_j = x'^2_{2j-1} + x'^2_{2j} \quad (1 \leqslant j \leqslant n-1).$$

1) Il existe $t \in T$, tel que

$$t\,.\,X'_1 = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{S_j}\,\varepsilon_{2j-1} + x'_{2n-1}\varepsilon_{2n-1}.$$

Donc,

$$F(X) = F(X'_1,\ Y') = F(\sqrt{S_1}\,\varepsilon_1 + \ldots + \sqrt{S_{n-1}}\,\varepsilon_{2n-3} + x'_{2n-1}\varepsilon_{2n-1},\ Y').$$

2) Pour $t_i \in T$,

$$t_i = \left(\begin{array}{ccccccc} & & & 2i-1 & & & \\ & & & \vdots & & & \\ 1 & & & \vdots & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \vdots & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & -1 & & \\ & & & \vdots & & \cdot & \\ & & & \vdots & & 1 & \\ & & & \vdots & & & \cdot \\ & & & \vdots & & & 1 \end{array}\right) 2i-1, \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1),$$

on a :

$$t_i Y' t_i^{-1} = Y'$$

$$\begin{aligned} t_i(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} \sqrt{S_j}\,\varepsilon_{2j-1} + x'_{2n-1}\varepsilon_{2n-1}) &= \\ = \sqrt{S_1}\,\varepsilon_1 + \ldots + \sqrt{S_{i-1}}\,\varepsilon_{2i-3} - \sqrt{S_i}\,\varepsilon_{2i-1}& \\ + \ldots + \sqrt{S_{n-1}}\,\varepsilon_{2n-3} + x'_{2n-1}\varepsilon_{2n-1},& \end{aligned}$$

ce qui entraîne que la fonction F ne dépend en fait que des variables $S_1, \ldots, S_{n-1}, x'_{2n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, c'est-à-dire,

$$F(X) = P(S_1\varepsilon_1 + \ldots + S_{n-1}\varepsilon_{2n-3} + x'_{2n-1}\varepsilon_{2n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

3) Pour $w_i \in N(T)$,

$$w_i = \left(\begin{array}{cccccccc} & & & 2i & & & & \\ 1 & & & \vdots & & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & & \\ & & 1 & \vdots & & & & \\ & & & -1 & & & & \cdot \\ & & & \vdots & 1 & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \\ & & & \vdots & & & 1 & \\ & & & \vdots & & & & -1 \end{array}\right) 2i, \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1),$$

on a :

$$w_i \,.\, \left(\textstyle\sum_{j=1}^{n-1} S_j \varepsilon_{2j-1} + x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1}\right) = \textstyle\sum_{j=1}^{n-1} S_j \varepsilon_{2j-1} - x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1},$$

$$w_i Y' w_i^{-1} = \alpha_1 \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 + \ldots + \alpha_{i-1} \varepsilon_{2i-3} \wedge \varepsilon_{2i-2}$$
$$- \alpha_i \varepsilon_{2i} \wedge \varepsilon_{2i} + \ldots + \alpha_{n-1} \varepsilon_{2n-3} \wedge \varepsilon_{2n-2}.$$

Donc

$$P(S_1 \varepsilon_1 + \ldots + S_{n-1} \varepsilon_{2n-3} + x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) =$$
$$= P(S_1 \varepsilon_1 + \ldots + S_{n-1} \varepsilon_{2n-3} - x'_{2n-1} \varepsilon_{2n-1}, \alpha_1, \ldots, -\alpha_i, \ldots, \alpha_{n-1}).$$

Il s'ensuit, que pour toute famille $(\eta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$, avec $\eta_i = \pm 1$, on a :

$$P(S_1, \ldots, S_{n-1}, x'_{2n-1}, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) =$$
$$= P(S_1, \ldots, S_{n-1}, \textstyle\prod_{i=1}^{n-1} \eta_i x'_{2n-1}, \eta_1 \alpha_1, \ldots, \eta_{n-1} \alpha_{n-1}).$$

