BULLETIN DE LA S. M. F.

MICHEL LASSALLE

Une nouvelle réalisation des espaces hermitiens symétriques

Bulletin de la S. M. F., tome 111 (1983), p. 181-192
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__181_0>

Bull. Soc. math. France,
111, 1983, p. 181-192.

UNE NOUVELLE RÉALISATION DES ESPACES HERMITIENS SYMÉTRIQUES

PAR

MICHEL LASSALLE (*)

RÉSUMÉ. — Soient $M = G/K$ un espace hermitien symétrique, $S = K/L$ son bord de Shilov, et Ω le cône de base de sa réalisation comme domaine de Siegel (de type I ou II). Nous réalisons un ouvert dense de M comme l'espace fibré K-homogène de base $S = K/L$ et de fibre type Ω.

ABSTRACT. — Let $M = G/K$ be an hermitian symmetric space, $S = K/L$ its Shilov boundary and Ω the conical base of its realization as a Siegel domain (of type I or II). We realize an open dense subset of M as the K-homogeneous bundle over $S = K/L$ with typical fiber Ω.

1. Introduction

Soit $M = G/K$ un espace hermitien symétrique du type non compact. On sait que l'on dispose de deux réalisations canoniques de M comme domaine dans $\mathbb{C}^n$. L'une (bornée) est la réalisation de M comme domaine borné symétrique D, due à HARISH-CHANDRA [1]. L'autre (non bornée) est la réalisation de M comme domaine de Siegel du premier ou second type $\mathscr{D}$, due à KORÁNYI et WOLF [4].

A bien des égards cette dernière réalisation est souvent la plus utile. Il semble en effet que le domaine de Siegel $\mathscr{D}$ soit un objet géométriquement plus élémentaire que le domaine borné symétrique D. C'est en particulier manifeste en ce qui concerne le bord de Shilov S de M. Tandis que celui-ci (ou tout au moins un ouvert dense) apparaît explicitement comme « l'arête » de $\mathscr{D}$, il n'en est rien dans la réalisation canonique d'HARISH-CHANDRA D.

Le but de cette note est de présenter une nouvelle réalisation de M, en quelque sorte « intermédiaire » entre D et $\mathscr{D}$. Il s'agit d'une réalisation bornée, mais dont la géométrie présente une analogie très naturelle avec celle du demi-plan généralisé $\mathscr{D}$.

Plus précisément, cette réalisation fait apparaître le bord de Shilov $S = K/L$ de M (dans sa totalité), et le cône de base Ω du domaine de Siegel $\mathscr{D}$. Elle présente également l'avantage de ne pas dépendre explicitement (contrairement à $\mathscr{D}$) du type (I ou II) de M.

(*) Texte reçu le 2 novembre 1982.

M. LASSALLE, École Polytechnique, Centre de Mathématiques, Plateau de Palaiseau, 91128 Palaiseau Cedex.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE — 0037-9484/1983/181/$ 5.00

Enfin sa géométrie est certainement beaucoup plus élémentaire que celles de D ou $\mathscr{D}$. Il s'agit simplement en effet de l'espace fibré K-homogène $K \times_L \Omega$, de base $S = K/L$ et de fibre type Ω.

Cependant nous n'obtenons pas au sens strict une réalisation de M. On sait que réaliser M comme le demi-plan généralisé $\mathscr{D}$ « fait perdre des points sur le bord de Shilov ». Le même phénomène apparaît ici, mais « dans le domaine ». Plus précisément, nous allons démontrer le

THÉORÈME. — *Soient $M = G/K$ un espace hermitien symétrique du type non compact, $S = K/L$ son bord de Shilov, et Ω le cône de base de sa réalisation comme domaine de Siegel (de type I ou II). Alors l'espace fibré K-homogène $K \times_L \Omega$ est isomorphe à un ouvert dense de M.*

La preuve est une conséquence facile du formalisme géométrique que nous avons introduit dans un précédent article [5] dont ce travail est un prolongement.

La structure géométrique du bord de Shilov S et du cône Ω joue un rôle central dans de nombreux problèmes d'analyse harmonique ou de théorie de la représentation. Il est probable que cette nouvelle réalisation, qui les met en évidence de façon élémentaire, y sera utile. On en trouvera dans [6] une première application.

