BULLETIN DE LA S. M. F.

MARTINE QUEFFELEC

Mesures spectrales associées à certaines suites arithmétiques

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 385-421
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__385_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 385-421.

MESURES SPECTRALES ASSOCIÉES A CERTAINES SUITES ARITHMÉTIQUES

PAR

MARTINE QUEFFELEC (*)

[Université Paris-Nord, Villetaneuse]

RÉSUMÉ. — Une suite complexe $\alpha = (\alpha(n))$ appartient à l'espace S de Wiener si

$$\gamma(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(n+k)\overline{\alpha(k)}$$

existe pour tout $n \geq 0$.

On peut associer à une suite α de S une mesure λ sur $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ définie par sa transformée de Fourier :

$$\hat{\lambda}(n) = \gamma(n) \qquad \text{si} \quad n \geqslant 0,$$

$$\hat{\lambda}(n) = \overline{\gamma(-n)} \qquad \text{si} \quad n \leqslant 0.$$

Le but de cet article est de préciser la nature de la mesure spectrale associée à certaines suites arithmétiques de l'espace S. On étudie les relations entre les propriétés de la suite α et celles de la transformée de Gel'fand de la mesure λ, en utilisant la théorie des caractères généralisés.

ABSTRACT. — A complex sequence $\alpha = (\alpha(n))$ is said to belong to the space S of Wiener if

$$\gamma(n) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha(n+k)\overline{\alpha(k)}$$

exists for every $n \geq 0$.

If α belongs to S there exists a measure λ on $\mathbf{T} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ which is defined by its Fourier transform:

$$\hat{\lambda}(n) = \gamma(n) \qquad \text{if} \quad n \geqslant 0,$$

$$\hat{\lambda}(n) = \overline{\gamma(-n)} \qquad \text{if} \quad n \leqslant 0.$$

(*) Texte reçu le 4 septembre 1978.

M^me Martine QUEFFELEC, Mathématiques. Centre scientifique et polytechnique, Université Paris-Nord, avenue Jean-Baptiste-Clément, 93430 Villetaneuse.

The purpose of this paper is to precise the nature of the spectral measure of certain arithmetical sequences in S. We study the relationships between the properties of the sequence α and the behaviour of the Gel'fand transform of the measure λ, using the theory of generalized characters.

0. Introduction

WIENER introduit dans [20] l'espace S des suites complexes $\alpha = (\alpha(n))_{n \geqslant 0}$ pour lesquelles

$$\gamma(k) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \alpha(j+k)\overline{\alpha(j)}$$

existe pour tout $k \geqslant 0$. La suite γ, prolongée aux entiers négatifs par $\gamma(-k) = \overline{\gamma(k)}$, est définie positive; c'est donc la transformée de Fourier d'une mesure positive bornée, λ, sur le groupe $\mathbf{T}$, où $\mathbf{T}$ désigne le tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. La mesure λ, définie ainsi par

$$\hat{\lambda}(k) = \int_{\mathbf{T}} \exp 2\pi ikx \, d\lambda(x) = \gamma(k)$$

est appelée la *mesure spectrale* de la suite α.

Soit $q = (q_1, \ldots, q_n, \ldots)$ une suite d'entiers $\geqslant 2$. On note $p_0 = 1$, $p_n = q_1 \ldots q_n$. Une suite complexe α est dite *q-multiplicative* si

$$\alpha(a + bp_n) = \alpha(a)\alpha(bp_n)$$

pour $b \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ et $0 \leqslant a < p_n$.

Dans [6], COQUET, KAMAE et MENDÈS FRANCE étudient la mesure spectrale associée à une suite q-multiplicative de module 1, une telle suite étant dans l'espace S de Wiener.

Ils établissent le résultat suivant :

THÉORÈME 1 (COQUET, KAMAE, MENDÈS FRANCE). — *La mesure* λ, *associée à une suite q-multiplicative de module* 1, *est soit discrète, soit continue.*

Dans ce dernier cas, elle est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue, si q_n ne tend pas vers l'infini.

Un des buts de cet article est de préciser cette dichotomie. Dans un premier paragraphe, on fait apparaître la mesure λ, comme une limite vague de produits de polynômes positifs, établissant ainsi une certaine analogie entre ces mesures spectrales et les produits de Riesz ([17], [15]).

En utilisant alors les travaux de BROWN et MORAN ([2], [4]), on retrouve et améliore le théorème de COQUET, KAMAE et MENDÈS FRANCE. Dans les deux derniers paragraphes, on fait une étude de ces mesures, semblable à celle faite pour les produits de Riesz (recherche des constantes dans l'adhérence des caractères, propriété de « tameness »), et on parvient à conclure pour certaines suites α.

On rappelle les principales notations de la théorie de la mesure. $M(\mathbf{T})$ désigne l'algèbre des mesures régulières, bornées sur $\mathbf{T}$, munie du produit de convolution, $M_d(\mathbf{T})$ la sous-algèbre des mesures discrètes, et $M_c(\mathbf{T})$ l'idéal des mesures continues. On identifiera $L^1(\mathbf{T})$ à l'idéal des mesures absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{T}$.

Pour λ, $\mu \in M(\mathbf{T})$, on écrit :

$$\lambda \ll \mu$$

lorsque λ est absolument continue par rapport à μ, et

$$\lambda \perp \mu$$

lorsque λ et μ sont étrangères.

Enfin, pour tout entier $n \geqslant 1$, λ^n désignera la puissance n-ième de convolution de la mesure λ.

Les autres notations seront celles de RUDIN [17].

On suppose désormais que la suite α est q-multiplicative avec $q = (q_1, \ldots, q_n, \ldots)$, et q_n entier $\geqslant 2$ pour chaque n, et qu'elle est de module 1.

On désigne par λ sa mesure spectrale.

1. Formules de récurrence

Pour $n \geqslant 0$, soit D_n le sous-groupe de $\mathbf{T}$ engendré par $1/p_n$; $D = \bigcup_{n \geqslant 0} D_n$ est un sous-groupe dénombrable et dense de $\mathbf{T}$. On note ω_n la mesure de Haar du groupe D_n, et on pose

$$\lambda_n = \lambda \star \omega_n \qquad \text{si} \quad n \geqslant 0,$$

de sorte que

$$\hat{\lambda}_n(k) = \begin{cases} \hat{\lambda}(k) & \text{si } p_n \text{ divise } k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

LEMME. 1. — *Pour tout $n \geqslant 0$, $\lambda = f_n . \lambda_n$, où f_n est un polynôme trigonométrique positif à spectre dans les entiers de module strictement inférieur à p_n.*

Démonstration. — Il s'agit tout simplement d'une interprétation des formules de récurrence sur les coefficients de Fourier de λ, établies dans [6]; il est prouvé en effet que, pour $n \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ et $0 \leqslant a < p_n$,

$$\hat{\lambda}(a+bp_n) = A_n(a)\hat{\lambda}(bp_n)+B_n(a)\hat{\lambda}(bp_n+p_n)$$

avec

$$A_n(a) = \frac{1}{p_n}\sum_{k=0}^{p_n-a-1}\overline{\alpha(k)}\alpha(a+k)$$

et

$$B_n(a) = \frac{1}{p_n}\sum_{k=0}^{a-1}\alpha(k)\overline{\alpha(k+p_n-a)} \qquad \text{si} \quad a > 0$$

$$= 0 \qquad \text{si} \quad a = 0.$$

On voit que $B_n(a) = \overline{A_n(p_n-a)}$ si $a > 0$.