Ainsi,

$$F(X) = \Sigma A_{1_1 \ldots i_n}(S_1, \ldots, S_{n-1}) \alpha_1^{i_1} \ldots \alpha_{n-1}^{i_{n-1}} x'^{i_n}_{2n-1}$$
$$= \Sigma A_{i_1 \ldots i_n}(S_1, \ldots, S_{n-1}) \eta_1^{i_1} \ldots \eta_{n-1}^{i_{n-1}}$$
$$[\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}]^{i_n} \alpha_1^{i_1} \ldots \alpha_{n-1}^{i_{n-1}} x'^{i_n}_{2n-1},$$

pour toute famille $(\eta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$, avec $\eta_i = \pm 1$. Donc,

$$\eta_1^{i_1} \ldots \eta_{n-1}^{i_{n-1}} [\eta_1 \ldots \eta_{n-1}]^{i_n} = 1,$$

pour toute famille $(\eta_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-1}$, avec $\eta_i = \pm 1$. Ceci est équivalent à dire que $i_1 + i_n, \ldots, i_{n-1} + i_n$ sont tous pairs. Par suite, si i_n est pair, $i_1, \ldots, i_{n-1}$ sont tous pairs et, si i_n est impair, $i_1, \ldots, i_{n-1}$ sont tous impairs. Il s'ensuit qu'il existe deux polynômes R_1 et R_2 des variables $S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2$, uniques, tels que l'on ait :

$$F(X) = R_1(S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2, x'^2_{2n-1}) + \\ + x'_{2n-1} \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i R_2(S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2, x'^2_{2n-1}).$$

4) Pour $w_{ij} \in N(T)$,

$$w_{ij} = \left(\begin{array}{ccccccc|c}
 & 2i-1 & & & 2j-1 & & & \\
1 \ddots 1 & \vdots & & & \vdots & & & \\
\cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 2i-1 \\
 & 0 & 0 & & 0 & 1 & & \\
 & \vdots & & 1 \ddots 1 & \vdots & & & \\
\cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 2j-1 \\
 & 0 & 1 & & 0 & 0 & & \\
 & \vdots & & & \vdots & & 1 \ddots 1 &
\end{array}\right), \quad (i < j,\ 1 \leqslant i, j \leqslant n-1),$$

on a

$$w_{ij} Y' w_{ij}^{-1} = \begin{pmatrix} D_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & D_j & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & D_i & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & D_{n-1} & \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_{ij} \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_i \\ \vdots \\ S_j \\ \vdots \\ x'_{2n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 \\ 0 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_j \\ \vdots \\ S_i \\ \vdots \\ x'_{2n-1} \end{bmatrix}$$

Donc, pour toute permutation σ de $1, \ldots, n-1$, on a

$$R_i(S_{\sigma(1)}, \ldots, S_{\sigma(n-1)}, \alpha^2_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha^2_{\sigma(n-1)}, x'^2_{2n-1}) =$$
$$= R_i(S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha^2_1, \ldots, \alpha^2_{n-1}, x'^2_{2n-1}), \quad (i = 1, 2).$$

Si $(s_p)_{1 \leqslant p \leqslant n-1}$ désignent les fonctions élémentaires symétriques de $\alpha^2_1, \ldots, \alpha^2_{n-1}$, on a

$$\| Y'^{p\wedge} \|^2 = (p!)^2 s_p, \quad (1 \leqslant p \leqslant n-1).$$

Sachant que $\| X'_1 \|^2 = \| X_1 \|^2$, un calcul direct montre qu'on a aussi

$$\| X'_1 \wedge Y' \|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha^2_j [\, \| X_1 \|^2 - S_j],$$
$$\| X'_1 \wedge Y'^{2\wedge} \|^2 = (2!)^2 \sum_{i<j} \alpha^2_i \alpha^2_j [\, \| X_1 \|^2 - S_{ij}], \quad (S_{ij} = S_i + S_j),$$
$$\| X'_1 \wedge Y'^{p\wedge} \|^2 = (p!)^2 \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n-1} \alpha^2_{i_1} \ldots \alpha^2_{i_p} [\, \| X_1 \|^2 - S_{i_1 \ldots i_p}],$$
$$(S_{i_1 \ldots i_p} = S_{i_1} + \ldots + S_{i_p}), \quad 1 \leqslant p < n-1),$$
$$X'_1 \wedge Y'^{(n-1)\wedge} = (n-1)!\, x'_{2n-1} \alpha_1 \ldots \alpha_{n-1} \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge \ldots \wedge \varepsilon_{2n-1}.$$