Enfin il serait intéressant de déterminer si notre résultat peut être généralisé au cas des domaines bornés *homogènes*.

2. Généralités et notations

Nous nous en tenons ici aux seules notions indispensables à la compréhension du texte. Pour plus de détails et des références, nous renvoyons le lecteur au chapitre 8 de [2] ou au paragraphe 2 de [5].

2.1. RÉALISATION BORNÉE D'HARISH-CHANDRA

Soit $M = G/K$ un espace hermitien symétrique du type non compact qu'on suppose irréductible (cette hypothèse n'est pas décisive et elle est seulement faite pour simplifier les notations). On note $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{k}$ les algèbres de Lie respectives de G et K, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan associée et $\mathfrak{p}^+$ (resp. $\mathfrak{p}^-$) l'espace tangent holomorphe (resp. antiholomorphe) au point $x_0 = \{K\}$.

Soit H un tore maximal de K d'algèbre $\mathfrak{h}$: c'est un sous-groupe de Cartan de G. On choisit un ordre sur l'ensemble des racines non compactes de la paire $(\mathfrak{g}_c, \mathfrak{h}_c)$ tel qu'une racine non compacte α soit positive si et seulement si son espace radiciel $\mathfrak{g}^\alpha$ est contenu dans $\mathfrak{p}^+$.

Soit $\Psi=\{\gamma_1, \ldots, \gamma_p\}$ l'ensemble des racines non compactes positives fortement orthogonales de Harish-Chandra ($p=\operatorname{rang} M$). A tout $\gamma \in \Psi$ on associe le vecteur coracine $H_\gamma \in i\mathfrak{h}$ et deux vecteurs radiciels $E_{\pm\gamma} \in \mathfrak{g}^{\pm\gamma}$ tels que

$$[H_\gamma, E_{\pm\gamma}]=\pm 2 E_{\pm\gamma}, \qquad [E_\gamma, E_{-\gamma}]=H_\gamma.$$

On pose

$$E_0=\sum\nolimits_{\gamma\in\Psi} E_\gamma, \qquad \overline{E}_0=\sum\nolimits_{\gamma\in\Psi} E_{-\gamma}.$$

Soit G_c le groupe adjoint de $\mathfrak{g}_c$: G s'identifie au sous-groupe analytique de G_c d'algèbre $\mathfrak{g}$. On note K_c, $P^\pm$, U les sous-groupes analytiques de G_c d'algèbre $\mathfrak{k}_c$, $\mathfrak{p}^\pm$, $\mathfrak{u}=\mathfrak{k}\oplus i\mathfrak{p}$.

On a $U \cap K_c P^- = K$ et l'application $uK \to uK_c P^-$ identifie l'espace homogène complexe $G_c/K_c P^-$ à l'espace hermitien symétrique compact $M^*=U/K$, dual de M.

On a $G \cap K_c P^- = K$ et l'application $gK \to gK_c P^-$ est un plongement holomorphe de M dans M^* (plongement de BOREL). On note désormais x_0 la classe de l'identité dans M^* et on identifie M à l'orbite Gx_0 de M^*.

On a $P^+ \cap K_c P^- = \{1\}$ et l'application $\xi : X \mapsto \exp X . x_0$ est un plongement holomorphe de $\mathfrak{p}^+$ dans M^* (plongement d'Harish-Chandra). L'ouvert $\xi(\mathfrak{p}^+)$ est dense dans M^* et contient M. L'image inverse $D=\xi^{-1}(M)$ est la réalisation bornée canonique de M d'Harish-Chandra [1].

2.2. Bord de Shilov

Soit S le bord de Shilov de M dans M^*. Si l'on pose

$$c=\exp\left(\frac{\pi}{4}(\overline{E}_0-E_0)\right),$$

on a $S=Kcx_0$. On dit que $c \in U$ est la transformation de Cayley. On a $\xi(-E_0)=cx_0$ et l'application ξ étant K_c-équivariante, le bord de Shilov de D dans $\mathfrak{p}^+$ est

$$\xi^{-1}(S)=\operatorname{Ad} K . E_0.$$

Soit L le sous-groupe d'isotropie de K au point cx_0, d'algèbre $\mathfrak{l}$. On a $S=K/L$ et le sous-groupe L est l'ensemble des points fixes dans K de l'automorphisme intérieur $\tilde{\tau}=\operatorname{Int} c^2$ de U. Il n'est pas en général connexe. On note $\tau=\operatorname{Ad} c^2$.

