BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-YVES CHARBONNEL

Idéaux primitifs et opérateurs compacts

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 203-234
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__203_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 203-234.

IDÉAUX PRIMITIFS ET OPÉRATEURS COMPACTS

PAR JEAN-YVES CHARBONNEL (*)

RÉSUMÉ. — Soit π une représentation factorielle normale du groupe de Lie connexe G, dont l'algèbre de Lie est notée $\mathfrak{g}$. En utilisant la théorie des idéaux primitifs dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$, on montre qu'il existe v dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, n'appartenant pas au noyau infinitésimal de π, pour lequel $\pi(v \star \varphi)$ est compact dans $\pi(G)''$, le facteur engendré par $\pi(G)$, pour toute fonction φ C^{∞}, à support compact sur G.

SUMMARY. — Let π be a factor normal representation of the connected Lie group G, the Lie algebra of which is $\mathfrak{g}$. Using the theory of primitive ideals in $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, the enveloping algebra of $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes \mathfrak{g}$, we show that there exists v in $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, not contained in the infinitesimal kernel of π, for which the operator $\pi(v \star \varphi)$ is compact in $\pi(G)''$, the factor generated by $\pi(G)$, for every C^{∞} function φ, compactly supported, on G.

Soit G un groupe de Lie connexe, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Dans [17], après avoir donné une paramétrisation de l'espace $\mathrm{Prim}(G)$ des idéaux primitifs de la C^*-algèbre de G, L. Pukanszky reprend la notion de représentation factorielle normale, introduite par A. Guichardet. Une telle représentation π est caractérisée par le fait qu'elle engendre un facteur semi-fini et qu'il existe φ dans le cône des éléments positifs de $C^*(G)$ (0.5) tel que $\pi(\varphi)$ soit non nul et à trace relativement au facteur engendré par $\pi(G)$. J'ai montré dans [3] que lorsque G est résoluble, on peut trouver φ dans $\mathscr{D}(G)$ (0.5). On a la notion d'idéal primitif dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ (0.2, 0.9) et dans $C^*(G)$. Dans les deux cas, c'est le noyau d'une représentation algébriquement irréductible non nulle. D'après (4, 2.9.7), les idéaux primitifs de $C^*(G)$ sont les noyaux des représentations unitaires irréductibles de $C^*(G)$. On sait que le noyau I de la représentation infinitésimale π_{∞} (0.11), associée à π, est primitif, d'après (8,7.2) et que

(*) Texte reçu le 20 mai 1982, révisé le 15 avril 1983.

J.-Y. CHARBONNEL, U. E. R. de Mathématiques, Université Paris-VII, Tour 45-55, 2, place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1983/203/\$ 5.00

l'intersection $\hat{I}$ des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g}_C)$ (0.2, 0.9) contenant strictement I, contient strictement I, d'après (15.4.6). On peut regarder $U(\mathfrak{g}_C)$ comme l'algèbre des opérateurs différentiels, invariants à droite, sur G(0.10). J'ai prouvé dans [3] que, lorsque G est résoluble, pour tout semi-invariant u de $\hat{I}$, modulo I, il existe un entier positif k tel que pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, l'opérateur $\pi(u^k \star \varphi)$ soit à trace relativement au facteur engendré par $\pi(G)$. Revenons au cas général. Rappelons qu'on appelle opérateur compact relativement à un facteur semi-fini, tout opérateur qui se trouve dans l'adhérence en norme des opérateurs à trace du facteur semi-fini. Je prouve ici le théorème :

(Les notations G, π, I, $\hat{I}$ sont celles ci-dessus). Pour tout u dans $\hat{I}$ et pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, l'opérateur $\pi(u \star \varphi)$ est compact relativement au facteur engendré par $\pi(G)$.

En particulier, lorsque π est irréductible, l'opérateur $\pi(u \star \varphi)$ ($u \in \hat{I}$, $\varphi \in \mathscr{D}(G)$) est compact, au sens usuel.

Du théorème découle le corollaire :

Soit π une représentation factorielle normale de G. Alors il existe φ dans $\mathscr{D}(G)$ tel que l'opérateur $\pi(\varphi)$ soit non nul et compact, relativement au facteur engendré par π.

Ces deux résultats montrent d'une manière éclatante l'utilité des idéaux primitifs des algèbres enveloppantes dans les questions d'analyse harmonique. L'énoncé du théorème aurait pu se limiter au cas des représentations unitaires irréductibles normales. Mais lorsque G n'est pas de type I, on n'a pas assez de représentations unitaires irréductibles. Lorsque G est localement isomorphe à un groupe algébrique, J. Dixmier a montré qu'il est de type I : c'est-à-dire que pour toute représentation unitaire irréductible π de G, il existe φ dans $C^*(G)$ tel que l'opérateur $\pi(\varphi)$ soit non nul et compact. On ne savait pas qu'un tel φ pouvait être choisi dans $\mathscr{D}(G)$ et même dans $L^1(G)$. D'après un théorème de Harish-Chandra, si G est semi-simple et si π est une représentation unitaire irréductible, alors, pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, l'opérateur $\pi(\varphi)$ est à trace. Compte tenu des résultats précédents, il est alors naturel de se poser la question suivante :

Soient G, π, I et $\hat{I}$ comme plus haut. Existe-t-il un entier positif k tel que, pour tout u dans $\hat{I}$ et pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, l'opérateur $\pi(u^k \star \varphi)$ soit à trace, relativement au facteur engendré par $\pi(G)$?

Lorsque G est résoluble, cela résulte du théorème I.1 de [3]. Je ne sais pas si cela est vrai en général. Dans [17], L. Pukanszky montre qu'il y a bijection entre Prim(G) (0.5) et l'ensemble des classes de quasi équivalence de représentations factorielles normales. Il est facile de voir que la propriété du théorème ci-dessus est équivalente à la suivante :

Soient J et J' dans Prim(G) *tels que $J' \supset J$ et tels que les idéaux :*

$$I(J)=\{u \in \mathfrak{g}_C);\ u \star \varphi \in J,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)\}$$

et : $I(J')=\{u \in U(\mathfrak{g}_C);\ u \star \varphi \in J',\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(G)\}$ *soient égaux. Alors $J'=J$.*

Par restriction au groupe dérivé $[G, G]$, le problème se ramène au problème suivant :

Soient H un groupe de Lie connexe, localement isomorphe à un groupe algébrique et G un sous-groupe invariant, fermé, connexe de H, dont l'algèbre de Lie est une sous-algèbre de Lie algébrique de celle de H. Soient π et π' dans $\hat{G}$ tels que π' soit faiblement contenu dans $H.\pi$ (0.6) *et tels que* $\bigcap_{h \in H} h.I(\operatorname{Ker}\pi')=\bigcap_{h \in H} h.\ I(\operatorname{Ker}\pi)$. *Alors π' appartient à $H.\pi$.*

Désirant démontrer ce dernier résultat par récurrence sur la dimension de G, on est amené à considérer les groupes de classe $C_{\mathbb{R}}$. Ce sont des extensions finies d'extension centrale des groupes de points réels de groupes algébriques définis sur $\mathbb{R}$. On démontre alors la dernière proposition lorsque H et G sont de classe $C_{\mathbb{R}}$ et lorsque l'algèbre de Lie de G est une sous-algèbre de Lie algébrique de l'algèbre de Lie de H, considérée comme sous-algèbre de Lie algébrique de $\mathfrak{g}\,l(n, \mathbb{R})$, pour un certain entier n. Le but du raisonnement est de se ramener au cas où $\mathfrak{g}$ est réductible. Dans ce cas, la poposition se démontre facilement. Notons $\mathfrak{u}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$. Si $\mathfrak{u}$ est une algèbre de Heisenberg, un argument classique [11] et la bicontinuité dans la méthode du petit groupe de Mackey [6] nous ramènent au cas où $\mathfrak{g}$ est réductive. Si $\mathfrak{u}$ n'est pas de Heisenberg, alors elle contient un idéal abélien $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ qui est invariant par l'action adjointe de H. Notons A le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{a}$. On peut supposer que les restrictions de π' et π à A sont portées par la même orbite $G.\chi\,(\chi \in A)$. La théorie de Mackey nous dit que π' et π sont les induites de représentations unitaires irréductibles de $G(\chi)$. Il s'agit de démontrer que ces deux représentations vérifient les conditions de la proposition, relativement à la paire $(H(\chi), G(\chi))$. La première résulte de la bicontinuité de l'induction [6]. Pour la deuxième nous devons comparer deux idéaux de $U(\mathfrak{g}(\chi)_C)$ (0.2, 0.12, 0.9) qui en les induisant à $\mathfrak{g}$ vérifient la deuxième condition de la proposition. Utilisant les résultats de C. Moeglin [15] et de C. Moeglin-R. Rentschler [16], on obtient la deuxième condition de la proposition. En outre, on démontre la proposition suivante :

Soient G un groupe de classe $C_{\mathbf{R}}$ et Z un sous-groupe discret du centre tel que G/Z soit isomorphe à un sous-groupe d'indice fini du groupe des points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbf{R}$. *Soit π dans $G^{\wedge}$. Alors le sous-ensemble des éléments π' de $G^{\wedge}$ tels que $I(\mathrm{Ker}\,\pi')=I(\mathrm{Ker}\,\pi)$ et tels que $\pi'\,|\,Z$ et $\pi\,|\,Z$ soient quasi équivalentes, est une partie, discrète de $G^{\wedge}$.*

La finitude du sous-ensemble ci-dessus résulte de [11]. Ce travail se divise en cinq parties :

0. Notations.

1. Énoncé du résultat principal (on démontre l'équivalence entre les deux premières assertions énoncées ci-dessus).

2. Groupes de classe $C_{\mathbf{R}}$.

3. Lemmes de réduction.

4. Démonstration des résultats annoncés.

Je remercie C. MOEGLIN pour d'intéressantes conversations et M. DUFLO pour l'intérêt qu'il a porté à ce travail.

0. Notations

Dans le texte ci-dessous, on utilisera très souvent les notations ci-dessous, sans y faire référence.

0.1. Si V est un espace vectoriel réel ou complexe, on note V^* son dual et $S(V)$ son algèbre symétrique. L'application $v \to (v^* \to \langle v^*, v\rangle)$ de V dans l'anneau des fonctions sur V^* se prolonge de façon unique en un isomorphisme de $S(V)$ sur l'anneau des fonctions polynomiales sur V^*.

0.2. Si V est un espace vectoriel réel, on note $V_{\mathbf{C}} = V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ son complexifié. Si, en outre, on s'est donné sur V sur une structure d'algèbre de Lie, celle-ci se prolonge à $V_{\mathbf{C}}$ et fait de $V_{\mathbf{C}}$ une algèbre de Lie complexe.

0.3. Soit G un groupe opérant à gauche sur un ensemble X. Pour tout x dans X, on note $G(x)$ le stabilisateur de x dans X et $G.x$ l'orbite de x sous l'action de G.

0.4. Si G est un groupe topologique, on note G_0 sa composante neutre.

0.5. Soit G un groupe localement compact. On note $C^*(G)$ la C^*-algèbre enveloppante de l'algèbre de Banach involutive $L^1(G)$, $\mathrm{Prim}(G)$ l'espace des idéaux primitifs de $C^*(G)$, muni de la topologie de Jacobson et $G^{\wedge}$ le dual unitaire de G. Si π est une représentation unitaire de G, il lui correspond une représentation de $L^1(G)$, lorsqu'on s'est donné une mesure de Haar à gauche sur G. Cette représentation de $L^1(G)$ se prolonge à $C^*(G)$, de façon unique.

Le noyau de la représentation de $C^*(G)$, ainsi obtenue, ne dépend que de π et non du choix de la mesure de Haar à gauche sur G. Nous le noterons $\operatorname{Ker}\pi$.

0.6. Soient G un groupe localement compact et Γ un sous-groupe du groupe des automorphismes de G. Si π est une représentation unitaire de G et si γ est dans Γ, on note $(\gamma.\pi)$ la représentation de $G : g \to \pi(\gamma^{-1}(g))$. Pour tout γ dans Γ, les représentations $\gamma.\pi$ et $\gamma.\pi'$ de G sont équivalentes si les représentations unitaires π et π' sont équivalentes. On définit ainsi une action à gauche du groupe Γ dans $G\hat{}$. Lorsque G est un sous-groupe invariant d'un groupe H, H opère dans G par automorphismes intérieurs $(h.(g)=hgh^{-1}$; $h\in H$, $g\in G)$, d'où une action de H dans $G\hat{}$.

0.7. Soit G un groupe localement compact. Soit a un 2-cocycle de G à valeurs dans $\mathbb{T}$. On note $G_a\hat{}$ l'espace des classes d'équivalence unitaire des a-représentations projectives, unitaires, irréductibles. Soient H un sous-groupe invariant fermé de G et σ dans $H\hat{}$. Supposons que G stabilise σ. Alors, on note $G_\sigma\hat{}$ l'espace des classes d'équivalence unitaire des représentations unitaires irréductibles de G, dont la restriction à H est quasi équivalente à σ.

0.8. Si G est un groupe de Lie, on note $\mathscr{D}(G)$ l'espace des fonctions C^∞ sur G, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et à support compact.

0.9. Si $\mathfrak{a}$ est une algèbre de Lie complexe, on note $U(\mathfrak{a})$ son algèbre enveloppante et $\operatorname{Prim}(U(\mathfrak{a}))$ l'espace des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{a})$, muni de la topologie de Jacobson.

0.10. Soient G un groupe de Lie et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Pour tout X dans $\mathfrak{g}$ et pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, notons $X\star\varphi$ la fonction sur G :

$$(X\star\varphi)(g)=\frac{d}{dt}\varphi(\exp(-tX)g)|_{t=0} \qquad (g\in G).$$

On définit ainsi une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathscr{D}(G)$. Celle-ci se prolonge de façon unique en une représentation de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ dans $\mathscr{D}(G)$. Nous la noterons : $(u, \varphi)\to u\star\varphi\,(u\in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}),\ \varphi\in\mathscr{D}(G))$.

0.11. Soient G un groupe de Lie, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, π une représentation unitaire de G d'espace $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}_\infty$ l'espace des vecteurs C^∞ de la représentation π. On a une représentation de $\mathfrak{g}$ dans $\mathscr{H}_\infty$. Cette représentation se prolonge de façon unique en une représentation de $U(\mathfrak{g}_C)$ dans $\mathscr{H}_\infty$ Nous la noterons π_∞.

0.12. Si G est un groupe de Lie, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, qui opère dans un ensemble X, on note $\mathfrak{g}(x)$ le stabilisateur de $x\,(x\in X)$ dans $\mathfrak{g}$. Le groupe G et l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ opère dans $\mathfrak{g}$ par l'action adjointe et, par restriction, dans chacun des idéaux de $\mathfrak{g}$. Ils opèrent aussi dans les duaux de ces idéaux par les représentations contragrédientes à celles ci-dessus.

0.13. Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle ou complexe et Γ un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}$. L'action de Γ dans $\mathfrak{g}$ se prolonge de façon unique à $U(\mathfrak{g})$. Le groupe Γ opère alors comme groupes d'automorphismes de l'algèbre associative $U(\mathfrak{g})$. Par suite, il opère dans l'espace des idéaux bilatères de $U(\mathfrak{g})$.

0.14. Soit $\mathscr{H}$ un groupe algébrique défini sur un corps k. Si K est une extension de k, on note $\mathscr{H}(K)$ le groupe des K-points de $\mathscr{H}$.

Dans tout ce qui suit, les groupes localement compacts que nous considérons sont supposés à base dénombrable.