D'où,

$$(X'_1 \wedge Y'^{(n-1)\wedge})^* = (n-1)!\, x'_{2n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \alpha_j,$$

et

$$x'^2_{2n-1} = \frac{\| X_1 \wedge Y^{(n-1)\wedge} \|^2}{((n-1)!)^2 s_{n-1}}.$$

Les S_i vérifient les $(n-1)$ équations linéaires suivantes :

$$\sum_{i=1}^{n-1} S_i = \| X_1 \|^2 - x'^2_{2n-1} = \| X_1 \|^2 - \frac{[(X_1 \wedge Y^{(n-1)\wedge})^*]^2}{((n-1)!)^2 s_{n-1}},$$
$$\sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n-1} \alpha^2_{i_1} \ldots \alpha^2_{i_p} S_{i_p \ldots i_p}$$
$$= [\, \| X_1 \|^2 \, \| Y^{p\wedge} \|^2 - \| X_1 \wedge Y^{p\wedge} \|^2](p!)^{-2}, \quad (1 \leqslant p < n-1).$$

Le déterminant associé à ce système est, au signe près, égal à

$$D = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} (\alpha^2_i - \alpha^2_j).$$

D est une fonction antisymétrique. Par contre le discriminant D^2 est une fonction symétrique. Donc D^2 s'exprime comme un polynôme des variables $\| Y \|^2, \ldots, \| Y^{(n-1)\wedge} \|^2$.

Posons :

$$a_1 = \|X_1\|^2 - \frac{\|X_1 \wedge Y^{(n-1)\wedge}\|^2}{((n-1)!)^2 s_{n-1}},$$

$$a_{p+1} = [\|X_1\|^2 \, \|Y^{p\wedge}\|^2 - \|X_1 \wedge Y^{p\wedge}\|^2](p!)^{-2}, \quad (1 \leqslant p < n-1).$$

Alors,

$$S_i = \frac{1}{D} \sum_{j=1}^{n-1} f_{ij}(\alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2)\mathrm{a}_j \quad (\bigstar).$$

Revenons maintenant à la fonction polynomiale F. Nous avons démontré en 3) et 4) qu'il existait deux polynômes uniques, R_1 et R_2, des variables $S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2, x_{2n-1}'^2$, vérifiant

$$R_i(S_{\sigma(1)}, \ldots, S_{\sigma(n-1)}, \alpha_{\sigma(1)}^2, \ldots, \alpha_{\sigma(n-1)}^2, x_{2n-1}'^2) =$$
$$= R_i(S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2, x_{2n-1}'^2), \quad (i = 1, 2),$$

pour toute permutation $\sigma \in {}_{n-1}$ et tels que l'on ait

$$F(X) = R_1(S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2, x_{2n-1}'^2)$$
$$+ x_{2n-1}'^2 \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i R_2(S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2, x_{2n-1}'^2).$$

Considérons le polynôme R_i $(i = 1, 2)$, comme un polynôme en la variable $x_{2n-1}'^2$. Il existe des polynômes uniques R_{ij} des variables $S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2$ tels que l'on ait

$$R_i(S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2, x_{2n-1}'^2)$$
$$= \sum_j R_{ij}(S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2) x_{2n-1}'^{2j}, \quad (i = 1, 2).$$

Pour chaque couple (i, j), R_{ij} vérifie : pour tout permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$,

$$R_{ij}(S_{\sigma(1)}, \ldots, S_{\sigma(n-1)}, \alpha_{\sigma(1)}^2, \ldots, \alpha_{\sigma(n-1)}^2) = R_{ij}(S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2).$$

Soient $S = (S_1, \ldots, S_{n-1})$ et $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Posons

$$g_{ij}(S, \alpha) = R_{ij}(S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2).$$

Pour chaque couple (i, j), g_{ij} est une fonction polynomiale, invariante par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n-1}$. Pour :

$$u = (u_1, \ldots, u_{n-1}),\ v = (v_1, \ldots, v_{n-1}),\ \ldots,\ w = (w_1, \ldots, w_{n-1}),$$

on pose

$$\varphi_1(u) = \Sigma u_i,$$

$$\varphi_2(u, v) = \Sigma u_i v_k, \quad (i \neq k),$$

$$\varphi_3(u, v, w) = \Sigma u_i v_k v_l, \quad (i, k, l \text{ distincts deux à deux}),$$

$$\vdots$$

$$\varphi_{n-1}(u, v, \ldots, w) = \Sigma u_i v_k \ldots w_l, \quad (\text{les indices sont distincts deux à deux}).$$