Soient $\mathfrak{g}'$, $\mathfrak{k}'$, $\mathfrak{u}'$ l'ensemble des points fixes de τ^2 dans $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{u}$. On note G', K', U' les sous-groupes analytiques de G_c correspondants. Alors l'orbite

$M' = G' x_0 = G'/K'$ est un espace hermitien symétrique non compact *du type tube*, dont le compact dual est $M'^* = U' x_0 = U'/K'$.

On note S' le bord de Shilov de M' dans M'^*. Alors $S' = K' c x_0 = K'/L$. L'automorphisme $\tilde{\tau}$ est un automorphisme involutif de K', et la paire (K', L) est une paire *symétrique* compacte pour $\tilde{\tau}$. On note

$$\mathfrak{k}' = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{q}_1$$

la décomposition de Cartan associée : $\mathfrak{l}$ (resp. $\mathfrak{q}_1$) est l'espace propre de $\mathfrak{k}'$ pour la valeur propre $+1$ (resp. -1) de τ. L'espace vectoriel $\mathfrak{b}$ engendré sur $\mathbb{R}$ par les vecteurs $\{ i H_\gamma, \gamma \in \Psi \}$ est une sous-algèbre de Cartan de la paire symétrique $(\mathfrak{k}', \mathfrak{l})$.

2.3. Réalisation non bornée de Korányi et Wolf

On note (K'^*, L^0) la paire symétrique non compacte duale de la paire (K', L) : L^0 est la composante neutre de L et K'^* le sous-groupe analytique de G_c d'algèbre $\mathfrak{k}'^* = \mathfrak{l} \oplus i\, \mathfrak{q}_1$. L'espace $i\,\mathfrak{b}$ est une sous-algèbre de Cartan de la paire symétrique $(\mathfrak{k}'^*, \mathfrak{l})$.

On note $\mathfrak{p}_1^+$ (resp. $\mathfrak{p}_2^+$) le sous-espace propre de $\mathfrak{p}^+$ pour la valeur propre $+1$ (resp. -1) de τ^2. L'espace

$$\mathfrak{n}_1^+ = \mathfrak{p}_1^+ \cap \operatorname{Ad} c . \mathfrak{g}$$

est une forme réelle de $\mathfrak{p}_1^+$ stable par $\operatorname{Ad} K'^*$. On a $E_0 \in \mathfrak{n}_1^+$ et l'orbite

$$\Omega = \operatorname{Ad} K'^* . E_0$$

est un cône convexe isomorphe à K'^*/L^0.

L'ouvert $c\,M$ est contenu dans l'ouvert d'Harish-Chandra $\xi(\mathfrak{p}^+)$. L'image inverse $\mathscr{D} = \xi^{-1}(c\,M)$ est la réalisation non bornée canonique de M de Korányi et Wolf [4]. Celle-ci est un domaine de Siegel de type II associé au cône Ω, c'est-à-dire

$$\mathscr{D} = \{ X + i\,Y + E : X,\ Y \in \mathfrak{n}_1^+ ;\ E \in \mathfrak{p}_2^+ ;\ Y - \Phi(E, E) \in \Omega \},$$

où Φ est une forme hermitienne que nous n'expliciterons pas. La réalisation non bornée de M' est le tube

$$\mathscr{D}' = \xi^{-1}(c\,M') = \mathscr{D} \cap \mathfrak{p}_1^+ = \mathfrak{n}_1^+ \oplus i\,\Omega.$$

L'arête de $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) est isomorphe par l'application $X \mapsto c^{-1}(\xi(X))$ à un ouvert dense de S (resp. S').

3. Démonstration du théorème

Nous aurons besoin du résultat suivant qui est classique (*voir* par exemple [3], lemme 2.1, p. 181).

LEMME. — *L'application* $\beta : \mathfrak{n}_1^+ \to i\mathfrak{q}_1$ *définie par*

$$\beta(X)=[X, \overline{E}_0], \qquad \beta^{-1}(X)=\frac{1}{2}[X, E_0]$$

est un isomorphisme Ad L-*équivariant d'espaces vectoriels tel que pour tout* $\gamma \in \Psi$, $\beta(E_\gamma)=H_\gamma$.