1. Énoncé du résultat principal

1.1. Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Si J est un idéal bilatère fermé de $C^*(G)$, on note $I(J)$ l'ensemble des u de $U(\mathfrak{g}_C)$ tels que $u \star \varphi$ appartienne à J, pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$. D'après (9, corollaire 3.2), pour toute représentation unitaire π de G, de noyau J dans $C^*(G)$, $I(J)$ est le noyau de π_∞ (*cf.* 0.11) dans $U(\mathfrak{g}_C)$; donc $I(J)$ est un idéal bilatère de $U(\mathfrak{g}_C)$. On définit pour un idéal primitif J de $C^*(G)$ les deux propriétés suivantes :

$A(J)$: *il existe u dans $U(\mathfrak{g}_C)$ n'appartenant pas à $I(J)$ tel que, pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, $u \star \varphi$ appartienne à tout idéal primitif de $C^*(G)$, contenant strictement J.*

$B(J)$: *Soit J' un idéal primitif de $C^*(G)$. Alors on a l'implication suivante :*

$$(J' \supset J \text{ et } I(J') = I(J)) \quad \Rightarrow \quad J' = J.$$

On dira que le groupe G satisfait la propriété (A) (resp. (B)) si pour tout idéal primitif J de $C^*(G)$, la propriété $A(J)$ (resp. $B(J)$) est satisfaite.

LEMME (Reprenons les notations ci-dessus). — (i) *Pour tout idéal bilatère fermé J de $C^*(G)$, l'idéal bilatère $I(J)$ est semi-premier.*

(ii) *Pour tout idéal primitif J de $C^*(G)$, on a l'implication $A(J) \Rightarrow B(J)$.*

(iii) *Si l'idéal primitif J de $C^*(G)$ satisfait à la propriété $A(J)$, alors la partie $\{J\}$ de* Prim(G) *est localement fermée dans* Prim(G).

(i) Puisque G_0 est un sous-groupe ouvert, invariant de G, l'injection canonique de $\mathscr{D}(G_0)$ dans $\mathscr{D}(G)$ se prolonge en une injection de $C^*(G_0)$ dans $C^*(G)$. En outre, cette injection est un monomorphisme de C^*-algèbres. Au moyen de cette injection, nous supposerons $C^*(G_0)$ contenu dans $C^*(G)$. Notant ε_g la mesure de Dirac au point g, pour tout g dans G, il est facile de voir que tout élément φ de $\mathscr{D}(G)$ est combinaison linéaire d'éléments de la forme $\psi\star\varepsilon_g$, où ψ est une fonction C^∞ sur G, à support compact contenu dans G_0. Pour tout u dans $U(\mathfrak{g}_C)$, pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$ et pour tout g dans G, on a : $u\star(\varphi\star\varepsilon_g)=(u\star\varphi)\star\varepsilon_g$; donc pour toute représentation unitaire π de G, de noyau J dans $C^*(G)$, pour tout u dans $I(J\cap C^*(G_0))$ et pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, on a : $\pi(u\star\varphi)=0$. Par suite, $I(J)=I(J\cap C^*(G_0))$. L'idéal bilatère fermé $J\cap C^*(G_0)$ est l'intersection d'une famille $\{J_k; k\in K\}$ d'idéaux primitifs de $C^*(G_0)$. Il est facile de voir que $I(J\cap C^*(G_0))$ est l'intersection des $I(J_k)$; donc, d'après (8, 7.2), $I(J)$ est semi-premier.

(ii) Supposons que l'idéal primitif J de $C^*(G)$ satisfasse à la propriété $A(J)$. Soit J' un idéal primitif de $C^*(G)$ qui contient J. Si J' contient strictement J, $I(J')$ contient strictement $I(J)$; donc J satisfait à la propriété $B(J)$.

(iii) Supposons que l'idéal primitif J de $C^*(G)$ satisfasse à la propriété $A(J)$. Cela veut dire qu'il existe u dans $U(\mathfrak{g}_C)$, n'appartenant pas à $I(J)$ tel que, pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, $u\star\varphi$ appartienne à tout idéal primitif de $C^*(G)$, contenant strictement J. Notons L l'idéal bilatère fermé de $C^*(G)$ engendré par J et les $u\star\varphi$ $(\varphi\in\mathscr{D}(G))$. Puisque $I(L)$ est distinct de $I(J)$, L contient strictement J. D'après la propriété $A(J)$, tout idéal primitif de $C^*(G)$ contenant strictement J, contient L; donc $\{J\}$ est une partie localement fermée de $\operatorname{Prim}(G)$.

1.2. On suppose, dans ce paragraphe, que G est un groupe de Lie connexe. Soit J un idéal primitif de $C^*(G)$. D'après (8, 7.2), $I(J)$ est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g}_C)$ et d'après (15, 4.6), $\{I(J)\}$ est localement fermé dans $\operatorname{Prim}(U(\mathfrak{g}_C))$. Nous noterons $\hat{J}$ (resp. $\hat{I}(J)$) l'intersection des idéaux primitifs de $C^*(G)$ (resp. $U(\mathfrak{g}_C)$) qui contiennent strictement J (resp.; $I(J)$). Lorsque J ou $I(J)$ est maximal, $J=C^*(G)$ ou $I(J)=U(\mathfrak{g}_C)$. On définit pour J la propriété suivante :

$C(J)$: *Pour tout u dans $\hat{I}(J)$ et pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, $u\star\varphi$ appartient à $\hat{J}$.*

LEMME (On reprend les notations de 1.1 et 1.2). — *Les propriétés $A(J)$, $B(J)$ et $C(J)$ sont deux à deux équivalentes.*

D'après le lemme 1.1, on a l'implication $A(J)\Rightarrow B(J)$. Nous montrerons successivement les deux implications $B(J)\Rightarrow C(J)$ et $C(J)\Rightarrow A(J)$. Supposons $B(J)$ vraie. Soit J' un idéal primitif de $C^*(G)$ qui contient J. D'après la propriété $B(J)$, $I(J')$ contient strictement $I(J)$; donc $I(J')$ contient

$\hat{I}(J)$. Par suite, pour tout u dans $\hat{I}(J)$ et pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, $u \star \varphi$ est dans J'. Étant donné l'arbitraire de J', pour tout u dans $\hat{I}(J)$ et pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, $u \star \varphi$ est dans $\hat{J}$. L'implication $C(J) \Rightarrow A(J)$ est claire, en utilisant $I(J) \neq \hat{I}(J)$.

1.3. On suppose toujours G connexe. Soit J un idéal primitif de $C^*(G)$ qui satisfait à l'une des propriétés $A(J)$, $B(J)$ ou $C(J)$. D'après (17, proposition 2), l'idéal J est le noyau d'une représentation factorielle normale de G.

LEMME (On reprend les notations de 1.1 et de 1.2). — *Soit π une représentation factorielle normale de G, de noyau J dans $C^*(G)$. Alors pour tout u dans $\hat{I}(J)$ et pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, l'opérateur $\pi(u \star \varphi)$ est compact relativement au facteur engendré par $\pi(G)$.*

Désignons par M l'ensemble des φ de $C^*(G)$ tels que $\pi(\varphi)$ soit un opérateur compact relativement au facteur engendré par π. La partie M de $C^*(G)$ est un idéal bilatère fermé de $C^*(G)$. Puisque π est normale, M contient strictement J. L'idéal M étant l'intersection d'une famille d'idéaux primitifs, M contient $\hat{J}$; donc, d'après la propriété $C(J)$, pour tout u dans $\hat{I}(J)$ et pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, l'opérateur $\pi(u \star \varphi)$ est compact relativement au facteur engendré par $\pi(G)$.

1.4. Nous montrerons en 4.3 que, pour tout idéal primitif J de la C^*-algèbre d'un groupe de Lie connexe, les propriétés $A(J)$, $B(J)$, $C(J)$ sont satisfaites. Il résultera alors du lemme 1.3 :

THÉORÈME. — *Soit G un groupe de Lie connexe. Soit π une représentation factorielle normale de G. Alors pour tout u dans* $\hat{I}(\operatorname{Ker} \pi)$ (cf. 1.2) *et pour tout φ dans $\mathscr{D}(G)$, l'opérateur $\pi(u \star \varphi)$ est compact relativement au facteur engendré par $\pi(G)$.*

2. Groupes de classe $C_{\mathbf{R}}$

2.1. Dans ce chapitre, on s'intéresse aux groupes de la classe $C_{\mathbf{R}}$ définie par M. DUFLO dans [11]. On rappelle que G est dit de classe $C_{\mathbf{R}}$ s'il vérifie la condition suivante :

Il existe un sous-groupe discret Z du centre de G tel que G/Z soit isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique défini sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

LEMME. — *Tout groupe de classe $C_{\mathbf{R}}$ est de type I.*

Soient G un groupe de classe $C_{\mathbf{R}}$ et Z un sous-groupe discret du centre de G

qui vérifie la condition de l'énoncé ci-dessus. Puisque le groupe G_0 est localement isomorphe à un groupe algébrique, d'après (5, 2.1), il est de type I. Par suite, le sous-groupe ZG_0 de G est aussi de type I. Le groupe G étant de classe $C_{\mathbf{R}}$, il est extension finie de ZG_0; donc le groupe G est de type I.

Soit G un groupe de classe $C_{\mathbf{R}}$. D'après ce qui précède, l'application $\pi \to \operatorname{Ker} \pi$ de $G^{\wedge}$ dans $\operatorname{Prim}(G)$ est un homéomorphisme. Dans ce qui suit, nous identifierons ces deux espaces au moyen de cet isomorphisme. Ainsi, nous noterons $I(\pi)$ au lieu de $I(\operatorname{Ker} \pi)$ (*cf.* 1.1).

2.2. Dans ce qui suit, on considère un groupe H de classe $C_{\mathbf{R}}$ et G un sous-groupe invariant fermé de H et de classe $C_{\mathbf{R}}$. On note $\mathfrak{h}$ l'algèbre de Lie de H et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Notons $\mathscr{H}$ le groupe algébrique tel que l'ensemble des points complexes $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ soit l'adhérence de $\operatorname{Ad} H$ dans le groupe des automorphismes de $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$, pour la topologie de Zariski. Puisque les points de $\operatorname{Ad} H$ sont réels, le groupe algébrique $\mathscr{H}$ est défini sur $\mathbb{R}$. Comme $\operatorname{Ad} H$ est partout dense dans $\mathscr{H}(\mathbb{C})$. Les éléments de $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ définissent par restriction à $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ des automorphismes de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ et on obtient ainsi un groupe d'automorphismes de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

LEMME (Les notations sont celles de 2.1 et 2.2). — *Soit π dans $G^{\wedge}$. Notons $I(\pi, H)$ l'intersection des idéaux semi-premiers $I(h.\pi)$* (cf. 1.1) *($h \in H$). L'idéal semi-premier $I(\pi, H)$ définit l'adhérence dans* $\operatorname{Prim}(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ *d'une $\mathscr{H}(\mathbb{C})$-orbite et d'une seule. En outre, cette $\mathscr{H}(\mathbb{C})$-orbite est localement fermée dans* $\operatorname{Prim}(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$. *On notera $\hat{I}(\pi, H)$ l'idéal semi-premier de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ définissant le complémentaire de cette orbite dans son adhérence dans* $\operatorname{Prim}(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$. *Lorsque cette orbite est fermée, $\hat{I}(\pi, H) = U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$.*

Notons Z_G le centre de G. Puisque G est de classe $C_{\mathbf{R}}$, le sous-groupe $Z_G G_0$ de G est d'indice fini dans G. Soit $\{e, g_1, \ldots, g_p\}$ un système complet de représentants de G modulo $Z_G G_0$. Il existe une représentation unitaire irréductible π_0 de $Z_G G_0$ telle que la restriction de π à $Z_G G_0$ soit équivalente à $\pi_0 \oplus g_1 . \pi_0 \oplus \ldots \oplus g_p . \pi_0$. La restriction de π_0 à G_0 est irréductible; donc, d'après (8, 7.2), le noyau I_0 de $\pi_{0, \infty}$ dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$. Par suite, on a : $I(\pi) = I_0 \cap g_1 . I_0 \cap \ldots \cap g_p . I_0$. Puisque H contient G, l'idéal $I(\pi, H)$ est l'intersection des idéaux $h . I_0$ lorsque h décrit H. Puisque $\operatorname{Ad} H$ est dense dans $\mathscr{H}$ et que l'application $\gamma \to \gamma . I_0$ de $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ dans $\operatorname{Prim}(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$ est continue pour la topologie de Zariski, d'après (16, 3.10), l'idéal semi-premier $I(\pi, H)$ définit l'adhérence de l'orbite $\mathscr{H}(\mathbb{C}) . I_0$ dans $\operatorname{Prim}(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$. D'après (16, 3.10), l'orbite $\mathscr{H}(\mathbb{C}) . I_0$ est localement fermée dans $\mathrm{Prim}(U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$; donc si I' est un idéal primitif de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ tel que $I(\pi, H)$ définisse l'adhérence de l'orbite $\mathscr{H}(\mathbf{C}).I'$ dans $\mathrm{Prim}(U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}))$, alors I' appartient à l'orbite $\mathscr{H}(\mathbf{C}).I_0$.

2.3. On conserve les hypothèses et les notations de 2.1 et de 2.2. On définit pour π dans $G\hat{}$ les trois propriétés suivantes :

$A(\pi, H)$: *Il existe u dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ n'appartenant pas à $I(\pi, H)$ tel que pour tout π' dans $G\hat{}$, faiblement contenu dans $H.\pi$ et n'appartenant pas à $H.\pi$, l'idéal $I(\pi')$ contienne u.*

$B(\pi, H)$: *Soit π' dans $G\pi$. Si π' est faiblement contenu dans l'orbite $H.\pi$ et si $I(\pi')$ appartient à l'orbite $\mathscr{H}(\mathbf{C}).I(\pi)$ alors π' appartient à $H.\pi$.*

$C(\pi, H)$: *Soit π' dans $G\pi$. Si π' est faiblement contenu dans l'orbite $H.\pi$ et n'appartient pas à $H.\pi$, alors $I(\pi')$ contient $\hat{I}(\pi, H)$.*

Lorsque $H=G$, on notera les propriétés $A(\pi, H)$, $B(\pi, H)$, $C(\pi, H)$ plus simplement $A(\pi)$, $B(\pi)$, $C(\pi)$. On retrouve alors les propriétés $A(\mathrm{Ker}\,\pi)$, $B(\mathrm{Ker}\,\pi)$ de 1.1. Rappelons que G est de type I; donc tout point de $\mathrm{Prim}(G)$ est localement fermé dans $\mathrm{Prim}(G)$. La propriété $C(\pi)$ est analogue à la propriété $C(\mathrm{Ker}\,\pi)$ de 1.2. On dira que le groupe G vérifie la propriété $A(H)$ (resp. $B(H)$, $C(H)$, A, B, C) si pour tout π dans $G\hat{}$, la propriété $A(\pi, H)$ (resp. $B(\pi, H)$, $C(\pi, H)$, $A(\pi)$, $B(\pi)$, $C(\pi)$) est satisfaite.

