BULLETIN DE LA S. M. F.

ALEX MÉRIL

Problèmes d'interpolation dans quelques espaces de fonctions non entières

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 251-285
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__251_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 251-285.

PROBLÈMES D'INTERPOLATION DANS QUELQUES ESPACES DE FONCTIONS NON ENTIÈRES

PAR ALEX MÉRIL (*)

RÉSUMÉ. — Nous donnons quelques résultats relatifs aux problèmes d'interpolation dans divers espaces de fonctions non entières introduits par J. W. DE ROEVER (comprenant notamment les espaces d'hyperfonctions de Fourier de T. KAWAÏ et M. MORIMOTO). Nous appliquons ces résultats à l'étude de quelques systèmes de convolution.

ABSTRACT. — We solve some interpolation problems in some spaces of non entire functions introduced by J. W. DE ROEVER (as a particular case, we have the Fourier hyperfunctions spaces introduced by T. KAWAI and M. MORIMOTO). We use these results to study some convolution systems.

Introduction

L'étude de systèmes d'équations aux dérivées partielles (E.D.P.) fut faite dans divers espaces de fonctions « Analytically Uniform » (A. U.) par L. EHRENPREIS [4] et V. PALAMODOV [13]. Ces problèmes se ramenaient, *via* la transformation de Fourier (certaines fois appelée transformation de Fourier-Borel) à des problèmes d'interpolation dans des espaces de fonctions entières à croissance contrôlée à l'infini. Le résultat obtenu (principe fondamental) exprime que toute solution d'un système homogène à coefficients constants d'E.D.P. se représente à l'aide des exponentielles solutions de ce système.

Ce principe fondamental fut étendu par C. A. BERENSTEIN et B. A. TAYLOR [2] et aussi par D. STRUPPA dans le cadre de systèmes d'opérateurs différentiels d'ordre infini.

Récemment J. W. DE ROEVER ([14], [15]) introduisit divers espaces A. U. de fonctions non entières et y étendit le principe fondamental de EHRENPREIS-PALAMODOV. Ces espaces contiennent notamment les espaces d'hyperfonc-

(*) Texte reçu le 10 novembre 1982, révisé le 15 avril 1983.

A. MÉRIL, Université de Bordeaux-I, Mathématiques et Informatique, 351, cours de la Libération, 33405 Talence Cedex.

tions de Fourier introduits par T. KAWAÏ [8] et M. MORIMOTO [12]. Certain de ces espaces sont d'un intérêt spécial en mécanique quantique des champs (*cf.* le chapitre 1 de [15]).

Il apparut donc intéressant d'étudier, dans ces divers espaces, des équations intégro-différentielles et aux différences comme dans [2] et [17]. Un certain nombre de résultats furent obtenus dans cette voie par C. A. BERENSTEIN et D. STRUPPA [3] prolongeant des résultats de l'auteur [11].

Nous remercions les professeurs C. A. BERENSTEIN et R. GAY pour l'aide et les nombreux conseils qu'ils nous ont prodigués.

0. Définitions élémentaires

Nous nous intéressons aux fonctions holomorphes de type exponentiel a dans un cône ouvert convexe Γ de $\mathbb{C}^n$ (a désigne la fonction d'appui d'un convexe fermé non compact Ω de $\mathbb{C}^n$). Il existe deux espaces (différents) particulièrement intéressants de fonctions de type exponentiel a, dans un cône ouvert convexe Γ de $\mathbb{C}^n$ de sommet l'origine, qui sont isomorphes (par la transformation de Fourier) au dual d'espaces de germes de fonctions holomorphes au voisinages de $\Omega(\Gamma, a)$ avec croissance contrôlée à l'infini. L'un, noté $\mathrm{Exp}_\varepsilon(\Gamma, a)$, est isomorphe à $\mathscr{H}'_\varepsilon(\Omega(\Gamma, a))$ et l'autre, $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$, l'est à $\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))$. (L'indice ε voulant dire qu'on prend des ε-voisinages de $\Omega(\Gamma, a)$ et c pour des voisinages « coniques »). Nous établirons des résultats pour les espaces du type « conique », des résultats analogues s'établissent aisément pour les espaces du type ε.

Rappelons la définition des espaces $\mathrm{Exp}_\alpha(\Gamma, a)$ et $\mathscr{H}_\alpha(\Omega(\Gamma, a))$ (avec $\alpha=\varepsilon$ ou c).

Pour un ouvert O de $\mathbb{C}^n$, $\mathscr{H}(O)$ désigne l'anneau des fonctions holomorphes dans O. Si M est un poids sur O (i. e. une fonction continue à valeurs réelles) alors $\mathscr{H}(O; M)$ désignera l'espace de Banach suivant :

$$\mathscr{H}(O; M)=\{f\in \mathscr{H}(O) : \mathrm{Sup}_{z\in O} |f(z)| \exp(-M(z))<+\infty\}.$$

Dans toute la suite (et sauf mention explicite du contraire) un cône Γ sera toujours un cône ouvert convexe de $\mathbb{C}^n$ de sommet l'origine, différent de $\mathbb{C}^n$. Et a sera une fonction convexe positivement homogène de degré un sur Γ. Une telle fonction sera dite une fonction d'appui sur Γ. Si Γ est un cône nous noterons $\mathrm{pr}\,\Gamma$ la projection de Γ sur la sphère unité S^{2n-1} de $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^{2n}$ (i. e. $\mathrm{pr}\,\Gamma=\Gamma\cap S^{2n-1}$).

Le résultat suivant est bien connu.

0.1 LEMME [14]. — *A tout convexe fermé Ω, non compact de $\mathbb{C}^n$, ne contenant aucune droite réelle, correspond un cône Γ de $\mathbb{C}^n$ et une fonction d'appui a sur Γ de telle sorte que :*

$$\Omega=\Omega(\Gamma, a)=\{\zeta\in\mathbb{C}^n \mid -\operatorname{Im}\langle z, \zeta\rangle\leqslant a(z),\ \forall z\in\Gamma\},$$

avec $\langle z, \zeta\rangle=z_1\zeta_1+\ldots+z_n\zeta_n$). *Réciproquement, tout cône Γ et toute fonction d'appui a sur Γ déterminent par la formule précédente, un convexe fermé non borné de $\mathbb{C}^n$, ne contenant aucune droite réelle.*

On dit, dans ce cas, que Ω et (Γ, a) sont en dualité.

Si Γ est un cône et Γ' un sous-cône de Γ on dit que Γ' est un sous-cône relativement compact de Γ (et on note $\Gamma'\subset\subset\Gamma$) si $\operatorname{pr}\Gamma'\subset\subset\operatorname{pr}\Gamma$. Une famille $(\Gamma_k)_{k\geqslant 1}$ de sous-cône de Γ sera dite une exhaustion de Γ si $\Gamma_k\subset\subset\Gamma_{k+1}\subset\subset\Gamma$ et si $\Gamma=\bigcup_k\Gamma_k$.

Pour (Γ, a) donné si $(\Gamma_k)_k$ est une exhaustion de Γ, les ensembles suivants sont des voisinages « coniques » de $\Omega=\Omega(\Gamma, a)$:

$$\Omega_{k,c}=\Omega\left(\Gamma_k,\ a(z)+\frac{1}{k}\,|z|\right).$$

Définissons maintenant l'espace $\mathscr{H}_c(\Omega)$ de germes de fonctions holomorphes au voisinage de Ω et à croissance contrôlée à l'infini.

0.2. DÉFINITION ([14], [15]). — L'espace $\mathscr{H}_c(\Omega)=\varinjlim_{k\geqslant 1}\mathscr{H}(\mathring{\Omega}_{k,c}, -|z|/k)$ est muni d'une topologie naturelle d'espace du type D.F.N.

Cette définition (et la topologie qui en résulte) est indépendante du choix de l'exhaustion de Γ.

Avant d'énoncer l'analogue du théorème de Polya-Ehrenpreis-Martineau nous avons besoin de définir l'espace $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, a)$.

0.3. DÉFINITION ([14], [15]). — Posons $\Gamma(k)=\Gamma_k\cap\{z\in\mathbb{C}^n \mid |z|>1/k\}$. On définit :

$$\operatorname{Exp}_c(\Gamma, a)=\varprojlim_{k\geqslant 1}\mathscr{H}(\Gamma(k), a(z)+1/k\,|z|).$$

Cet espace a une topologie d'espace F. N et on peut voir (*cf.* [14]) qu'il peut aussi être défini comme l'espace des fonctions holomorphes dans Γ telles que, pour tout sous-cône relativement compact Γ' de Γ et tous ε, $\delta>0$, on ait :

$$\operatorname{Sup}_{z\in\Gamma',\,|z|>\delta}|f(z)\exp(-a(z)-\varepsilon|z|)|<+\infty.$$

On voit, en particulier, que $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, a)$ est indépendant de l'exhaustion choisie (algébriquement et topologiquement).

Si $\zeta \in \Gamma$, la fonction $z \mapsto \exp(i\langle z, \zeta\rangle)$ est élément de $\mathscr{H}_c(\Omega)$, donc, pour $\mu \in \mathscr{H}'_c(\Omega)$, on peut définir la transformée de Fourier $\mathscr{F}(\mu)$ de μ par :

$$\mathscr{F}(\mu)(\zeta) = \langle \mu_z, \exp(i\langle z, \zeta\rangle)\rangle.$$

L'analogue du théorème de Polya-Ehrenpreis-Martineau est le suivant :

0.4. THÉORÈME [15]. – *La transformation de Fourier $\mathscr{F}$ établit un isomorphisme d'E.L.C. entre $\mathscr{H}'_c(\Omega)$ et $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, a)$.*

Tout cela se transporte, *mutatis mutandi*, pour les espaces du type ε, rappelons-en brièvement la définition.

0.5. DÉFINITION [15]. – Soit z_0 fixé dans Γ. On définit :

$$\operatorname{Exp}_\varepsilon(\Gamma, a) = \varprojlim_{k \geq 1} \mathscr{H}\left(\frac{1}{k} z_0 + \Gamma, a\left(z - \frac{1}{2k} z_0\right) + \frac{1}{k}|z|\right)$$

et :

$$\mathscr{H}_\varepsilon(\Omega) = \varinjlim_{k \geq 1} \mathscr{H}\left(\Omega\left(\Gamma, a(z) + \frac{1}{k}|z|\right), -\frac{1}{k}|\zeta|\right).$$

Les espaces que nous venons de définir sont indépendants de z_0.

1. Fonctions moyenne-périodiques de $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$

Nous noterons $\Gamma^* = \Omega(\Gamma, 0)$ (le cône dual du cône Γ). Comme en [3] et [11], pour $f \in \mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ et ζ voisin de Γ^*, la fonction :

$$z \to f(z+\zeta) = \mathscr{T}_\zeta(f),$$

est élément de $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$. De plus, pour $\nu \in \mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$, on définit $\mu \star \nu$ par la formule :

$$\langle \mu \star \nu, f\rangle = \langle \mu, \nu \star f\rangle \text{ (avec } \zeta \to \nu \star f(\zeta) = \langle \nu, \mathscr{T}_\zeta(f)\rangle \in \mathscr{H}_c(\Gamma^*)).$$

Comme d'habitude, on a $\mu \star \nu = \nu \star \mu$ et $\mathscr{F}(\mu \star \nu) = \mathscr{F}(\mu)\mathscr{F}(\nu)$ (*cf.* [11]).

On dit qu'une fonction f de $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ est moyenne périodique s'il existe une fonctionnelle analytique non nulle μ de $\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$ telle que $\mu \star f = 0$.

Il est classique que l'étude des fonctions moyennes périodiques de $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ se ramène à celle des idéaux fermés de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$.

Comme dans [1], examinons le cas de $n=1$.

Soit $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_l)$ un l-uplet de fonctions de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$.

Nous noterons $I(\rho)=I(\rho_1, \ldots, \rho_l)$ l'idéal qu'elles engendrent dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ et $I_{\mathrm{loc}}(\rho)=I_{\mathrm{loc}}(\rho_1, \ldots, \rho_l)$ l'idéal local associé. Rappelons que $I_{\mathrm{loc}}(\rho)$ est l'ensemble des fonctions f de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$, telles que pour tout $z \in \Gamma$, il existe un ouvert U contenant z et l fonctions holomorphes dans $U, g_1, \ldots, g_l$ tels que $f_{|U}=\sum_{k=1}^{l} g_k \rho_{k|U}$. Rappelons aussi que l'idéal local $I_{\mathrm{loc}}(\rho)$ est fermé.