Soit alors $S_c = K_c\, cx_0$ l'unique K_c-orbite de M^* contenant $S = K\, cx_0$. Nous allons établir le théorème énoncé dans l'introduction sous la formulation plus précise suivante.

THÉORÈME 1. — *L'ensemble* $S_c \cap M$ *est un ouvert dense de* M. *L'application* $\pi : K \times \Omega \to S_c$ *définie par*

$$\pi(k, X)=k.\exp(-\beta(X)).cx_0$$

munit $S_c \cap M$ *d'une structure d'espace fibré de base* $S=K/L$ *et de fibre type* Ω :

$$S_c \cap M \sim K \times_L \Omega.$$

Remarque 1. — Il revient au même de dire que l'application π identifie $S_c \cap M$ au quotient de $K \times \Omega$ par la relation d'équivalence

$$(k, X) \sim (kl^{-1}, \mathrm{Ad}\, l.X) \qquad (l \in L).$$

Tout élément de $S_c \cap M$ peut s'écrire $x=\pi(k, X)$ avec $k \in K$ et $X \in \Omega$, et on a $\pi(k, X)=\pi(k', X')$ si et seulement si il existe $l \in L$ tel que $k'=kl^{-1}$ et $X'=\mathrm{Ad}\, l.X$.

Preuve. — On a vu aux théorèmes 3 et 4 de [5] (p. 210) que $S_c = K_c\, cx_0$ est un ouvert dense de M^*. L'ensemble $S_c \cap M$ est donc ouvert et dense dans M.

Comme $G \cap K_c = K$ il est clair que $S_c \cap M$ est un ouvert K-invariant de S_c. A ce titre, en vertu de la proposition 14 de [5] (p. 214), on a

$$S_c \cap M \sim K \times_L \mathscr{C},$$

où $\mathscr{C}$ est un ouvert Ad L-invariant de $\mathfrak{q}_1$. Plus précisément l'application de $K \times \mathscr{C}$ dans S_c définie par

$$(k, X) \to k.\exp iX.cx_0$$

identifie $S_c \cap M$ au quotient de $K \times \mathscr{C}$ par la relation d'équivalence

$$(k, X) \sim (kl^{-1}, \operatorname{Ad} l . X) \qquad (l \in L).$$

Comme l'application β est Ad L-équivariante, il suffit donc de démontrer

$$\mathscr{C} = i\,\beta(\Omega)$$

pour établir le théorème. Mais l'ouvert $\mathscr{C}$ est explicitement déterminé au théorème 9 de [5] (p. 225). On y obtient

$$\mathscr{C} = \operatorname{Ad} L . C = \operatorname{Ad} L^0 . C,$$

où C est le « quadrant » de $\mathfrak{b}$ défini par

$$C = \left\{ i \textstyle\sum_{\gamma \in \Psi} \quad c_\gamma H_\gamma,\ c_\gamma > 0 \right\}.$$

Soit alors B^* le sous-groupe abélien de K'^* d'algèbre $i\,\mathfrak{b}$. La décomposition de Cartan $K'^* = L^0 B^* L^0$ implique

$$\Omega = \operatorname{Ad} L^0 . (\operatorname{Ad} B^* . E_0).$$

Pour conclure il suffit donc d'établir la relation

$$C = i\,\beta(\operatorname{Ad} B^* . E_0).$$

Ou encore, puisque $\beta(E_\gamma) = H_\gamma$, de démontrer

$$\operatorname{Ad} B^* . E_0 = \left\{ \textstyle\sum_{\gamma \in \Psi} \quad c_\gamma E_\gamma,\ c_\gamma > 0 \right\}.$$

Mais ceci est une conséquence facile de la relation

$$\operatorname{Ad}(\exp t H_\gamma) . E_\gamma = e^{2t} E_\gamma,$$

et de l'orthogonalité forte des éléments de Ψ. □

COROLLAIRE. — *$S_c \cap M'$ est un ouvert dense de M', isomorphe au fibré $K' \times_L \Omega$.*

Remarque 2. — L'application ξ étant K_c-équivariante, on peut réaliser S_c comme l'ouvert dense $\xi^{-1}(S_c) = \operatorname{Ad} K_c . E_0 \subset \mathfrak{p}^+$. L'ensemble $\xi^{-1}(S_c \cap M) = D \cap \operatorname{Ad} K_c . E_0$ est alors un ouvert dense de D. L'application $\xi^{-1} \circ \pi : K \times \Omega \to \mathfrak{p}^+$ définie par

$$(k, X) \mapsto \operatorname{Ad}(k . \exp(-\beta(X))) . E_0$$

l'identifie à $K \times_L \Omega$.