On définit le polynôme f_n par

$$(1) \qquad f_n(k) = \begin{cases} A_n(k) & \text{si} \quad 0 \leqslant k < p_n \\ \overline{A_n(-k)} & \text{si} \quad -p_n < k \leqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad |k| \geqslant p_n. \end{cases}$$

Les transformées de Fourier de λ, λ_n et f_n étant symétriques, il suffit de vérifier l'égalité $\hat{\lambda}(m) = (f_n . \lambda_n)^{\wedge}(m)$ pour tout $m \geqslant 0$.

Si m est $\geqslant 0$, on peut écrire $m = m_1 + m_2 p_n$ avec $m_2 \geqslant 0$ et $0 \leqslant m_1 < p_n$, et ceci pour tout $n \geqslant 0$, de sorte que

$$(f_n \lambda_n)^{\wedge}(m) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \hat{f}_n(m-l)\hat{\lambda}_n(l) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \hat{f}_n(m-lp_n)\hat{\lambda}(lp_n)$$

se réduit, compte tenu de (1) à

$$\hat{f}_n(m_1)\hat{\lambda}(m_2 p_n)+\hat{f}_n(m_1-p_n)\hat{\lambda}(m_2 p_n+p_n)$$
$$= A_n(m_1)\hat{\lambda}(m_2 p_n)+\overline{A_n(p_n-m_1)}\hat{\lambda}(m_2 p_n+p_n),$$

ce qui n'est autre que $\hat{\lambda}(m)$. D'où l'égalité $\lambda = f_n \lambda_n$.

On vérifie facilement que $f_n(x) = \sum_{|k|<p_n} \hat{f}_n(k) \exp(-2\pi ikx)$ se met sous la forme

$$f_n(x) = \frac{1}{p_n} \left| \sum_{k=0}^{p_n-1} \alpha(k) \exp(-2\pi ikx) \right|^2.$$

LEMME 2. — *Pour tout $n \geqslant 0$, $\lambda_n = P_n \lambda_{n+1}$, où P_n est un polynôme trigonométrique positif, à spectre dans les multiples de p_n de la forme kp_n avec $|k| < q_{n+1}$.*

Démonstration. — On interprète cette fois-ci la formule de récurrence écrite pour les entiers positifs de la forme

$$ap_n + bp_{n+1} \qquad \text{avec} \quad b \geqslant 0,\ 0 \leqslant a < q_{n+1}.$$

Ainsi :

$$\hat{\lambda}(ap_n + bp_{n+1}) = A_{n+1}(ap_n)\hat{\lambda}(bp_{n+1}) + \overline{A_{n+1}(p_{n+1} - ap_n)}\hat{\lambda}(p_{n+1} + bp_{n+1}).$$

On définit le polynôme P_n par

$$(2) \qquad \hat{P}_n(kp_n) = \begin{cases} A_{n+1}(kp_n) & \text{si} \quad 0 \leqslant k < q_{n+1}, \\ \overline{A_{n+1}(-kp_n)} & \text{si} \quad -q_{n+1} < k \leqslant 0, \\ 0 & \text{si} \quad |k| \geqslant q_{n+1}. \end{cases}$$

Soit $m \geqslant 0$, que l'on décompose en $m_1 + m_2 q_{n+1}$, $0 \leqslant m_1 < q_{n+1}$, $0 \leqslant m_2$,

$$(P_n \lambda_{n+1})^\wedge (mp_n) = \sum_{l \in \mathbf{Z}} \hat{P}_n(mp_n - lp_{n+1})\hat{\lambda}(lp_{n+1}),$$

et compte tenu de (2), cette somme se réduit à :

$$\begin{aligned} &\hat{P}_n(m_1 p_n)\hat{\lambda}(m_2 p_{n+1}) + \hat{P}_n(m_1 p_n - p_{n+1})\hat{\lambda}(m_2 p_{n+1} + p_{n+1}) \\ &\quad = A_{n+1}(m_1 p_n)\hat{\lambda}(m_2 p_{n+1}) + \overline{A_{n+1}(p_{n+1} - m_1 p_n)}\hat{\lambda}(m_2 p_{n+1} + p_{n+1}) \end{aligned}$$

ce qui n'est autre que $\hat{\lambda}(mp_n)$.

Comme $(P_n \lambda_{n+1})^\wedge(k)$ est nul si p_n ne divise pas k, on a ainsi prouvé l'égalité $\lambda_n = P_n . \lambda_{n+1}$.

Par définition,

$$\hat{P}_n(kp_n) = \frac{1}{p_{n+1}} \sum_{a=0}^{p_{n+1}-kp_n-1} \overline{\alpha(a)}\,\alpha(a + kp_n) \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant k < q_{n+1}$$

et cette somme peut se décomposer en

$$\frac{1}{p_{n+1}}\left[\sum_{a=0}^{p_n-1}+\sum_{a=p_n}^{2p_n-1}+\ldots+\sum_{a=(q_{n+1}-k-1)p_n}^{(q_{n+1}-k)p_n-1}\right].$$

Or, pour chaque j, $0 \leqslant j < q_{n+1}-k$,

$$\sum_{a=jp_n}^{(j+1)p_n-1}\overline{\alpha(a)}\,\alpha(a+kp_n) = \sum_{b=0}^{p_n-1}\overline{\alpha(b+jp_n)}\,\alpha(b+jp_n+kp_n)$$

et, par la propriété de q-multiplicité, on trouve

$$\sum_{b=0}^{p_n-1}\overline{\alpha(b)}\,\overline{\alpha(jp_n)}\,\alpha(b)\,\alpha(jp_n+kp_n) = p_n\,\overline{\alpha(jp_n)}\,\alpha(jp_n+kp_n),$$

puisque la suite α est de module 1.

Finalement, on a pu écrire :

$$\hat{P}_n(kp_n) = \frac{1}{q_{n+1}}\sum_{j=0}^{q_{n+1}-k-1}\overline{\alpha(jp_n)}(jp_n+kp_n).$$

On vérifie alors facilement que

$$P_n(x) = \frac{1}{q_{n+1}}\left|\sum_{k=0}^{q_{n+1}-1}\alpha(kp_n)\exp(-2\pi ikp_n x)\right|^2.$$

PROPOSITION 1. — *La mesure λ est limite vague des produits $\prod_{j=0}^{n} P_j(x)$.*

Démonstration. — On voit facilement que

$$f_{n+1} = P_0\ldots P_n = P_n f_n.$$

Si k est un entier positif fixe, on a

$$\hat{\lambda}(k) = \hat{f}_n(k)+\hat{f}_n(k-p_n)\hat{\lambda}(p_n) \text{ pour tout } n \text{ tel que } k < p_n.$$

Or

$$\hat{f}_n(k-p_n) = \frac{1}{p_n}\sum_{a=0}^{k-1}\alpha(a)\,\overline{\alpha(a+p_n-k)}$$

et

$$\hat{f}_n(k) = \frac{1}{p_n}\sum_{a=0}^{p_n-k-1}\overline{\alpha(a)}\,\alpha(a+k),$$

de sorte que $\lim_{n\to\infty}\hat{f}_n(k-p_n) = 0$ et $\lim_{n\to\infty}\hat{f}_n(k) = \hat{\lambda}(k)$.