LEMME (Les hypothèses et notations sont celles de 2.1, 2.2 et 2.3). — *Soit π dans $G\hat{}$.*

(i) *Les propriétés $A(\pi)$, $B(\pi)$, $C(\pi)$ sont deux à deux équivalentes.*

(ii) *Les propriétés $A(\pi, H)$, $B(\pi, H)$, $C(\pi, H)$ sont deux à deux équivalentes.*

(iii) *Si le groupe G satisfait à l'une des propriétés $A(H)$, $B(H)$, ou $C(H)$ (resp. A, B ou C) alors il satisfait aux trois propriétés $A(H)$, $B(H)$, $C(H)$ (resp. A, B et C).*

Comme (i) est un cas particulier de (ii), nous ne montrerons que (ii). Pour cela, nous montrerons les implications suivantes :

$C(\pi, H) \Rightarrow A(\pi, H)$, $A(\pi, H) \Rightarrow B(\pi, H)$ et $B(\pi, H) \Rightarrow C(\pi, H)$. La première implication est claire. Supposons la propriété $A(\pi, H)$ satisfaite. Soit π' dans $G\hat{}$, faiblement contenu dans $H.\pi$ et tel que $I(\pi')$ appartienne $\mathscr{H}(\mathbf{C}).I(\pi)$. Supposons que π' n'appartienne pas à $H.\pi$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. D'après la propriété $A(\pi, H)$, $h.I(\pi')$ contient u pour tout h dans H. D'après le lemme 2.2, l'idéal $I(\pi')$ est semi-premier et tout idéal semi-premier de $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$, invariant par H et contenant strictement $I(\pi, H)$, contient $\hat{I}(\pi, H)$; donc $I(\pi')$ contient $\hat{I}(\pi, H)$. Ceci est absurde car $I(\pi')$ appartient à l'orbite $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi)$.

Supposons la propriété $B(\pi, H)$ satisfaite. Soit π' dans $G^{\wedge}$, faiblement contenu dans $H.\pi$ et n'appartenant pas à $H.\pi$. Reprenons les notations de la démonstration du lemme 2.2. D'après cette démonstration, il existe des idéaux primitifs I_0 et I'_0 de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ tels que :

$$I(\pi)=I_0 \cap g_1.I_0 \cap \ldots \cap g_p.I_0$$

et

$$I(\pi')=I'_0 \cap g_1.I'_0 \cap \ldots \cap g_p.I'_0.$$

Désignons par $\mathfrak{G}$ l'adhérence de $\mathrm{Ad}(G)$ dans $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ pour la topologie de Zariski. Appliquant le lemme 2.2 lorsque $H=G$, on voit que $I(\pi)$ et $I(\pi')$ sont les idéaux semi-premiers de $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ qui définissent respectivement l'adhérence de $\mathfrak{G}\, I_0$ et $\mathfrak{G}.I'_0$ dans $\mathrm{Prim}(U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}))$. Puisque G est un sous-groupe invariant de H, $\mathfrak{G}$ est un sous-groupe invariant de $\mathscr{H}(\mathbb{C})$; donc si I'_0 appartient à l'orbite $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I_0$, $I(\pi')$ appartient à l'orbite $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi)$. D'après la propriété $B(\pi, H)$, $I(\pi')$ n'appartient pas à $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi)$; donc I'_0 n'appartient pas à $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I_0$. Notant J l'idéal bilatère fermé de $C^*(G)$ définissant l'adhérence de l'orbite $H.\pi$ dans $G^{\wedge}$, il est clair que $I(\pi, H)=I(J)$ (*cf.* 1.1); donc I'_0 contient $I(\pi, H)$. Le point I'_0 n'appartenant pas à l'orbite $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I_0$, I'_0 contient $\hat{I}(\pi, H)$. Par suite, $I(\pi')$ contient $\hat{I}(\pi, H)$.

(iii) résulte de (i) et de (ii).

2.4. Soient H et G deux groupes comme en 2.2. On dira que la paire (H, G) satisfait à condition (R) s'il existe une représentation linéaire ρ de H, de dimension finie, de noyau discret, contenu dans le centre de H, et telle que les groupes $\rho(H)$ et $\rho(G)$ soient des sous-groupes d'indice fini de l'ensemble des points réels de groupes algébriques définis sur $\mathbb{R}$.

Proposition (Les notations sont celles de 2.1, 2.3 et 2.4). — *Soient H un groupe de classe $C_{\mathbb{R}}$ et G un sous-groupe invariant fermé de H et de classe $C_{\mathbb{R}}$. Si la paire (H, G) satisfait à la condition (R), alors le groupe G satisfait aux trois propriétés $A(H)$, $B(H)$ et $C(H)$.*

Indiquons ici seulement les étapes de la démonstration. Dans un premier temps, on montrera qu'on peut toujours se ramener au cas où H et G sont connexes et simplement connexes. Remarquons que lorsque H et G sont connexes et que H est simplement connexe, alors G est simplement connexe parce qu'il est invariant dans H. Supposons H et G connexes et simplement connexes. Notons $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{g}$ les algèbres de Lie respectives de H et de G. Puisque la paire (H, G) satisfait à la condition (R), on peut considérer ces deux algèbres de Lie comme des sous-algèbres de Lie algébriques de l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Notons $\mathfrak{u}$ le radical unipotent de $\mathfrak{g}$. Nous montrerons qu'il suffit de considérer les trois cas suivants :

(1) l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est réductive;

(2) l'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$ est une algèbre de Heisenberg et son centre coïncide avec celui de $\mathfrak{g}$;

(3) l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ contient un idéal abélien non nul $\mathfrak{a}$, invariant par H et contenu dans $\mathfrak{u}$.

2.5. Proposition (Les notations sont celles de 2.1). — *Soient G un groupe de classe $C_{\mathbb{R}}$ et π dans $G^{\wedge}$. Notons Z un sous-groupe discret du centre de G tel que G/Z soit isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des éléments π' de $G^{\wedge}$ tels que $I(\pi')=I(\pi)$ et tels que la restriction de π' à Z soit quasi équivalenté à la restriction de π à Z, est une partie finie, discrète de $G^{\wedge}$.*

Nous démontrerons cette proposition de façon analogue à la proposition 2.4.

2.6. Corollaire (Les notations sont celles de 2.1 et 2.4). — *Soient H un groupe de la classe $C_{\mathbb{R}}$ et G un sous-groupe invariant fermé de H et de classe $C_{\mathbb{R}}$. On suppose que la paire (H, G) satisfait à la condition (R). Alors pour tout π dans $G^{\wedge}$, le stabilisateur $H(\pi)$ de π dans H est de classe $C_{\mathbb{R}}$.*

Puisque la paire (H, G) satisfait à la condition (R), il existe un sous-groupe discret Z du centre de H tel que les groupes H/Z et $G/Z \cap G$ soient isomorphes à des sous-groupes d'indice fini de l'ensemble des points réels de groupes algébriques définis sur $\mathbb{R}$. Le quotient $H(I(\pi))/Z$ est un sous-groupe d'indice fini de l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$. Notons Σ l'ensemble des π' de $G^{\wedge}$ tels que $I(\pi')=I(\pi)$ et tels que les restrictions de π et π' à Z soient quasi équivalentes, Il est clair que $H(I(\pi))$ permute les points de Σ; donc, d'après la proposition 2.5, le groupe $ZH(I(\pi))_0$ laisse fixe chaque point de Σ. Puisque $H(\pi)$ est contenu dans $H(I(\pi))$, $H(\pi)$ est de classe $C_{\mathbb{R}}$.

2.7. *Remarque.* — Reprenons les notations de 2.5. M. Duflo m'a indiqué que la finitude de l'ensemble des π' de $G^{\wedge}$ tels que $I(\pi')=I(\pi)$ et tels que les restrictions de π' et π à Z soient quasi équivalentes, résulte de [11]. Il m'a aussi indiqué la démonstration suivante de 2.6. Avec les notations de [11], il existe une forme linéaire f sur l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G, de type unipotent (11, chap. I, n° 10) et τ dans $Y(f)$ (11, chap. III, n° 7) tels que π soit égal à $T_{f,\tau}$ (11, chap. III, n° 11 à 13). D'après (11, chap. III, n° 11), pour tout h dans H, on a : $h.T_{f,\tau}=T_{h.f,h.}$ et si $h.T_{f,\tau}=T_{f,\tau}$, alors $h.f\in G.f$; donc le stabilisateur de $T_{f,\tau}$ dans H est contenu dans $H(f)\,G$. Toujours d'après (11, chap. III, n° 11), pour h dans $H(f)$, $h.T_{f,\tau}=T_{f,\tau}$ si et seulement si $h.\tau=\tau$. On se ramène ainsi au problème suivant : *Soient G' un groupe de classe $C_{\mathbb{R}}$ dont l'algèbre de Lie est réductive et Γ un groupe d'automorphismes de G' qui est isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$. Soit τ dans $(G')^{\wedge}$. Alors le stabilisateur de τ dans Γ est isomorphe à un sous-groupe d'indice fini de l'ensemble des points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$.*

La démonstration du lemme 3.7 prouve qu'on peut se ramener au cas où G' est connexe et simplement connexe. Il suffit alors de prouver l'assertion lorsque G' est semi-simple ou vectoriel. Si G' est semi-simple, $\Gamma(\pi)$ contient Γ_0 et si G' est vectoriel, c'est un résultat bien connu.

Cette démonstration est beaucoup plus simple que la précédente car elle évite d'utiliser les résultats de [15].

3. Lemmes de réduction

3.1. Dans ce chapitre, H désigne un groupe de classe $C_{\mathbb{R}}$ (*cf.* 2.1) et G un sous-groupe invariant, fermé de H. On suppose que G est de classe $C_{\mathbb{R}}$ et que la paire (H, G) satisfait à la condition (R) de 2.4.

LEMME. — *Les groupes H_0 et G_0 sont de classe $C_{\mathbb{R}}$. Le groupe G_0 est un sous-groupe invariant, fermé de H_0 et la paire (H_0, G_0) satisfait à la condition (R). Si le groupe G_0 satisfait à l'une des propriétés $A(H_0)$, $B(H_0)$ ou $C(H_0)$, alors le groupe G satisfait aux trois propriétés $A(H)$, $B(H)$ et $C(H)$* (cf. 2.3).

La première partie du lemme est claire, D'après l'assertion (iii) du lemme 2.3, il suffit de démontrer que si G_0 satisfait à la propriété $B(H_0)$, alors G satisfait à la propriété $B(H)$. Reprenons les notations de 2.2. Soient π et π' dans $G^{\wedge}$ tels que π' soit faiblement contenu dans $H.\pi$ et tels que $I(\pi')$ appartienne à $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi)$. Il s'agit de démontrer que π' appartient à $H.\pi$.

(*a*) Puisque H est de classe $C_{\mathbb{R}}$, l'orbite $H.\pi$ est la réunion d'un nombre fini d'orbites de H_0 dans $G^{\wedge}$; donc π' est faiblement contenu dans l'une d'elles. Le groupe H permutant l'adhérence de ces orbites, on peut supposer que π' est faiblement contenu dans $H_0.\pi$. Les restrictions de π et π' à G_0 sont respectivement portées par les orbites $G.\pi_0$ et $G.\pi'_0$ de G dans $G_0^{\wedge}$. L'injection canonique de $\mathscr{D}(G_0)$ dans $\mathscr{D}(G)$ se prolonge en un monomorphisme de $C^*(G_0)$ dans $C^*(G)$. Au moyen de ce monomorphisme, considérons $C^*(G_0)$ comme une sous-C^*-algèbre de $C^*(G)$. Soit J l'idéal bilatère fermé de $C^*(G)$ qui définit l'adhérence de $(GH_0).\pi$ dans $G\hat{}$. Puisque pour tout h dans H_0, l'idéal $\mathrm{Ker}(h.\pi) \cap C^*(G_0)$ définit l'adhérence de l'orbite $G.(h.\pi_0)$ dans $\hat{G_0}$, l'idéal bilatère fermé $J \cap C^*(G_0)$ de $C^*(G_0)$ définit l'adhérence de l'orbite $(GH_0).\pi_0$ dans $\hat{G_0}$. Or π' est faiblement contenu dans $(GH_0).\pi_0$. Donc $G.\pi'_0$ est faiblement contenu dans $(GH_0).\pi_0$. Puisque le groupe G est de classe $C_{\mathbb{R}}$, l'orbite $(GH_0).\pi_0$ est la réunion d'un nombre fini d'orbites de H_0 dans $\hat{G_0}$ qui sont permutées par G; donc on peut supposer que π'_0 est faiblement contenu dans $H_0.\pi_0$.

(*b*) Désignons par $\mathscr{H}$ le groupe adjoint algébrique de l'algèbre de Lie de H. Soit $\{e, \alpha_1, \ldots, \alpha_p\}$ un système complet de représentants de $\mathrm{Ad}\, H$ modulo $\mathrm{Ad}\, H_0$. Puisque $\mathscr{H}'(\mathbb{R})$ est un sous-groupe invariant de $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ et que $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ contient $\mathrm{Ad}\, H_0$, $\mathscr{H}'(\mathbb{R})\ \mathrm{Ad}\, H$ est égal à la réunion $\mathscr{H}'(\mathbb{R}) \cup \mathscr{H}'(\mathbb{R})\alpha_1 \cup \ldots \cup \mathscr{H}'(\mathbb{R})\alpha_p$. Or $\mathscr{H}'(\mathbb{R})\ \mathrm{Ad}\, H$ est partout dense dans $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ pour la topologie de Zariski et $\mathscr{H}'(\mathbb{R})$ est fermé dans $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ pour la topologie de Zariski. Donc $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ est égal à $\mathscr{H}'(\mathbb{R}) \cup \mathscr{H}'(\mathbb{R})\alpha_1 \cup \ldots \cup \mathscr{H}'(\mathbb{R})\alpha_p$. Les groupes $\mathscr{H}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{H}'(\mathbb{R})$ étant denses dans $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$, d'après 2.2 et (13, 34.4), $\mathscr{H}(\mathbb{C}) = \mathscr{H}'(\mathbb{C}) \cup \mathscr{H}'(\mathbb{C})\alpha_1 \cup \ldots \cup \mathscr{H}'(\mathbb{C})\alpha_p$. Puisque $\mathrm{Ad}\, H$ est dense dans $\mathscr{H}$ et que $I(\pi')$ appartient à l'orbite $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi)$, les idéaux $I(\pi, H)$ et $I(\pi', H)$ sont égaux (*cf.* 2.2). D'après le lemme 2.2, les idéaux $I(\pi, H)$ et $I(\pi', H)$ définissent respectivement les adhérences des orbites $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi_0)$ et $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi'_0)$ et celles-ci sont déterminées par cette propriété; donc $I(\pi'_0)$ appartient à l'orbite $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi_0)$. D'après ce qui précède, $I(\pi'_0)$ appartient à l'une des orbites $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).I(\pi_0)$, $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).(\alpha_1.I(\pi_0))$, $\ldots$, $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).(\alpha_p.I(\pi_0))$. On veut montrer que $I(\pi'_0)$ appartient à $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).I(\pi'_0)$. Supposons que $I(\pi'_0)$ appartient à $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).(\alpha_1.I(\pi_0))$. Puisque π'_0 est faiblement contenu dans $H_0.\pi_0$, le raisonnement de la démonstration du lemme 2.2 prouve que $I(\pi'_0)$ appartient à l'adhérence de $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).I(\pi_0)$; donc l'adhérence de $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).I(\alpha_0)$ contient l'orbite $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).(\alpha_1.I(\pi_0))$. Désignons par I et I_1 les idéaux semi-premiers de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ du complexifié de l'algèbre de Lie de G qui définissent respectivement les adhérences de ces deux orbites. D'après ce qui précède I_1 contient I et $I_1 = \alpha_1.I$: donc les quotients $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/I$ et $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})/I_1$ ont la même dimension de Gelfant-Kirillov. Puisque $\mathscr{H}'$ est irréductible, les idéaux I et I_1 sont premiers. Par suite, d'après (2, 3.6), $I = I_1$. D'après (16, 3.10), les orbites $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).I(\pi_0)$ et $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).(\alpha_1.I(\pi_0))$ sont localement fermées et d'après ce qui précède, elles ont même adhérence; donc elles sont égales et $I(\pi'_0)$ appartient à $\mathscr{K}'(\mathbb{C}).I(\pi_0)$.