Nous avons besoin de la notion de fonctions doucement décroissantes au sens de BERENSTEIN-TAYLOR. Pour cela, soient $(\Gamma_k)_k$ une exhaustion de Γ et deux suites de nombres réels positifs $(\varepsilon_k)_k$ et $(\alpha_k)_k$, ε_k étant strictement positif pour tout k. Nous définissons :

$$S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)=\{z \in \Gamma(k) : |\rho(z)|<\varepsilon_k \exp(-\alpha_k |z|)\},$$

avec :

$$|\rho(z)|^2=\sum_{j=1}^{l} |\rho_j(z)|^2.$$

1.1. DÉFINITION. — Un l-uplet de fonctions $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_l)$ de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ sera dit doucement décroissant s'il existe : une exhaustion $(\Gamma_k)_{k \geqslant 1}$ de Γ, un nombre réel $A>0$ et trois suites de nombres réels positifs $(\alpha_k)_k$, $(\varepsilon_k)_k$ avec $\varepsilon_k>0$ pour tout k, la suite $(\varepsilon_k)_k$ étant croissante, la suite $(\alpha_k)_k$ tendant vers zéro en décroissant et tels que, pour tout k, les composantes connexes de $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ soient relativement compactes dans $\Gamma(k)$ et que si z et ζ sont dans la même composante connexe on ait :

$$|z| \leqslant A|\zeta|+B_k. \tag{1}$$

Remarques. — Le fait que ρ soit doucement décroissant dépend de l'exhaustion choisie alors que la topologie de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ n'en dépend pas.

Pour le voir il suffit de considérer une exhaustion $(\Gamma'_k)_k$ de Γ telle que ρ s'annule sur la frontière de Γ'_k.

— La définition que nous avions donnée en [11] supposait que $\alpha_k \equiv 0$ et que le diamètre des composantes connexes était, pour tout k, borné.

— Notre définition est plus générale que celle de [3].

1.2. PROPOSITION. — *Soit* ρ *une fonction doucement décroissante de* $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$. *On a* $I(\rho)=I_{\mathrm{loc}}(\rho)$.

Preuve. — Elle est la même que celle de [1] (*voir* aussi [3]).

Cas où $n \geqslant 2$. Examinons d'abord le cas discret. Nous prenons ici $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ avec $\rho_j \in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)(1 \leqslant j \leqslant n)$ où Γ est un cône de $\mathbb{C}^n$ vérifiant les hypothèses du théorème 2.2.5 de [11], il en existe (*cf.* [11], preuve de 2.2.7).

1.3. Définition. — Soit $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ un n-uplet de fonctions de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ (Γ comme ci-dessus), nous dirons que ρ est doucement décroissante s'il satisfait aux conditions de 1.1.

1.4. Théorème. — *Soit* $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ *un n-uplet de fonctions de* $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$, *doucement décroissant. L'idéal* $I(\rho)$ *est égal à son idéal local* $I_{\mathrm{loc}}(\rho)$.

Preuve. — Les conditions de 1.1 impliquent que la variété des zéros de ρ, $V(\rho)=\{z \in \Gamma \mid \rho_j(z)=0,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}$ est discret.

Soit $\lambda \in I_{\mathrm{loc}}(\rho)$, le théorème *B* de Cartan donne l'existence de n fonctions $(f_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ de $\mathscr{H}(\Gamma)$ telles que $\lambda=\sum_{j=1}^n f_j \rho_j$.

Comme $\lambda \in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$, pour tous $\varepsilon>0$, $k \geqslant 1$, il existe une constante $C>0$ telle que pour $z \in \Gamma(k)$ on ait :

$$|\lambda(z)| \leqslant C \exp(\varepsilon|z|).$$

L'inégalité (1) prouve que si Ω est une composante connexe de $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ et $z \in \Omega$ il existe des constantes positives C_k et D_k telles que :

$$\int_\gamma |d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n| \leqslant C_k \exp(D_k|z|),$$

où γ est le bord distingué de Ω (*cf.* [2], dont nous suivons les notations).

En effet, le corollaire 1.6 de [2], indique que, si :

$$L \geqslant C' M^{2n} \frac{\mathrm{vol}(\Omega(\eta))}{\eta_1 \ldots \eta_2 \ldots \eta_n},$$

on a :

$$\int_\gamma |d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n| < L,$$

avec ici $\mathrm{vol}(\Omega(\eta))=\mathrm{vol}(\Omega)$, $\eta_1=\eta_2=\ldots=\eta_n=\exp(-\alpha_k|z|)$, $C'=C'_k$ (i.e. C' dépend de k) et $M=C''_k \exp(\varepsilon|z|)$ où z est fixé sur $\partial\Omega$.

Par l'inégalité (1), on a :

$$\operatorname{vol}(\Omega) \leqslant \mathrm{Cte}(A\,|z|+B_k)^{2n},$$

avec une constante indépendante de k.

Soit C'_k tel que :

$$(A\,|z|+B_k)^{2n} \leqslant C'_k \exp(\varepsilon\,|z|),$$

en prenant $L = C_k C'_k \varepsilon_k^{-n} \exp\{((2n+1)\varepsilon + n\alpha_k)\,|z|\}$ on a :

$$\int_\gamma |d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n| < L.$$

Nous voulons appliquer la proposition 1.3 de [2]. Pour cela nous avons déjà, pour $z \in \Gamma(k)$:

$$|\lambda(z)| \leqslant A' \exp(\varepsilon\,|z|),\ |\rho_j(z)| \leqslant A' \exp(\varepsilon\,|z|)\ (1 \leqslant j \leqslant n)$$

et :

$$\int_\gamma |d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n| \leqslant C_k C'_k \varepsilon_k^{-n} \exp\{((2n+1)\varepsilon + n\alpha_k)\,|z|\}.$$

Il reste à majorer $|H(\zeta, z)|$ avec $H(\zeta, z) = \det(Q_{i,j}(\zeta, z))$ où les fonctions $Q_{i,j}$ sont telles que sur $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$ on ait :

$$\rho_i(\zeta) - \rho_i(z) = \textstyle\sum_{j=1}^n Q_{i,j}(\zeta, z)(\zeta_j - z_j) \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Il faut donc avoir l'analogue, dans un cône, du corollaire 2.5 de [2] et, pour cela, on se sert du théorème 4.1.2 de [15] qui donne des fonctions $Q_{i,j}$ telles que :

$$|Q_{i,j}(\zeta, z)| \leqslant A'_k \exp(\varepsilon'_k(|\zeta|+|z|)),$$

d'où $|H(\zeta, z)| \leqslant D_k \exp(\varepsilon\,|z|)$.

La proposition 1.3 de [2] donne des fonctions $(\alpha_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$, analytiques sur Ω, telles que, pour $z \in \Omega$, on ait :

$$\lambda(z) = \textstyle\sum_{i=1}^n \alpha_i(z)\,\rho_i(z),$$

avec :

$$(2) \qquad |\alpha_i(z)| \leqslant C''(A')^n D_k C_k C'_k \exp\{((3n+2)\varepsilon + n\alpha_k)\,|z|\},$$

où C'' est une constante indépendante de k, (2) se réécrit :

(2) $$|\alpha_i(z)| \leqslant C_1(k)\exp(F_k|z|) \quad \text{avec} \quad \lim_{k\to+\infty} F_k=0.$$

Comme la suite $(\varepsilon_k)_k$ est croissante et que la suite $(\alpha_k)_k$ est décroissante on a :

$$S(\rho;\, k,\, \varepsilon_k,\, \alpha_k) \subset S(\rho;\, k+1,\, \varepsilon_{k+1},\, \alpha_{k+1}).$$

Remarquons – cela est implicite dans [3] – que les fonctions α_i que nous venons de trouver dépendent de k (i. e. : sont définies sur des sous-ensembles de $\Gamma(k)$), mais les formules définissant ces fonctions sont « globales » (*cf.* [2]) car α_i est une combinaison, à coefficients produits de ρ_i, de fonctions α_s avec :

$$\alpha'_s(z)=\frac{1}{(2i\pi)^n}\int_\gamma \frac{\lambda(\zeta)H(\zeta,z)G_T(\zeta,z)}{\prod_{i=1}^n \rho_i(\zeta)G_i(\zeta,z)}\,d\zeta_1\wedge\ldots\wedge d\zeta_n,$$

où $G_i(\zeta,z)=\rho_i(\zeta)-\rho_i(z)$ et $G_T(\zeta,z)$ est un produit de $G_i(\zeta,z)$.

Comme $S(\rho;\, k,\, \varepsilon_k,\, \alpha_k)\subset S(\rho;\, \varepsilon_{k+1},\, \alpha_{k+1})$, les formules précédentes montrent que $\alpha_i^k=\alpha_i^{k+1}|_{\Gamma(k)}$ (i. e. on peut prolonger α_i^k aux sous-ensembles correspondants de $\Gamma(k+1)$). Donc les fonctions α_i sont en fait définies sur $\bigcup_k S(\rho;\, k,\, \varepsilon_k,\, \alpha_k)$ et $\lambda(z)=\sum_i \alpha_i(z)\,\rho_i(z)$ avec, pour $z\in\Gamma(k)$:

$$|\alpha_i(z)|\leqslant C_1(k)\,\exp(F_k|z|).$$

Soient $(\varepsilon_k^1)_k$ et $(\alpha_k^1)_k$ deux suites de nombres réels positifs comme en 1.1 et telles que pour tout k on ait :

$$\varepsilon_k^1<\varepsilon_k \qquad \text{et} \qquad \alpha_k^1>\alpha_k.$$

Soit χ une fonction à support dans $\bigcup_k S(\rho;k,\varepsilon_k,\alpha_k)$ valant 1 au voisinage le $\bigcup_k S(\rho;\, k,\, \varepsilon_k^1,\, \alpha_k^1)$ à valeurs dans [0,1] et telle que pour $z\in\Gamma(k)$ on ait :

$$|\bar{\partial}\chi(z)|\leqslant A_2(k)\,\exp(D'_k|z|),$$

ıvec $\lim_{k\to+\infty} D'_k=0$.

Nous suivons maintenant [2]. Remplaçons :

$$\alpha_i \text{ par } \tilde{\alpha}_i=\chi\alpha_i+\frac{\lambda\bar{\rho}_i(1-\chi)}{|\rho|^2}.$$

Les fonctions $\tilde{\alpha}_i$ sont de classe $\mathbb{C}^\infty$ sur Γ, $\tilde{\alpha}_i=\alpha_i$ sur :

$$\bigcup_k S(\rho;\, k,\, \varepsilon_k^1,\, \alpha_k^1) \qquad \text{et} \qquad \lambda=\sum_i \tilde{\alpha}_i\rho_i.$$

De plus, pour tout k, il existe des constantes positives $A_3(k)$ et D_k'' avec $\lim_{k\to+\infty} D_k''=0$ telles que, sur $\Gamma(k)$, on ait :

$$|\bar{\partial}\tilde{\alpha}_i(z)|\leqslant A_3(k)\exp(D_k''|z|).$$

Rappelons (*cf.* [11] chapitre 2) que :

$$\mathring{\mathscr{L}}_2(\Gamma \perp\!\!\perp \operatorname{pr}\Gamma\}=\{f\in L^2_{\mathrm{loc}}(\Gamma)\,|\,\forall\,\Gamma' \text{ sous cône } \subset\subset \Gamma,$$

$$\forall\,\delta,\,\varepsilon>0 \int_{\Gamma' \setminus B(0,\,\delta)} |f(z)|^2\exp(-\varepsilon|z|)\,d\lambda(z)<+\infty\}.$$

On a ainsi obtenu que $\bar{\partial}\tilde{\alpha}_i\in\mathring{\mathscr{L}}_2^{0,1}(\Gamma \perp\!\!\perp \operatorname{pr}\Gamma)$.

Nous utiliserons, comme dans [9], le complexe de Koszul en notant $L_r^s=\Lambda^s(\mathbb{C}^n)\otimes\mathring{\mathscr{L}}_2^{0,r}(\Gamma \perp\!\!\perp \operatorname{pr}\Gamma)$, P_ρ désignant l'habituel produit intérieur par $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_n)$. On obtient un double complexe :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
\dashrightarrow & & L_r^s & \xrightarrow{\ \bar{\partial}\ } & L_{r+1}^s & \xrightarrow{\ \bar{\partial}\ } & L_{r+2}^s & \dashrightarrow & \\
 & & {\scriptstyle P_\rho}\uparrow & & {\scriptstyle P_\rho}\uparrow & & {\scriptstyle P_\rho}\uparrow & & \\
\dashrightarrow & & L_r^{s+1} & \xrightarrow{\ \bar{\partial}\ } & L_{r+1}^{s+1} & \xrightarrow{\ \bar{\partial}\ } & L_{r+2}^{s+1} & \dashrightarrow & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & &
\end{array}$$

Remarquons que les lignes sont exactes (par le théorème 2.2.5 de [11]).