Remarque. — Considérons la suite

$$\alpha(n) = \exp 2\pi ic\, S_q(n)$$

où $c \in \mathbf{R}$, et où $S_q(n)$ est la somme des chiffres en base $q = (q_1, \ldots, q_n, \ldots)$, définie par

$$S_q(n) = \textstyle\sum_{k=0}^{K} n_k \qquad \text{si} \quad n = \sum_{k=0}^{K} n_k\, p_k.$$

A cette suite q-multiplicative est associée la suite de polynômes

$$P_n(x) = \frac{1}{q_{n+1}} \left| \textstyle\sum_{k=0}^{q_{n+1}-1} \exp 2\pi ick \exp(-2\pi ikp_n x) \right|^2$$

et la mesure λ apparaît comme un produit de Riesz généralisé.

Dans le cas particulier où la suite $q = (r, r, \ldots, r, \ldots)$ avec r entier $\geqslant 2$, étudié par MENDÈS FRANCE [13], BÉSINEAU [1] et KAMAE [10], la mesure λ, associée à α, est une g-mesure au sens de KEANE [12] avec

$$g(x) = \left| \frac{1}{r} \textstyle\sum_{k=0}^{r-1} \alpha(k) \exp(-2\pi ikx) \right|^2$$

$$= \left(\frac{\sin \pi r(x-c)}{r \sin \pi (x-c)} \right)^2$$

et T l'application : $x \to rx$ du tore dans lui-même.

Plus généralement, si g est une application définie sur $\mathbf{T}$, et strictement positive, dans Lip α, $\alpha > 0$, et vérifiant la condition

(C) $$\textstyle\sum_{y \in T^{-1}\{x\}} g(y) = 1 \quad \text{pour tout } x \in \mathbf{T},$$

le produit $\prod_n rg(T^n x)$ converge vaguement vers une mesure de probabilité, appelée g-mesure.

Il reste ici à vérifier la condition (C). Or, si $x \in \mathbf{T}$,

$$\sum_{y \in T^{-1}\{x\}} g(y) = \sum_{ry \equiv x} g(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{r-1} g\left(\frac{x}{r} + \frac{k}{r} \right)$$

$$= \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=-r+1}^{r-1} \hat{g}(l) \exp(-2\pi il(x/r)) \exp(-2\pi il(k/r))$$

avec $\hat{g}(l) = \exp 2\pi icl(1-(|l|/r))$ et on trouve

$$\frac{1}{r}\sum_{l=-r+1}^{r-1}\hat{g}(l)\exp(-2\pi il(x/r))\sum_{k=0}^{r-1}\exp(-2\pi il(k/r))$$

qui se réduit à $\hat{g}(0) = 1$.

On en déduit que λ est fortement mélangeante (*voir* aussi [16]).

Dans le cas général, la mesure λ associée à une suite q-multiplicative, de module 1, peut aussi s'interpréter comme une « g-mesure généralisée » définie à l'aide d'un groupe de transformations T_n et d'une suite d'applications g_n telles que, pour chaque n, la condition (C) soit réalisée.

2. Dichotomie

On va préciser dans ce paragraphe, le théorème de COQUET, KAMAE et MENDÈS FRANCE, rappelé dans l'introduction.

Notons f_n la suite de polynômes associée à λ et α par le lemme 1; on commence par une remarque utile.

LEMME 3. — *L'équation* $\mu = f_n(\mu \star \omega_n)$ *pour tout* $n \geqslant 0$ *détermine la mesure bornée* $\mu \in M(\mathbf{T})$, *à une constante multiplicative près.*

Démonstration. — Pour tout $k \geqslant 0$,

$$\hat{\mu}(k) = \hat{f}_n(k)\hat{\mu}(0) + \hat{f}_n(k-p_n)\hat{\mu}(p_n)$$

dès que n est tel que k est inférieur à p_n, et quand n tend vers l'infini, $\hat{f}_n(k)$ tend vers $\hat{\lambda}(k)$, et $\hat{f}_n(k-p_n)$ vers zéro.

COROLLAIRE :

1° *la mesure* λ *est soit discrète, soit continue;*

2° *la mesure* λ *est soit absolument continue, soit singulière par rapport à la mesure de Lebesgue sur* $\mathbf{T}$.

Démonstration :

1° Si λ se décompose en $\lambda_c + \lambda_d$, où λ_c appartient à $M_c(\mathbf{T})$ et λ_d à $M_d(\mathbf{T})$,

$$\lambda_c + \lambda_d = f_n(\lambda_c \star \omega_n) + f_n(\lambda_d \star \omega_n) \quad \text{pour tout } n \geqslant 0$$

et, par unicité d'une telle décomposition, $\lambda_c = f_n(\lambda_c \star \omega_n)$, $\lambda_d = f_n(\lambda_d \star \omega_n)$, les mesures $f_n(\lambda_c \star \omega_n)$ et $f_n(\lambda_d \star \omega_n)$ étant respectivement dans $M_c(\mathbf{T})$ et $M_d(\mathbf{T})$. Le lemme 3 donne alors le résultat.

2° De la même façon,

$$\lambda = f_n(\lambda_a \star \omega_n) + f_n(\lambda_s + \omega_n) \qquad \text{si} \quad \lambda = \lambda_a + \lambda_s$$

est la décomposition de λ en parties absolument continue et singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.

Par unicité d'une telle décomposition,

$$\lambda_a = f_n(\lambda_a \star \omega_n),\ \lambda_s = f_n(\lambda_s \star \omega_n),$$

et on conclut avec le lemme 3.

On va prouver maintenant le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Soit la mesure* λ *associée à une suite q-multiplicative, de module* 1; *on a :*

— *soit* $\lambda \in M_d(\mathbf{T})$;

— *soit* $\lambda^n \in L^1(\mathbf{T})$, *pour un entier* $n \geqslant 1$;

— *soit* λ *à puissances fortement indépendantes, c'est-à-dire*

$$\delta_x \star \lambda^n \perp \lambda^m \qquad \textit{pour} \quad x \in \mathbf{T},\ n \neq m$$

(*et dans ce cas elle est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue*).

Démonstration. — Par un résultat de BROWN et MORAN [4], il suffit d'établir la proposition suivante.

PROPOSITION 2. — *Si* D *est le groupe engendré par* $(1/p_n, n \geqslant 0)$, *la mesure* λ *est D-ergodique, c'est-à-dire pour tout* E, *borélien de* $\mathbf{T}$ *invariant par* D, $\lambda(E) = 0$ *ou* 1.

Démonstration. — Soit E un borélien de $\mathbf{T}$, invariant par D, et notons χ_E sa fonction indicatrice. Si χ_E coïncide λ-presque-partout avec une constante, $\lambda(E) = 0$ ou 1.