Alors d'après [5], pour chaque couple (i, j), g_{ij} est un polynôme de $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$, où on a substitué dans les φ_i, les variables $u, v, \ldots, w$ par S, α, dans toutes les combinaisons possibles. Remarquons que

$$\begin{aligned}\|X_1 \wedge Y\|^2 &= \textstyle\sum_j \alpha_j^2 [\|X_1\|^2 - S_j] = \sum_j \alpha_j^2 \sum_{p \neq j} S_p \\ &= \textstyle\sum_{j \neq p} \alpha_j^2 S_p = \varphi_2(S, \alpha), \\ \|X_1 \wedge Y^{p\wedge}\|^2 &= (p!)^2 \textstyle\sum_{1 \leqslant i < \ldots < i_p \leqslant n-1} \alpha_{i_1}^2 \ldots \alpha_{i_p}^2 [\|X_1\|^2 - S_{i_p \ldots i_p}] \\ &= (p!)^2 \Sigma \alpha_{i_1}^2 \ldots \alpha_{i_p}^2 \left[\sum_{i_l \neq \left\{\begin{smallmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_p \end{smallmatrix}\right.} S_{i_l} \right] \\ &= (p!)^2 \varphi_{p+1}(S, \alpha, \ldots, \alpha).\end{aligned}$$

Remplaçons $S_1, \ldots, S_{n-1}$ par leurs valeurs données par l'égalité (★) dans $\varphi_{2p}(S, \ldots, S)$. On obtient :

$$\varphi_{2p}(S, \ldots, S) = \frac{1}{D^{2p}} \psi_{2p}(\alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2).$$

Comme φ_{2p} et D^2 sont invariants par le groupe symétrique $\mathfrak{S}_{n-1}$, ψ_{2p} l'est également. Par conséquent, ψ_{2p} s'exprime comme un polynôme en les variables $\|Y\|^2, \ldots, \|Y^{p\wedge}\|^2, \ldots, \|Y^{(n-1)\wedge}\|^2$. Pour $\varphi_{2p+1}(S, \ldots, S)$ $(p \geqslant 2)$, on obtient

$$\varphi_{2p+1}(S, \ldots, S) = \frac{1}{D^{2p+1}} \psi_{2p+1}(\alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2)$$

ψ_{2p+1} est antisymétrique. Donc $\psi_{2p+1} = D \,.\, \theta_{2p+1}$ où θ_{2p+1} est symétrique. Donc θ_{2p+1} s'exprime en un polynôme des variables $\|Y\|^2, \ldots, \|Y^{(n-1)\wedge}\|^2$.

Par suite,

$$\varphi_{2p+1}(S, \ldots, S) = \frac{1}{D^{2p}} \theta_{2p+1}(\|Y\|^2, \ldots, \|Y^{(n-1)\wedge}\|^2).$$

Remplaçons $S_1, \ldots, S_{n-1}$ par leurs valeurs données par l'égalité $(\bigstar)$ dans le reste des invariants. Pour les mêmes raisons que précédemment, ces invariants s'expriment en des polynômes des variables $\|Y\|^2, \ldots, \|Y^{(n-1)\wedge}\|^2$; quotientés par D élevé à une puissance paire. En conclusion, pour chaque couple (i, j), R_{ij} s'écrit

$$R_{ij}(S_1, \ldots, S_{n-1}, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_{n-1}^2) = \frac{G_{ij}(I_1(X), \ldots, I_{2n-1}(X))}{D^{2\beta_{ij}}},$$

où G_{ij} est un polynôme et β_{ij} un entier; et, en définitive, sachant que

$$D^2 = Q_1(\|Y\|^2, \ldots, \|Y^{(n-1)\wedge}\|^2) = Q_1(I_2(X), \ldots, I_{2n-2}(X)),$$

F s'écrit :

$$F(X) \,.\, Q^{\beta}(I_2(X), \ldots, I_{2n-2}(X)) = H(I_1(X), \ldots, I_{2n-1}(X)),$$

où H est un polynôme et β un entier.

2^e cas : $m = 2n + 1$.

La démonstration est semblable à la précédente et ne présente aucune difficulté nouvelle.