Nous allons appliquer les résultats de [9], p. 227 et 228 : on a alors le lemme ([9], lemme 2.4) : soient $h_1,\ldots,h_l\in\operatorname{Exp}_c(\Gamma,0)$ telles que $|h|\not\equiv 0$ où $h=(h_1,\ldots,h_l)$. Supposons que $g\in L_r^0(0\leqslant r\leqslant n)$ est tel que $\bar{\partial}g=0$ et que $g/|h|^2\in L_r^0$ alors $\bar{\partial}(h_ig/|h|^2)\in L_{r+1}^0$ pour $1\leqslant i\leqslant n$.

Preuve. — Immédiate.

Les deux résultats suivants ont une preuve analogue à celle de [9] :

PROPOSITION ([9], proposition 2.5). — *Soient r, $s\geqslant 0$ et $k>1$ des entiers, $\alpha\in L_r^s$ tel que $P_F(\alpha)=0$, où $F=(F_1,\ldots,F_N)$, et $\alpha/\|F\|^k\in L_r^s$. Il existe $\beta\in L_r^{s+1}$ tel que $P_F\,\beta=\alpha$ et $\beta\,\|F\|^{1-k}\in L_r^{s+1}$. De plus si $k>1$ et $\bar{\partial}\alpha=0$ on peut prendre β tel que $\bar{\partial}\beta\,\|F\|^{2-k}\in L_{r+1}^{s+1}$.*

THÉORÈME ([9], théorème 2.6). — *Soit $\alpha\in L_r^s$ tel que $\bar{\partial}\alpha=P_F\,\alpha=0$ et que* $\bar{\partial}\alpha=P_F\,\alpha=0$ et que $\alpha\,\|F\|^{-k}\in L_r^s$. *Pour $k\geqslant\operatorname{Min}(2(n-r)+1,\,2(N-s)-1)$, il* *existe* $\beta \in L_r^{s+1}$ *tel que* $\bar\partial\beta=0$ *et* $P_F\,\beta=\alpha$.

Revenons à notre problème et posons :

$$\alpha'=\tilde\alpha_1 e_1+\ldots+\tilde\alpha_n e_n \in L_0^1 \qquad \text{et} \qquad \alpha=\bar\partial\alpha',$$

comme $P_\rho\,\alpha'=\lambda$ on a $\bar\partial\alpha=P_\rho\,\alpha=0$.

De plus, pour tout p, $\alpha/|\rho|^p \in L_r^s$ (car $\alpha=0$ là où ρ est petit) et que :

$$\frac{\alpha}{|\rho|^p}=\sum_{i=1}^n\left(\alpha_i\bar\partial\chi+\lambda\left(\frac{-\bar\rho_i}{|\rho|^2}\bar\partial\chi\ +(1-\chi)\left\{\frac{\overline{\partial\rho_i}}{|\rho|^2}-\frac{\rho_i\sum_j\rho_j\overline{\partial\rho_j}}{|\rho|^4}\right\}\right)\right)\frac{e_i}{|\rho|^p},$$

on a donc pour $z\in\Gamma(k)$:

$$\frac{|\alpha(z)|}{|\rho(z)|^p}\leqslant C(k)\exp(\varepsilon|z|).$$

Comme $\alpha\in L_1^1$ par le théorème précédent il existe $\beta\in L_1^2$ tel que $\bar\partial\beta=0$ et $P_\rho\,\beta=\alpha$.

L'exactitude des lignes du complexe de Koszul montre qu'il existe $\Theta\in L_0^2$ tel que $\bar\partial\Theta=\beta$.

Soit $\alpha'-P_\rho\,\Theta=\tau\in L_0^1$. On a $P_\rho\,\tau=\lambda$ et $\bar\partial\tau=0$. Écrivons :

$$\tau=\tau_1 e_1+\ldots+\tau_n e_n.$$

On a $\tau_i\in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ et $P_\rho(\tau)=\tau_1\rho_1+\ldots+\tau_n\rho_n=\lambda$. Ceci prouve que $\lambda\in I(\rho_1,\ldots,\rho_n)$. ■

Cas non discret, n quelconque $(n>2)$. Soient $\rho=(\rho_j)_{1\leqslant j\leqslant m}$ $(1\leqslant m<n)$ un m-uplet de fonctions de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ et $\mathscr{L}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathbb{C}^n$ de dimension m telle que :

$$\bigcup_{L\in\mathscr{L}}(L\cap\Gamma)\supseteq\{z\in\Gamma : \rho_1(z)=\ldots=\rho_m(z)=0\}.$$

1.5. Définition. — Soit $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_m)$ un m-uplet de fonctions de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$. Nous dirons que ρ est doucement décroissant s'il existe : une famille $\mathscr{L}$ de sous-espaces affines de dimension m (comme précédemment), des suites de nombres réels $(\varepsilon_k)_{k\geqslant 1}$, $(\alpha_k)_{k\geqslant 1}$ et $(B_k)_{k\geqslant 1}$ et un nombre réel A (comme en 1.1) tels que pour tout $L\in\mathscr{L}$ et tout k, l'ensemble relativement ouvert :

(3) $\quad S(\rho; L, k, \varepsilon_k, \alpha_k)=\{z\in L\cap\Gamma(k)\mid |\rho(z)|<\varepsilon_k\exp(-\alpha_k|z|)\}$,

ait toutes ses composantes connexes relativement compactes (dans $L\cap\Gamma(k)$) et, si z, ζ sont dans la même composante connexe, on ait :

$$|z|\leqslant A|\zeta|+B_k.$$

Nous voulons prouver que, sous ces conditions, on a $I_{\text{loc}}(\rho)=I(\rho)$. Pour cela nous suivrons la preuve de [2], chapitre 5.

1.6. THÉORÈME. — *Soit* $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_m)$ *un m-uplet de fonctions de* $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$ *doucement décroissant par rapport à une famille* $\mathscr{L}$ *de sous-espaces affines de dimension m, analytiques et presque parallèles. On a* $I_{\text{loc}}(\rho)=I(\rho)$.

Remarque. — Les notions de famille analytique et presque parallèle sont introduites dans [2]. Nous les rappelons lors de la preuve de 1.6.

Preuve de 1.6. — Soit Ω un ouvert de $\Gamma(k)$. On dira que Ω est un « bon » ouvert (par rapport à ρ et $\mathscr{L}$) s'il existe une composante connexe G de $S(\rho; L, k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ telle que :

$$\Omega=\{z\in\Gamma(k) : \exists\zeta\in G \text{ tel que } |z-\zeta|<\varepsilon_k^1 \exp(-\alpha_k^1 |z|)\},\tag{4}$$

avec $\alpha_k^1\geqslant 0$.

Quand ε_k, α_k, ε_k^1 et α_k^1 sont fixés la famille $\mathscr{C}_k$ de tous les Ω forme ce qu'on appelle une bonne famille. Si, dans la définition de (4), on diminue ε_k et on augmente α_k, ε_k^1 étant diminué et α_k^1 augmenté, on obtient par (4) une autre bonne famille $\mathscr{C}'_k$, qui est un raffinement de $\mathscr{C}_k$.

Nous dirons que la famille $\mathscr{L}$ est presque parallèle si pour tout k, étant donné une bonne famille $\mathscr{C}_k$, il existe un (bon) raffinement $\mathscr{C}'_k$ de $\mathscr{C}_k$ tel que pour Ω_0 et Ω_1 éléments de $\mathscr{C}'_k$ si :

$$\Omega_0\cap\Omega_1\neq\emptyset \qquad \text{alors} \quad \overline{\Omega}_0\cup\overline{\Omega}_1\subset r(\Omega_0)\cap r(\Omega_1),\tag{5}$$

où r désigne l'application de raffinement.

On utilise aussi le double complexe $\mathscr{A}_q^r=\mathscr{A}_q^r(\mathscr{C}_k)$ en prenant la définition de [3], p. 9 :

On dit que $\gamma\in\mathscr{A}^r$ si γ est une fonction alternée sur $(\mathscr{C}_k)^{r+1}$ telle que $\gamma(\Omega_0,\ldots,\Omega_r)\in\mathscr{H}(\Omega_0\cap\ldots\cap\Omega_r)$ et que pour tout $\varepsilon>0$, il existe $A_{\varepsilon,k}\geqslant 0$ tel que pour $z\in\Omega_0\cap\ldots\cap\Omega_r$ on ait :

$$|\gamma(z)|\leqslant A_{\varepsilon,k}\exp(\varepsilon|z|).$$

Pour $1\leqslant l\leqslant m$, on note :

$$\mathscr{A}_q^r=\mathscr{A}^r\otimes\Lambda^q\mathbb{C}^l.$$

On a un double complexe :

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & \\
{} \arrow[r, dashed] & \mathscr{A}^r_q \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "P_\rho"] & \mathscr{A}^{r+1}_q \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{A}^{r+2}_q \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & \mathscr{A}^r_{q-1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathscr{A}^{r+1}_{q-1} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d] & \mathscr{A}^{r+2}_{q-1} \arrow[r, dashed] \arrow[d] & {} \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

où δ est l'opérateur « cobord » en cohomologie de Čech et P_ρ (parfois noté P) est le produit intérieur par ρ dans le complexe de Koszul.

Exactement comme dans [2], on prouve la :

1.7. Proposition. — *Soit $\mathscr{C}_k$ (pour k fixé) une bonne famille. Soit $w \in \mathscr{A}^{r+1}_q(\mathscr{C}_k)$ tel que $\delta w = 0$. Il existe une bonne famille $\mathscr{C}'_k$ (raffinement de $\mathscr{C}_k$) et $\eta \in \mathscr{A}^r_q(\mathscr{C}'_k)$ tel que* $\operatorname{rest}(w) = \delta\eta$ (rest : *application de restriction*).

On remplace le théorème 5.3 de [2] par le suivant de [3], p. 10.

1.8. Théorème. — *Soit $\mathscr{C}_k$ une bonne famille relativement à une famille de sous-espaces affines presque parallèles. On a :*

(i) *Pour q et $r \geqslant 1$ il existe un bon raffinement $\mathscr{C}'_k$ de $\mathscr{C}_k$ tel que, pour tout $w \in \mathscr{A}^r_q(\mathscr{C}_k)$ vérifiant $Pw = 0$, il existe $\eta \in \mathscr{A}^r_{q+1}(\mathscr{C}'_k)$ tel que* $\operatorname{rest}(w) = P\eta$.

(ii) *Soit $r \geqslant 0$. Il existe un bon raffinement $\mathscr{C}'_k$ de $\mathscr{C}_k$ tel que, pour tout $w = (w^J)$ élément de $\mathscr{A}^r_0(\mathscr{C}_k)$ tel que w^J appartienne à l'idéal engendré par $\rho_1, \ldots, \rho_l$ dans $\mathscr{H}(\Omega_{j_0} \cap \ldots \cap \Omega_{j_r})(J = (j_0, \ldots, j_r))$, il existe $\eta \in \mathscr{A}^r_1(\mathscr{C}'_k)$ tel que* $\operatorname{rest}(w) = P\eta$.

Preuve. — *Cf.* [3] et [2] (en remarquant que la majeure partie de la preuve de [2] est de « nature algébrique » et que la partie différente est traitée par [3]).

1.9. Corollaire. — *Soit $\mathscr{L}$ une famille presque parallèle, $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$ un m-uplet de fonctions doucement décroissant par rapport à $\mathscr{L}$ et $\mathscr{C}_k$ une bonne famille d'ensembles. Il existe un bon raffinement $\mathscr{C}'_k$ de $\mathscr{C}_k$ tel que :*

(i) *Si $q \geqslant 1$, $w \in \mathscr{A}^r_q(\mathscr{C}_k)$, $Pw = \delta w = 0$, il existe $\eta \in \mathscr{A}^r_{q+1}(\mathscr{C}'_k)$ tel que $P\eta = \operatorname{rest}(w)$ et $\delta\eta = 0$.*

(ii) *Si $w = (w^J) \in \mathscr{A}^r_0(\mathscr{C}_k)$, $\delta w = 0$ et si pour tout J, w^J appartient à l'idéal de $\mathscr{H}(\Omega_{j_0} \cap \ldots \cap \Omega_{j_r})$ engendré par $\rho_1, \ldots, \rho_l (J = (j_0, \ldots, j_r))$ alors il existe $\eta \in \mathscr{A}^r_1(\mathscr{C}'_k)$ tel que $\operatorname{rest}(w) = P\eta$ et $\delta\eta = 0$.*

Preuve. — C'est une chasse au diagramme en utilisant 1.8 et 1.7.

Pour conclure nous aurons besoin de la notion de famille analytique (d'espaces affines) en reprenant la définition de [2].