Par *D-invariance de E*, $\chi_E(x+d) = \chi_{E-d}(x) = \chi_E(x)$ pour tous $x \in \mathbf{T}$ et $d \in D$, de sorte que

$$\chi_E \cdot (\lambda \star \delta_d) = (\chi_E \cdot \lambda) \star \delta_d.$$

On en déduit que

$$\chi_E \cdot (\lambda \star \omega_n) = (\chi_E \cdot \lambda) \star \omega_n \quad \text{pour tout} \quad n \geqslant 0$$

et

$$\chi_E \cdot \lambda = \chi_{E \lrcorner n} \cdot (\lambda \star \omega_n) = f_n \cdot [(\chi_E \lambda) \star \omega_n].$$

$\chi_E \lambda$ et λ vérifiant les mêmes relations de récurrence, par le lemme 3, $\chi_E \lambda = c \lambda$, où c est une constante, et $\chi_E = c$ λ-presque-partout, ce qui démontre la proposition.

Le problème, à présent, est de décider pour une mesure λ donnée, de quel type elle est, suivant la nature de la suite α ou de la suite (P_n).

Dans cette direction, il est prouvé dans [6].

THÉORÈME 3 (COQUET, KAMAE, MENDÈS FRANCE). — *Supposons la suite (q_n) bornée.*

La mesure λ est continue si, et seulement si, la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{a=2}^{q_{k+1}} | \alpha(ap_k) - \alpha(p_k)^a |^2$$

diverge.

On dira que la suite complexe α est *fortement q-multiplicative* si α est q-multiplicative et si $\alpha(ap_k) = [\alpha(p_k)]^a$ pour tout $k \geqslant 0$ et $0 \leqslant a < q_{k+1}$.

Pour une telle suite, λ est continue si, et seulement si, la série $\sum_{k=0}^{\infty} | \alpha(p_{k+1}) - \alpha(p_k)^{q_{k+1}} |^2$ diverge.

Par exemple, si $\alpha(n) = \exp 2\pi ic\, S_q(n)$, λ est continue si la série $\sum_{k=0}^{\infty} | \exp 2\pi ic\,(q_k - 1) - 1 |^2$ diverge.

On déduit tout d'abord de la D-ergodicité de la mesure λ, la proposition suivante.

PROPOSITION 3. — *Si la mesure λ est discrète, elle est portée par une classe de D, et si elle est à support fini, elle est portée par une classe de D_m pour un indice $m \geqslant 0$.*

Démonstration. — Pour tout $\theta \in \mathbf{T}$, l'ensemble $\theta + D$ est invariant par D, de sorte que $\lambda(\theta + D) = 0$ ou 1. Si $\lambda(\theta + D) = 0$ pour tout θ dans $\mathbf{T}$, $\lambda(\theta) = 0$ pour tout θ, et λ est continue. Si λ est discrète, elle est donc portée par $\theta + D$ pour un θ dans $\mathbf{T}$; si de plus son support est fini, elle est portée par $\theta + D_m$ où $m \geqslant 0$. Dans ce cas, la suite α est définie par

$$(3) \qquad \alpha(kp_n) = \exp 2\pi ikp_n\theta \quad \text{pour tout } k \geqslant 0 \quad \text{et tout } n \geqslant m.$$

En effet, λ s'écrit $\sum_{d \in D_m} a_d\, \delta_{d+\theta}$ avec $a_d \geqslant 0$ et $\sum a_d = 1$.

Ainsi,

$$(4) \qquad \hat{\lambda}(p_n) = \exp 2\pi ip_n\theta \qquad \text{pour} \quad n \geqslant m.$$

Comme on a la relation

$$(5) \qquad \hat{\lambda}(p_n) = \hat{P}_n(p_n) + \hat{P}_n(p_n - p_{n+1}) . \hat{\lambda}(p_{n+1})$$

et l'inégalité (lemme 2)

$$|\hat{P}_n(p_n)|+|\hat{P}_n(p_n-p_{n+1})| \leqslant 1,$$

on doit avoir :

$$(6)\qquad |\hat{P}_n(p_n)|+|\hat{P}_n(p_n-p_{n+1})| = 1 \qquad \text{pour} \quad n \geqslant m.$$

Or $\hat{P}_n(p_n-p_{n+1}) = (1/q_{n+1})\,\overline{\alpha(p_{n+1}-p_n)}$, et on déduit de (6) :

$$|\textstyle\sum_{k=0}^{q_{n+1}-2} \alpha(kp_n+p_n)\overline{\alpha(kp_n)}| = q_{n+1}-1.$$

Il existe donc, pour $n \geqslant m$, un réel τ_n tel que, pour $k = 0, 1, \ldots, q_{n+1}-2$.

$$\alpha(kp_n)\exp i\tau_n = \alpha(kp_n+p_n),$$

ce qui impose

$$\alpha(kp_n) = \exp ik\tau_n \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant q_{n+1}-1.$$

En reportant dans (5), on trouve

$$\lambda(p_n) = \exp i\tau_n\left[\left(1-\frac{1}{q_{n+1}}\right)+\hat{\lambda}(p_{n+1})\exp(-i\tau_n q_{n+1})\frac{1}{q_{n+1}}\right],$$

et compte tenu de (4), il vient

$$\hat{\lambda}(p_{n+1}) = \exp i\tau_{n+1} = \exp i\tau_n q_{n+1} \qquad \text{pour} \quad n \geqslant m.$$

Comme $\lambda(p_m) = \exp i\tau_m = \exp 2\pi ip_m\theta$, l'assertion (3) est démontrée.

Dans une autre direction, on peut donner une condition suffisante pour qu'une puissance de λ soit étrangère à la mesure de Lebesgue sur **T**, condition qui malheureusement ne semble pas nécessaire.

PROPOSITION 4. — *Soit $k \geqslant 1$; s'il existe une suite b_n, avec $1 \leqslant b_n < q_{n+1}$ pour tout $n \geqslant 0$, et telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |\hat{\lambda}(b_n p_n)|^{2k} = +\infty$, alors la mesure λ^k est singulière par rapport à la mesure de Lebesgue.*

Démonstration. — L'orthogonalité de la mesure λ^k et de la mesure de Lebesgue résulte d'un critère d'orthogonalité inspiré des critères de J. PEYRIÈRE [14] et de BROWN [3].

LEMME 4. — *Soient P_1 et P_2 deux probabilités, et soit (X_n) une suite de variables aléatoires vérifiant :*

1° $\sum |E_1(X_n)-E_2(X_n)|^2 = +\infty$, où $E_i(X) = \int X\,dP_i$, $i = 1, 2$, 2° $\sum C_n \overline{C_m} E_i (Z_n^i \overline{Z_m^i}) \leqslant \mathrm{Cte} \sum | C_n |^2$ *pour toute suite* (C_n) *de* l^2, *où* Z_n^i *désigne la variable* $X_n - E_i(X_n)$.