(2.5). COROLLAIRE. — *L'algèbre $\mathcal{U}(G)^K$, avec $G = SO(m)$ et $K = SO(m-1)$, est engendrée par les générateurs du centre de $\mathcal{U}(SO(m))$ et les générateurs du centre de $\mathcal{U}(SO(m-1))$. En particulier, cette algèbre est commutative.*

Preuve. — Si $m = 2n$, soient $X \in \underline{SO(2n)}'$ et $X = e_0 \wedge X_1 + X_2$ sa décomposition canonique. Alors,

$$X^{p\wedge} = p\, e_0 \wedge X_1 \wedge X_2^{(p-1)\wedge} + X_2^{p\wedge}, \quad (1 \leqslant p < n),$$
$$(X^{n\wedge})^* = n(X_1 \wedge X_2^{(n-1)\wedge})^* \quad (\bigstar).$$

D'où

$$\|X^{p\wedge}\|^2 = p^2 \, \|X_1 \wedge X_2^{(p-1)\wedge}\|^2 + \|X_2^{p\wedge}\|^2,$$

c'est-à-dire

(2.5.1) $$\bar{I}_{2p}(X) = p^2 I_{2p-1}(X) + \bar{J}_{2p}(X_2), \quad (1 \leqslant p < n),$$

et

$$\bar{I}_{2n}(X) = n I_{2n-1}(X)$$

d'après (★), d'où la conclusion dans ce cas. Si $m = 2n + 1$, un calcul analogue au précédent montre que

(2.5.2) $$\bar{J}_{2p}(X) = p^2 J_{2p-1}(X) + \bar{I}_{2p}(X_2), \quad (1 \leqslant p < n),$$

et

$$\bar{J}_{2n}(X) = n^2 J_{2n-1}(X) + [\bar{I}_{2n}(X_2)]^2.$$

III. Générateurs de $\mathscr{U}(SO_0(1, m-1))^{SO(m-1)}$

(3.1). — Dans $\mathbb{R}^m$ muni de la base canonique $e_0, e_1, \ldots, e_{m-1}$, $(m \geqslant 3)$, on considère la forme bilinéaire symétrique non dégénérée

$$B(x, y) = -x_0 y_0 + \textstyle\sum_{p=1}^{m-1} x_p y_p, \quad (x = \Sigma x_p e_p, \ y = \Sigma y_p e_p).$$

Soient

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} m - 1 \\ 0 & \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} i & 0 \ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \mathrm{Id}_{\mathbb{R}} m - 1 \\ 0 & \end{pmatrix},$$

$SO(1, m-1) = \{ A \in SL(m, \mathbb{R}) ; {}^t A S A = S \}$, $SO_0(1, m-1)$ la composante connexe de $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}} m$ dans $SO(1, m-1)$ et $K = SO(m-1)$ le stabilisateur de e_0 pour l'action naturelle de $SO_0(1, m-1)$ sur $\mathbb{R}^m$. L'algèbre de Lie $\underline{SO_0(1, m-1)}$ de $SO(1, m-1)$ est :

$$\underline{SO_0(1, m-1)} = \{ X \in M(m\ \mathbb{R}), {}^t X S + S X = 0 \}.$$

Notons $E_{pq} (p \neq q)$ la matrice d'ordre m dont tous les éléments sont nuls sauf celui d'indice (p, q) pris égal à 1. Les matrices $Y_p = E_{op} + E_{po}$,

$(p = 1, \ldots, m-1)$ et $X_{pq} = E_{pq} - E_{qp}$, $(p < q;\; p, q = 1, 2, \ldots, m-1)$ forment une base de $\underline{SO_0(1, m-1)}$. Pour

$$X \in \underline{SO_0(1, m-1)},\ X = \textstyle\sum_{p=1}^{m-1} x_p Y_p + \sum_{1 \leqslant p < q \leqslant m-1} x_{pq} X_{pq},$$

posons :

$$X_1 = \textstyle\sum_{i=1}^{m-1} x_i e_i \in \mathbb{R}^{m-1},\ X_2 = \sum_{1 \leqslant p < q \leqslant m-1} x_{pq} e_p \wedge e_q \in \Lambda^2 \mathbb{R}^{m-1}.$$

Soient les fonctions polynomiales sur $\underline{SO_0(1, m-1)}$ définies par :

(3.1.1.). – Si $m = 2n$,

$$\bar{I}'_{2p}(X) = -\ p^2 \|X_1 \wedge X_2^{(p-1)\wedge}\|^2 + \|X_2^{p\wedge}\|^2, \quad (1 \leqslant p < n),$$
$$\bar{I}'_{2p}(X) = n(X_1 \wedge X_2^{(n-1)\wedge})^*;$$

(3.1.2). – Si $m = 2n + 1$,

$$\bar{J}'_{2p}(X) = -\ p^2 \|X_1 \wedge X_2^{(p-1)\wedge}\|^2 + \|X_2^{p\wedge}\|^2, \quad (1 \leqslant p \leqslant n).$$

(3.2.). THÉORÈME.