(*c*) Puisque G_0 satisfait à la propriété $B(H_0)$, il satisfait à la propriété $B(\pi_0, H_0)$; donc, d'après (*a*) et (*b*), π'_0 appartient à $H_0.\pi_0$. On peut supposer que $\pi'_0=\pi_0$. Puisque la paire (H, G) satisfait à la condition(R), il existe un sous-groupe discret Z du centre de H tel que H/ZH_0 et $G/(Z\cap G)\,G_0$ soient finis. La restriction de π à $Z\cap G$ est multiple d'un caractère unitaire de $Z\cap G$, noté η. Puisque π' est faiblement contenu dans $H_0.\pi$, la restriction de π' à $Z\cap G$ est multiple de η. Désignons par π_1 l'élément de $((Z\cap G)\,G_0)^\wedge$ tel que les restrictions de π_1 à G_0 et à $Z\cap G$ soient respectivement quasi équivalentes à π_0 et à η. Notons G_1 le stabilisateur de π_1 dans G. D'après (14, théorème 8.1), il existe σ et σ' dans G_1 dont les restrictions à $(Z\cap G)\,G_0$ sont multiples de π_1 et tels que π et π' soient respectivement équivalentes à ind $(\sigma; G_1\uparrow G)$ et à ind $(\sigma'; G_1\uparrow G)$. Puisque G_1 est un sous-groupe d'indice fini de G, les orbites de G dans $\hat{G_1}$ sont localement fermées. Or G_1 est un sous-groupe invariant de $G_1 H_0$ et π' est faiblement contenu dans $H_0.\pi$. Donc, d'après (6, 5), σ' est faiblement contenu dans $H_0.\sigma$.

(*d*) Soit a un 2-cocycle de $G_1/(Z\cap G)\,G_0$ à valeurs dans $\mathbb{T}$ qui représente l'obstruction de Makey associée à π_1. Soient b le relèvement de a^{-1} à G_1 et ρ une b-représentation de G_1 prolongeant π_1. Pour tout $\tau\in(G_1/(ZG)\,G_0)^\wedge_a$, soit $\dot\tau$ la représentation de G_1 déduite de τ par relèvement à G. D'après (6, 6), l'application $\tau\to\rho\otimes\dot\tau$ est un homéomorphisme de $(G_1/(Z\cap G)\,G_0)^\wedge_a$ sur le sous-espace $(G_1)^\wedge_{\pi_1}$ des éléments de $\hat{G_1}$ dont la restriction à $(Z\cap G)\,G_0$ est multiple de π_1. Puisque $G_1/(Z\cap G)\,G_0$ est fini, $(G_1/(Z\cap G)\,G_0)^\wedge_a$ est discret; donc $\hat{G}_{\pi_1}$ est discret. Puisque le stabilisateur $H_0(\pi_1)$ de π_1 opère continûment dans $\hat{G}_{\pi_1}$, $H_0(\pi_1)_0$ laisse fixe chaque point de $\hat{G}_{\pi_1}$. Puisque G_1 est à base dénombrable, il existe une suite $\{h_n\}$ dans H_0 telle que $h_n.\sigma\to\sigma'$. Or les restrictions de σ et σ' à $(Z\cap G)\,G_0$ sont multiples de π_1. Donc $h_n\to e$ modulo $H_0(\pi_1)$. D'après la démonstration du corollaire 2.6, $(Z\cap H_0)\,H_0(\pi_1)_0$ est un sous-groupe d'indice fini de $H_0(\pi_1)$; donc l'image de la suite $\{h_n\}$ par l'application canonique de H_0 sur $H_0/(Z\cap H_0)\,H_0(\pi_1)_0$ est relativement compacte. On peut alors trouver une suite $\{h'_n\}$ dans H_0 qui tend vers un élément h de H_0 et telle que, pour tout n, il existe un entier m pour lequel $h'_n\in h_m\,(Z\cap H_0)\,H_0(\pi_1)_0$. Puisque $(Z\cap H_0)\,H_0(\pi_1)_0$ stabilise σ, $h'_n.\sigma\to\sigma'$. Soient τ et τ' dans $(G_1/(Z\cap G)\,G_0)^\wedge_a$ tels que $\sigma=\rho\otimes\dot\tau$ et $\sigma'=\rho\otimes\dot\tau'$. Soit b non nul dans $\mathscr{H}(\rho)$. Puisque $(Z\cap G)\,G_0$ est de type I et que $\rho\,|\,(Z\cap G)\,G_0$ est irréductible, il existe x dans $C^*((Z\cap G)\,G_0)$ tel que $\rho(x)$ soit le projecteur orthogonal de $\mathscr{H}(\rho)$ sur $\mathbf{C}b$. Soit a dans $\mathscr{H}(\tau')-\{0\}$. Puisque $h'_n.(\rho\otimes\dot{\tau}^*)\to\rho\otimes\dot{\tau}'^*$, d'après (6, 1), il existe, pour $n=1, 2, \ldots$, des vecteurs $a_1^n, \ldots, a_{p_n}^n\in\mathscr{H}(\tau)$, $b_1^n, \ldots, b_{p_n}^n\in\mathscr{H}(\rho)$ tels que $\sup\|\Sigma_i b_i^n\otimes a_i^n\|<+\infty$ et tels que, pour tout $g\in G_1$:

$$\langle(h'_n.(\rho\otimes\dot{\tau}^*))(x)(h'_n.(\rho\otimes\dot{\tau}^*))(g)(h'_n.(\rho\otimes\dot{\tau}^*))(x)\,\Sigma_i b_i^n\otimes a_i^n,\ \Sigma_i b_i^n\otimes a_i^n\rangle$$
$$\to\langle(\rho\otimes\dot{\tau}'^*)(x)(\rho\otimes\dot{\tau}'^*)(g)(\rho\otimes\dot{\tau}'^*)(x)\,b\otimes a,\ b\otimes a\rangle.$$

Puisque la suite $\{h_n\}$ converge vers e modulo $H_0(\pi_1)$, h appartient à $H_0(\pi_1)$; donc il existe un opérateur unitaire U de $\mathscr{H}(\rho)$ tel que, pour tout g dans ZG_0, on ait : $\rho(h^{-1}gh)=U\rho(g)U^{-1}$. Puisque x est dans $C^*((Z\cap G)G_0)$, $h'_n.\rho(x)\to U\rho(x)U^{-1}$ pour la topologie normique sur $\mathscr{L}(\mathscr{H}(\rho))$. Or $\sup\|\Sigma_i b_i^n\otimes a_i^n\|<+\infty$. Donc :

$$(h'_n.(\rho\otimes\dot{\tau}^*))(x)(\Sigma_i b_i^n\otimes a_i^n)-(h.(\rho\otimes\dot{\tau}^*))(x)(\Sigma_i b_i^n\otimes a_i^n)\to 0.$$

Par suite, en posant, pour :

$$n=1, 2, \ldots,\ a^n=\Sigma_i\langle b_i^n,\ U.b\rangle a_i^n,$$
$$(h'_n.(\rho\otimes\tau^*))(x)(\Sigma_i b_i^n\otimes a_i^n)-U.b\otimes a^n\to 0;$$

donc, pour tout g dans G_1 :

$$\langle(h'_n.(\rho\otimes\dot{\tau}^*))(g)(U.b\otimes a^n),\ U.b\otimes a^n\rangle\to\langle(\rho\otimes\dot{\tau}'^*)(g)\,b\otimes a,\ b\otimes a\rangle.$$

Puisque h est dans H_0, la représentation $g\to U^{-1}(h.\rho)(g)\,U$ de G_1 est une b-représentation de G_1 qui étend π_1; donc il existe un caractère unitaire χ de G_1, trivial sur ZG_0 tel que, pour tout g dans G_1, on ait : $U^1 h.\rho(g)\,U=\chi(g)\,\rho(g)$. Pour tout g dans G_1, $h'_n.\rho(g)$ tend vers $h.\rho(g)=U\chi(g)\,\rho(g)\,U^{-1}$; donc, d'après ce qui précède :

$$\langle\dot{\tau}^*(g)a^n,\ a^n\rangle\chi(g)\langle\rho(g)\,b,\ b\rangle\to\langle\dot{\tau}'^*(g)a,\ a\rangle\langle\rho(g)b,\ b\rangle.$$

Fixons g dans G_1. Puisque $\rho|(Z\cap G)\,G_0$ est irréductible, il existe k dans $(Z\cap G)\,G_0$ tel que $\langle\rho(g)b,\ \rho(k)b\rangle\neq 0$. Or :

$$\langle\tau^*(g)a^n,\ a^n\rangle\chi(g)\langle\rho(g)b,\ \rho(k)b\rangle$$
$$=\langle\dot{\tau}^*(k^{-1}g)a^n,\ a^n\rangle\chi(k^{-1}g)\langle\rho(k^{-1}g)b,\ b\rangle$$

et :

$$\langle\dot{\tau}'^*(g)a,\ a\rangle\langle\rho(g)b,\ \rho(k)b\rangle=\langle\dot{\tau}'^*(k^{-1}g)a,\ a\rangle\langle\rho(k^{-1}g)b,\ b\rangle.$$

Ainsi $\langle \dot{\tau}^{*}(g)a^{n}, a^{n}\rangle \chi(g) \to \langle \dot{\tau}'^{*}(g)a, a\rangle$, pour tout g dans G_1. Le groupe $G_1/(Z \cap G)\,G_0$ étant fini, chaque point de $(G_1/(Z \cap G)\,G_0)^{\wedge}_{a}$ est fermé; donc τ' et $\chi \otimes \tau$ sont équivalentes. Par suite, σ' et $\chi \otimes \sigma$ sont équivalentes. Or $\chi \otimes \sigma = (\chi \otimes \rho) \otimes \dot{\tau}^{*}$ est équivalente à $(h.\rho) \otimes \dot{\tau}^{*}$; donc $\sigma' = h.\sigma$. Par suite, $\pi' = h.\pi$.

3.2. *Remarque.* — Dans la démonstration du lemme 3.1, on utilise la proposition 2.5. Indiquons que la démonstration de celle-ci est totalement indépendante de la démonstration de la proposition 2.4 et n'utilise pas le résultat précédent.

3.3. Lemme (Les notations sont celles de 3.1). — *On suppose H et G connexes.*

(i) *Notons $\tilde{H}$ le revêtement universel de H et désignons par $\tilde{G}$ la composante neutre de l'image réciproque de G par l'homomorphisme canonique de $\tilde{H}$ sur H. Alors $\tilde{G}$ est simplement connexe et la paire $(\tilde{H}, \tilde{G})$ satisfait à la condition (R). Si le groupe $\tilde{G}$ satisfait à l'une des propriétés $A(\tilde{H})$, $B(\tilde{H})$, ou $C(\tilde{H})$, alors le groupe G satisfait aux trois propriétés $A(H)$, $B(H)$, $C(H)$.*

Puisque la paire (H, G) satisfait à la condition (R), on peut considérer les algèbres de Lie de H et de G comme sous-algèbres de Lie algébriques de l'algèbre de Lie des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Une telle identification étant faite, on note $\mathfrak{u}$ le radical unipotent de l'algèbre de Lie de G et U le sous-groupe analytique de G d'algèbre de Lie $\mathfrak{u}$. Soit A un sous-groupe connexe de U qui est fermé et invariant dans H.

(ii) *La paire $(H/A, G/A)$ satisfait à la condition (R).*

(iii) *Soient π dans $(G/A)^{\wedge}$ et π' le relèvement de π à G. Si l'une des propriétés $A(\pi, H/A)$, $B(\pi, H/A)$, $C(\pi, H/A)$ est satisfaite, alors les trois propriétés $A(\pi', H)$, $B(\pi', H)$* et *$C(\pi', H)$ sont satisfaites.*

(i) La première partie de l'assertion est claire. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. D'après l'assertion (iii) du lemme 2.3, il suffit de montrer l'implication $A(\tilde{H}) \Rightarrow A(H)$. Supposons la propriété $A(H)$ satifaite. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Soient π dans $G^{\wedge}$, π' faiblement contenu dans $H.\pi$ et n'appartenant pas à $H.\pi$. Désignons par $\tilde{\pi}$ et $\tilde{\pi}'$ les relèvements respectifs de π et π' à $\tilde{G}$. Puisque π' est faiblement contenu dans $H.\pi$ et n'appartient pas à $H.\pi$, $\tilde{\pi}'$ est faiblement contenu dans $\tilde{H}.\tilde{\pi}$ et n'appartient pas à $\tilde{H}.\tilde{\pi}$. Or la propriété $A(\tilde{\pi}, \tilde{H})$ est satisfaite. Donc il existe u dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbf{C}})$ qui appartient à $I(\tilde{\pi}')$ et qui n'appartient pas à $I(\tilde{\pi}, \tilde{H})$ (*cf.* 2.2). Puisque $I(\tilde{\pi}') = I(\pi')$ et

$I(\tilde{\pi})=I(\pi)$, $I(\tilde{\pi}, \tilde{H})=I(\pi, H)$ et u appartient à $I(\pi')$. Étant donné l'arbitraire de π, la propriété $A(H)$ est satisfaite.

(ii) Soit ρ une représentation linéaire de H dans un espace vectoriel de dimension finie telle que $\rho(H)$ et $\rho(G)$ soient respectivement des sous-groupes d'indice fini de $\mathfrak{H}(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{G}(\mathbb{R})$, où $\mathfrak{H}$ et $\mathfrak{G}$ sont des groupes algébriques définis sur $\mathbb{R}$, et telle que $\rho(U)$ soit le radical unipotent de $\mathfrak{G}(\mathbb{R})$. Puisque A est un sous-groupe connexe de U, $\rho(A)$ coïncide avec l'ensemble des points réels d'un groupe unipotent $\mathfrak{A}$, défini sur $\mathbb{R}$. Le groupe $\mathfrak{A}$ est invariant dans $\mathfrak{H}$ parce que A est invariant dans H et $\rho(H)$ est partout dense dans $\mathfrak{H}$. D'après (13, 34.2 et 11.5), il existe une représentation rationnelle σ de $\mathfrak{H}$ dans un espace vectoriel de dimension finie qui est un $\mathbb{R}$-morphisme et dont le noyau est égal à $\mathfrak{A}$. A la représentation σ correspond une représentation du groupe $\mathfrak{H}(\mathbb{R})$ dans un espace vectoriel réel de dimension finie. Notons là aussi σ. La représentation $\sigma \circ \rho$ de H définit par passage au quotient une représentation de H/A. Son noyau est discret, contenu dans le centre de H/A et les images de H/A et G/A sont des sous-groupes d'indice fini de l'ensemble des points réels de groupes algébriques définis sur $\mathbb{R}$.