Alors P_1 *et* P_2 *sont mutuellement singulières.*

Soit donc, pour tout $n \geqslant 0$, b_n un entier entre 1 et $q_{n+1}-1$. On va prouver que la suite $X_n(x) = \exp 2\pi i b_n p_n x$ est *quasi orthogonale* pour la mesure λ, ce qui signifie qu'elle vérifie la condition 2 du lemme 4, avec $P_i = \lambda$. Calculons pour cela

$$a_{n,m} = \int X_n \overline{X_m} \, d\lambda - \int X_n \, d\lambda . \int \overline{X_m} \, d\lambda.$$

On peut supposer $n > m$,

$$\int X_n \overline{X_m} \, d\lambda = \hat{\lambda}(b_n p_n - b_m p_m)$$
$$= \hat{\lambda}((b_n - 1) p_n + p_n - b_m p_m),$$

et, par la relation de récurrence (lemme 1), c'est encore

$$\hat{f}_n(p_n - b_m p_m) . \hat{\lambda}(b_n p_n - p_n) + \hat{f}_n(\overline{b_m p_m}) . \hat{\lambda}(b_n p_n),$$

de sorte que $a_{n,m}$ s'écrit :

$$(7) \quad a_{n,m} = \hat{f}_n(p_n - b_m p_m) \hat{\lambda}(b_n p_n - p_n) + \hat{f}_n(\overline{b_m p_m}) \hat{\lambda}(b_n p_n) - \hat{\lambda}(b_n p_n) \hat{\lambda}(\overline{b_m p_m})$$
$$= \hat{\lambda}(b_n p_n) [\hat{f}_n(\overline{b_m p_m}) - \hat{\lambda}(\overline{b_m p_m})] + \hat{f}_n(p_n - b_m p_m) \hat{\lambda}(b_n p_n - p_n).$$

En utilisant le fait que $f_n = f_{m+1} . P_{m+1} . P_{m+2} \ldots P_{n-1}$, on peut établir, en itérant la relation,

$$\hat{f}_n(p_n - b_m p_m) = \hat{P}_{n-1}(p_n - p_{n-1}) \hat{f}_{n-1}(p_{n-1} - b_m p_m),$$

le résultat suivant :

$$\hat{f}_n(p_n - b_m p_m) = \hat{P}_{n-1}(p_n - p_{n-1}) \hat{P}_{n-2}(p_{n-1} - p_{n-2}) \times \ldots$$
$$\times \hat{P}_{m+1}(p_{m+2} - p_{m+1}) . \hat{f}_{m+1}(p_{m+1} - b_m p_m)$$

ou encore

$$(8) \quad \hat{f}_n(p_n - b_m p_m) = \frac{1}{q_n} . \frac{1}{q_{n-1}} \ldots \frac{1}{q_{m+2}} \alpha(\hat{p}_{m+2} - p_{m+1}) \times \ldots$$
$$\times \alpha(p_n - p_{n-1}) . P_m(p_{m+1} - b_m p_m)$$

en tenant compte de l'expression des coefficients de Fourier de P_j.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} f_n(b_m p_m) &= (f_m P_m \ldots P_{n-1})\hat{}\ (b_m p_m) \\ &= (P_m \ldots P_{n-1})\hat{}\ (b_m p_m) \\ &= \hat{P}_m(b_m p_m) + \hat{P}_m(b_m p_m - p_{m+1}).[P_{m+1} \ldots P_{n-1}]\hat{}\ (p_{m+1}), \end{aligned}$$

ce qui donne en répétant le procédé

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(b_m p_m) = \hat{P}_m(b_m p_m) &+ \hat{P}_{m+1}(p_{m+1})\,\hat{P}_m(b_m p_m - p_{m+1}) \\ &+ \hat{P}_{m+2}(p_{m+2})\,\hat{P}_{m+1}(p_{m+1} - p_{m+2})\,\hat{P}_m(b_m p_m - p_{m+1}) + \ldots \\ &+ \hat{P}_{n-1}(p_{n-1})\ldots\hat{P}_{m+1}(p_{m+1} - p_{m+2}).\hat{P}_m(b_m p_m - p_{m+1}). \end{aligned}$$

De la même façon, la relation de récurrence tirée du lemme 2 permet d'établir

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(b_m p_m) = \hat{P}_m(b_m p_m) &+ \hat{P}_{m+1}(p_{m+1})\,\hat{P}_m(b_m p_m - p_{m+1}) + \ldots \\ &+ \hat{\lambda}(p_{n-1})\,\hat{P}_{n-2}(p_{n-2} - p_{n-1}) \times \ldots \\ &\times \hat{P}_{m+1}(p_{m+1} - p_{m+2})\,\hat{P}_m(b_m p_m - p_{m+1}), \end{aligned}$$

de sorte que la différence $\hat{f}_n(b_m p_m) - \hat{\lambda}(b_m p_m)$ se réduit à

$$\begin{aligned} &\hat{P}_m(b_m p_m - p_{m+1})\,\hat{P}_{m+1}(p_{m+1} - p_{m+2}) \times \ldots \\ &\quad \times \hat{P}_{n-2}(p_{n-2} - p_{n-1})\,[\hat{P}_{n-1}(p_{n-1}) - \hat{\lambda}(p_{n-1})]. \end{aligned}$$

Comme $\hat{\lambda}(p_{n-1}) = \hat{P}_{n-1}(p_{n-1}) + \hat{P}_{n-1}(p_{n-1} - p_n)\,\hat{\lambda}(p_n)$, on a finalement

$$\begin{aligned} \hat{f}_n(b_m p_m) - \hat{\lambda}(b_m p_m) = &- \hat{P}_m(b_m p_m - p_{m+1}) \\ &\times \frac{1}{q_{m+2}\ldots q_n}\,\overline{\alpha(p_{m+2} - p_{m+1})} \times \ldots \\ &\times \overline{\alpha(p_n - p_{n-1})}\,\hat{\lambda}(p_n) \end{aligned} \tag{9}$$

et en regroupant (7), (8) et (9), on trouve

$$\begin{aligned} a_{n,m} = &\frac{1}{q_{m+2}\ldots q_n}\,\alpha(p_{m+2} - p_{m+1})\ldots\alpha(p_n - p_{n-1}) \\ &\times \hat{P}_m(p_{m+1} - b_m p_m)\,[\hat{\lambda}(b_n p_n - p_n) - \hat{\lambda}(b_n p_n)\,\overline{\hat{\lambda}(p_n)}]. \end{aligned} \tag{10}$$

Pour vérifier la quai-orthogonalité de la suite (X_n), on utilise alors le lemme algébrique, que l'on peut trouver dans HOFFMANN ([8], page 201).