Remarque 3. — Il n'y a aucun rapport direct entre les fibrations $S_c \cap M' = K' \times_L \Omega \to K'/L$ et $\mathscr{D}' = \mathfrak{n}_1^+ \oplus i\Omega \to \mathfrak{n}_1^+$. Plus précisément :

— l'ouvert dense $\xi^{-1}(c(S_c \cap M')) \subset \mathscr{D}'$ *n'est pas* fibré sur $\mathfrak{n}_1^+$;

— le diagramme

$$\begin{array}{ccc} K' \times_L \Omega & \hookrightarrow & \mathfrak{n}_1^+ \oplus i\Omega \\ \downarrow & & \downarrow \\ K'/L & \hookleftarrow & \mathfrak{n}_1^+ \end{array}$$

n'est pas commutatif.

Remarque 4. — Par le théorème 6 de [5] (p. 278), la codimension topologique de $M \setminus S_c$ est au moins égale à deux. En particulier $S_c \cap M$ est connexe.

Remarque 5. — Le groupe de Weyl de la paire symétrique $(\mathfrak{k}', \mathfrak{l})$ opère dans $\mathfrak{b}$ par les permutations des éléments de Ψ. On a donc

$$\mathscr{C} = \operatorname{Ad} L . C = \operatorname{Ad} L . C^+,$$

où $C^+ \subset C$ désigne le cône de $\mathfrak{b}$ défini par

$$C^+ = \{ i \textstyle\sum_{k=1}^p c_k H_{\gamma_k},\ c_1 \geq \ldots \geq c_p > 0 \}.$$

Tout élément de $\mathscr{C}$ peut s'écrire $\operatorname{Ad} l . H$, où $H \in C^+$ est *unique*, mais non $l \in L$. On en déduit

$$S_c \cap M = K . \exp i C^+ . c x_0.$$

Tout élément de $S_c \cap M$ peut s'écrire $k . \exp i H . c x_0$, où $H \in C^+$ est *unique*, mais non $k \in K$.

Soit $\mathfrak{a}$ l'espace vectoriel engendré sur $\mathbb{R}$ par les vecteurs $\{ X_\gamma = E_\gamma + E_{-\gamma},\ \gamma \in \Psi \}$. C'est une sous-algèbre de Cartan de la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$. On note $\mathfrak{a}'$ l'ensemble des points réguliers de $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire l'ensemble des points de $\mathfrak{a}$ où aucune racine restreinte de la paire symétrique $(\mathfrak{g}, \mathfrak{k})$ ne s'annule. Alors on sait que l'ensemble régulier $\tilde{M} = K . \exp \mathfrak{a}' . x_0$ est un ouvert dense de M. Le résultat suivant compare les deux ouverts denses $S_c \cap M$ et $\tilde{M}$.

PROPOSITION. — *On a $\tilde{M} \subset S_c \cap M$. L'inclusion est stricte sauf si le rang de M est un.*

Preuve. — On sait par un résultat classique ([8], théorème 3, p. 364) qu'on a

$$\tilde{M} = K.\exp \mathfrak{a}^{+}.x_0,$$

où $\mathfrak{a}^{+}$ désigne la chambre de Weyl de $\mathfrak{a}$ définie par

$$\mathfrak{a}^{+} = \{ \sum_{k=1}^{p} t_k X_{\gamma_k},\ t_p > \ldots > t_1 > 0 \}.$$