1.10. DÉFINITION. — Nous dirons qu'une famille $\mathscr{L}$ de sous-espaces affines de dimension m est analytique, si pour tout k, il existe une bonne famille $\mathscr{C}_k$ associées à $\mathscr{L}$ telle que :

Soient $L \in \mathscr{L}$ et $\Omega \in \mathscr{C}_k$ (associée à L). Il existe des coordonnées locales (s, t) sur Ω telles que :

$$\Omega \cap \{(s, t) : t=0\} = \Omega \cap L$$

et si c est une constante, il existe $L_c \in \mathscr{L}$ telle que :

$$\Omega \cap \{(s, t) : t=c\} = \Omega \cap L_c.$$

On a alors le :

1.11. THÉORÈME. — *Soit* $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_m)$ *un m-uplet de fonctions de* $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$ *doucement décroissant par rapport à une famille analytique et presque parallèle d'espaces affines de dimension m. Soit V la variété de multiplicité de* ρ. *Supposons que, pour tout* $\varepsilon>0$ *et tout k, il existe* $A_{\varepsilon, k}>0$ *et que pour tout* $L \in \mathfrak{L}$, *il existe* $\tilde{\lambda}_L$ *analytique sur L tel que :*

(i) $|\tilde{\lambda}_L(z)| \leqslant A_{\varepsilon, k} \exp(\varepsilon |z|)$ *pour* $z \in \Gamma(k)$;

(ii) $\tilde{\lambda}_L$ *restreint à* $V \cap L$ *soit égal à la restriction de* λ *à* $V \cap L$.

Sous ces conditions il existe $\tilde{\lambda} \in \operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$ *tel que* $\tilde{\lambda} \mid V=\lambda$.

Preuve. — Analogue à celle de [2].

La preuve du théorème 1.6 est maintenant complète.

Dans toute la suite, pour $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant l < n$ un l-uplet de fonctions sera doucement décroissant par rapport à une famille analytique et presque parallèle de sous-espaces affines de dimension l de $\mathbb{C}^n$.

Nous allons terminer cette partie en étudiant les idéaux de $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$.

1.12. THÉORÈME. — *Soient* $f_1, \ldots, f_N$ *N fonctions de* $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$.

Ces fonctions engendrent $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$ *si et seulement si, pour tout* $\varepsilon>0$ *et tout* $k \geqslant 1$, *il existe* $A_{k, \varepsilon}>0$ *tel que pour tout* $z \in \Gamma(k)$ *on ait :*

$$\sum_{j=1}^{N} |f_j(z)| \geqslant A_{k, \varepsilon} \exp(-\varepsilon |z|).$$

Preuve. — C'est la même que celle de [7] en utilisant cette fois-ci, le théorème 2.2.5 de [11] (*voir* aussi [16]).

Nous allons maintenant regarder le contre-exemple de [5] dans le cas de nos espaces.

1.13. THÉORÈME. — *Soit* Γ *un secteur ouvert convexe de* $\mathbb{C}$ *de sommet l'origine. L'espace* $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ *est sans synthèse spectrale* (*i. e. : il existe un sous-espace invariant fermé non trivial et sans exponentielles monômes non nulles*).

Preuve. — Par rotation, nous pouvons supposer que $\Gamma=\{z\in\mathbb{C} \mid |\operatorname{Arg} z|<\pi/\alpha\}$ avec $\alpha\geqslant 1$ et, pour simplifier, nous supposerons que $\alpha=4$.

Sous ces conditions, la fonction $\rho(z)=\exp(-z^2)$ est élément de $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$. Comme $1/\rho\notin \operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$, on voit que $I_{\mathrm{loc}}(\rho)\neq I(\rho)$. Nous allons voir que $\bar{I}(\rho)\neq I_{\mathrm{loc}}(\rho)$ en utilisant la preuve de [5] (proposition 111).

Raisonnons par l'absurde. Si $I_{\mathrm{loc}}(\rho)=\bar{I}(\rho)$, il existerait une famille de fonctions $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que $\lim_{\varepsilon\to 0}\rho f_\varepsilon=1$ dans $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$.

Nous prendrons l'exhaustion $(\Gamma_k)_k$ de Γ suivante :

$$\Gamma_k=\left\{z\in\mathbb{C} \mid |\operatorname{Arg} z|<\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{\pi}{4}\right\} \qquad (k\geqslant 2).$$

Pour $z\in\Gamma(k)$ on a :

$$|\rho(z)f_\varepsilon(z)-1|\leqslant\varepsilon_k\exp\left(\frac{1}{k}|z|\right),$$

avec $\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon_k=0$ (pour tout k).

Nous prenons $k=2$ et considérons l'application :

$$\Gamma_2\to\mathbb{C}^+=\{w \mid \operatorname{Re} w>0\},$$
$$z\to z^4.$$

Nous obtenons (avec un changement de notation) sur $\mathbb{C}^+$:

$$(6) \qquad |\tilde{\rho}(z)g_\varepsilon(z)-1|\leqslant\varepsilon_k\exp\left(\frac{1}{k}|z|^{1/4}\right) \quad \text{si} \quad |z|>\left(\frac{1}{2}\right)^{1/4}.$$

Nous continuons comme [5] avec :

$$G=\{z\in\mathbb{C}^+ \mid \operatorname{Re}\sqrt{z}\geqslant|z|^{1/4}, |z|>1\}$$

(nous prenons la détermination principale du logarithme) et :

$$g(z)=\frac{1}{2}\exp(-2\sqrt{4-2\sqrt{2}}\,z^{1/4}).$$

On prouve aisément que si $z\in\partial G$ on a :

$$|g_\varepsilon(z)g(z)|\leqslant 1.$$

Comme la fonction $g_\varepsilon g$ est d'ordre <1, le principe de Phragmen-Lindelöff prouve qu'on a encore pour $z\in G$:

$$|g_\varepsilon(z)\, g(z)|\leqslant 1.$$

Par suite :

$$|g_\varepsilon(z)\,\tilde{\rho}(z)|=|g_\varepsilon(z)\exp(-\sqrt{z})|\leqslant \frac{\exp(-\operatorname{Re}\sqrt{z})}{|g(z)|}$$

$$\leqslant 2\exp(2\sqrt{4-2\sqrt{2}}\operatorname{Re} z^{1/4}-\operatorname{Re}\sqrt{z}),$$

donc, si $z=x$ est réel et tend vers $+\infty$, on obtient que $\lim_{x\to+\infty}|g_\varepsilon(x)\,\tilde{\rho}(x)|=0$ uniformément en ε ce qui contredit (6).

1.14. COROLLAIRE. — *Soit Γ un secteur ouvert convexe de $\mathbb{C}$ de sommet l'origine. L'espace $\mathscr{H}_\varepsilon(\Gamma^*)$ est sans synthèse spectrale.*

Preuve. — Remarquons que $\operatorname{Exp}_\varepsilon(\Gamma, 0)$ s'injecte continûment dans $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$. Pour les mêmes raisons que ci-dessus il suffit de considérer $\Gamma=\{z\mid |\operatorname{Arg} z|<\pi/4\}$. La fonction $\rho(z)=\exp(-z^2)$ est élément de $\operatorname{Exp}_\varepsilon(\Gamma, 0)$ tandis que $1/\rho$ ne l'est pas. L'injection continue de $\operatorname{Exp}_\varepsilon(\Gamma, 0)$ dans $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$ et la preuve précédente démontrent le corollaire.

2. Cas où a est quelconque

Ici $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, a)$ n'est plus une algèbre, donc si μ est élément de $\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))$ et $f\in\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$ on ne peut pas définir de manière « raisonnable », $\mu\star f$ comme élément de $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$.

Soient a et b deux fonctions d'appui sur un cône Γ et $\mu\in\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, b))$. Nous voulons définir l'opérateur de convolution par μ de $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$ dans lui-même :

$$\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))\to\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a)),$$
$$f\mapsto\mu\star f.$$

Si cette opération existait μ serait (par dualité) un opérateur de convolution sur $\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))$:

$$\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))\to\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a)),$$
$$\nu\mapsto\mu\star\nu$$

et $\mathscr{F}(\mu)=\rho$ serait un multiplicateur (continu) de $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, a)$. Or, nous savons caractériser les multiplicateurs continus de $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, a)$.

2.1. PROPOSITION. — *Si $\rho\in\mathscr{H}(\Gamma)$ est telle que la multiplication par ρ soit un multiplicateur continu de $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, a)$ alors $\rho\in\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$.*

Preuve. — Soit $(\Gamma_k)_{k\geqslant 1}$ une exhaustion de Γ. La topologie de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ est définie par la famille de normes suivantes :

$$q_k(f)=\mathrm{Sup}_{z\in\Gamma(k)}\left|f(z)\exp\left(-a(z)-\frac{1}{k}|z|\right)\right|.$$

La continuité de la multiplication par ρ donne :

$$\forall k\geqslant 1,\quad \exists k'\geqslant 1,\quad \exists A_k>0 \qquad \text{tels que} \quad \forall f\in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a),$$

on ait :

$$q_k(f\rho)\leqslant A_k q_{k'}(f).$$

Pour $\zeta\in\Omega(\Gamma, a)$, la fonction $f(z)=\exp(i\langle z, \zeta\rangle)$ est élément de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ de plus $q_{k'}(f)\leqslant 1$. Donc, pour $z\in\Gamma(k)$, on a :

$$|\rho(z)|\leqslant A_k \exp\left(\mathrm{Im}\langle z, \zeta\rangle+a(z)+\frac{1}{k}|z|\right).$$

Pour z fixé choisissons $\zeta\in\Omega(\Gamma, a)$ tel que $\mathrm{Im}\langle z,\zeta\rangle+a(z)=0$. On obtient :

$$|\rho(z)|\leqslant A_k \exp\left(\frac{1}{k}|z|\right). \quad \blacksquare$$

Plus généralement on a la :

2.2. PROPOSITION. — *Soient $\Omega=\Omega(\Gamma, a)$ un convexe fermé non borné de $\mathbb{C}^n$ d'intérieur non vide et S un endomorphisme continu de $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$ permutant avec tout opérateur aux dérivées partielles à coefficients constants (ou avec les translations) alors S est un convoluteur de $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$ i.e. il existe* $\rho\in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ *tel que S soit la convolution par* $\mathscr{F}^{-1}(\rho)$.

Preuve. — L'application L suivante :

$$L:\ \Omega\to \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a),$$
$$z\mapsto(\zeta\to\exp(i\langle z, \zeta\rangle)=e_z(\zeta)),$$

est continue sur Ω et holomorphe dans $\mathring{\Omega}$ donc l'application suivante :

$$\Omega\to\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a)),$$
$$z\mapsto\delta_z,$$

a la même propriété.

Notons T l'application transposée de S et $G(z, \zeta)=\exp(-i\langle z, \zeta\rangle)$ $\mathscr{F}(T(\delta_z))(\zeta)$. La fonction G est holomorphe sur $\mathring{\Omega}\times\Gamma$ et continue sur $\Omega\times\Gamma$, de plus, pour tout $j(1\leqslant j\leqslant n)$, on a $\partial G/\partial z_j=0$ donc $G(z, \zeta)=G(\zeta)$ (i. e. G est indépendant de z). L'ensemble $(e_z)_{z\in\Omega}$ est un borné de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ (car absorbé par tout voisinage de zéro) donc l'ensemble $(\delta_z)_{z\in\Omega}$ est un borné de $\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))$. Pour tout $z\in\Omega$ la fonction $G.e_z$ est élément de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$, de plus l'application T étant continue est, en particulier, bornée donc (comme pour la démonstration de 2.1) on a facilement $\rho=G\in\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$. D'où la proposition.

2.3. Proposition. — (i) *Soient* $\mu\in\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$ *et* $f\in\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$. *Pour* ζ *voisin de* $\Omega(\Gamma, a)$, *la fonction* $\tau_\zeta(f)$: $z\mapsto f(z+\zeta)$ *est élément de* $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ *et :*

$$\zeta\to\mu\star f(\zeta)=\langle\mu, \tau_\zeta(f)\rangle,$$

est élément de $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$; *de plus, si* $\nu\in\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))$, *on définit l'élément* $\mu\star\nu$ *de* $\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))$ *par :*

$$\langle\mu\star\nu, f\rangle=\langle\nu, \mu\star f\rangle \quad \textit{pour tout } f\in\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$$

et on a :

$$\mathscr{F}(\mu\star\nu)=\mathscr{F}(\mu).\mathscr{F}(\nu).$$

(ii) *Soit* $\mu\in\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$ *tel que* $\mathscr{F}(\mu)$ *soit la restriction à* Γ *d'une fonction entière de type exponentiel nul, alors* $\mu\star f=\sum_\alpha a_\alpha D^\alpha f$ *(série convergente dans* $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$) (*i.e.* μ *est un opérateur différentiel d'ordre infini*).

Preuve. — (i) C'est la même que celle de [11].

(ii) Comme $\mathscr{F}(\mu)$ est une fonction entière de type exponentiel, d'après [10] proposition 4, $\mathscr{F}(\mu)$ est limite de son développement de Taylor à l'origine dans l'espace des fonctions entières de type exponentiel. Donc $\mathscr{F}(\mu)$ est limite de ce développement taylorien dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$. Ce qui donne le résultat.