LEMME 5. — *Soit a_{ij} une suite double de nombres complexes telle que :*

1° $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$;

2° *pour tout i, $\sum_{j=0}^{\infty} | a_{ij} | \leqslant C$, C constante,*
alors pour toute suite (C_n) de l^2,

$$| \textstyle\sum_{i,j} a_{ij} C_i \overline{C_j} | \leqslant C . \sum_n | C_n |^2.$$

La suite $a_{n,m}$ remplit évidemment la première condition et, d'après son expression (10), on voit que, m étant fixé,

$$\begin{aligned} | a_{n,m} | &\leqslant \frac{2\, b_m}{q_{m+1} \cdots q_n} \quad \text{si} \quad n > m \\ &\leqslant 2 \quad \text{si} \quad n = m \\ &\leqslant \frac{2\, b_n}{q_{n+1} \cdots q_m} \quad \text{si} \quad n \leqslant m-1. \end{aligned}$$

Comme les q_n sont des entiers $\geqslant 2$, on a la majoration

$$\sum_{n=0}^{\infty} | a_{n,m} | \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{2}{2^{n-m-1}} + 2 + \sum_{n=0}^{m-1} \frac{2}{2^n} \leqslant 10.$$

Le lemme 5 est vérifié et la condition 2° du lemme 4 est ainsi remplie par la suite (X_n), et la mesure λ.

Pour terminer, il suffit de remarquer, $k \geqslant 1$ étant fixé, que la suite (X_n) est encore quasi orthogonale pour la mesure λ^k; désignons par $a'_{n,m}$ la quantité $\int X_n \overline{X_m}\, d(\lambda \star \lambda) - \int X_n\, d(\lambda \star \lambda) \int \overline{X_m}\, d(\lambda \star \lambda)$,

$$\begin{aligned} a'_{n,m} &= \hat{\lambda}^2 (b_n p_n - b_m p_m) - \hat{\lambda}^2 (b_n p_n) \overline{\hat{\lambda}^2 (b_m p_m)} \\ &= a_{n,m} [\hat{\lambda}(b_n p_n - b_m p_m) + \hat{\lambda}(b_n p_n) \overline{\hat{\lambda}(b_m p_m)}] \end{aligned}$$

et $| a'_{n,m} | \leqslant 2 | a_{n,m} |$.

Par le lemme 5, la suite (X_n) est quasi orthogonale pour la mesure λ^2, et de la même façon, pour la mesure λ^k, $k \geqslant 1$. Comme elle est clairement orthogonale pour la mesure de Lebesgue, on a démontré ainsi la proposition 4.

Remarque. — La quasi-orthogonalité de la suite X_n par rapport à la mesure λ, ne dépendant pas de la suite α, on peut déduire de ce qui précède le résultat suivant :

si λ_α et λ_β sont associées aux suite α, β, q-multiplicatives, de module 1, et si, pour une suite b_n avec $1 \leqslant b_n < q_{n+1}$, la série

$$\sum_n |\hat{\lambda}_\alpha(b_n p_n) - \hat{\lambda}_\beta(b_n p_n)|^2$$

est divergente, les mesures λ_α et β_β sont mutuellement singulières. En particulier, si la série :

$$\sum_n |\hat{\lambda}(b_n p_n)|^2 . |1 - \exp 2\pi i p_n b_n x|^2$$

diverge, pour x dans $\mathbf{T}$, les mesures λ et $\lambda \star \delta_x$ sont mutuellement singulières, $\lambda \star \delta_x$ étant la mesure spectrale associée à la suite $\beta(n) = \alpha(n) \exp 2\pi inx$.

COROLLAIRE. — *Si la suite α est fortement q-multiplicative, de module* 1, *quelle que soit la suite (q_n), la mesure λ, associée, a ses puissances fortement indépendantes, si elle n'est pas discrète.*

Démonstration. — Compte tenu du théorème 2, il suffit de prouver que toute puissance de λ est étrangère à la mesure de Lebesgue.

Notons $\alpha(ap_n) = \exp 2\pi iac_n$ si $0 \leqslant a < q_{n+1}$, de sorte que

$$\hat{P}_n(ap_n) = \exp 2\pi iac_n\left(1 - \frac{|a|}{q_{n+1}}\right) \quad \text{si} \quad |a| < q_{n+1}.$$

La relation

$$\hat{\lambda}(p_n) = \exp 2\pi ic_n\left[\left(1 - \frac{1}{q_{n+1}}\right) + \exp(-2\pi ic_n q_{n+1})\hat{\lambda}(p_{n+1})\frac{1}{q_{n+1}}\right],$$

montre clairement que la suite $(\hat{\lambda}(p_n))$ ne tend pas vers zéro quand n tend vers ∞; la série $\Sigma |\hat{\lambda}(p_n)|^{2k}$ diverge pour tout k et, par la proposition 4, λ^k est étrangère à la mesure de Lebesgue, ce qui donne le résultat.

On remarque que, dans le cas où $\sup q_n = +\infty$, $\overline{\lim} \sup_{n\to\infty} |\hat{\lambda}(p_n)| = 1$; si $\lim_{j\to\infty} q_{n_j} = +\infty$, $\lim_{j\to\infty} |\hat{\lambda}(p_{n_j-1})| = 1$ par la relation écrite plus haut.

A ce stade on peut se demander si, pour certaines suites α, la mesure λ a une puissance convolution dans L^1.

On sait [6] que, si la suite q_n ne tend pas vers ∞, la mesure λ est étrangère à la mesure de Lebesgue et même à toute mesure de $M_0(\mathbf{T})$, idéal des mesures dont la transformée de Fourier tend vers zéro à l'infini. Dans ce cas, la mesure λ est donc soit discrète, soit à puissances fortement indépendantes.

Lorsque q_n tend vers ∞, nous n'avons pu répondre à cette question; cependant dans le paragraphe 3, on donnera un exemple de suite α q-multiplicative, de module 1, pour laquelle, la mesure λ est dans $M_0(\mathbf{T})$, ce qui laisse le problème ouvert.

3. Caractères généralisés

Dans ce paragraphe, inspiré des travaux de BROWN et MORAN [5], on introduit la notion de caractère généralisé, et on établit quelques propriétés de la mesure λ que nous utiliserons par la suite.

On note $\Gamma \simeq Z$ le groupe dual du groupe $G = \mathbf{T}$, et Δ le spectre de l'algèbre de Banach $M(\mathbf{T})$. ŠREJDER [18] a donné de Δ une description en termes de caractères généralisés que l'on rappelle ici :

Δ s'identifie à la partie de $\prod_{\mu \in M(\mathbf{T})} L^\infty(\mu)$ constituée des éléments $\chi = (\chi_\mu)_{\mu \in M(\mathbf{T})}$ vérifiant :

1° $0 < \sup(\|\chi_\mu\|_{L^\infty(\mu)}, \mu \in M(\mathbf{T})) \leqslant 1$;

2° $\chi_{\mu \star \nu}(x+y) = \chi_\mu(x).\chi_\nu(y)$ $\mu \otimes \nu$-presque-partout;

3° si $\nu \ll \mu$, $\chi_\nu = \chi_\mu$ ν-presque-partout;

$\chi = (\chi_\mu)$ définit alors un homomorphisme complexe de l'algèbre $M(\mathbf{T})$ par l'application $\mu \to \chi(\mu) = \int \chi_\mu \, d\mu = \hat{\mu}(\chi)$.