(i) *Les fonctions polynomiales* $\bar{I}'_{2p}$, $(1 \leqslant p \leqslant n)$, (*resp.* $\bar{J}'_{2p}$, $(1 \leqslant p \leqslant n)$ *constituent les générateurs de l'algèbre réelle* $S(G)^G$ *avec* $G = SO_0(1, 2n-1)$ (*resp.* $G = SO_0(1, 2n)$).

(ii) *L'algèbre réelle* $\mathcal{U}(G)^K$ *avec* $G = SO_0(1, m-1)$ *et* $K = SO(m-1)$ *est engendrée par les générateurs du centre de* $\mathcal{U}(SO_0(1, m-1))$ *et les générateurs du centre de* $\mathcal{U}(SO(m-1))$. *En particulier, cette algèbre est commutative.*

Preuve.

(i) Soit P un élément du centre de l'algèbre $S(SO_0(1, m-1))$. Comme $S(SO(m, \mathbb{C})^{SO(m,\mathbb{C})} = S(SO_0(1, m-1))^{SO_0(1,m-1)} \otimes \mathbb{C}$, P appartient à

$$S(SO(m, \mathbb{C}))^{SO(m,\mathbb{C})} = S(SO(m))^{SO(m)} \otimes \mathbb{C}.$$

D'après (1.2), P est un polynôme à coefficients complexes de $\bar{I}_{2p}$, $(1 \leqslant p < n - 1)$, $-i\bar{I}_{2n}$ si $m = 2n$, (resp. de $\bar{J}_{2p}$, $(1 \leqslant p < n)$ si $m = 2n + 1$) considérées comme fonctions polynomiales sur $\underline{SO(m, \mathbb{C})}$. Identifions l'algèbre $\underline{SO_0(1, m-1)}$ à l'algèbre $\underline{G}^* = \{JXJ;\ X \in \underline{SO_0(m, \mathbb{R})}\}$. Alors, d'après (1.2), (2.5.1) et (2.5.2), les restrictions des fonctions polynomiales $\bar{I}_{2p}$, $(1 \leqslant p < n)$, $-i\bar{I}_{2n}$, si $m = 2n$ (resp. $\bar{J}_{2p}$, $(1 \leqslant p \leqslant n)$ si $m = 2n + 1$) *à* $\underline{G}^*$ sont réelles et égales à $\bar{I}'_{2p}$,

$(1 \leqslant p \leqslant n)$ si $m = 2n$ (resp. à $\overline{J}'_{2p}$, $(1 \leqslant p \leqslant n)$). Donc P est un polynôme à coefficients réels de $\overline{I}'_{2p}$, $(1 \leqslant p \leqslant n)$ si $m = 2n$ (resp. $\overline{J}'_{2p}$, $(1 \leqslant p \leqslant n)$ si $m = 2n + 1$).

(ii) On a $\mathcal{U}(G)^{SO(m-1,\mathbb{R})} \otimes \mathbb{C} = \mathcal{U}(SO(m,\mathbb{C}))^{SO(m-1,\mathbb{C})}$ pour $G = SO(m, \mathbb{R})$ ou $SO_0(1, m-1)$. D'après (2.5) et ce qui précède, il est clair que tout élément de $\mathcal{U}(SO_0(1, m-1))^{SO(m-1,\mathbb{R})}$ est un polynôme réel des générateurs du centre de $\mathcal{U}(SO_0(1, m-1))$ et du centre de $\mathcal{U}(SO(m-1, \mathbb{R}))$.

(3.3) REMARQUE. — La commutativité de l'algèbre $\mathcal{U}(SO(m, \mathbb{C})^{SO(m-1,\mathbb{C})}$ résulte aussi de [2].

BIBLIOGRAPHIE

[1] J. DIXMIER. — *Algèbres enveloppantes*. Gauthier-Villars, 1974.

[2] J. DIXMIER. — *Sur les représentations de certains groupes orthogonaux*, C.R.A.S., 250, série *A*, (1960), p. 3263-3265.

[3] K. MINEMURA. — *Invariant differential operators and spherical sections of a homogeneous vector bundle*. Preprint, (1978).

[4] S. KOBAYASHI. — K. NOMIZU, *Foundations of differentiel geometry*. Volume II, Interscience publischers, 1969.

[5] H. WEYL. — *The classical groups*. Princeton mathematical series, 1973.