Remarque. — Nous voyons donc que les éléments de $\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$ peuvent être considérés comme des opérateurs différentiels d'ordre infini dans un cône.

Nous dirons qu'une fonction f de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ est moyenne périodique s'il existe une fonctionnelle analytique non nulle μ de $\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$ telle que $\mu\star f=0$. Pour l'étude de la synthèse spectrale, comme en 1.1, nous aurons besoin d'étudier des ensembles de la forme $\rho\,\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ (avec $\rho\in\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$) et le module local engendré par ρ dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$.

Soit $\rho=(\rho_1,\ldots, \rho_m)$ un m-uplet de fonctions de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$, nous appellerons module engendré par ρ dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ et nous noterons $M(\rho)$, l'ensemble :

$$M(\rho)=\{f\in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a) \mid \exists g_1,\ldots, g_m \in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a) \text{ tel que } f=\textstyle\sum_j \rho_j g_j\}.$$

Le module local $M_{\mathrm{loc}}(\rho)$ engendré par ρ dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ se définit comme $I_{\mathrm{loc}}(\rho)$ et est fermé.

Nous voulons que $M_{\mathrm{loc}}(\rho)=M(\rho)$ pour cela nous aurons besoin (lorsque $a\not\equiv 0$) d'une notion de fonctions doucement décroissantes qui sera exactement celle de [3] et sera par conséquent, plus restrictive que celle que nous avions en 1.1.

2.4. Définition [3]. — Soit $\rho=(\rho_1,\ldots, \rho_n)$ un n-uplet de fonctions de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$. Nous dirons que ρ est faiblement doucement décroissant s'il existe deux suites de nombres réels positifs $(\varepsilon_k)_k$, $(\alpha_k)_k$ telles que $\varepsilon_k>0$ pour tout k, que la suite $(\alpha_k)_k$ tende vers zéro en décroissant et que l'ensemble :

$$S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)=\{z\in\Gamma(k) : |\rho(z)|<\varepsilon_k \exp(-\alpha_k|z|)\},$$

ait toutes ses composantes connexes relativement compactes et telles que, pour tout k, le diamètre des composantes connexes soit uniformément majoré.

2.5. Proposition ($n=1$). — *Soit ρ une fonction faiblement doucement décroissante de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$. Pour toute fonction d'appui a sur Γ, le module $M(\rho)$ engendré par ρ dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ est égal à son module local.*

Preuve. — (Elle est analogue à celles de [1] et de [3], toutefois notre démonstration est différente sur un point, il nous paraît intéressant de la refaire).

Soit $f\in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ tel que $f/\rho=h\in \mathscr{H}(\Gamma)$. Comme $f\in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ on sait que :

$$\forall\varepsilon>0,\quad \forall k\geqslant 1,\quad \exists A_{k,\varepsilon}>0 \qquad \text{tel que}\quad |f(z)|\leqslant A_{k,\varepsilon}\exp(a(z)+\varepsilon|z|),$$

pour $z\in\Gamma(k)$. Donc, pour z sur la frontière de $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$, on aura :

$$|h(z)|\leqslant A_{k,\varepsilon}\varepsilon_k^{-1}\exp(a(z)+(\varepsilon+\alpha_k)\,|z|).$$

Soit Ω une composante connexe de $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$.

Le principe du maximum prouve que pour $\zeta \in \Omega$ on a :

$$|h(\zeta)| \leqslant A_{k,\varepsilon}\, \varepsilon_k^{-1} \operatorname{Sup}_{z \in \partial\Omega} \exp(a(z) + (\varepsilon + \alpha_k)\,|z|).$$

Soit d_k un majorant du diamètre des composantes connexes de $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$; pour z et $z' \in \Gamma(k)$ tels que $|z - z'| \leqslant d_k$ on a :

$$\left| \frac{z}{|z|} - \frac{z'}{|z|} \right| \leqslant \frac{d_k}{|z|},$$

donc $z'/|z|$ est voisin de $\operatorname{pr}\Gamma_k$ si $|z|$ est grand. D'où :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0 \quad \text{tel que la condition} \quad \left| \frac{z}{|z|} - \frac{z'}{|z|} \right| \leqslant \eta,$$

qui est réalisée si $|z| > d_k/\eta$ implique :

$$|a(z) - a(z')| \leqslant \varepsilon\, |z|.$$

De plus, il existe M tel que, si $|z|$ ou $|z'|$ n'est pas trop grand, on ait $a(z) \leqslant a(z') + M$.

Donc, pour $z \in \partial\Omega$, on a :

$$\exp(a(z) + (\varepsilon + \alpha_k)\,|z|) \leqslant \exp(a(\zeta) + M + (2\varepsilon + \alpha_k)\,|z|).$$

Si on prend ε et α_k tels que $2\varepsilon + \alpha_k \leqslant 1/k$ on aura :

$$|h(\zeta)| \leqslant A_{k,\varepsilon}\, \varepsilon_k^{-1} \exp(M + d_k/k + a(\zeta) + |\zeta|\, k^{-1})$$

$$\text{i.e.} \quad |h(\zeta)| \leqslant B_k \exp\left(a(\zeta) + \frac{|\zeta|}{k} \right).$$

Comme une telle inégalité est évidente hors de $S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ on a bien $h \in \operatorname{Exp}_c(\Gamma, a)$. Doù la proposition.

Il nous reste le cas général : $n \geqslant 2$.

2.6. Théorème. — *Soit* $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ *un n-uplet de fonctions faiblement doucement décroissant de* $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, 0)$. *Pour toute fonction d'appui a sur* Γ *le module* $M(\rho)$ *est égal à son module local.*

Preuve. — Il suffit de modifier la preuve de 1.4, en remarquant que les majorations utilisaient uniquement les propriétés du n-uplet $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ et en utilisant l'espace $\mathring{\mathscr{L}}_2(\Gamma \perp\!\!\!\perp \operatorname{pr}\Gamma)$ (*cf.* [11], théorème 2.2.5 ou bien [15], théorème 7.3). Cas de l fonctions ($1 \leqslant l \leqslant n$).

Soit $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_l)$ un l-uplet de fonctions de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma,0)$ et $\mathscr{L}$ une famille d'espaces affines de dimension l telle que :

$$\bigcup_{L\in\mathscr{L}}(L\cap\Gamma)\supseteq\{z\in\Gamma : \rho_1(z)=\ldots=\rho_l(z)=0\}.$$

2.7. Définition. — Le l-uplet de fonctions $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_l)$ sera dit faiblement doucement décroissant par rapport à la famille $\mathscr{L}$ s'il existe deux suites de nombres réels $(\varepsilon_k)_k$ et $(\alpha_k)_k$ comme en 1.1 telles que, pour tous $L\in\mathscr{L}$ et $k\geqslant 1$ l'ensemble relativement ouvert :

$$S(\rho;\, L,\, k,\, \varepsilon_k,\, \alpha_k)=\{z\in L\cap\Gamma(k) : |\rho(z)|<\varepsilon_k\exp(-\alpha_k|z|)\},$$

ait toutes ses composantes connexes relativement compactes et de diamètres uniformément majorés (pour tout k).

De même qu'en 1.6 nous avons le :

2.8. Théorème. — *Soit* $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_l)$ *un l-uplet de fonctions faiblement doucement décroissant par rapport à une famille* $\mathscr{L}$ *d'hyperplans presque parallèle et analytique. Pour toute fonction d'appui a sur* Γ *on a* $M(\rho)=M_{\mathrm{loc}}(\rho)$.

Nous étudierons la synthèse spectrale dans nos espaces au prochain paragraphe. Remarquons d'abord que :

2.9. Proposition. — *Soit* $\rho=(\rho_1,\ldots,\rho_m)$ *un m-uplet de fonctions faiblement doucement décroissant de* $\mathrm{Exp}_c(\Gamma,0)$. *Pour toute fonction d'appui a sur* Γ, *l'espace* $[\mathrm{Exp}_c(\Gamma,a)/M(\rho)]$ *s'identifie à un sous-espace de* $[\mathrm{Exp}_c(\Gamma,0)/I(\rho)]'$.

Preuve. — Soit $\zeta\in\Omega(\Gamma,a)$ (fixé une fois pour toute). L'application :

$$\varphi_\zeta :\ \mathrm{Exp}_c(\Gamma,0)\to\mathrm{Exp}_c(\Gamma,a),\qquad f\mapsto fe_\zeta,$$

passe au quotient pour définir une application injective que nous noterons $\dot\varphi_\zeta$:

$$\dot\varphi_\zeta :\ \mathrm{Exp}_c(\Gamma,0)/I(\rho)\to\mathrm{Exp}_c(\Gamma,a)/M(\rho).$$

Montrons que $\dot\varphi_\zeta$ est d'image dense. Il suffit, pour celà, de voir que φ_ζ est d'image dense.

Soit donc $g\in\mathrm{Exp}_c(\Gamma,a)$; alors $g.\exp(-i\langle z,\zeta\rangle)$ est élément de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma,b)$ avec $b(z)=a(z)+\mathrm{Im}\langle z,\zeta\rangle$. Comme pour tout $z\in\Gamma$, $b(z)\geqslant 0$, l'espace vectoriel engendré par les fonctions e_s (avec $s \in \Gamma^*$) est dense dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, b)$ et la continuité de l'application suivante :

$$\mathrm{Exp}_c(\Gamma, b) \to \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a),$$
$$f \mapsto f e_\zeta,$$

prouve la densité de l'image de φ_ζ. Cela achève de prouver 2.9.

3. Interpolation et fonctions moyenne-périodiques

Nous nous intéressons d'abord au cas où $a \equiv 0$.

(i) Cas d'une variété discrète.

Soit $\rho=(\rho_1, \ldots, \rho_n)$ un n-uplet de fonctions doucement décroissant de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ et soit V la variété de multiplicité des zéros de ρ. Il existe une application naturelle de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ dans $A(V)=\mathscr{H}(\Gamma)/\tilde{\mathfrak{J}}$ ($\tilde{\mathfrak{J}}$ est l'idéal engendré par ρ). Nous voulons caractériser l'image de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ dans $A(V)$ pour celà nous suivrons [2], chapitre 4 et [3], p. 12.

Soit λ une fonction de $\mathscr{H}(\Gamma)/\tilde{\mathfrak{J}}$. Nous dirons que $\lambda \in A_0(\tilde{\mathfrak{J}}, (\varepsilon_k)_k, (\alpha_k)_k)$ ($(\varepsilon_k)_k$ et $(\alpha_k)_k$ étant deux suites de nombres réels comme en 1.1) si, pour tout $\varepsilon>0$ et tout $k \geqslant 1$, il existe $A_{\varepsilon, k}>0$ tel que, pour $z \in S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$, on ait :

$$|I(\lambda)(z)| \leqslant A_{\varepsilon, k} \exp(\varepsilon |z|),$$

où $I(\lambda)$ est définie par :

$$I(\lambda)(z)=\frac{1}{(2 i\pi)^n} \int_\gamma \frac{\lambda(\zeta) H(\zeta, z)}{\rho_1(\zeta) \ldots \rho_n(\zeta)} d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$$

(*cf.* [2], chapitre 1 et la preuve du théorème 1.4).

Soient $(\varepsilon'_k)_k$ et $(\alpha'_k)_k$ deux suites de nombres réels comme en 1.1 telles que $\varepsilon'_k \leqslant \varepsilon_k$ et $\alpha'_k \geqslant \alpha_k$, il est clair que $A_0(\tilde{\mathfrak{J}}, (\varepsilon'_k)_k, (\alpha'_k)_k)$ contient $A_0(\tilde{\mathfrak{J}}, (\varepsilon_k)_k, (\alpha_k))$.

Nous noterons $A_g(v)$ la réunion, sur toutes les suites vérifiant les conditions de 1.1, des ensembles $A_0(\tilde{\mathfrak{J}}, (\varepsilon_k)_k, (\alpha_k)_k)$.

Remarquons que la fonction $I(\lambda)$ ne dépend pas du représentant choisi et que les calculs faits pour la preuve du théorème 1.4 montrent qu'on a une application de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ dans $A_g(v)$. En suivant [3] nous la noterons rest.

3.1. THÉORÈME ([2], [3]). — *On a l'égalité ensembliste :* rest $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0) = A_g(v)$.