(iii) D'après l'assertion (iii) du lemme 2.3, il suffit de montrer l'implication $B(\pi, H/A) \Rightarrow B(\pi', H)$. Supposons la propriété $B(\pi, H/A)$ satisfaite. On utilise le groupe algébrique $\mathscr{H}$ défini en 2.2. Soit π'_1 dans $G^{\wedge}$, faiblement contenu dans $H.\pi'$ et tel que $I(\pi'_1)$ appartienne à $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi')$. Puisque A est invariant dans H, que la restriction de π' à A est multiple de la représentation triviale et que π'_1 est faiblement contenu dans $H.\pi'$, la restriction de π'_1 à A est multiple de la représentation triviale. L'élément π'_1 de $G^{\wedge}$ définit par passage au quotient un élément de $(G/A)^{\wedge}$, noté π_1. Cet élément est faiblement contenu dans $(H/A).\pi$. Notons $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de A et α l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$. Cet homomorphisme s'étend en un homomorphisme de l'algèbre $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ sur $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. Notons-le aussi α. Désignons par $\mathscr{H}_A$ le sous-groupe algébrique du groupe des automorphismes de l'algèbre de Lie de H/A, défini de manière analogue à $\mathscr{H}$. Si h est dans $\mathscr{H}(\mathbb{C})$, il laisse invariant $\mathfrak{a}_{\mathbb{C}}$ et définit par passage au quotient un élément de $\mathscr{H}_A(\mathbb{C})$, noté h. Pour tout x dans $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ et pour tout h dans $\mathscr{H}(\mathbb{C})$, $\alpha(h.x)=h.\alpha(x)$. Il est facile de voir que $I(\pi)=\alpha(I(\pi'))$ et $I(\pi_1)=\alpha(I(\pi'_1))$. Puisque $I(\pi'_1)$ appartient à $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi')$, $I(\pi_1)$ appartient à $\mathscr{H}_A(\mathbb{C}).I(\pi)$. Or π_1 est faiblement contenu dans $(H/A).\pi$ et la propriété $B(\pi, H/A)$ est satisfaite. Donc π_1 appartient à $(H/A).\pi$. Par suite, π'_1 appartient à $H.\pi'$. Ainsi, la propriété $B(\pi', H)$ est satisfaite.

3.4. LEMME. — *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie algébrique complexe*, $\mathfrak{u}$ *le radical* *unipotent de* $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{a}$ *un idéal abélien de* $\mathfrak{g}$ *contenue dans* $\mathfrak{u}$. *Soient* w *un idéal maximal de* $U(a)$ *et* $\mathfrak{h}$ *le stabilisateur de* w *dans* $\mathfrak{g}$. *Soient* i *et* i' *deux idéaux premiers de* $U(\mathfrak{h})$ *tels que* $i \cap U(\mathfrak{a}) = i' \cap U(\mathfrak{a}) = w$. *Notons* I *et* I' *les idéaux* $\operatorname{ind}^{\sim}(i; \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g})$ *et* $\operatorname{ind}^{\sim}(i'; \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g})$ ($\operatorname{ind}^{\sim}$ *désigne l'induction tordue au sens de* (7, chap. 5, §2)). *On suppose que les idéaux* I *et* I' *de* $U(\mathfrak{g})$ *sont premiers. Si les quotients* $U(\mathfrak{g})/I$ *et* $U(\mathfrak{g})/I'$ *ont même dimension de Gelfand-Kirillov, alors les quotients* $U(\mathfrak{h})/i$ *et* $U(\mathfrak{h})/i'$ *ont même dimension de Gelfand-Kirillov.*

La démonstration consiste en l'application des résultats de C. MEOGLIN [15]. D'après (7, 2.2.3), il existe un automorphisme γ de $U(\mathfrak{h})$ tel que pour tout idéal bilatère i de $U(\mathfrak{h})$, on ait : $\operatorname{ind}^{\sim}(i; \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g}) = \operatorname{ind}(\gamma(i); \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{g})$. Il suffit donc de démontrer le lemme pour l'induction usuelle. On raisonne par récurrence sur la dimension de $\mathfrak{g}$. Le résultat est clair en dimension 0 et 1. On suppose le résultat établi pour les algèbres de Lie algébriques de dimension strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}$. Désignons par Γ le groupe adjoint de $\mathfrak{g}$. Posons : $v = \bigcap_{\gamma \in \Gamma} \gamma . w$.

(*a*) Supposons l'intersection $v \cap \mathfrak{a}$ non nulle. Notons α l'homomorphisme canonique de $\mathfrak{g}$ sur $\mathfrak{g}/(\mathfrak{a} \cap v)$. L'homomorphisme α se prolonge de manière unique en un homomorphisme de $U(\mathfrak{g})$ sur $U(\mathfrak{g}/(\mathfrak{a} \cap v))$. Nous le noterons aussi α. Le stabilisateur de $\alpha(w)$ dans $\alpha(\mathfrak{g})$ est $\alpha(\mathfrak{h})$. Les idéaux $\alpha(i)$ et $\alpha(i')$ de $U(\alpha(\mathfrak{h}))$ sont premiers et $\alpha(i) \cap U(\alpha(\mathfrak{a})) = \alpha(i') \cap U(\alpha(\mathfrak{a})) = \alpha(w)$. Les idéaux $\alpha(I)$ et $\alpha(I')$ de $U(\alpha(\mathfrak{g}))$ sont respectivement égaux à $\operatorname{ind}(\alpha(i); \alpha(\mathfrak{h}) \uparrow \alpha(\mathfrak{g}))$ et à $\operatorname{ind}(\alpha(i'); \alpha(\mathfrak{h}) \uparrow \alpha(\mathfrak{g}))$. Les quotients $U(\mathfrak{g})/I$, $U(\mathfrak{g})/I'$, $U(\mathfrak{h})/i$ et $U(\mathfrak{h})/i'$ sont respectivement isomorphes à $U(\alpha(\mathfrak{g}))/\alpha(I)$, $U(\alpha(\mathfrak{g}))/\alpha(I')$, $U(\alpha(\mathfrak{h}))/\alpha(i)$ et $U(\alpha(\mathfrak{h}))/\alpha(i')$. Puisque la dimension de $\alpha(\mathfrak{g})$ est strictement inférieure à celle de $\mathfrak{g}$, l'assertion résulte de l'hypothèse de récurrence.

(*b*) On suppose dans ce qui suit $v \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ et $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. Soit $\mathfrak{z}$ la sous-algèbre du centre de $\mathfrak{g}$ qui est contenue dans $\mathfrak{a}$. On suppose que $\mathfrak{z}$ est non nulle. Puisque $\mathfrak{h}$ est distinct de $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}$ est distinct de $\mathfrak{z}$. Soit $\mathfrak{a}_1$ un idéal de $\mathfrak{g}$; contenu dans $\mathfrak{a}$, contenant $\mathfrak{z}$ tel que $\mathfrak{a}_1/\mathfrak{z}$ soit un $\mathfrak{g}$-module irréductible, non nul. Posons $w_1 = w \cap U(\mathfrak{a}_1)$ et notons $\mathfrak{h}_1$ son stabilisateur dans $\mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_1$ contient $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{a}_1$ est de dimension supérieure ou égale à 2, $w_1 \cap \mathfrak{a}_1$ est non nul. Or $v \cap \mathfrak{a} = \{0\}$. Donc $\mathfrak{h}_1$ est distinct de $\mathfrak{g}$. Notons I_1 et I'_1 les idéaux $\operatorname{ind}(i; \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{h}_1)$ et $\operatorname{ind}(i'; \mathfrak{h} \uparrow \mathfrak{h}_1)$ de $U(\mathfrak{h}_1)$. D'après le théorème d'induction par étages, $I = \operatorname{ind}(I_1; \mathfrak{h}_1 \uparrow \mathfrak{g})$ et $I' = \operatorname{ind}(I'_1; \mathfrak{h}_1 \uparrow \mathfrak{g})$. Posons $t = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{h}_1$ et notons A_t l'algèbre de Weyl sur $\mathbb{C}$ à $2t$ générateurs. Si $[\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_1] \neq \{0\}$ alors, d'après (15, 2.1) et (15, 2.2), les quotients $U(\mathfrak{g})/I$ et $U(\mathfrak{g})/I'$ sont respectivement isomorphes à $U(\mathfrak{h}_1)/I_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_t$ et à $U(\mathfrak{h}_1)/I'_1 \otimes_{\mathbb{C}} A_t$. Supposons $[\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_1] = \{0\}$. Notons $p_1, \ldots, p_t, q_1, \ldots, q_t$ les générateurs canoniques de A_t et A'_t l'algèbre A_t localisée en $\mathbb{C}[q_1, \ldots, q_t]\setminus\{0\}$. Posons $v_1 = \bigcap_{\gamma\in\Gamma}\gamma . w_1$. D'après (15, 3.1), (15, 3.24, (ii)), (15, 3.25, (ii)) et (15, 3.26), il existe une algèbre noethérienne U', contenant $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})v_1$ comme sous-algèbres, des idéaux premiers K et K' de U' et un isomorphisme $\varkappa$ de U' sur $(U(\mathfrak{h}_1)/U(\mathfrak{h}_1)w_1)\otimes_{\mathbb{C}} A'_t$ tels que $\varkappa(K)=(I_1/U(\mathfrak{h}_1)w_1)\otimes_{\mathbb{C}} A'_t$, $\varkappa(K')=(I'_1/U(\mathfrak{h}_1)w_1)\otimes_{\mathbb{C}} A'_t$ et tels que les dimensions de Gelfand-Kirillov de $U(\mathfrak{g})/I$ et $U(\mathfrak{g})/I'$ soient respectivement égales à celles de U'/K et U'/K'. De tout ceci résulte que les idéaux I_1 et I'_1 sont premiers et que les quotients $U(\mathfrak{h}_1)/I_1$ et $U(\mathfrak{h}_1)/I'_1$ ont même dimension de Gelfand-Kirillov. Puisque $\mathfrak{h}_1$ est strictement contenu dans $\mathfrak{g}$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence; donc $U(\mathfrak{h})/i$ et $U(\mathfrak{h})/i'$ ont même dimension de Gelfand-Kirillov.

(*c*) Comme en (*b*), on suppose $v \cap \mathfrak{a} = \{0\}$ et $\mathfrak{h} \neq \mathfrak{g}$. On suppose que la partie du centre de $\mathfrak{g}$, contenue dans $\mathfrak{a}$ est un $\mathfrak{g}$-module irréductible. Si $\dim \mathfrak{a}_1 \geqslant 2$, alors le raisonnement de (*b*) prouve que les quotients $U(\mathfrak{h})/i$ et $U(\mathfrak{h})/i'$ ont même dimension de Gelfand-Kirillov. Supposons $\dim \mathfrak{a}_1 = 1$. Le centralisateur $\mathfrak{g}_0$ de $\mathfrak{a}_1$ dans $\mathfrak{g}$ est de codimension 1 dans $\mathfrak{g}$. Posons $w_1 = w \cap U(\mathfrak{a}_1)$. Le stabilisateur de w_1 dans $\mathfrak{g}$ est égal à $\mathfrak{g}_0$; donc $\mathfrak{g}_0$ contient $\mathfrak{h}$. Puisque $\mathfrak{a}_1$ est un idéal de dimension 1 de $\mathfrak{u}$, $[\mathfrak{u}, \mathfrak{a}_1] = \{0\}$. On peut alors appliquer la deuxième partie du raisonnement de (*b*). Celui-ci prouve que les idéaux ind $(i; \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g}_0)$ et ind $(i'; \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g}_0)$ de $U(\mathfrak{g}_0)$ sont premiers et que les quotients $U(\mathfrak{g}_0)/(\text{ind}\,(i; \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g}_0))$ et $U(\mathfrak{g}_0)/(\text{ind}\,(i'; \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g}_0))$ ont même dimension de Gelfand-Kirillov. Puisque $\mathfrak{g}_0$ est distinct de $\mathfrak{g}$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence; donc $U(\mathfrak{h})/i$ et $U(\mathfrak{h})/i'$ ont même dimension de Gelfand-Kirillov.

3.5. LEMME (Reprenons les notations $\mathfrak{g}, \mathfrak{u}, \mathfrak{a}, w, \mathfrak{h}$ de 3.3). — *Soit Γ un sous-groupe algébrique du groupe des automorphismes de* $\mathfrak{g}$, *défini sur un sous-corps de* $\mathbb{C}$. *On suppose que w est invariant par* $\Gamma(\mathbb{C})$. *La sous-algèbre* $\mathfrak{h}$ *de* $\mathfrak{g}$ *est alors invariante par* $\Gamma(\mathbb{C})$. *Soient i et i' des idéaux primitifs de $U(\mathfrak{g})$ tels que $i \cap U(\mathfrak{a}) = i' \cap U(\mathfrak{a}) = w$. Si i' appartient à l'adhérence de l'orbite* $\Gamma(\mathbb{C}).i$ *dans* Prim $U(\mathfrak{h})$ *et si* $\text{ind}^{\sim}(i; \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g}) = \text{ind}^{\sim}(i'; \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})$, *alors i' appartient à l'orbite* $\Gamma(\mathbb{C}).i$.

La première partie du lemme est claire.

(*a*) Montrons que les stabilisateurs de i et i' dans Γ ont même composante neutre. Notons Γ_1 et Γ_2 les composantes neutres des stabilisateurs de i et i'. Soit P l'idéal semi-premier de $U(\mathfrak{h})$ qui définit l'adhérence de l'orbite $\Gamma_1(\mathbb{C}).i'$ dans Prim $U(\mathfrak{h})$. Puisque Γ_1 est irréductible, P est premier, d'après (16, 1.5).

Pour tout γ dans $\Gamma_1(\mathbb{C})$, $\operatorname{ind}^{\sim}(\gamma . i'; \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})=\gamma.(\operatorname{ind}^{\sim}(i'; \mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g}))$. Or $\operatorname{ind}^{\sim}(i';\mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})=\operatorname{ind}^{\sim}(i;\mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})$ et $\gamma.i=i$. Donc $\operatorname{ind}^{\sim}(\gamma.i';\mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})=\operatorname{ind}^{\sim}(i';\mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})$. Ainsi, d'après (8, 3.3), $\operatorname{ind}^{\sim}(i';\mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})=\operatorname{ind}^{\sim}(P;\mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})$. D'après (7, 5.3.6) et (7, 5.2.6), l'idéal $\operatorname{ind}^{\sim}(i';\mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})$ est primitif, donc premier, il resulte alors du lemme 3.4 que les quotients $U(\mathfrak{h})/i'$ et $U(\mathfrak{h})/P$ ont même dimension de Gelfand-Kirillov. Par suite, pour tout γ dans $\Gamma_1(\mathbb{C})$, $U(\mathfrak{h})/\gamma.i'$ et $U(\mathfrak{h})/P$ ont même dimension de Gelfand-Kirillov. Or $\gamma.i'$ contient P. Donc, d'après (2, 3.6), $\gamma.i'=P$. Ainsi Γ_1 est contenu dans Γ_2. L'inclusion opposée se démontrant de façon analogue, $\Gamma_1=\Gamma_2$.

(*b*) Puisque Γ n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, il existe γ dans $\Gamma(\mathbb{C})$ tel que i' appartienne à l'adhérence de l'orbite de $\gamma.i$ sous l'action de la composante neutre Γ_0 de Γ. Notons P_1 et P_2 les idéaux semi-premiers de $U(\mathfrak{h})$ qui définissent les adhérences des orbites $\Gamma_0(\mathbb{C}).(\gamma.i)$ et $\Gamma_0(\mathbb{C}).i'$ dans $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{h})$. D'après (16, 1.5), P_1 et P_2 sont premiers et d'après ce qui précède, P_2 contient P_1. D'après (16, 3.12) :

$$\operatorname{Dim}(U(\mathfrak{h})/P_1)=\operatorname{Dim}(U(\mathfrak{h})/\gamma.i)+\dim(\Gamma_0/\Gamma_0(\gamma.i))$$

et :

$$\operatorname{Dim}(U(\mathfrak{h})/P_2)=\operatorname{Dim}(U(\mathfrak{h})/i')+\dim(\Gamma_0/\Gamma_0(i'))$$

(Dim(?) désigne la dimension de Gelfand-Kirillov). De (*a*), résulte l'égalité $\dim(\Gamma_0/\Gamma_0(i'))=\dim(\Gamma_0/\Gamma_0(\gamma.i))$. D'après (7, 5.3.6) et (7, 5.2.6), les idéaux $\operatorname{ind}^{\sim}(i;\mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})$ et $\operatorname{ind}^{\sim}(i';\mathfrak{h}\uparrow\mathfrak{g})$ sont premiers; donc, d'après le lemme 3.4, les quotients $U(\mathfrak{h})/i$ et $U(\mathfrak{h})/i'$ ont même dimension de Gelfand-Kirillov. Ainsi, $\operatorname{Dim}(U(\mathfrak{h})/P_1)=\operatorname{Dim}(U(\mathfrak{h})/P_2)$; donc, d'après (2, 3.6), $P_1=P_2$. Les orbites $\Gamma_0(\mathbb{C}).(\gamma.i)$ et $\Gamma_0(\mathbb{C}).(i')$ étant localement fermées dans $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{h})$, d'après (16, 3.10), i' appartient à $\Gamma_0(\mathbb{C}).(\gamma.i)$, d'où le lemme.