Il est facile, à l'aide de cette description, d'établir quelques propriétés de Δ :

— Γ est clairement contenu dans Δ;

— si $\chi \in \Delta$, on peut définir le caractère conjugué $\bar{\chi}$ de χ par $(\bar{\chi})_\mu = \bar{\chi}_\mu$ pour toute $\mu \in M(\mathbf{T})$, et le module $|\chi|$ de χ par

$$(|\chi|)_\mu = |\chi_\mu| \text{ pour } \mu \in M(\mathbf{T});$$

— Δ est un semi-groupe commutatif. Si χ et $\psi \in \Delta$, le caractère $\chi\psi$ est défini par $(\chi\psi)_\mu = \chi_\mu \psi_\mu$ pour $\mu \in M(\mathbf{T})$;

— Δ opère sur l'algèbre $M(\mathbf{T})$ de la façon suivante :
si $\chi \in \Delta$, $\mu \in M(\mathbf{T})$, la mesure $\chi\mu = \chi_\mu . \mu$ est telle que

$$(\chi\mu)\hat{}\ (\gamma) = \hat{\mu}(\chi\gamma) = \int \chi_\mu . \gamma\, d\mu$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$.

PROPOSITION 6. — *Si $\chi \in \Delta$, l'application $\mu \to \chi\mu$ de $M(\mathbf{T})$ dans elle-même est linéaire, continue, et c'est un homomorphisme d'algèbre.*

Démonstration. — Considérons μ et ν dans $M(\mathbf{T})$ avec $\mu \neq \nu$, et la mesure $\omega = |\mu| + |\nu|$. Par l'axiome 3 de la définition de Δ, $\chi_\omega = \chi_\mu$ μ-presque partout et $\chi_\omega = \chi_\nu$ ν-presque partout, de sorte que

$$\chi\mu + \chi\nu = \chi_\mu \mu + \chi_\nu \nu = \chi_\omega . (\mu + \nu) = \chi_{\mu+\nu} . (\mu + \nu) = \chi . (\mu + \nu)$$

et la linéarité est démontrée. La continuité est évidente.

Reste à prouver que $\chi . (\mu \star \nu) = \chi\mu \star \chi\nu$. Or, pour tout $\gamma \in \Gamma$,

$$\begin{aligned}[\chi . (\mu \star \nu)]\hat{}\ (\gamma) &= \int \chi_{\mu \star \nu} . \gamma\, d(\mu \star \nu) \\ &= \int \chi_{\mu \star \nu}\, d(\gamma\mu \star \gamma\nu),\end{aligned}$$

et comme $\gamma\mu \star \gamma\nu$ est une mesure équivalente à $\mu \star \nu$, par le même axiome 3,

$$\begin{aligned}[\chi . (\mu \star \nu)]\hat{}\ (\gamma) &= \int \chi_{\gamma\mu \star \gamma\nu}\, d(\gamma\mu \star \gamma\nu) \\ &= (\gamma\mu \star \gamma\nu)\hat{}\ (\chi) \\ &= \widehat{\gamma\mu}(\chi) . \widehat{\gamma\nu}(\chi) \\ &= (\chi\mu)\hat{}\ (\gamma) . (\chi\nu)\hat{}\ (\gamma),\end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration.

La topologie de Gel'fand sur Δ, pour laquelle il est compact, coïncide avec la topologie induite sur Δ par le produit des topologies faibles $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$ sur chaque $L^\infty(\mu)$,

L'application $\chi \to \bar{\chi}$ est continue pour cette topologie; par contre, l'application $\chi \to |\chi|$ ne l'est pas, et le produit $(\chi, \psi) \to \chi\psi$ n'est que séparément continu. Il devient continu si on munit Δ de la topologie produit des topologies de la norme $L^1(\mu)$ sur chaque $L^\infty(\mu)$.

Pour toute mesure $\mu \in M(\mathbf{T})$, on notera Δ_μ l'ensemble des χ_μ avec χ dans Δ, muni de la topologie $\sigma(L^\infty(\mu), L^1(\mu))$, et $\overline{\Gamma}_\mu$ désignera l'adhérence de Γ dans Δ_μ pour cette topologie.

Considérons à nouveau λ, la mesure spectrale associée à la suite α q-multiplicative, de module 1. On va caractériser les constantes dans $\overline{\Gamma}_\lambda$.

D désignant toujours le sous-groupe de $\mathbf{T}$ engendré par $(1/p_n, n \geqslant 0)$, à tout $\Phi \in \hat{D}$, groupe dual de D, est associée une suite d'entiers $(k_n)_{n \geqslant 0}$ vérifiant :

$$0 \leqslant k_n < p_n \quad \text{pour chaque } n \geqslant 0$$

et

$$k_{n+1} \equiv k_n (p_n) \qquad \text{si} \quad n \geqslant 1.$$

Φ est alors défini par $\Phi(d) = \exp 2\pi i k_n d$ si $d \in D_n$.

(k_n) étant associée à $\Phi \in \hat{D}$, on écrira, pour $n \geqslant 1$, $k_n = \sum_{j=0}^{n-1} b_j p_j$ avec $0 \leqslant b_j < q_{j+1}$.

$\hat{D}$ contient Γ, et $\Phi \in \hat{D}$ est un caractère de Γ, si la suite (k_n) associée à Φ stationne, ce qui signifie, qu'à partir de certain rang, on a identiquement

$$b_j = 0 \qquad \text{ou} \qquad b_j = q_{j+1} - 1.$$

A tout $\chi \in \Delta$ tel que $\chi_\lambda \not\equiv 0$, on peut associer un caractère Φ du groupe D, unique, vérifiant pour tout $d \in D$:

$$\chi_{\lambda \star \delta_d}(x+d) = \chi_\lambda(x)\Phi(d) \quad \lambda\text{-presque partout.}$$

Il suffit de poser $\Phi(d) = \hat{\delta}_d(\chi) = \chi(\delta_d)$.

On remarque que si $\varphi(\chi)$ désigne le caractère $\Phi \in \hat{D}$, associé ainsi à χ,

$$\varphi(\chi\psi) = \varphi(\chi)\varphi(\psi) \qquad \text{et} \qquad \varphi(\bar{\chi}) = \overline{\varphi(\chi)}.$$

LEMME 5. — *Supposons que λ ne soit pas à support fini. Soit $\chi \in \Delta$ tel que $\chi_\lambda \not\equiv 0$, et soit $\Phi \in \hat{D}$ le caractère associé à χ; alors $\chi_\lambda = C$, C constante non nulle si, et seulement si, Φ est $\equiv 1$.*

Démonstration. — Supposons $\Phi \equiv 1$. Par définition de Φ,

$$\chi\omega_n = \Phi\,\omega_n = \omega_n$$

pour tout $n \geqslant 0$.

Comme λ est absolument continue par rapport à $\lambda_n = \lambda \star \omega_n$,

$$\chi_\lambda = \chi_{\lambda_n} \ \lambda\text{-presque partout}$$

et

$$\chi\lambda = \chi_\lambda \lambda = \chi_{\lambda_n} \lambda = f_n \cdot \chi_{\lambda_n} \lambda_n = f_n \cdot \chi \lambda_n.$$

Par la proposition 6 enfin,

$$\chi\lambda_n = \chi(\lambda \star \omega_n) = \chi\lambda \star \chi\omega_n$$

si bien que, lorsque $\Phi \equiv 1$,

$$\chi\lambda = f_n \cdot (\chi\lambda \star \omega_n) \quad \text{pour tout } n \geqslant 0,$$

$\chi\lambda$ et λ vérifiant les mêmes relations de récurrence, on déduit du lemme 3 que $\chi_\lambda = C$ λ-presque partout.

