

# BULLETIN DE LA S. M. F.

FRANÇOIS LAUDENBACH

## **Relèvement linéaire des cobords**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 111 (1983), p. 147-150

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1983\\_\\_111\\_\\_147\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1983__111__147_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1983, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## RELÈVEMENT LINÉAIRE DES COBORDS

PAR

FRANÇOIS LAUDENBACH (\*)

RÉSUMÉ. — Sur l'espace des formes différentielles d'une variété lisse, l'opérateur cobord admet une section linéaire au-dessus de son image.

ABSTRACT. — The coboundary operator has a linear section above its image.

Soient  $M$  une variété lisse et  $\Omega_c^k$  l'espace des formes différentielles sur  $M$  de degré  $k$  à support compact, muni de la topologie fine limite inductive stricte de Fréchet. On s'intéresse à l'opérateur cobord  $d : \Omega_c^k \rightarrow \Omega_c^{k+1}$ . Son image, l'espace des cobords, est un fermé d'après le théorème de de Rham : une forme est un cobord si et seulement si son intégrale sur les cycles simpliciaux (infinis, lorsque  $M$  est non compacte) est nulle.

Le problème de sélectionner un antécédent à un cobord, de façon régulière, est souvent rencontré en topologie des formes différentielles. Il est, par exemple, utile dans le théorème d'isotopie de MOSER [Mo]. On peut songer au théorème de sélection continue de Michaël : Une surjection linéaire de Fréchet admet une section continue [BP, prop. 7.1, p. 87]. Mais d'une part l'image de  $d$  n'est qu'un fermé dans une limite inductive de Fréchet et il n'est pas clair que le théorème de Michaël s'y applique, d'autre part il n'y a pas de théorème d'approximation permettant de récupérer la régularité.

La théorie des espaces nucléaires permet à Banyaga le relèvement des familles à un nombre fini de paramètres [Ba]. Dans le cas des variétés fermées, la théorie des formes harmoniques [Wa, chap. 6] donne une sélection linéaire.

Nous proposons ici une sélection linéaire en toute généralité. Notre construction utilise comme chez DE RHAM [Rh, § 22] les simplexes d'une triangulation. Elle paraphrase celle du livre de SINGER et THORPE [ST, p. 148 et suivantes] pour démontrer le théorème de DE RHAM, à la différence que les surjectivités sont remplacées par des sections linéaires continues.

---

(\*) Texte reçu le 27 septembre 1982, révisé le 4 mars 1983.

F. LAUDENBACH, Université de Paris-Sud, Mathématique, Bâtiment n° 425, 91405 Orsay Cedex.

Soit  $K$  une structure simpliciale sur  $M$ , dont l'existence est assurée par le théorème de J. H. C. WHITEHEAD [Wh]; chaque simplexe est équipée d'une orientation. L'espace des chaînes simpliciales (infinies) de dimension  $k$ ,  $C_k(K)$ , est l'espace vectoriel réel des combinaisons linéaires infinies des  $k$ -simplexes. On a un bord naturel  $\partial : C_k(K) \rightarrow C_{k-1}(K)$ , dont le noyau est l'espace des cycles (sous-entendu de  $K$ ). Soit  $B_c^k$  le sous-espace de  $\Omega_c^k$  constitué par les  $k$ -formes fermées d'intégrales nulles sur tous les cycles; c'est un sous-espace fermé. Par la formule de Stokes,  $B_c^k$  contient  $d(\Omega_c^{k-1})$ .

PROPOSITION. — *Il existe une application linéaire continue  $\sigma_k : B_c^k \rightarrow \Omega_c^{k-1}$  qui est un inverse à droite de  $d$ .*

Pour la démonstration, introduisons l'espace des  $k$ -cochaînes à support compact  $C_c^k(K)$ ; une  $k$ -cochaîne à support compact associe un réel à chaque  $k$ -simplexe, qui est nul sauf pour un nombre fini de simplexes. En transposant le bord des simplexes, on définit le cobord  $d : C_c^k(K) \rightarrow C_c^{k+1}(K)$ . Il est immédiat de vérifier que  $C_*(K)$  s'identifie au dual algébrique de  $C_c^*(K)$  et que  $\partial$  est la transposée de  $d$ . Par les théorèmes généraux de la dualité algébrique [Bo 1, chap. II, § 2, n° 5 et § 7, n° 5], l'image de  $d$  et le noyau de  $\partial$  sont chacun l'orthogonal de l'autre. Donc si :

$$B_c^k(K) = \{ f \in C_c^k(K) \mid \langle f, \gamma \rangle = 0 \text{ pour tout cycle } \gamma \},$$

on a  $B_c^k(K) = d(C_c^{k-1}(K))$ .