3.6. On considère la paire (H, G) de 3.1 et on suppose H et G connexes. On reprend les notations U et A du lemme 3.3. Soit χ un caractère unitaire de A. On utilise le groupe algébrique $\mathscr{H}$ défini en 2.2. Celui-ci opère dans l'algèbre de Lie de A. Notons $\mathscr{H}_\chi$ le stabilisateur de la différentielle de χ en e. Le groupe $\mathscr{H}_\chi$ est défini sur $\mathbb{R}$. Désignons par $\mathscr{H}'_\chi$ le sous-groupe algébrique, défini sur $\mathbb{R}$, de $\mathscr{H}_\chi$ tel que $\mathscr{H}'_\chi(\mathbb{C})$ soit égal à l'adhérence de $\operatorname{Ad} H(\chi)$ dans $\mathscr{H}_\chi(\mathbb{C})$, pour la topologie de Zariski.

LEMME (Les notations sont celles de 3.1 et 3.3). — *Soient π et π' dans $G^{\wedge}$. On suppose que les restrictions de π et π' à A sont portées par $G.\chi$, que π' est faiblement contenu dans $H.\pi$ et que $I(\pi')$ appartient à $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi)$. D'après*

(14, *théorème* 8.1), *il existe* σ *et* σ' *dans* $G(\chi)$ *tels que leurs restrictions à* A *soient multiples de* χ *et tels que* $\operatorname{ind}(\sigma;\ G(\chi)\uparrow G)=\pi$ *et* $\operatorname{ind}(\sigma';\ G(\chi)\uparrow[\ G)=\pi'$. *Alors* σ' *est faiblement contenu dans* $H(\chi).\sigma$ *et* $I(\sigma')$ *appartient à* $\mathscr{H}'_{\chi}(\mathbb{C}).I(\sigma)$.

(*a*) Soit (V_n) une base de voisinages ouverts de χ dans A. D'après (5, lemme 4.2), pour $n=1, 2, \ldots,$ l'ensemble des éléments de $\hat{G}$ dont la restriction à A est portée par une G-orbite contenue dans $G.V_n$ est un ouvert de $\hat{G}$. Notons le W_n. Puisque G est à base dénombrable, la topologie de $\hat{G}$ est à base dénombrable. Soit (X_n) une base de voisinages ouverts de π' dans $\hat{G}$. Puisque π' est faiblement contenu dans $H.\pi$, pour $n=1, 2, \ldots,$ il existe h_n dans H tel que $h_n.\pi$ appartienne à $W_n\cap X_n$. Pour $n=1, 2, \ldots, h_n.\chi$ appartient à $G.V_n$; donc il existe g_n dans G tel que $(g_n.h_n).\chi$ appartienne à V_n. Ainsi $(g_n.h_n).\pi\rightarrow\pi$ et $(g_n.h_n).\chi\rightarrow\chi$. En particulier, la suite $(g_n.h_n)$ tend vers e modulo $H(\chi)$; donc il existe une suite (h'_n) dans $H(\chi)$ telle que $g_n h_n h'_n\rightarrow e$. Pour $n=1, 2, \ldots,$ posons $\sigma_n=h_n'^{-1}.\sigma$. Puisque, pour $n=1, 2, \ldots,$ ind $(\sigma_n;\ G(\chi)\uparrow G)=h_n'^{-1}.\pi=((g_n\ h_n h'_n)^{-1}(g_n h_n)).\pi$, que $(g_n h_n h'_n)^{-1}\rightarrow e$ et que $g_n h_n.\pi\rightarrow\pi'$, ind $(\sigma_n;\ G(\chi)\uparrow G)\rightarrow\operatorname{ind}(\sigma';\ G(\chi)\uparrow G)$; donc, d'après (6, 5), $\sigma_n\rightarrow\sigma'$. Ainsi σ' est

(*b*) Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G, $\mathscr{G}$ le groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$ dont l'ensemble des points complexes coïncide avec l'adhérence de $\operatorname{Ad} G$ dans $\operatorname{Aut}(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$, pour la topologie de Zariski, $\mathfrak{a}$ l'algèbre de Lie de A et χ l'extension à $U(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$ de la différentielle de χ en e. Puisque les restrictions de π' et π à A sont portées par $G.\chi$:

$$I(\pi')\cap U(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})=\textstyle\bigcap_{g\in\mathscr{G}(\mathbb{C})} g.(\ker\chi)\qquad\text{et}\qquad I(\pi)\cap U(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})=\textstyle\bigcap_{g\in\mathscr{G}(\mathbb{C})} g.(\ker\chi).$$

Or, par hypothèse, il existe h dans $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ tel que $I(\pi')=h.I(\pi)$. Donc :

$$I(\pi')\cap U(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})=h.(\textstyle\bigcap_{g\in\mathfrak{G}(\mathbb{C})} g.(\ker\chi)).$$

Puisque G est invariant dans H, $h.(\mathscr{G}(\mathbb{C}).(\ker\chi))=\mathscr{G}(\mathbb{C}).(h.(\ker\chi))$. Or, d'après (16, 3.10), les orbites $\mathscr{G}(\mathbb{C}).(\ker\chi)$ et $\mathscr{G}(\mathbb{C}).(h.(\ker\chi))$ sont localement fermées dans $\operatorname{Prim} U(\mathfrak{a}_{\mathbb{C}})$. Donc elles sont égales. Ainsi $h\in\mathscr{G}(\mathbb{C})\,\mathscr{H}_{\chi}(\mathbb{C})$ et $I(\pi')\in\mathscr{H}_{\chi}(\mathbb{C}).I(\pi)$.

(*c*) D'après (11, 16, chap. IV), $I(\pi)=\operatorname{ind}^{\sim}(I(\sigma);\ \mathfrak{g}(\chi)\uparrow\mathfrak{g})$ et $I(\pi')=\operatorname{ind}$ $(I(\sigma');\ \mathfrak{g}(\chi)\uparrow\mathfrak{g})$ ($\operatorname{ind}^{\sim}$ désigne l'induction tordue). Puisque $G(\chi)$ est de classe $C_{\mathbf{R}}$, le raisonnement de la démonstration du lemme 2.2 prouve qu'il existe des idéaux primitifs i et i' de $U(\mathfrak{g}(\chi)_{\mathbf{C}})$ tels que :

$$I(\sigma)=\bigcap_{g\in G(\chi)} g.i \qquad \text{et} \qquad I(\sigma')=\bigcap_{g\in G(\chi)} g.i'.$$

D'après (*a*), l'idéal $I(\sigma')$ contient $I(\sigma, H(\chi))$ (*cf.* 2.2); donc $I(\sigma', H(\chi))$ contient $I(\sigma, H(\chi))$. Puisque les idéaux $I(\sigma, H(\chi))$ et $I(\sigma', H(\chi))$ définissent respectivement les adhérences des orbites $\mathscr{H}'_\chi(\mathbf{C}).i$ et $\mathscr{H}'_\chi(\mathbf{C}).i'$ dans Prim $U(\mathfrak{g}(\chi)_{\mathbf{C}})$ (*cf.* lemme 2.2), i' appartient à l'adhérence de $\mathscr{H}'_\chi(\mathbf{C}).i$. Or $\mathscr{H}_\chi$ contient $\mathscr{H}'_\chi$. Donc i' appartient à l'adhérence de $\mathscr{H}_\chi(\mathbf{C}).i$. D'après (*b*), il existe h dans $\mathscr{H}_\chi(\mathbf{C})$ tel que $I(\pi')=h.I(\pi)$ et d'après (8, 3.3) :

$$I(\pi)=\operatorname{ind}^{\sim}(i;\, \mathfrak{g}(\chi)\uparrow \mathfrak{g}) \qquad \text{et} \qquad I(\pi')=\operatorname{ind}^{\sim}(i';\, \mathfrak{g}(\chi)\uparrow \mathfrak{g});$$

donc $\operatorname{ind}^{\sim}(i';\, \mathfrak{g}(\chi)\uparrow \mathfrak{g})=\operatorname{ind}^{\sim}(h.i;\, \mathfrak{g}(\chi)\uparrow \mathfrak{g})$. Ainsi, d'après le lemme 3.5, i' appartient à $\mathscr{H}_\chi(\mathbf{C}).i$.

(*d*) Notons $\mathscr{H}^0_\chi$ et $(\mathscr{H}'_\chi)^0$ les composantes neutres de $\mathscr{H}_\chi$ et $\mathscr{H}'_\chi$. D'après (13, 34.2), ces deux groupes algébriques sont définis sur $\mathbf{R}$. Puisque H est de classe $C_{\mathbf{R}}$, $\operatorname{Ad}(H_0)$ est la composante neutre de $\mathscr{H}(\mathbf{R})$ pour la topologie de Haussdorff; donc, d'après (13, 35.3), Ad H est un sous-groupe d'indice fini de $\mathscr{H}(\mathbf{R})$. Par suite, $\operatorname{Ad}(H(\chi))$ et $\mathscr{H}'_\chi(\mathbf{R})$ sont des sous-groupes d'indice fini de $\mathscr{H}_\chi(\mathbf{R})$. Or $(\mathscr{H}'_\chi)^0(\mathbf{R})$ est un sous-groupe d'indice fini de $\mathscr{H}'_\chi(\mathbf{R})$. Donc, d'après (13, 34.4), $\mathscr{H}^0_\chi=(\mathscr{H}'_\chi)^0$. Soit $\{e, \gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$ un système complet de représentants de $\mathscr{H}_\chi(\mathbf{C})$ modulo $\mathscr{H}^0_\chi(\mathbf{C})$. Nous avons vu que i' appartient à l'adhérence de $\mathscr{H}'_\chi(\mathbf{C}).i$ dans Prim $(U(\mathfrak{g}(\chi)_{\mathbf{C}})$. Quitte à remplacer i' par un élément de $\mathscr{H}'_\chi(\mathbf{C}).i'$, on peut supposer que i' appartient à l'adhérence de $\mathscr{H}^0_\chi(\mathbf{C}).i$. On veut montrer que i' appartient à $\mathscr{H}^0_\chi(\mathbf{C}).i$. Supposons que i' n'appartienne pas à $\mathscr{H}^0_\chi(\mathbf{C}).i$. Il s'agit d'aboutir à une contradiction. On peut supposer, d'après (*c*), que i' appartient à $\mathscr{H}^0_\chi(\mathbf{C}).(\gamma_1.i)$. Notons P et P_1 les idéaux semi-premiers de $U(\mathfrak{g}(\chi)_{\mathbf{C}})$ qui définissent les adhérences des orbites $\mathscr{H}^0_\chi(\mathbf{C}).i$ et $\mathscr{H}^0_\chi(\mathbf{C}).(\gamma_1.i)$ dans Prim $U(\mathfrak{g}(\chi)_{\mathbf{C}})$. D'après (16, 1.5), P et P_1 sont premiers. D'après ce qui précède, P contient P_1 et $P_1=\gamma_1.P$. Les quotients $U(\mathfrak{g}(\chi)_{\mathbf{C}})/P$ et $U(\mathfrak{g}(\chi)_{\mathbf{C}})/P_1$ ont même dimension de Gelfand-Kirillov; donc, d'après (2, 3.6), $P=P_1$. Les orbites $\mathscr{H}^0_\chi(\mathbf{C}).i$ et $\mathscr{H}^0_\chi(\mathbf{C}).(\gamma_1.i)$ étant localement fermées, d'après (16, 3.10), elles sont égales, d'où la contradiction. Ainsi i' appartient à $\mathscr{H}'_\chi(\mathbf{C}).i$. Reprenons les notations de (*b*) et désignons par $\mathscr{G}'_\chi$ le sous-groupe algébrique, défini sur $\mathbf{R}$, de $\mathscr{G}$ tel que Ad $G(\chi)$ soit partout dense dans $\mathscr{G}'_\chi(\mathbf{C})$, pour la topologie de Zariski. Puisque $G(\chi)$ est invariant dans $H(\chi)$, $\mathscr{G}'_\chi(\mathbf{C})$ est invariant dans $\mathscr{H}'_\chi(\mathbf{C})$; donc $I(\sigma')=\bigcap_{g\in\mathscr{G}'_\chi(\mathbf{C})} g.i'$ appartient à l'orbite de $I(\sigma)=\bigcap_{g\in\mathscr{G}'_\chi(\mathbf{C})} g.i$ sous $\mathscr{H}'_\chi(\mathbf{C})$.

3.7. LEMME. — *Soient G un groupe de classe $C_{\mathbb{R}}$ et Z un sous-groupe fermé du centre de G tel que ZG_0 soit un sous-groupe d'indice fini de G. Soient σ dans $\hat{G_0}$, η un caractère unitaire de Z et Σ l'ensemble des éléments π de G dont la restriction à G_0 est portée par $G.\sigma$ et dont la restriction à Z est quasi équivalente à η.*

(i) *Alors Σ est fini.*

(ii) *Si π et π' sont dans Σ et si π' est faiblement contenu dans π, alors $\pi' = \pi$.*

Si Σ n'est pas vide, la restriction de σ à $Z \cap G_0$ est quasi équivalente à la restriction de η à $Z \cap G_0$. Supposons Σ non vide. Notons σ' l'élément de $(ZG_0)\hat{}$ dont la restriction à G_0 est équivalente à σ et dont la restriction à Z est quasi équivalente à η. La restriction de l'élément π de $\hat{G}$, à ZG_0, est portée par $G.\sigma'$ si et seulement si π est dans Σ. Notons G_1 le stabilisateur de σ' dans G. Soit a un 2-cocycle de G_1/ZG_0 à valeurs dans $\mathbb{T}$ qui représente l'obstruction de Mackey associée à σ'. Soient b le relèvement de a^{-1} à G_1 et ρ une b-représentation de G_1 dont la restriction à ZG_0 est équivalente à σ'. Si τ est une a-représentation de G_1/ZG_0, on note $\tau^{\bullet}$ le relèvement de τ à G_1. D'après (6, 5) et (6, 6), la correspondance $\tau \to \operatorname{ind}(\tau^{\bullet} \otimes \rho;\, G_1 \uparrow G)$ définit un homéomorphisme de $(G_1/ZG_0)\hat{}_a$ sur Σ. (i) résulte de ce que $(G_1/ZG_0)\hat{}_a$ est fini et (ii) résulte de ce que tout point de $(G_1/ZG_0)\hat{}_a$ est fermé.