Maintenant par un calcul élémentaire ([2], lemme 7.7, p. 387) dans $SL(2, \mathbb{R})$ on a

$$\exp t X_\gamma . x_0 = \exp(-u H_\gamma).cx_0 \qquad (\gamma \in \Psi)$$

si et seulement si $th\, t = e^{-2u}$. Par orthogonalité forte des éléments de Ψ, on en déduit

$$\exp \mathfrak{a}^{+}.x_0 = \exp i \overset{\circ}{C}{}^{+}.cx_0,$$

où $\overset{\circ}{C}{}^{+}$ désigne l'intérieur de C^{+}. Compte tenu de la remarque 5, ceci achève la preuve. □

La décomposition du théorème 1 qui identifie l'ouvert dense $S_c \cap M$ à l'espace fibré $K \times_L \Omega$ peut être qualifiée de « décomposition en coordonnées polaires » de M. La proposition précédente établit que cette décomposition est *distincte* de la « décomposition de Cartan » classique ([2], corollaire 1.2, p. 402), qui identifie l'ouvert dense $\tilde{M}$ de M au produit topologique $K/Z \times \mathfrak{a}^{+}$ où $Z \subset L$ désigne le centralisateur de $\mathfrak{a}$ dans K.

4. Les domaines classiques

Nous explicitons ici brièvement le résultat précédent pour chacune des quatre séries de domaines classiques ([2], p. 518). Nous écrivons $\check{S}$ pour le bord de Shilov $\xi^{-1}(S)$ de D et $\check{D}$ pour l'ouvert dense $\xi^{-1}(S_c \cap M) \subset D$.

4.1. Matrices rectangulaires

D est le domaine de $\mathbb{C}^{mn}$ formé des matrices complexes $m \times n$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$ Z telles que $\mathbf{1}_m - ZZ^*$ soit hermitienne définie positive. Le bord de Shilov $\check{S}$ est l'ensemble des matrices complexes $m \times n$ U telles que $UU^* = \mathbf{1}_m$. Le cône Ω est celui des matrices $m \times m$ hermitiennes définies positives. L'ouvert dense $\check{D}$ est l'ensemble des matrices $m \times n$ qui s'écrivent $e^{-H}U$, avec $H \in \Omega$ et $U \in \check{S}$. La fibration $\check{D} \to \check{S}$ est triviale.

4.2. Disque unité généralisé de Siegel

D est le domaine de $\mathbb{C}^{n(n+1)/2}$ formé des matrices complexes symétriques $n\times n\,(n\geqslant 1)\,Z$ telles que $\mathbf{1}-Z\overline{Z}$ soit hermitienne définie positive. Le bord de Shilov $\check{S}$ est l'ensemble des matrices $n\times n$ unitaires symétriques. Le cône Ω est celui des matrices $n\times n$ réelles symétriques définies positives. L'ouvert dense $\check{D}$ est l'ensemble des matrices $U e^{-H} U^t$, avec $U\in U(n)$ et $H\in\Omega$. L'application $U e^{-H} U^t \to UU^t$ est une fibration de $\check{D}$ sur $\check{S}$, de groupe structural $O(n)$.

4.3. Matrices antisymétriques

D est le domaine de $\mathbb{C}^{n(n-1)/2}$ formé des matrices complexes antisymétriques $n\times n$ $(n\geqslant 2)$ Z telles que $\mathbf{1}+Z\overline{Z}$ soit hermitienne définie positive. Le rang de D est $p=[n/2]$. Soit j la matrice $2p\times 2p$ définie par

$$j=\begin{bmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}&&0\\&\ddots&\\0&&\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\end{bmatrix}.$$

On note J la matrice $n\times n$ définie par $J=j$ si n est pair, et

$$J=\begin{pmatrix}j&0\\0&0\end{pmatrix}$$

si n est impair. Alors le bord de Shilov $\check{S}$ est l'ensemble des matrices $n\times n$ qui s'écrivent $U J U^t$, avec $U\in U(n)$. Soit ω le cône des matrices $2p\times 2p$ hermitiennes définies positives H telles que $Hj=j\overline{H}$. Alors on a $\Omega=\omega$ si n est pair, et

$$\Omega=\begin{pmatrix}\omega&0\\0&0\end{pmatrix}$$

si n est impair. L'ouvert dense $\check{D}$ est l'ensemble des matrices $n\times n$ de la forme $U e^{-H} J e^{-\overline{H}} U^t$, avec $U\in U(n)$ et $H\in\Omega$. L'application $U e^{-H} J e^{-\overline{H}} U^t \to UJU^t$ est une fibration de $\check{D}$ sur $\check{S}$. Le groupe structural est formé des matrices $U\in U(n)$ telles que $UJ=J\overline{U}$.