D'autre part une topologie naturelle sur  $C_c^k(K)$  est la topologie limite inductive des sous-espaces de dimension finie. Si  $K_n$  est une suite exhaustive de compacts et si on note  $C_{K_n}^k$  l'espace des cochaînes à support dans  $K_n$ ,  $C_c^k(K)$  est la limite inductive topologique des  $C_{K_n}^k$ . Le cobord est continu.

LEMME 1. — *Il existe une application linéaire continue  $\sigma_k(K) : B_c^k(K) \rightarrow C_c^{k-1}(K)$  qui est un inverse à droite du cobord.*

*Preuve.* — On construit  $\sigma_k(K)$  par récurrence sur les espaces de dimension finie  $C_{K_n}^k$ . ■

L'intégrale sur les simplexes donne une application  $I^k : \Omega_c^k \rightarrow C_c^k(K)$  qui commute avec  $d$  et qui donc envoie  $B_c^k$  dans  $B_c^k(K)$ . De plus elle est continue sur les espaces de formes ayant leur support dans un compact fixe et la topologie fine de  $\Omega_c^k$  est leur inductive [Sc, chap. III, § 1].

LEMME 2. — *Il existe une application linéaire continue  $\alpha^* : C_c^*(K) \rightarrow \Omega_c^*$  qui est un inverse à droite de  $I^*$  et qui commute avec  $d$ .*

*Preuve.* — Supposons que  $\alpha^{k-1}$  soit construite. Alors  $\alpha^k$  est déterminée sur  $B_c^k(K)$  et y est continue d'après le lemme 1. D'après [ST, p. 148, lemme 1],  $I^*$  est surjectif de l'espace des formes fermées à valeurs dans les cocycles. On peut donc étendre  $\alpha^k$  aux cocycles avec valeurs dans l'espace des formes fermées, puis à toutes les cochaînes. Chacune de ces extensions se fait par récurrence sur les sous-espaces de dimension finie  $B_{K_n}^k$ . ■

Dans la suite, le  $k$ -squelette de  $K$  sera muni d'un voisinage régulier ouvert  $U_k$  et de deux autres  $V_k$  et  $W_k$  avec  $\overline{W}_k \subset \overline{V}_k \subset U_k$ . « Défini au voisinage du  $k$ -squelette » signifie « défini sur  $U_k$  », « à support compact » = « nul hors d'un compact de  $M$  », « nul au voisinage du  $k$ -squelette » = « nul sur  $\overline{W}_k$  » et «  $\tilde{\omega}$  est un prolongement de  $\omega$  défini au voisinage du  $k$ -squelette » = «  $\tilde{\omega} - \omega$  est nulle sur  $\overline{W}_k$  ». Sur l'espace des formes différentielles définies sur  $U_k$ , on met la topologie limite inductive de la topologie de la convergence  $C^\infty$  sur  $\overline{V}_k \cap K_n$ . Choissant une fois pour toutes une fonction  $C^\infty$  valant 1 sur  $\overline{W}_k$  et à support dans  $V_k$ , on obtient la première partie du lemme suivant.

LEMME 3. — (1) Il existe un opérateur linéaire continu  $P_q^k$  à valeurs dans  $\Omega_c^k$  de prolongement des  $k$ -formes définies au voisinage du  $q$ -squelette à support compact.

(2) De plus, si  $q < k$ , on peut imposer  $I^k \circ P_q^k = 0$ .

*Preuve de (2).* — Comme au lemme 2, on peut construire un inverse à droite  $\beta^k$  de  $I^k$  de sorte que  $\beta^k(f)$  soit une forme à support dans le complémentaire de  $U_{k-1}$ . Si  $P_q^k$  satisfait (1), alors  $P_q^k - \beta^k \circ I^k \circ P_q^k$  satisfait aussi (2). ■

Dans la situation du simplexe standard  $\Delta^k \subset \mathbb{R}^n$ , le mot « voisinage » est utilisé comme plus haut.

LEMME 4. — Soit  $\mathcal{F}^q$  l'espace des  $q$ -formes fermées  $\omega$  définies au voisinage de  $\Delta^k$ , nulles au voisinage du bord  $\partial\Delta^k$  et vérifiant  $\int_{\Delta} \omega = 0$  si  $q = k$ . Soit  $\mathcal{G}^{q-1}$  l'espace des  $(q-1)$ -formes définies au voisinage de  $\Delta$  et nulles au voisinage du bord ( $d: \mathcal{G}^{q-1} \rightarrow \mathcal{F}^q$ ). Il existe une application linéaire continue  $R^q: \mathcal{F}^q \rightarrow \mathcal{G}^{q-1}$  qui est un inverse à droite pour  $d$ .