4. Démonstration des principaux résultats

4.1. ON DÉMONTRE ICI LA PROPOSITION ÉNONCÉE EN 2.4

PROPOSITION (Les notations sont celles de 2.1, 2.3 et 2.4). — *Soient H un groupe de classe $C_{\mathbb{R}}$ et G un sous-groupe invariant fermé et de classe $C_{\mathbb{R}}$. Si la paire (H, G) satisfait à la condition (R), alors le groupe G satisfait aux trois propriétés $A(H)$, $B(H)$ et $C(H)$.*

On raisonne par récurrence sur la dimension de G. La proposition est claire lorsque G est de dimension 0. Supposons la proposition vraie pour toutes les paires (H', G') satisfaisant à la condition (R) et telles que $\dim G' < \dim G$. D'après les lemmes 3.1 et 3.3, *on peut supposer H et G connexes et simplement connexes.* D'après le lemme 2.3, il suffit de montrer que G satisfait à la propriété $B(H)$. On considère le groupe algébrique $\mathscr{H}$ défini en 2.2. *Soient π et π' dans $\hat{G}$ tels que π' soit faiblement contenu dans $H.\pi$ et tels que $I(\pi')$ appartienne à $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi)$.* Il s'agit de montrer que π' appartient à $H.\pi$. Choisissons une représentation linéaire ρ de H, de dimension finie, telle que $\rho(H)$ et $\rho(G)$ soient les composantes neutres de l'ensemble des points réels de groupes algébriques définis sur $\mathbb{R}$ et telle que la différentielle de ρ soit fidèle.

Notons U le sous-groupe connexe, fermé de G tel que $\rho(U)$ soit le radical unipotent de $\rho(G)$.

(*a*) Désignons par Z_U le centre de U et *supposons* $\dim Z_U > 1$. Puisque G opère régulièrement dans $\hat{Z_U}$, les restrictions de π et π' à Z_U sont portées par deux orbites de G dans $\hat{Z_U}$. Notons les $G.\chi$ et $G.\chi'$. Le groupe Z_U étant connexe et simplement connexe, $\hat{Z_U}$ s'identifie au dual de l'algèbre de Lie $\mathfrak{z}_U$ de Z_U. L'algèbre enveloppante $U((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}})$ de $(\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}}$ est égale à l'algèbre symétrique $S((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}})$ et s'identifie à l'algèbre des fonctions polynomiales sur le dual de $(\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}}$. Désignons par χ et χ' les homomorphismes de l'algèbre $U((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}})$ dans $\mathbb{C}$ qui prolongent les différentielles de χ et χ' en e. Avec les identifications précédentes, on a :

$$\bigcap\nolimits_{h \in \mathscr{H}(\mathbb{C})} h.(\ker \chi) = \{ p \in S((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}});\ p(x) = 0,\ \forall x \in H.\chi \}$$

et :

$$\bigcap\nolimits_{h \in \mathscr{H}(\mathbb{C})} h.(\ker \chi') = \{ p \in S((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}});\ p(x) = 0,\ \forall x \in H.\chi' \}.$$

Puisque $I(\pi')$ appartient à $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\pi)$, les orbites $\mathscr{H}(\mathbb{C}).(\ker \chi)$ et $\mathscr{H}(\mathbb{C}).(\ker \chi')$ ont même adhérence dans $\mathrm{Prim}(U((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}}))$; donc, d'après (16, 3.10), elles sont égales. Ainsi les orbites $H.\chi$ et $H.\chi'$ ont même adhérence de Zariski dans $(\mathfrak{z}_U)^*$; donc, d'après (13, 8.3), elles ont même dimension. Puisque χ' est faiblement contenu dans $H.\chi$, d'après (5, 4.1), χ' est dans l'adhérence de $H.\chi$, pour la topologie usuelle sur $(\mathfrak{z}_U)^*$. L'adhérence de $H.\chi$ étant la réunion de $H.\chi$ et d'orbites de dimension strictement inférieure, χ' est dans $H.\chi$. Quitte à translater par un élément de H, on peut supposer $\chi' = \chi$. Reprenant les notations du lemme 3.6, en remplaçant A par Z_U, d'après ce lemme, σ' est faiblement contenu dans $H(\chi).\sigma$ et $I(\sigma')$ appartient à $\mathscr{H}'_\chi(\mathbb{C}).I(\sigma)$. La composante neutre $(\mathrm{Ker}\,\chi)_0$ du noyau de χ dans Z_U est un sous-groupe invariant de $H(\chi)$, contenu dans U. La démonstration de l'assertion (ii) du lemme 3.3 prouve que la paire $(H(\chi)/(\mathrm{Ker}\,\chi)_0,\ G(\chi)/(\ker \chi)_0)$ satisfait à la condition (R). Puisque $\dim Z_U > 1$, $(\mathrm{Ker}\,\chi)_0$ est de dimension strictement positive. D'après l'hypothèse de récurrence, appliquée à la paire $(H(\chi)/(\mathrm{Ker}\,\chi)_0$, $G(\chi)/(\mathrm{Ker}\,\chi)_0)$ et d'après l'assertion (iii) du lemme 3.3, σ' appartient à $H(\chi).\sigma$; donc π' appartient à $H.\pi$.

(*b*) Le raisonnement ci-dessus prouve que si U contient un sous-groupe A abélien, connexe, fermé, distinct de Z_U et invariant dans H, alors π' appartient à $H.\pi$. *Supposons* $\dim Z_U = 1$ *et que U ne contienne pas de sous-groupe abélien, connexe, fermé, distinct de Z_U et invariant dans H.* Alors, d'après (7, 4.6.2), U est un groupe de Heisenberg. Désignons par H' et G' les centralisateurs de Z_U dans H et G. Les sous-groupes H' et G' de H sont invariants dans H et connexes. Le groupe H étant simplement connexe, H' et G' sont simplement connexes. Notons $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}'$ les algèbres de Lie de G et G', $\mathscr{G}$ le groupe adjoint algébrique de $\mathfrak{g}$ et $\mathscr{H}'$ le centralisateur de $\mathfrak{z}_U$ dans $\mathscr{H}$. Le groupe H étant connexe, $\mathscr{H}$ est le groupe algébrique adjoint de l'algèbre de Lie de H et $\mathscr{H}'$ est le groupe algébrique adjoint de l'algèbre de Lie de H'. Si la restriction de π à Z_U est multiple de la représentation triviale, la restriction de π' à Z_U est aussi multiple de la représentation triviale. Alors, d'après l'hypothèse de récurrence et d'après l'assertion (iii) du lemme 3.3, π' appartient à $H.\pi$. Supposons que la restriction de π à Z_U ne soit pas quasi équivalente à la représentation triviale. L'idéal $I(\pi)\cap U((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}})$ de $U((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}})$ est alors distinct de l'idéal d'augmentation; donc $I(\pi')\cap U((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}})$ est aussi distinct de l'idéal d'augmentation. Par suite, la restriction de π' à Z_U n'est pas multiple de la représentation triviale. Le groupe G opérant régulièrement dans U, les restrictions de π et π' à U sont portées par deux orbites de G dans $\hat{U}$. Notons les $G.\tau$ et $G.\tau'$. Le groupe U étant un groupe de Heisenberg, τ et τ' sont uniquement déterminées par leurs restrictions à Z_U; donc les stabilisateurs de τ et τ' dans H sont égaux à H'. Si $H=H'$, les restrictions de π et π' à Z_U sont quasi équivalentes; donc $\tau=\tau'$. Si $H\neq H'$, quitte à translater par un élément de H, on peut supposer $\tau=\tau'$. D'après (14, théorème 8.1), il existe σ et σ' dans $(G')\hat{}$ tels que les restrictions de σ et σ' à U soient quasi équivalentes à τ et tels que $\pi=\mathrm{ind}(\sigma;\, G'\uparrow G)$ et $\pi'=\mathrm{ind}\,(\sigma';\, G'\uparrow G)$. Un raisonnement analogue à celui fait dans la partie (b) de la démonstration du lemme 3.6 prouve que $I(\pi')$ appartient à $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).I(\pi)$. Soit h dans $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ tel que $I(\pi')=h.I(\pi)$. D'après (11, 16, chap. IV), $I(\pi)=\mathrm{ind}\,(I(\sigma);\, \mathfrak{g}'\uparrow \mathfrak{g})$ et $I(\pi')=\mathrm{ind}\,(I(\sigma');\, \mathfrak{g}'\uparrow \mathfrak{g})$. Puisque $\mathfrak{g}$ est un idéal de l'algèbre de Lie de H, le groupe $\mathscr{G}$ est invariant dans $\mathscr{H}$. Or, d'après (7; 5.1.7) $I(\pi)\cap U(\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}})$ et $I(\pi')\cap U((\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}})$ sont les idéaux semi-premiers de $U((\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}})$ qui définissent respectivement les adhérences de $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\sigma)$ et $\mathscr{H}(\mathbb{C}).I(\sigma')$ dans $\mathrm{Prim}(U((\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}}))$. Donc les orbites $\mathscr{G}(\mathbb{C}).(h.I(\sigma))$ et $\mathscr{G}(\mathbb{C}).I(\sigma')$ ont même adhérence dans $\mathrm{Prim}(U((\mathfrak{g}')_{\mathbb{C}}))$. Ainsi, d'après (16, 3.10), il existe g dans $\mathscr{G}(\mathbb{C})$ tel que $I(\sigma')=(hg).I(\sigma)$. Puisque les restrictions de σ et σ' à Z_U sont quasi équivalentes et non quasi équivalentes à la représentation triviale de Z_U, $I(\sigma)\cap U((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}})=I(\sigma')\cap U((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}})$ et ces deux idéaux sont distincts de l'idéal d'augmentation de $U((\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}})$; donc g centralise $(\mathfrak{z}_U)_{\mathbb{C}}$. Ainsi, $I(\sigma')$ appartient à $\mathscr{H}'(\mathbb{C}).I(\sigma)$. Un raisonnement analogue à celui fait dans la partie (a) de la démonstration du lemme 3.6 prouve que σ' est faiblement contenu dans $H'.\sigma$. On se ramène ainsi au cas où $H'=H$.

(*c*) *On suppose ici que U est un groupe de Heisenberg dont le centre Z_U est contenu dans le centre de H.* Soit f une forme linéaire sur l'algèbre de Lie de U qui correspond à τ par l'application de Kirillov. Notons χ_f le caractère unitaire de Z_U dont la différentielle est $i(f \mid \mathfrak{z}_U)$. Puisque H et G stabilisent τ, $H = H(f)\, U$ et $G = G(f)\, U$. Les groupes H et G étant connexes et simplement connexes, $H(f)$ et $G(f)$ le sont aussi. Considérons le produit semi-direct $H(f) \ltimes U$. L'application $(g, n) \to gn$ de $H(f) \ltimes U$ dans H est un homomorphisme surjectif dont le noyau est le sous-groupe : $\{(g, g^{-1});\ g \in Z_U\}$. L'image réciproque de G par cet homomorphisme est $G(f) \ltimes U$. La paire $(H(f) \ltimes U, G(f) \ltimes U)$ satisfait à la condition (R) (*cf.* 2.4). Notons $\hat{\pi}$ et $\hat{\pi}'$ les relèvements de π et π' à $G(f) \ltimes U$ et $\hat{\mathscr{H}}$ le groupe algébrique défini à l'aide de $H(f) \ltimes U$ comme en 2.2. Il est clair que $\hat{\pi}'$ est faiblement contenu dans $(H(f) \ltimes U).\hat{\pi}$ et que $I(\hat{\pi}')$ appartient à $\hat{\mathscr{H}}(\mathbb{C}).I(\hat{\pi})$. L'appartenance de $\hat{\pi}'$ à $(H(f) \ltimes U).\hat{\pi}$ entraînera l'appartenance de π' à $H.\pi$, Puisque $H(f)$ est simplement connexe, d'après (10, proposition 5.1, chap. II), il existe une représentation unitaire W de $H(f) \ltimes U$ dont la restriction à $\{1\} \times U$ est équivalente à τ et dont la restriction au sous-groupe $\{(g, g^{-1});\ g \in Z_U\}$ est multiple du caractère $(g, g^{-1}) \to \chi_f(g)^{-1}$. Puisque $G(f) \cap U = Z_U$ et $G = G(f)\, U$, $G(f)/Z_U$ est isomorphe à G/U qui est réductif; donc $G(f)$ est réductif. Le groupe $G(f)$ étant simplement connexe, il existe un plongement de $G(f)/Z_U$ dans $G(f)$. Nous supposerons, dans ce qui suit, $G(f)/Z_U$ plongé dans $G(f)$. Pour toute représentation unitaire α de $G(f)/Z_U$, notons $\dot{\alpha}$ la représentation unitaire de $G(f) \ltimes U$ qui est triviale sur $\{1\} \times U$, qui prolonge α et dont la restriction à $Z_U \times \{1\}$ est multiple du caractère unitaire $(g, 1) \to \chi_f(g)$. D'après (14, théorème 8.3), il existe deux représentations unitaires irréductibles α et α' de $G(f)/Z_U$ tels que $\hat{\pi}$ et $\hat{\pi}'$ soient respectivement équivalentes à $\dot{\alpha} \otimes W \mid (G(f) \ltimes U)$ et à $(\alpha')^{\cdot} \otimes W \mid (G(f) \ltimes U)$. Le groupe $G(f)$ étant invariant dans $H(f)$, $G(f)/Z_U$ est invariant dans $H(f)/Z_U$. Pour tout h dans $H(f) \ltimes U$, la représentation $h.(\dot{\alpha} \otimes W \mid (G(f) \times U))$ est équivalente à la représentation $(h.\dot{\alpha}) \otimes W \mid (G(f) \ltimes U)$. Par hypothèse $\hat{\pi}'$ est faiblement contenu dans $(H(f) \times U).\hat{\pi}$; donc, d'après (6, 6), la représentation α' est faiblement contenue dans $(H(f)/Z_U).\alpha$. Notons $\mathfrak{b}$ l'algèbre de Lie de $G(f)/Z_U$ et j l'homomorphisme canonique de l'algèbre de Lie de $G(f) \times U$ sur $\mathfrak{b}$. L'homomorphisme j se prolonge de manière unique en un homomorphisme d'algèbres enveloppantes. On le note encore j. D'après (10, proposition 3.3, p. 82). $h(I(\hat{\pi})) = I(\operatorname{Ker} \alpha)$ et $j(I(\hat{\pi}')) = I(\operatorname{Ker} \alpha')$. Le groupe $\hat{\mathscr{H}}(\mathbb{C})$ opère par passage au quotient dans $U(\mathfrak{b}_{\mathbb{C}})$, par automorphismes d'algèbres. Il est clair que j est $\hat{\mathscr{H}}(\mathbb{C})$-équivariant; donc $I(\operatorname{Ker}\alpha')$ appartient à $\hat{\mathscr{H}}(\mathbb{C}).I(\operatorname{Ker}\alpha)$. On se ramène ainsi au cas où G est réductif.

(d) *On suppose ici que G est réductif* : c'est-à-dire dim $Z_U = 0$. Puisque G est simplement connexe, G est le produit direct d'un groupe de Lie semi-simple connexe, simplement connexe, noté S, par un groupe abélien, connexe simplement connexe, noté Z. Les groupes S et Z sont invariants dans H. Les restrictions de π et π' à S sont irréductibles. Notons les π_S et π'_S. Puisque π' est faiblement contenu dans $H.\pi$, π'_S est faiblement contenu dans $H.\pi_S$. Puisque le groupe H est connexe, d'après (7, 1.5.9), les automorphismes de S, induits par les éléments de H, sont intérieurs. Or, d'après (1, 5.27 (iii)) et (4, 4.1.11(ii)), $\{\pi_S\}$ est fermé dans S. Donc, $\pi'_S = \pi_S$. Les restrictions de π et π' à Z sont multiples des caractères unitaires χ et χ' de Z. Puisque π' est faiblement contenu dans $H.\pi$, χ' appartient à l'adhérence de $H.\chi$ dans $Z\hat{}$. Un raisonnement fait en (a) prouve alors que χ' est dans $H.\chi$; donc π' appartient à $H.\pi$.