4.4. Sphères de Lie

D est le domaine de $\mathbb{C}^n (n \geq 3)$ formé des vecteurs-colonnes $Z = (z_1, \ldots, z_n)^t$ tels que

$$|Z^t . Z|^2 - 2 Z^t . \bar{Z} + 1 > 0, \qquad |Z^t . Z| < 1.$$

Le bord de Shilov $\check{S}$ est l'ensemble des vecteurs-colonnes de $\mathbb{C}^n$ qui s'écrivent $e^{i\theta} U$, avec $U \in \mathbb{R}^n$ et $U^t . U = 1$. Le cône Ω est la nappe positive du cône de Lorentz de $\mathbb{R}^n$ formée des vecteurs $(y_1, \ldots, y_n)$ tels que

$$y_1^2 - \sum_{i=2}^n y_i^2 > 0, \qquad y_1 > 0.$$

L'ouvert dense $\check{D}$ est l'ensemble des vecteurs-colonnes

$$Z = e^{i\theta - y_1} A \ [\operatorname{ch} Y, -iy_2 Y^{-1} \operatorname{sh} Y, \ldots, -iy_n Y^{-1} \operatorname{sh} Y]^t,$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$, $A \in SO(n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \in \Omega$ et $Y = (\sum_{i=2}^n y_i^2)^{1/2}$. L'application

$$Z \to e^{i\theta} A [1, 0, \ldots, 0]^t$$

est une fibration de $\check{D}$ sur $\check{S}$, de groupe structural $SO(n-1)$.

5. Algèbre de Jordan

Nous allons maintenant montrer que lorsque M est *du type tube* il est possible de formuler notre résultat purement en termes d'algèbres de Jordan.

Supposons donc que M soit du type tube. On a alors $\tau^2 = 1$ et $M = M'$, $K = K'$, $S = S'$, etc. On note $\mathfrak{n}^+ = \mathfrak{p}^+ \cap \operatorname{Ad} c . \mathfrak{g}$ la forme réelle de $\mathfrak{p}^+ = \mathfrak{p}_1^+$ et $\mathfrak{k} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{q}$ la décomposition de Cartan de $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}'$. Les résultats suivants sont connus. Nous renvoyons le lecteur à [0] pour la terminologie et des références.

La loi

$$X . Y = \frac{1}{2}[X, [\bar{E}_0, Y]] = \frac{1}{2}[\beta(X), Y]$$

munit $\mathfrak{p}^+$ d'une structure d'algèbre de Jordan dont l'élément unité est E_0. Le sous-espace $\mathfrak{n}^+$ est une sous-algèbre de Jordan compacte (i. e. formellement réelle) de $\mathfrak{p}^+$. Le cône Ω est la composante connexe de E_0 dans l'ensemble des éléments Jordan-inversibles de $\mathfrak{n}^+$.

Si l'on définit la translation à gauche $L(X)$ par $L(X)\, Y = X . Y$, on a

$$L(X) = \frac{1}{2} \operatorname{ad} \beta(X)$$

et $L(\mathfrak{p}^+) = \mathrm{ad}\, \mathfrak{q}_c$. Désignons par Exp l'exponentielle de Jordan dans $\mathfrak{p}^+$. Alors on a par un calcul facile

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{Exp} 2X = \operatorname{Ad}(\exp \beta(X)) . E_0.$$

Nous aurons besoin du résultat suivant qui est peut-être connu mais ne figure pas explicitement dans la littérature.

THÉORÈME 2. — *L'orbite* $\xi^{-1}(S_c) = \operatorname{Ad} K_c . E_0$ *est exactement l'ensemble des éléments Jordan-inversibles de* $\mathfrak{p}^+$.