Preuve. — C'est une conséquence immédiate du théorème suivant :

3.2. THÉORÈME. — *Soit $(\varepsilon_k)_k$ et $(\alpha_k)_k$ deux suites de nombres réels positifs comme en* 1.1. *Soit λ une fonction holomorphe sur $\bigcup_k S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ telle que, pour tous $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $A_{\varepsilon, k} > 0$ tel que, pour $z \in S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$, on ait :*

$$|\lambda(z)| \leqslant A_{\varepsilon, k} \exp(\varepsilon |z|).$$

Il existe une fonction $f \in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$, deux suites de nombres réels $(\varepsilon'_k)_k$ et $(\alpha'_k)_k$ comme ci-dessus et des fonctions $g_1, \ldots, g_n$ holomorphes sur $\bigcup_k S(\rho; k, \varepsilon'_k, \alpha'_k)$ telles que :

$$f - \lambda = \sum_j g_j \rho_j \quad \textit{sur} \quad \bigcup_k S(\rho; k, \varepsilon'_k, \alpha'_k)$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \qquad \forall k > 0, \qquad \exists A'_{\varepsilon, k}$$

tel que :

$$\forall j, \quad |g_j(z)| \leqslant A'_{\varepsilon, k} \exp(\varepsilon |z|) \qquad \textit{pour} \quad z \in S(\rho; k, \varepsilon'_k, \alpha'_k).$$

Preuve. — Elle est identique à celle de [2] chapitre 2 : soient $\varepsilon'_k < \varepsilon_k$ et $\alpha'_k > \alpha_k$. Soit une fonction χ, de classe $\mathscr{C}^\infty$ à support dans $\bigcup_k S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ valant 1 au voisinage de $\bigcup_k S(\rho; k, \varepsilon'_k, \alpha'_k)$, à valeurs dans $[0, 1]$ et telle que :

$$|\bar{\partial}\chi(z)| \leqslant C_k \exp(\varepsilon |z|) \qquad \text{pour} \quad z \in \Gamma(k).$$

La $(0, 1)$-forme $w = \lambda \bar{\partial} \chi$ est $\mathscr{C}^\infty$ et s'annule au voisinage de l'ensemble où $\rho = 0$. De plus, si $m \geqslant 2n + 1$:

$$\frac{w}{|\rho|^m} \in {}^0\mathscr{L}_2^{0,1}(\Gamma \perp \mathrm{pr}\, \Gamma)$$

et, en utilisant [9], on obtient des formes $w_1, \ldots, w_n$ telles que $w = \sum_j w_j \rho_j$, $\bar{\partial} w_j = 0$ et :

$$\frac{w_j}{|\rho|^s} \in {}^0\mathscr{L}_2^{0,1}(\Gamma \perp \mathrm{pr}\, \Gamma)$$

(avec $s = m - 2n - 1$).

Par le théorème 7.3 de [15] on obtient des fonctions u_j telles que $\bar{\partial} u_j = w_j$ et :

$$\int_{\Gamma(k)} \frac{|u_j|}{|\rho|^s} \exp\left(-\frac{1}{k}|z|\right) d\lambda(z) < +\infty.$$

Soit $f=\chi\lambda-\sum_j u_j \rho_j$ de telle sorte que $f\in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$.

De plus $g=f-\lambda$ est telle que sur $S(\rho; k, \varepsilon'_k, \alpha'_k)$ on ait :

$$\int_{S(\rho;\, k,\, \varepsilon'_k,\, \alpha'_k)} \frac{|g|^2}{|\rho|^2} \exp(-\varepsilon|z|)\, d\lambda(z) < +\infty$$

et on conclut, comme en [2], que $g=\sum_j g_j \rho_j$ où g_j est analytique sur $\bigcup_k S(\rho; k, \varepsilon'_k, \alpha'_k)$ avec pour $z\in S(\rho; k, \varepsilon''_k, \alpha'_k)$:

$$|g_j(z)| \leqslant A_{\varepsilon, k} \exp(\varepsilon|z|).$$

3.3. COROLLAIRE. — *Soient* $\mu_1, \ldots, \mu_n$ *n fonctionnelles analytiques de* $\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$ *doucement décroissantes (i.e. le n-uplet de fonctions* $(\mathscr{F}(\mu_j))_{1\leqslant j\leqslant n}$ *de* $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ *est doucement décroissant). Supposons, pour simplifier, que les points de la variété de multiplicité* V *de* $(\mathscr{F}(\mu_j))_{1\leqslant j\leqslant n}$ *sont de multiplicité un,* $V=\{z_1, z_2, \ldots, z_p, \ldots\}\subset\Gamma$. *Toute fonction* f *de* $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ *solution du système d'équation de convolution :*

$$\mu_1 \star f = \ldots = \mu_n \star f = 0,$$

s'écrit $f(x)=\sum_j c_j \exp(i\langle x, z_j\rangle)$ *série convergente dans* $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ *après groupement de termes.*

(ii) *Cas d'une fonction*

Soit $\mu\in\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$ doucement décroissante (i.e. $\mathscr{F}(\mu)$ est doucement décroissante). Nous nous intéressons aux solutions de l'équation de convolution :

$$\mu \star f = 0. \tag{7}$$

On a alors le théorème suivant (*cf.* [2], théorème 9.1) :

3.4. THÉORÈME. — *Soit* $\mu\in\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$ *doucement décroissante, il existe une famille localement finie d'ensembles fermés* $(V_j)_{j\in J}$, *une partition de l'ensemble d'indice* J *en sous-ensembles finis* $(J_p)_{p\in\mathbb{N}}$, *et des opérateurs différentiels à coefficients constants* ∂_j *telles que :*

1° $\bigcup_{j\in J} V_j \subset V=\{z\in\Gamma \mid \mathscr{F}(\mu)(z)=0\}$;

2° *pour* $z\in V_j$, *la fonction* $\partial_j(\exp(i\langle x, z\rangle))$ *est solution de* (7);

3° *pour toute solution f de (7), il existe une famille* $(\nu_j)_{j\in J}$ *de mesures boréliennes complexes telle que* ν_j *soit à support dans* V_j *et telle que :*

$$f(x)=\sum_{p=1}^{+\infty} \sum_{j\in J_p} \int_{V_j} \partial_j(\exp(i\langle x, z\rangle))\, d\nu_j(z)$$

(*série convergente dans* $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$).

(iii) Cas de l fonctions $1<l<n$. On renvoie au théorème 10.1 de [2].

(iv) Cas de multiplicateurs de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$.

Pour simplifier nous ne ferons que le cas discret sans multiplicité.

Soit $f\in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ solution d'un système d'équation de convolution :

$$\mu_1 \star f= \ldots =\mu_n \star f=0, \tag{8}$$

où μ_j est élément de $\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$. Nous supposerons que le n-uplet de fonctionnelles analytiques $(\mu_j)_{1\leq j\leq n}$ est faiblement doucement décroissant à variété de multiplicité simple.

Nous noterons $\rho_j=\mathscr{F}(\mu_j)$ et $V=\{z_1, z_2,\ldots, z_p,\ldots\}$ la variété de multiplicité de $\rho=(\rho_1,\ldots, \rho_n)$.

Si f est solution du système de convolution (8) alors f est élément de :

$$[\mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))/\mu_1 \star \mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))+ \ldots +\mu_n \star \mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))]',$$

qui est isomorphe à $[\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)/\rho\, \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)]'$.

Soit ζ un point fixé de $\Omega(\Gamma, a)$. On sait que si θ est élément de $[\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)/\rho\, \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)]'$ alors ${}^t\varphi_\zeta(\theta)\in[\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)/\rho\, \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)]'$ (l'application ${}^t\varphi_\zeta$ étant injective).

Le n-uplet de fonctions ρ étant faiblement doucement décroissant tout élément de $[\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)/\rho\, \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)]'$ s'exprime comme somme d'une série $\sum_j c_j \delta_{z_j}$.

Pour $g\in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ on a :

$$\sum_j c_j g(z_j)=\langle \theta_z, \exp(i\langle z, \zeta\rangle)g\rangle,$$

en particulier pour ζ_0 dans Γ^*, soit $g=e_{\zeta_0}$, on a :

$$\sum_j c_j \exp(i\langle z_j, \zeta_0\rangle)=\langle \theta_z, \exp(i\langle z, \zeta+\zeta_0\rangle)=f(\zeta+\zeta_0),$$

donc, si $s\in\Gamma^*+\zeta\subset\Omega(\Gamma, a)$ on a :

$$f(s)=\sum_j c_j \exp(-\langle z_j, \zeta\rangle) \exp(i\langle z_j, s\rangle).$$

Remarquons que nous n'avons pas obtenu une représentation globale sur $\Omega(\Gamma, a)$ (sauf, bien sur, si $\Gamma^* + \zeta = \Omega(\Gamma, a)$).

Réciproquement, soit f une fonction continue sur $\Gamma^* + \zeta$, holomorphe dans l'intérieur de cet ensemble, ayant une représentation en série convergente dans $\mathscr{H}_c(\Gamma^* + \zeta)$:

$$f(s) = \sum_j c_j \exp(-i\langle z_j, \zeta\rangle) \exp(i\langle z_j, s\rangle).$$

Si cette fonction se prolonge en une fonction g de $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$ alors cette fonction est solution du système de convolution (8), car les deux fonctions holomorphes $\mu_j \star g$ et $\mu_j \star f$ coïncident sur un ensemble d'intérieur non vide.

En résumé, on a obtenu le :

3.5. THÉORÈME. — *Soit f une fonction holomorphe sur $\Gamma^* + \zeta$ se prolongeant en une fonction g de $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$. La fonction g est solution de* (8) *si et seulement si $f(s) = \sum_j c_j \exp(i\langle z_j, s - \zeta\rangle)$ (série convergente dans $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$).*

Le cas le plus intéressant est celui où on peut faire $\zeta = 0$ dans le théorème précédent. Il suffit, pour cela, que $a \geqslant 0$ car, dans ce cas, $0 \in \Omega(\Gamma, a)$. Alors 3.5 devient :

3.6. THÉORÈME. — *Soient a une fonction d'appui positive sur un cône Γ et $g \in \mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$. La fonction g est solution du système de convolution* (8) *si et seulement si sa restriction à Γ^* est solution du même système.*

Remarquons que ce théorème pose le problème du prolongement des solutions d'une équation de convolution. Par exemple, existe-t-il Γ, a et $\mu \in \mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$ tels que toute solution de l'équation $\mu \star f = 0$ dans $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ se prolonge en une solution de cette équation de convolution dans $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$? Nous y reviendrons plus loin.

En fait les théorèmes 3.5 et 3.6 sont insuffisants dans la mesure où il n'y a pas de représentation en série de manière globale pour les solutions d'un système d'équation de convolution. Nous allons tenter d'y remédier en identifiant directement l'espace $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)/\rho\,\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ à un espace de suite, tout du moins dans le cas discret auquel nous nous limitons pour la suite.

Soit $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ un n-uplet de fonctions faiblement doucement décroissant de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ et a une fonction d'appui sur Γ. Il existe une application naturelle de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ dans $A(V)$ (nous conservons les notations de 3.1). Comme précédemment, nous dirons qu'une fonction λ de $A(V)$ est élément de :

$$A_a(\mathfrak{Z}, (\varepsilon_k)_k, (\alpha_k)_k) \qquad \text{si} \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \exists A_{\varepsilon, k} > 0,$$

tel que :

$$|I(\lambda)(z)| \leqslant A_{\varepsilon, k} \exp(a(z)+\varepsilon |z|) \quad \text{pour} \quad z \in S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$$

et nous noterons $A_{g, a}(V)$ la réunion de tous les ensembles $A_a(\mathfrak{I}, (\varepsilon_k)_k, (\alpha_k)_k)$.

On a une application notée rest, de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ dans $A_{g, a}(V)$ de sorte que :

3.7. THÉORÈME. — *On a l'égalité ensembliste* rest $(\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)) = A_{g, a}(V)$.

Ce théorème est une conséquence immédiate du suivant :

3.8. THÉORÈME. — *Soient $(\varepsilon_k)_k$, $(\alpha_k)_k$ deux suites de nombres réels positifs comme en* 1.1. *Soit λ une fonction holomorphe sur $\bigcup_k S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ telle que :*

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \forall k \geqslant 1, \quad \exists A_{\varepsilon, k} > 0,$$

tel que :

$$|\lambda(z)| \leqslant A_{\varepsilon, k} \exp(a(z)+\varepsilon |z|) \quad \textit{pour} \quad z \in S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k).$$

Il existe : une fonction $f \in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$, des suites de nombres réels $(\varepsilon'_k)_k$, $(\alpha'_k)_k$ comme en 1.1 *et des fonctions $g_1, \ldots, g_n$ holomorphes sur $\bigcup_k S(\rho; k, \varepsilon'_k, \alpha'_k)$ telles que :*

$$f(z) - \lambda(z) = \sum_j g_j(z) \, \rho_j(z) \quad \textit{sur} \quad \bigcup_k S(\rho; k, \varepsilon'_k, \alpha'_k)$$

et $\forall \varepsilon > 0$, $\forall k \geqslant 0$ $\exists A'_{\varepsilon, k}$ pour $z \in S(\rho; k, \varepsilon'_k, \alpha'_k)$, on ait :

$$|g_j(z)| \leqslant A'_{\varepsilon, k} \exp(a(z)+\varepsilon |z|).$$

Preuve. — C'est la même que celle du théorème 3.2.