4.2. On démontre ici la proposition énoncée en 2.5 :

Proposition (Les notations sont celles de 2.1). — *Soient G un groupe de classe $C_{\mathbb{R}}$ et π dans $G\hat{}$. Notons Z un sous-groupe discret du centre de G tel que G/Z soit isomorphe à un sous-groupe d'indice fini du groupe des points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$. Alors l'ensemble des éléments π' de $G\hat{}$ tels que $I(\pi') = I(\pi)$ et tels que les restrictions de π et π' à Z soient quasi équivalentes, est une partie finie, discrète de $G\hat{}$.*

On raisonne par récurrence sur la dimension de G. La proposition est claire lorsque G est de dimension 0. Supposons la proposition vraie pour tous les groupes G' de classe $C_{\mathbb{R}}$ tels que dim $G' <$ dim G. Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et Σ l'ensemble des éléments π' de $G\hat{}$ qui vérifient les conditions de la proposition. Il s'agit de prouver que Σ est fini et que chaque point de Σ est fermé dans Σ, pour la topologie induite par celle de $G\hat{}$.

(a) Soient π' et π'' dans Σ. Les restrictions de π' et π'' à G_0 sont portées par deux orbites de G dans $(G_0)\hat{}$. Notons les $G.\sigma'$ et $G.\sigma''$. Par hypothèse, $I(\pi') = I(\pi'')$. Le raisonnement de la démonstration du lemme 2.2 prouve que les orbites $G.I(\sigma')$ et $G.I(\sigma'')$ sont égales. D'après le lemme 3.7, il n'existe qu'un nombre fini d'éléments de Σ dont la restriction à G_0 est portée par une orbite donnée; donc l'orbite $G.I(\sigma')$ étant finie, la proposition pour G_0 entraîne la finitude de Σ. Si π'' est faiblement contenu dans π', l'orbite $G.\sigma''$ est faiblement contenue dans $G.\sigma'$. Ces orbites étant finies, il existe g dans G tels que σ'' soit faiblement contenu dans $g.\sigma'$. Les orbites

$G.I(\sigma')$ et $G.I(\sigma'')$ étant égales, les dimensions de Gelfand-Kirillov des quotients $U(\mathfrak{g}_C)/I(\sigma'')$ et $U(\mathfrak{g}_C)/g.I(\sigma')$ sont égales; donc, d'après (2, 3.6), $I(\sigma'')=g.I(\sigma')$. La proposition pour G_0 entraîne $\sigma''=g.\sigma'$. Alors d'après le lemme 3.7, $\pi'=\pi''$. On se ramène ainsi au cas où G est connexe. Supposons G connexe. Si la proposition est démontrée pour le revêtement universel de G, la finitude de Σ est claire et l'assertion (i) du lemme 3.3, appliquée dans le cas où $H=G$, prouve que chaque point de Σ est fermé dans Σ. On se ramène ainsi au cas où G est connexe et simplement connexe. *Nous supposerons, dans la suite, G connexe et simplement connexe.*

(*b*) Notons U le sous-groupe fermé, connexe de G tel que ZU/Z soit égal au radical unipotent de G/Z, considéré comme sous-groupe du groupe des points réels d'un groupe algébrique défini sur $\mathbb{R}$, et Z_U le centre de U. Supposons dim $Z_U>1$. Le raisonnement fait dans la partie(a) de la démonstration de la proposition 4.1 prouve que les restrictions des points de Σ à Z_U sont portées par une même orbite de G dans $\hat{Z_U}$. Notons la $G.\chi$. Désignons par $(\mathrm{Ker}\,\chi)_0$ la composante neutre du noyau de χ dans Z_U et par Σ_χ l'image réciproque de Σ par l'induction unitaire de $G(\chi)$ à G. Le groupe $G(\chi)$ contient Z et les restrictions des éléments de Σ_χ à Z sont deux à deux quasi équivalentes. Le lemme 3.6, appliqué lorsque $H=G$, prouve que l'application $\sigma\to I(\sigma)$ de Σ_χ dans l'espace des idéaux semi-premiers de $U(\mathfrak{g}(\chi)_C)$, est constante. D'après (6, 5), l'induction unitaire de $G(\chi)$ à G réalise un homéomorphisme de Σ_χ sur Σ. Le groupe $G(\chi)/(\mathrm{Ker}\,\chi)_0$ est de classe $C_{\mathbb{R}}$. Le groupe $U/Z\cap U$ étant simplement connexe, $Z\cap U=\{e\}$; donc $G(\chi)/(\mathrm{Ker}\,\chi)_0$ contient Z. L'hypothèse de récurrence appliquée au groupe $G(\chi)/(\mathrm{Ker}\,\chi)_0$ prouve que Σ est une partie finie, discrète de G.

(*c*) Les parties (*b*) et (*c*) de la démonstration de la proposition 4.1 prouve qu'on se ramène au cas où G est réductif. Supposons G réductif. D'après (1, 5.27, (ii)) et (4, 4.1.11, (ii)), tous les points de Σ sont fermés dans $G\hat{}$. Puisque G est simplement connexe, G est le produit direct d'un groupe de Lie semi-simple, connexe, simplement connexe, noté S, et d'un groupe vectoriel, noté V. Les restrictions des éléments de Σ à V sont multiples de caractères unitaires de V. Ces caractères unitaires sont annulés par le même idéal maximal de l'algèbre symétrique du complexifié de V; donc ils sont tous égaux. La restriction d'une représentation unitaire irréductible de G à S étant irréductible, l'ensemble des restrictions des éléments de Σ à S est une partie de $S\hat{}$. Notons la Σ_S. Il nous reste à prouver que Σ_S est finie. Pour π' et π'' dans Σ_S, $I(\pi')=I(\pi'')$; donc les éléments de Σ_S ont tous le même caractère infinitésimal. Notons-le χ. Désignons par Σ_S' l'ensemble des caractères distributions F de S qui vérifient les conditions suivantes :

(*a*) $F(zg)=\eta(z)F(g)$ pour z dans $Z \cap S$ et g quasi régulier;

(*b*) $z \star F = \chi(z)F$ pour z dans le centre de l'algèbre enveloppante du complexifié de l'algèbre de Lie de S. Si π' est une représentation quasi-simple de S, notons $F_{\pi'}$ son caractère distribution. Puisque $S/(Z \cap S)$ est isomorphe à un groupe linéaire, $Z \cap S$ est un sous-groupe d'indice fini du centre de S; donc d'après (12, théorème 7), il existe un nombre fini de représentations quasi simples de S, $\pi_1, \ldots, \pi_r$, telles que la famille $(F_{\pi_1}, \ldots, F_{\pi_r})$ engendrent l'espace vectoriel des caractères distributions qui vérifient les conditions (*a*) et (*b*). Notons K un sous-groupe connexe de S dont l'image par l'application adjointe est un sous-groupe compact maximal de $\mathrm{Ad}(S)$. Désignons par Σ_S'' l'ensemble des éléments π' de $S^\wedge$ tels que $\pi' \mid K$ contienne un élément de $K^\wedge$ contenu dans l'une des représentations $\pi_1 \mid K, \ldots, \pi_r \mid K$. Si τ est dans $K^\wedge$, notons χ_τ son caractère. Soient π' dans Σ_S et τ dans $K^\wedge$ tels que τ soit contenu dans $\pi' \mid K$. La distribution $\varphi \rightarrow F_{\pi'}(\chi_\tau \star \varphi)$ sur S est non nulle. Puisque $F_{\pi'}$ est combinaison linéaire des $F_{\pi_1}, \ldots, F_{\pi_r}$, il existe au moins un i, compris entre 1 et r, tel que la distribution $\varphi \rightarrow F_{\pi_i}(\chi_\tau \star \varphi)$ soit non nulle; donc, pour cet i, τ est contenu dans $(\pi_i \mid K)$. Ainsi Σ_S est contenu dans Σ_S''. Or, d'après (1, 3.21), Σ_S'' est fini. Donc Σ_S est fini.

4.3. PROPOSITION. — *Soit G un groupe de Lie connexe. Soit J un idéal primitif de la C^*-algèbre de G. Alors les trois propriétés $A(J)$, $B(J)$, $C(J)$,* (cf. 1.1 et 1.2) *sont satisfaites.*

D'après le lemme 1.2, il suffit de démontrer la propriété $B(J)$. Notons G_S le revêtement universel de G. L'espace topologique $\mathrm{Prim}(G)$ s'identifie à un sous-espace de $\mathrm{Prim}(G_S)$ et pour cette identification, l'application $J \rightarrow I(J)$ sur $\mathrm{Prim}(G)$ est la restriction à $\mathrm{Prim}(G)$ de l'application $J \rightarrow I(J)$ sur $\mathrm{Prim}(G_S)$. Il suffit donc de démontrer la proposition lorsque G est simplement connexe. *Supposons G simplement connexe.* D'après le théorème d'Ado, l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ de G est isomorphe à une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}(V)$, où V est un espace vectoriel de dimension finie. Identifions $\mathfrak{g}$ à cette sous-algèbre de Lie de $gl(V)$ et notons $\tilde{\mathfrak{g}}$ l'enveloppe algébrique de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}l(V)$. Soit G le groupe de Lie connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie $\tilde{\mathfrak{g}}$. Le groupe G s'identifie au sous-groupe analytique de $\tilde{G}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Le groupe dérivé $D(G)=[G, G]$ est un sous-groupe fermé connexe de $\tilde{G}$. Les groupes $\tilde{G}$ et $D(G)$ sont de classe $C_{\mathbf{R}}$ et la paire $(\tilde{G}, D(G))$ satisfait à la condition (R) de 2.4. Soit J' un idéal primitif de $C^*(G)$ tel que $J' \supset J$ et $I(J')=I(J)$. Il s'agit de démontrer que $J'=J$. Soient π et π' deux représentations unitaires irréductibles de G telles que $\mathrm{Ker}\,\pi = J$ et $\mathrm{Ker}\,\pi' = J'$. Les restrictions de π et π' à $D(G)$ sont portées par deux orbites de $\tilde{G}$ dans $(D(G))^\wedge$ (17, lemme 1.1.8).

Notons les $\tilde{G}.\sigma$ et $\tilde{G}.\sigma'$. Il est facile de voir que $I(J) \cap U$ $([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbf{C}})$ est l'ensemble des éléments u de $U([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbf{C}})$ tels que pour tout φ dans $\mathscr{D}(D(G))$, on ait : $(\pi \mid D(G))(u \star \varphi) = 0$. Puisque $\pi \mid D(G)$ est portée par $\tilde{G}.\sigma$ et que $\mathscr{D}(D(G))$ est séparable, il existe une partie non vide X de $\tilde{G}.\sigma$ telle que l'on ait :

$$I(J) \cap U([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbf{C}}) = \bigcap_{x \in X} I(x).$$

Or $I(J) \cap U([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbf{C}})$ est invariant par $\tilde{G}$. Donc :

$$I(J) \cap U([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbf{C}}) = \bigcap_{g \in \tilde{G}} I(g.\sigma).$$

On montre de même que $I(J) \cap U([\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]_{\mathbf{C}}) = \bigcap_{g \in \tilde{G}} I(g.\sigma')$.

Notons $\mathscr{G}$ le groupe adjoint algébrique de $\tilde{\mathfrak{g}}$. D'après ce qui précède, les orbites $\mathscr{G}(\mathbb{C}).I(\sigma)$ et $\mathscr{G}(\mathbb{C}).I(\sigma')$ ont même adhérence; donc, d'après (16, 3.10), $I(\sigma')$ appartient à $\mathscr{G}(\mathbb{C}).I(\sigma)$. Puisque J' contient J, d'après (5, 4.1), σ' est faiblement contenu dans $\tilde{G}.\sigma$. Alors, d'après la proposition 4.1, σ' appartient à $\tilde{G}.\sigma$. Dans [17], il est prouvé qu'il existe un sous-groupe fermé K de G, contenant $D(G)$, contenu dans le stabilisateur de σ dans G et tel que pour toute représentation unitaire irréductible T de G, dont la restriction à $D(G)$ est portée par $\tilde{G}.\sigma$, il existe une représentation unitaire irréductible ρ de K dont la restriction à $D(G)$ est équivalente à un élément de $\tilde{G}.\sigma$ et telle que :

$\operatorname{Ker} T = J(\rho) = \operatorname{Ker} \operatorname{ind}(\rho; K \uparrow G)$. En outre, la démonstration de (17, lemme 1.2.4) prouve que si ρ et ρ' sont deux représentations unitaires irréductibles de K dont les restrictions à $D(G)$ sont équivalentes à des éléments de $\tilde{G}.\sigma$ et telles que $J(\rho') \supset J(\rho)$, alors $J(\rho') = J(\rho)$; donc $J = J'$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BOREL (A.). — Représentations de groupes localement compacts, *Lecture notes in Mathematics*, n° 276.

[2] BORHO (W.) et KRAFT (M.). — Uber die Gelfand-Kirillov dimension, *Math. Ann.*, vol. 220, 1976, p. 1-24.

[3] CHARBONNEL (J.-Y.). — Sur les semi-caractères des groupes de Lie résolubles connexes, *J. of functional Analysis*, vol. 41, n° 2, 1981, p. 175-203.

[4] DIXMIER (J.). — Les C*-algèbres et leurs représentations, *Cahiers scientifiques*, n° 29, Gauthier-Villars, Paris, 1969.

[5] DIXMIER (J.). — Sur la représentation régulière d'un groupe localement compact connexe, *Ann. Sc. E.N.S.*, vol. 2, 1969, p. 423-436.

[6] DIXMIER (J.). — Bicontinuité dans la méthode du petit groupe de Mackey, *Bull. Sc. Math.*, 2e série, vol. 97, 1973, p. 233-240.

[7] DIXMIER (J.). — Algèbres enveloppantes, *Cahiers scientifiques*, n° 37, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[8] DIXMIER (J.). — Idéaux primitifs dans les algèbres enveloppantes, *J. of Algebra*, vol. 48, 1977, p. 96-112.

[9] DIXMIER (J.) et MALLIAVIN (P.). — Factorisation de fonctions et de vecteurs indéfiniment différentiables, *Bull. Sc. Math.*, vol. 102, 1978, p. 305-330.

[10] DUFLO (M.). — Sur les extensions des représentations irréductibles des groupes de Lie nilpotents, *Ann. Sc. E.N.S.*, vol. 5, 1972, p. 71-120.

[11] DUFLO (M.). — *Théorie de Mackey pour les groupes de Lie algébriques*, Preprint.

[12] HARISH-CHANDRA. — The characters of semi-simple Lie groups, *T.A.M.S.*, vol. 83, 1956, p. 98-163.

[13] HUMPHREYS (J. E.). — *Linear algebraic groups, graduate texts in Mathematics*, n° 21, Springer-Verlag, 1974.

[14] MACKEY (G. W.). — Unitary representations of group extensions, I, *Acta. Math.*, vol. 99, 1958, p. 265-311,

[15] MOEGLIN (C.). — Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes, *J. Math. pures et appl.*, vol. 59, 1980, p. 265-336.

[16] MOEGLIN (C.) et RENTSCHLER (R.). — Orbites d'un groupe algébrique dans l'espace des idéaux rationnels d'une algèbre enveloppante, *Bull. Soc. Math. Fr.*, vol. 109, 1981, p. 403-426.

[17] PUKANSZKY (L.). — Characters of connected Lie groups, *Acta Math.*, vol. 133, 1974, p. 81-137.

Le referee suggère la référence suivante :

G. K. PEDERSEN. — *C*-algebras and their automorphisms groups*, Academic Press, 1979, London, New York, San-Francisco.