Preuve. — Soit $\mathscr{J}$ l'ensemble (connexe) des éléments Jordan-inversibles de $\mathfrak{p}^+$. En vertu de [7] (théorème 1.2, p. 68), on sait que $\mathscr{J}$ est un espace symétrique au sens de [7]. Soit D son groupe (connexe) de déplacements, d'algèbre de Lie $\mathfrak{d}$. Alors par le théorème 2.8 (p. 88) et l'exemple 2 (p. 81) de [7], on sait que $\mathfrak{d}$ est engendrée par $L(\mathfrak{p}^+) = \mathrm{ad}\, \mathfrak{q}_c$. On a donc $\mathfrak{d} = \mathrm{ad}\, \mathfrak{k}_c$ et $D = \operatorname{Ad} K_c$. Mais en vertu de [7] (théorème 3.1, p. 91), le groupe D est transitif sur $\mathscr{J}$. D'où l'assertion. □

Nous sommes alors en mesure de donner une nouvelle formulation du théorème 1. *Les notations sont désormais indépendantes des précédentes.* Soient $\mathscr{A}$ une algèbre de Jordan réelle compacte avec élément unité e et $\mathscr{A}_c$ sa complexifiée. On note $\operatorname{Exp} x$ et x^{-1} l'exponentielle et l'inverse de Jordan de $x \in \mathscr{A}_c$.

Soit Ω la composante connexe de e dans l'ensemble des éléments Jordan-inversibles de $\mathscr{A}$ (domaine de positivité). Dans $\mathscr{A}_c$ on considère le tube $\mathscr{D} = \mathscr{A} + i\Omega$ et le domaine borné symétrique

$$D = \{ (x - ie)(x + ie)^{-1}, \ x \in \mathscr{D} \},$$

obtenu par transformation de Cayley. Soient $\mathbf{K}$ le groupe des automorphismes holomorphes de D fixant 0, et $\mathbf{L}$ le groupe des automorphismes algébriques de $\mathscr{A}$. Alors on a $\mathbf{L} \subset \mathbf{K}$ et $S = \mathbf{K} . e = \mathbf{K}/\mathbf{L}$ est le bord de Shilov de D.

THÉORÈME 3. — *L'application de* $\mathbf{K} \times \Omega$ *dans* $\mathscr{A}_c$ *définie par* $(k, x) \to k . \operatorname{Exp}(-x)$ *identifie l'ensemble des éléments Jordan-inversibles de D à* $\mathbf{K} \times_{\mathbf{L}} \Omega$.

Preuve. — C'est une conséquence immédiate des théorèmes 1 et 2, de la remarque 2 et de la relation (1). □

On comparera ce résultat au théorème suivant qui est peut-être connu mais ne figure pas explicitement dans la littérature.

THÉORÈME 4. — *L'application de* $\mathbf{K} \times \mathscr{A}$ *dans* $\mathscr{A}_c$ *définie par* $(k, x) \to k.\operatorname{Exp} x$ *identifie l'ensemble des éléments Jordan-inversibles de* $\mathscr{A}_c$ *à* $\mathbf{K} \times_{\mathrm{L}} \mathscr{A}$.

Preuve. — C'est une conséquence immédiate du théorème 2, de la relation (1) et de la proposition 11 de [5] (p. 212). □

BIBLIOGRAPHIE

[0] BRAUN (H.) et KOECHER (M.). — Jordan Algebren, Springer, 1966.

[1] HARISH-CHANDRA. — Representations of Semi-Simple Lie Groups VI, *Amer. J. Math.*, vol. 78, 1956, p. 564-628.

[2] HELGASON (S.). — Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces, New York, Academic Press, 1978.

[3] KORÁNYI (A.) et VÁGI (S.). — Rational Inner Functions on Bounded Symmetric Domains, *Trans. A.M.S.*, vol. 254, 1979, p. 179-193.

[4] KORÁNYI (A.) et WOLF (J.). — Realization of Hermitian Symmetric Spaces as Generalized Half-Planes, *Ann. of Math.*, vol. 81, 1965, p. 265-288.

[5] LASSALLE (M.). — Les orbites d'un espace hermitien symétrique compact, *Inventiones Math.*, vol. 52, 1979, p. 199-239.

[6] LASSALLE (M.). — Algèbres de Jordan, coordonnées polaires et équations de Hua, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 294, série I, 1982, p. 613-615.

[7] LOOS (O.). — Symmetric Spaces, vol. I, Benjamin, 1969.

[8] MOORE (C.). — Compactifications of Symmetric Spaces II, The Cartan Domains, *Amer. J. Math.*, vol. 86, 1964, p. 358-378.