3.9. COROLLAIRE. — *Soient $(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ n fonctionnelles analytiques faiblement doucement décroissantes de $\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$ et a une fonction d'appui sur Γ. Toute fonction f de $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$ solution du système de convolution* (8) *s'écrit sous la forme d'une série convergente* (*après groupement de termes*) *pour la topologie de $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$:*

$$f(z) = \sum_j c_j \exp(i \langle z_j, z \rangle)$$

(*où nous avons supposé, pour simplifier, que la variété de multiplicité de $(\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant n}$ était simple*).

3.10. PROPOSITION. — *Soit* μ *une fonctionnelle analytique de* $\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$ *faiblement doucement décroissante. Pour toute fonction d'appui a sur* Γ, *on a :*

$$\mu \star \mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a)) = \mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a)).$$

Preuve. — L'espace $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$ étant du type D.F.N. et la convolution par μ étant une application linéaire continue, il suffit donc de prouver que l'application transposée est injective et d'image fermée. En utilisant la transformation de Fourier, cela revient à voir que la multiplication par $\mathscr{F}(\mu)$ est injective et d'image fermée de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$. Ce qui est évident compte tenu des hypothèses et de 2.8. Remarquons que si $a \equiv 0$, nous pouvons supposer que μ est, simplement, doucement décroissante.

Soient Γ un cône de $\mathbb{C}^n$ et a une fonction d'appui positive sur Γ. Soient $\mu_1, \ldots, \mu_l$ l fonctionnelles analytiques de $\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)(1 \leqslant l \leqslant n)$. Nous supposerons que le l-uplet de fonctionnelles $\mu = (\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant l}$ est faiblement doucement décroissant. Considérons un système d'équations de convolution :

$$\mu_1 \star f = \ldots = \mu_l \star f = 0.$$

Nous aimerions savoir sous quelles conditions les solutions dans $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ de ce système se prolongent en solutions du même système dans $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$. Soient $\rho_j = \mathscr{F}(\mu_j)$ et $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_l)$. Nous noterons ψ le passage aux quotients de l'injection naturelle de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$:

$$\psi : \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)/\rho\,\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0) \to \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)/\rho\,\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a).$$

La réponse à notre problème d'extension, nous est fournie par le théorème suivant (dont l'esprit consiste à revenir au problème d'interpolation).

3.11. THÉORÈME. — *Soit* $\mu = (\mu_j)_{1 \leqslant j \leqslant l}$ *un l-uplet de fonctionnelles analytiques* $(1 \leqslant l \leqslant n)$ *faiblement doucement décroissant de* $\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$. *Toute solution f dans* $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ *du système d'équations de convolution :*

$$\mu_1 \star h = \mu_2 \star h = \ldots = \mu_l \star h = 0, \tag{9}$$

se prolonge en une solution du même système dans $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$ *si et seulement si* ψ *est surjective.*

Preuve. — Notons $\mathscr{H}_{c,\mu}(\Gamma^*)$ l'espace des solutions de (9) dans $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ et $\mathscr{H}_{c,\mu}(\Omega(\Gamma, a))$ l'espace des solutions dans $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$. Comme $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ et $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$ sont des espaces du type D.F.N., les espaces de solutions

$\mathscr{H}_{c,\mu}(\Gamma^*)$ et $\mathscr{H}_{c,\mu}(\Omega(\Gamma, a))$ qui en sont des sous-espaces fermés sont aussi du type D.F.N. Soit R l'application de restriction :

$$R : \quad \mathscr{H}_{c,\mu}(\Omega(\Gamma, a)) \to \mathscr{H}_{c,\mu}(\Gamma^*),$$
$$f \to f_{|\Gamma^*}.$$

Nous voulons savoir si R est surjective. Nos espaces étant du type D.F.N., R est surjective si et seulement si sa transposée est injective et d'image faiblement fermée.

Mais ${}^tR : \mathscr{H}'_{c,\mu}(\Gamma^*) \to \mathscr{H}'_{c,\mu}(\Omega(\Gamma, a))$ et on a les isomorphismes :

$$\mathscr{H}'_{c,\mu}(\Gamma^*) \simeq \mathscr{H}'_c(\Gamma^*)/[\mathscr{H}_{c,\mu}(\Gamma^*)]^\perp$$

et : $$\mathscr{H}'_{c,\mu}(\Omega(\Gamma, a)) \simeq \mathscr{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))/[\mathscr{H}_{c,\mu}(\Omega(\Gamma, a))]^\perp.$$

Il faut donc déterminer $[\mathscr{H}_{c,\mu}(\Gamma^*)]^\perp$ et $[\mathscr{H}_{c,\mu}(\Omega(\Gamma, a))]^\perp$. Soit $\nu \in [\mathscr{H}_{c,\mu}(\Gamma^*)]^\perp$. Alors ν est tel que pour toute fonction f solution du système (9) on ait $\langle \nu, f \rangle = 0$. Nous allons prouver que $\mathscr{F}(\nu)$ est dans l'idéal local engendré par $\mathscr{F}(\mu_1), \ldots, \mathscr{F}(\mu_l)$.

Rappelons (*cf.* [2], chapitre 3, spécialement définition 3.5) que si $\eta \in \mathbb{C}^n$ et $\tilde{\mathscr{I}}$ est un idéal local, $\mathbb{P}_\eta$ désigne l'ensemble :

$$\mathbb{P}_\eta = \{ P \in \mathbb{C}[X] \mid [P(D)F](\eta) = 0, \forall F \in \tilde{\mathscr{I}} \}.$$

Si on note $V(\tilde{\mathscr{I}})$ l'ensemble des zéros de $\tilde{\mathscr{I}}$ alors $\lambda \in \tilde{\mathscr{I}}$ si et seulement si $[P(D)\lambda](\eta) = 0$, pour tout $P \in \mathbb{P}_\eta$ et tout $\eta \in V(\tilde{\mathscr{I}})$.

Nous prendrons ici $\tilde{\mathscr{I}} = I_{\text{loc}}(\mathscr{F}(\mu_1), \ldots, \mathscr{F}(\mu_l))$ et $\lambda = \mathscr{F}(\nu)$.

Soient $\eta \in V(\tilde{\mathscr{I}})$ et $P \in \mathbb{P}_\eta$. Comme $[P(D)\lambda](\eta) = \langle \nu_z, P(z) \exp \langle z, \eta \rangle \rangle$, il suffit de voir, d'après la définition de ν, que $f(z) = P(z) \exp \langle z, \eta \rangle$ est solution du système d'équations de convolution (9).

Or $\mu_j \star f(\zeta) = \langle \mu_{j,z}, P(z+\zeta) \exp(\langle z, \eta \rangle) \rangle \exp \langle \zeta, \eta \rangle$, et il suffit de voir que $\langle \mu_{j,z}, P(z+\zeta) \exp(\langle z, \eta \rangle) \rangle = 0$.

La formule de Taylor pour le polynôme P donne :

$$P(z+\zeta) = P(z) + \sum_{\alpha \neq 0} \frac{1}{\alpha !} \zeta^\alpha \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha}(z).$$

D'où :

$$\langle \mu_{j,z}, P(z+\zeta) \exp(\langle z, \eta \rangle) \rangle = \langle \mu_{j,z}, P(z) \exp(\langle z, \eta \rangle) \rangle$$

$$+\sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\zeta^\alpha\left\langle \mu_{j,z}, \frac{\partial^\alpha P(z)}{\partial x^\alpha}\exp(\langle z,\eta\rangle)\right\rangle,$$

or $\langle \mu_{j,z}, P(z)\exp(\langle z,\eta\rangle)\rangle = [P(D)\,\mathscr{F}(\mu_j)](\eta)=0$, il reste à voir que, pour tout α on a :

$$\left\langle \mu_{j,z}, \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha}(z)\exp(\langle z,\eta\rangle)\right\rangle = 0.$$

Mais :

$$\begin{aligned}
P(D)(\zeta^\alpha\mathscr{F}(\mu))(\zeta) &= P(D)\left\langle \frac{\partial^\alpha\mu}{\partial x^\alpha}, \exp\langle z,\zeta\rangle\right\rangle\\
&= \left\langle \frac{\partial^\alpha\mu}{\partial x^\alpha}, (P(z)\exp(\langle z,\zeta\rangle)\right\rangle\\
&= (-1)^{|\alpha|}\left\langle \mu_z, \frac{\partial^\alpha}{\partial z^\alpha}(P(z)\exp(\langle z,\zeta\rangle)\right\rangle\\
&= (-1)^{|\alpha|}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\zeta^{\alpha-\beta}\left\langle \mu_z, \frac{\partial^\beta P(z)}{\partial x^\beta}\exp(\langle z,\zeta\rangle)\right\rangle.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
0 &= [P(D)(\zeta^\alpha\mathscr{F}(\mu_j))](\eta)\\
&= (-1)^{|\alpha|}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\eta^{\alpha-\beta}\left\langle \mu_{j,z}, \frac{\partial^\beta P(z)}{\partial x^\beta}\exp\langle z,\eta\rangle\right\rangle
\end{aligned}$$

(remarquons que dans l'écriture $\eta^{\alpha-\beta}=\eta_1^{\alpha_1-\beta_1}\ldots\eta_n^{\alpha_n-\beta_n}$, si $\eta_j=0$, on a $\eta_j^{\alpha_j-\beta_j}=1$). Cette formule et une récurrence aisée sur $|\alpha|$ donnent :

$$\left\langle \mu_{j,z}, \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha}(z)\exp(\langle z,\eta\rangle)\right\rangle = 0;$$

ce qui implique $\mu_j\star f=0$ pour tout j. D'où $[P(D)\lambda](\eta)=0$ et $\lambda\in\tilde{\mathscr{I}}$.

Remarque. – Pour simplifier nous avons utilisé la transformation de Fourier-Borel $\mathscr{F}(\mu)(\zeta)=\langle \mu_z, \exp\langle z,\zeta\rangle\rangle$.

On a donc $\lambda\in\tilde{\mathscr{I}}=I_{\text{loc}}(\mathscr{F}(\mu_1),\ldots,\mathscr{F}(\mu_l))=I(\mathscr{F}(\mu_j))_{1\leq j\leq l})$, ce qui veut dire que $\nu\in\mu_1\star\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)+\ldots+\mu_l\star\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)$:

$$\text{i.e.}\quad [\mathscr{H}'_{c,\mu}(\Gamma^*)]^\perp\subset\mu_1\star\mathscr{H}'_c(\Gamma^*)+\ldots+\mu_l\star\mathscr{H}'_c(\Gamma^*).$$

L'inclusion inverse étant évidente, on a donc :

$$[\mathcal{H}'_{c,\mu}(\Gamma^*)]^{\perp}=\mu_1\star\mathcal{H}'_c(\Gamma^*)+\ldots+\mu_l\star\mathcal{H}'_c(\Gamma^*),$$

de même :

$$[\mathcal{H}'_{c,\mu}(\Omega(\Gamma, a))]^{\perp}=\mu_1\star\mathcal{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))+\ldots+\mu_l\star\mathcal{H}'_c(\Omega(\Gamma, a)),$$

donc ${}^tR$ applique :

$$\mathcal{H}'_c(\Gamma^*)/\mu_1\star\mathcal{H}'_c(\Gamma^*)+\ldots+\mu_l\star\mathcal{H}'_c(\Gamma^*)$$

dans :

$$\mathcal{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))/\mu_1\star\mathcal{H}'_c(\Omega(\Gamma, a))+\ldots+\mu_l\star\mathcal{H}'_c(\Omega(\Gamma, a)).$$

Ou encore en utilisant la transformation de Fourier et en notant $\rho_j=\mathcal{F}(\mu_j)$ et $\rho=(\rho_1,\ldots, \rho_l)$, on obtient donc que l'application R est surjective si et seulement si :

$$\psi : \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)/\rho\,\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)\to\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)/\rho\,\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a),$$

est injectif et d'image faiblement fermée.

On sait par 2.9 que ψ est injectif et d'image dense, on a donc prouvé que R est surjective si et seulement si ψ est surjectif. ■

Nous sommes donc ramenés à un problème d'interpolation : soit $f\in\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ (f quelconque). Existe-t-il $g\in\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ tel que $f-g\in\rho\,\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ Autrement dit peut-on modifier sur l'ensemble des zéros de ρ, la fonction $f\in\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ en une fonction de type exponentiel nul

Remarque : (pour $n=1$). — Si $\mu_1,\ldots, \mu_l$ sont des combinaisons linéaires de dérivées de distributions de Dirac à l'origine, c'est-à-dire que ce sont des polynômes différentiels alors ψ est une bijection car :

$$\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)/\rho\,\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)\qquad\text{et}\qquad\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)/\rho\,\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a),$$

sont deux espaces vectoriels de même dimension finie et cela pour tout $a\geqslant 0$. On retrouve évidemment le fait que les solutions du système différentiel sont des fonctions entières. Le même raisonnement est bien sur valable si la variété des zéros de ρ est fini.