*Preuve.* — Supposons  $k = q$ . La démonstration se fait par récurrence sur  $k$ . On identifie  $\Delta^k$  au joint d'un point  $S$  avec  $\Delta^{k-1}$ . On choisit une fois pour toutes une homotopie  $\Delta^k \times [0, 1] \rightarrow \Delta^k$  de l'identité à une application à valeurs dans le voisinage prescrit de  $S \star \partial\Delta^{k-1}$  et on la prolonge en une homotopie sur le voisinage de  $\Delta^k$  avec les mêmes conditions limites. A une telle

homotopie géométrique correspond un opérateur  $L$  tel que, pour toute  $k$ -forme fermée  $\omega$  définie au voisinage de  $\Delta^k$ ,  $L\omega$  soit nulle au voisinage de  $S \star \partial\Delta^{k-1}$  et que  $\omega = dL\omega$ . L'opérateur  $L$  est obtenu par intégration sur les fibres de l'homotopie [Di, p. 12].

Si en plus  $\omega$  appartient à  $\mathcal{F}^k$ , d'après la formule de Stokes  $\int_{\Delta^{k-1}} L\omega = 0$  et  $L\omega$  est nulle au voisinage de  $\partial\Delta^{k-1}$ . Donc la restriction  $\varphi$  de  $L\omega$  au voisinage de  $\Delta^{k-1}$  est un élément de  $\mathcal{F}^{k-1}$ . Par récurrence on écrit  $\varphi = dR^{k-1}\varphi$ . Comme au lemme 3 on prolonge  $R^{k-1}\varphi$  en  $\psi$  défini au voisinage de  $\Delta^k$ , nulle au voisinage de  $S \star \partial\Delta^{k-1}$ , et  $L\omega - d\psi \in \mathcal{G}^{k-1}$ .

Lorsque  $k \neq q$  on fait le même type de récurrence. ■

*Remarque.* — Pour  $k=0$ , c'est le classique lemme de Poincaré affirmant qu'au voisinage d'un point une forme fermée est (canoniquement) un cobord.

*Démonstration de la proposition.* — Soit  $\omega \in B_c^k$ ; on a  $I^k(\omega) \in B_c^k(K)$ . On considère la forme  $\varphi = \alpha^{k-1} \sigma_k(K) I^k(\omega)$ . Posons  $\tilde{\omega} = \omega - d\varphi$ . Par construction  $I^k(\tilde{\omega}) = 0$ . Par les lemmes 4 et 3, au voisinage de 0-squelette  $\tilde{\omega} = d\psi^0$ ,  $\psi^0 \in \Omega_c^{k-1}$ . Comme  $I^{k-1}(\psi^0) = 0$ , on a  $I^k(d\psi) = 0$ . Si  $\tilde{\omega}^0 = \tilde{\omega} - d\psi$ , on a  $I^k(\tilde{\omega}^0) = 0$  et  $\tilde{\omega}^0$  est nulle au voisinage du 0-squelette. Ensuite on écrit  $\tilde{\omega}^0 = d\psi^1$ ,  $\psi^1$  défini au voisinage du 1-squelette et nulle au voisinage du 0-squelette, etc. Finalement, après une suite d'opérations linéaires continues, on écrit  $\omega$  comme un cobord. ■

#### BIBLIOGRAPHIE

- [Ba] BANYAGA (A.). — Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservent une forme symplectique, *Comm. Math. Helv.*, t. 53, 1978, p. 174-227.
- [Bo 1] BOURBAKI (N.). — *Algèbre*, Hermann, Paris, 1970.
- [Bo 2] BOURBAKI (N.). — *Espaces vectoriels topologiques*, Hermann, Paris, 1966.
- [BP] BESSAGA (C.) et PELCZYNSKI (A.). — *Selected topics in infinite-dimensional topology*, PWN, Varsovie, 1975.
- [Di] DIEUDONNÉ (J.). — *Éléments d'analyse*, Gauthier-Villars, Paris, 1982.
- [Mo] MOSER (J.). — On the volume elements on a manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 120, 1965, p. 286-294.
- [Rh] de RHAM (G.). — *Variétés différentiables*, Hermann, Paris, 1960.
- [Sc] SCHWARTZ (L.). — *Théorie des distributions*, Hermann, Paris, 1957.
- [ST] SINGER (I.) et THORPE (J.). — *Lectures on elementary topology and geometry*, Scott, Foresman and Co, Glenview, Illinois, 1967.
- [Wa] WARNER (F.). — *Foundations of differentiable manifolds and Lie Groups*, Scott, Foresman and Co., Glenview, Illinois, 1971.
- [Wh] WHITEHEAD (J. H. C.). — On  $C^1$ -complexes, *Ann. Math.*, t. 41, 1940, p. 809-824.