Dans le même esprit, nous avons la :

3.12. Proposition. — *Soit* $\rho=(\rho_1,\ldots, \rho_l)$ *un l-uplet de fonctions de*

$\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ *(avec l quelconque si $n=1$ et $l=n$ si $n>2$). Nous supposerons que le l-uplet de fonctions ρ est faiblement doucement décroissant et nous noterons $\mu_j=\mathscr{F}^{-1}(\rho_j)$, $(z_p)_{p\in\mathbb{N}}$ désignera l'ensemble discret des zéros de ρ. Soit a une fonction d'appui positive sur Γ. Toute solution dans $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ du système d'équations de convolution :*

$$\mu_1 \star f = \ldots = \mu_l \star f = 0, \tag{9}$$

se prolonge en une solution de ce même système dans $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$ si et seulement si :

$$\forall k,\ \exists C_k \in \mathbb{R} \quad \textit{tel que } \forall p : z_p \in \Gamma(k),$$

on ait :

$$a(z_p) \leqslant \frac{1}{k} |z_p| + C_k.$$

Preuve. — Si toutes les solutions sont prolongeables, on sait que l'application ψ suivante est surjective :

$$\psi : \quad \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)/\rho\, \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0) \to \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)/\rho\, \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a).$$

Cette application étant aussi injective et continue, ses espaces de départ et d'arrivée étant du type F.N., sa bijection réciproque ψ^{-1} est elle aussi continue. Donc ψ^{-1} transforme un borné en un borné. Remarquons à nouveau que, lorsque ζ parcourt $\Omega(\Gamma, a)$, la famille de fonctions e_ζ est borné dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$, donc $(\dot{e}_\zeta)_\zeta$ est borné dans l'espace quotient $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)/\rho\, \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ d'où $(\psi^{-1}(\dot{e}_\zeta))_\zeta$ est borné dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)/\rho\, \mathrm{Exp}_c(\Gamma, 0)$ i. e., pour tout k, il existe une constante positive C'_k (dépendant uniquement de k) tel que pour $z_p \in \Gamma(k)$ on ait pour tout $\zeta \in \Omega(\Gamma, a)$:

$$\exp(-\mathrm{Im}\langle z_p, \zeta\rangle) \leqslant C'_k \exp\left(\frac{1}{k} |z_p|\right).$$

Comme $a(z_p) = \mathrm{Sup}_{\zeta \in \Omega(\Gamma, a)} - \mathrm{Im}\langle z_p, \zeta\rangle$ on obtient :

$$a(z_p) \leqslant \frac{1}{k} |z_p| + \mathrm{Log}\, C'_k.$$

La réciproque est évidente, compte tenu du théorème d'interpolation. ■

Il est maintenant aisé de donner quelques exemples concrets de la situation précédente.

(1) D'abord un exemple où toutes les solutions ne sont pas prolongeables. Nous prendrons :

$$\Gamma=\left\{z\in\mathbb{C}\mid |\operatorname{Arg} z|<\frac{\pi}{4}\right\} \quad \text{et} \quad \rho(z)=\prod_{n\geqslant 1}\left(1-\frac{z}{2^n}\right).$$

On sait (*voir* [11]) que ρ est faiblement doucement décroissante. D'autre part si la fonction d'appui a est telle que toute solution dans $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ de l'équation de convolution $\mu\star f=0(\mu=\mathscr{F}^{-1}(\rho))$ se prolonge à $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$ on doit avoir $a_{|]0,+\infty[}\equiv 0$. Il suffit donc de prendre $a(z)=|z|$.

On peut voir que les solutions se prolongent tout de même : soient k_1 et k_2 deux nombres réels tels que $k_1<0<k_2$ alors :

$$a(z)=\begin{cases} k_2\operatorname{Im} z & \text{si} \quad \operatorname{Im} z\geqslant 0, \\ k_1\operatorname{Im} z & \text{si} \quad \operatorname{Im} z\leqslant 0\end{cases}$$

est une fonction d'appui positive sur Γ telle que toute solution dans $\mathscr{H}_c(\Gamma^*)$ de l'équation $\mu\star f=0$ se prolonge à $\mathscr{H}_c(\Omega(\Gamma, a))$.

(II) Dans l'exemple suivant toutes les solutions sont des fonctions entières. Il suffit de construire une fonction faiblement doucement décroissante dont les zéros dans tout sous-secteur relativement compact soient en nombre fini. Cela sera fait à l'aide d'un produit de Blaschke :

Nous prenons toujours $\Gamma=\{z\in\mathbb{C}\mid |\operatorname{Arg} z|<\pi/4\}$ et :

$$\Gamma_k=\left\{z=x+iy \,\|\, y|<\frac{k}{k+1}x,\ x>0\right\} \quad \text{pour} \quad \beta_n=n^2(1+i)-in,$$

le produit de Blaschke :

$$\rho(z)=\prod_{n=2}^{+\infty}\frac{|1-\beta_n^2|}{1-\beta_n^2}\,\frac{z-\beta_n}{z+\bar{\beta}_n},$$

a les propriétés demandées.

4. Multiplicateurs de $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, a)$ dans $\operatorname{Exp}_c(\Gamma, b)$

Soient Γ un cône de $\mathbb{C}^n$, a et b deux fonctions d'appui sur Γ.

Nous noterons $\Omega_1 = \Omega(\Gamma, a)$, $\Omega_2 = \Omega(\Gamma, b)$ et $\Omega_3 = \Omega(\Gamma, a+b)$ de sorte que $\Omega_1 + \Omega_2 \subset \Omega_3$.

Si f est élément de $\mathscr{H}_c(\Omega_3)$, pour ζ voisin de Ω_1 et z voisin de Ω_2, on peut définir $\tau_\zeta(f)$ par $\tau_\zeta(f)(z) = f(z+\zeta)$ de sorte que si $\mu \in \mathscr{H}'_c(\Omega_2)$, l'élément $\mu \star f$ de $\mathscr{H}_c(\Omega_1)$ est donné par :

$$\mu \star f(\zeta) = \langle \mu, \tau_\zeta(f) \rangle.$$

Comme plus haut, si $\nu \in \mathscr{H}'_c(\Omega_1)$, $\mu \star \nu$ se définit par $\langle \mu \star \nu, f \rangle = \langle \nu, \mu \star f \rangle$ et est l'élément de $\mathscr{H}'_c(\Omega_3)$.

En conclusion l'élément $\mathscr{F}(\mu)$ de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, b)$ est un multiplicateur continu de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a)$ dans $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a+b)$ (on montre facilement comme en 2.1 que ce sont les seuls).

Donc, si $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_m)$ est un m-uplet de fonctions de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, b)$, nous noterons $\mathrm{E}(\rho, a)$ le sous-espace vectoriel suivant de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, a+b)$:

$$E(\rho, a) = \{ f \in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a+b) \mid \exists g_1, \ldots, g_m \in \mathrm{Exp}_c(\Gamma, a) \text{ tel que } f = \textstyle\sum_j g_j \rho_j \}.$$

L'espace vectoriel local engendré par ρ sera noté $E_{\mathrm{loc}}(\rho, a)$ et se définit comme $I_{\mathrm{loc}}(\rho)$ et $M_{\mathrm{loc}}(\rho)$.

Afin d'étudier la synthèse spectrale dans ce cadre, nous allons définir deux notions de fonctions doucement décroissantes, étendant celles que nous avons utilisées.

Tout d'abord le cas où $n = 1$ et l quelconque, ou bien n quelconque et $l = n$.

4.1. DÉFINITION. — Soient Γ un cône de $\mathbb{C}^n$ et b une fonction d'appui sur Γ. Soit $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_l)$ un l-uplet de fonctions de $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, b)$ nous dirons que :

(i) ρ est doucement décroissante, s'il existe un nombre réel positif A, trois suites de nombres réels $(\varepsilon_k)_k$, $(\alpha_k)_k$ et $(B_k)_k$ comme en 1.1 tels que l'ensemble :

$$S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k) = \{ z \in \Gamma(k) : |\rho(z)| < \varepsilon_k \exp(b(z) - \alpha_k |z|) \},$$

ait toutes ses composantes connexes relativement compactes et si z, ζ sont dans la même composante connexe, on ait :

$$|z| \leqslant A |\zeta| + B_k.$$

(ii) ρ est faiblement doucement décroissante, s'il existe deux suites de nombres réels $(\varepsilon_k)_k$ et $(\alpha_k)_k$ comme en 1.1 et telle que l'ensemble

$S(\rho; k, \varepsilon_k, \alpha_k)$ ait toutes ses composantes connexes relativement compactes de diamètres uniformément majorés (pour tout k).

On a alors la :

4.2. PROPOSITION ($n=l=1$). — *Soit* ρ *une fonction de* $\mathrm{Exp}_c(\Gamma, b)$.

(i) *Si* ρ *est doucement décroissante, on a :*

$$E(\rho, 0)=E_{\mathrm{loc}}(\rho, 0).$$

(ii) *Si* ρ *est faiblement doucement décroissante et a est une fonction d'appui sur* Γ, *on a :*

$$E(\rho, a)=E_{\mathrm{loc}}(\rho, a).$$

Preuve. — (i) Elle est identique à celle de 1.2.

(ii) Elle est identique à celle de 2.6.

Remarque. — Nous ne savons pas prouver que $E_{\mathrm{loc}}(\rho, a)=E(\rho, a)$ (si $n\geqslant 2$) pour ρ doucement décroissante et b quelconque, ni représenter une fonction f de $\mathscr{H}_c(\Omega_3)$ solution d'un système d'équations de convolutions $\mu \star f=0$ $1\leqslant j\leqslant m$ et $\mu_j\in\mathscr{H}'_c(\Omega_2)$. Cette représentation se fait sans trop de problème s'il existe ζ_0 tel que $b(z)=\mathrm{Im}\langle z, \zeta_0\rangle$, car on est essentiellement ramené au cas où $b\equiv 0$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEREINSTEIN (C. A.) et TAYLOR (B. A.). — A New look at interpolation theory for entire functions of one variable, *Advances in Math.*, vol. 33, 1979, p. 109-143.

[2] BERENSTEIN (C. A.) et TAYLOR (B. A.). — Interpolation problems in $\mathbb{C}^n$ with application to harmonic analysis, *J. Anal. Math.*, vol. 38, 1980, p. 188-254.

[3] BERENSTEIN (C. A.) et STRUPPA (D.). — Interpolation problems in cones, Preprint, Univ. Orsay, 1981.

[4] EHRENPREIS (L.). — Fourier Analysis in several complex variables, Wiley Interscience, New York, 1970.

[5] GUREVICH (D. I.). — Counterexamples to a problem of L. Schwartz, *Funct. Analysis Applic.*, vol. 9, 1975, p. 116-120.

[6] HÖRMANDER (L.). — Complex analysis in several variables, North Holland, New York, 1973.

[7] HÖRMANDER (L.). — Generator for some rings of analytic functions, *Bull. A.M.S.*, vol. 73, 1967, p. 943-949.

[8] KAWAÏ (T.). — On the theory of Fourier hyperfunctions and its application to partial differential equation with constant coefficients, *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo*, Sect. I.A. 17, 1970, p. 463-483.

[9] KELLEHER (J. J.) et TAYLOR (B. A.). – Finitely generated ideal in rings of analytic functions, *Math. Ann.*, vol. 193, 1971, p. 225-237.

[10] MARTINEAU (A.). – Équations différentielles d'ordre infini, *Bull. Soc. Math. Fr.*, t. 95, 1967, p. 109-154.

[11] MÉRIL (A.). – Analytic functionals with unbounded carriers and mean periodic functions. *Transactions of A.M.S.*, vol. 278, n° 1, 1983, p. 115-136.

[12] MORIMOTO (M.). – Analytic functionals with non compact carriers, *Tokyo J. Math.*, vol. 1, n° 1, 1978, p. 77-103.

[13] PALAMODOV (V.). – Linear differential operator with constant coefficients, Springer Verlag, 1970.

[14] DE ROEVER (J. W.). – Fourier Transform of holomorphic functions and application to Newton interpolation series II T. W 148, Math. Centrum, Amsterdam.

[15] DE ROEVER (J. W.). – Complex Fourier transform and analytic functionals with unbounded carriers, Math. Centre Tracts 89, Amsterdam, 1978.

[16] SKODA (H.). – Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids, *Ann. Ec. Norm. Sup.*, vol. 5, (4), 1972, p. 545-579.

[17] STRUPPA (D.). – The fundamental principle for systems of convolutions equations, *Memoirs A.M.S.*, vol. 41, n° 273, 1983.