Réciproquement, supposons $\chi_\lambda = C$ λ-presque partout, et $C \neq 0$. On dit qu'une mesure μ est *D-quasi invariante* si $\delta_d \star \mu$ est équivalente à μ pour tout $d \in D$.

Si λ n'est pas discrète, λ est D quasi invariante; en effet, λ est alors continue (corollaire du lemme 3) et, pour tout n, λ_n est continue. Le polynôme f_n est donc non nul λ_n-presque partout, λ_n est absolument continue par rapport à λ et ainsi équivalente à λ.

On en déduit, pour tout $d \in D_n$,

$$\delta_d \star \lambda \ll \delta_d \star \lambda_n = \lambda_n \ll \lambda,$$

ce qui prouve que λ est D-quasi invariante.

Si $\chi_\lambda = C$ λ-presque partout, pour tout $d \in D$, on a

$$C = (\lambda \star \delta_d)^\wedge(\chi) = \hat{\lambda}(\chi)\Phi(d) = C\Phi(d),$$

et comme C est non nulle, $\Phi \equiv 1$.

Le résultat du lemme subsiste tant que λ n'est pas à support fini. Soit en effet $\chi \in \Delta$ avec $\chi_\lambda \not\equiv 0$, et supposons que le caractère $\varphi(\chi) = (k_n)_{n \geqslant 0}$ de $\hat{D}$ ne soit pas $\equiv 1$. Si l'on note pour $k \in Z$, γ_k le caractère de Γ : $x \to \exp 2\pi\, ikx$, alors, pour tout $n \geqslant 0$,

$$(\mathscr{R}) \qquad \hat{\lambda}(\chi) = \hat{f}_n(k_n)\hat{\lambda}(\overline{\gamma_{k_n}}\chi) + \hat{f}_n(k_n - p_n)\hat{\lambda}(\overline{\gamma_{k_n - p_n}}\chi).$$

En effet, par la proposition 6,

$$\chi\lambda = f_n \chi\lambda_n = \sum_{|k| < p_n} \hat{f}_n(k)\chi\bar{\gamma}_k \cdot (\lambda \star \omega_n)$$
$$= \sum_{|k| < p_n} \hat{f}_n(k)(\chi\bar{\lambda}_k \lambda \star \chi\bar{\gamma}_k \omega_n).$$

Or, par définition de (k_n), $\chi\omega_n = \gamma_{k_n}\omega_n$ de sorte que

$$\chi\lambda = \sum_{|k|<p_n} \hat{f}_n(k)(\chi\bar{\gamma}_k \lambda \star \gamma_{k_n}\bar{\gamma}_k \omega_n)$$

et

$$\hat{\lambda}(\chi) = \sum_{|k|<p_n} \hat{f}_n(k)\hat{\lambda}(\chi\bar{\gamma}_k)\hat{\omega}_n(\gamma_{k_n}\bar{\gamma}_k),$$

$\hat{\omega}_n(\gamma_{k_n}\bar{\gamma}_k)$ étant nul si $k_n \not\equiv k\,(p_n)$, la relation $(\mathscr{R})$ est ainsi établie.

Supposons en outre $\chi_\lambda = C$ λ-presque partout avec $C \neq 0$. Puisque Φ est $\not\equiv 1$, l'entier k_n est $\neq 0$ pour $n \geqslant n_0$ et on trouve alors :

$$C = C\hat{f}_n(k_n)\overline{\hat{\lambda}(k_n)} + C\hat{f}_n(k_n-p_n)\hat{\lambda}(p_n-k_n) \qquad \text{pour} \quad n \geqslant n_0,$$

et ainsi

$$1 = \hat{f}_n(k_n)\overline{\hat{\lambda}(k_n)} + \hat{f}_n(k_n-p_n)\overline{\hat{\lambda}(k_n-p_n)} \qquad \text{pour} \quad n \geqslant n_0.$$

Cette égalité jointe à l'inégalité (lemme 1)

$$|\hat{f}_n(k)| + |\hat{f}_n(k-p_n)| \leqslant 1 \qquad \text{pour} \quad |k| < p_n \qquad \text{et} \qquad n \geqslant 0,$$

impose pour $n \geqslant n_0$:

$$\hat{f}_n(k_n) = |\hat{f}_n(k_n)| \exp i\theta_n \qquad \text{et} \qquad \lambda(k_n) = \exp i\theta_n$$
$$\hat{f}_n(k_n-p_n) = |\hat{f}_n(k_n-p_n)| \exp i\theta'_n \qquad \text{et} \qquad \lambda(k_n-p_n) = \exp i\theta'_n$$

On a, par ailleurs, les relations, pour tout $n \geqslant 0$,

$$(\mathscr{R}')\begin{cases} \hat{\lambda}(k_n) = \hat{f}_n(k_n) + \hat{f}_n(k_n-p_n)\hat{\lambda}(p_n), \\ \hat{\lambda}(k_n-p_n) = \hat{f}_n(k_n-p_n) + \hat{f}_n(k_n)\overline{\hat{\lambda}(p_n)}. \end{cases}$$

Si l'on pose $z_n = \hat{\lambda}(p_n)\exp i(\theta'_n - \theta_n)$, $\hat{f}_n(k_n) = \alpha_n$ et $\hat{f}_n(k_n-p_n) = \beta_n$, les relations $(\mathscr{R}')$ s'écrivent :

$$\begin{cases} 1-|\alpha_n| = |\beta_n| z_n \\ 1-|\beta_n| = |\alpha_n| \bar{z}_n \qquad \text{si} \quad n \geqslant n_0. \end{cases}$$

Or, par ce qui précède, $|\alpha_n| + |\beta_n| = 1$ à partir du rang n_0. On en déduit que, pour $n \geqslant n_0$, $z_n = 1$, et $\hat{\lambda}(p_n) = \exp i(\theta_n - \theta'_n)$.

Ceci entraîne que λ est portée par une classe du groupe D_{n_0}, et le lemme est ainsi démontré.

COROLLAIRE 1. — *Supposons que* λ *ne soit pas à support fini. Soient* χ *et* $\Psi \in \Delta$ *tels que* $\chi_\lambda \not\equiv 0$, $\Psi_\lambda \not\equiv 0$ *et* $\varphi(\chi) = \varphi(\psi)$. *Alors* $\Psi = \alpha\chi$, *où* $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq 0$.

En particulier :

1° $\chi \in \Delta$ *vérifie* $\chi_\lambda = a\gamma$ *avec* $a \in C$, $a \neq 0$ et $\gamma \in \Gamma$ *si, et seulement si,* $\varphi(\chi) = \gamma$;

2° *soit* $\chi \in \Delta$ *et* $\varphi(\chi) = (k_n)_{n \geqslant 0}$. *Si* $\Psi \in \overline{\Gamma}$ *est un caractère adhérent à la suite* (γ_{k_n}), $\Psi = \alpha\chi$, $\alpha \in \mathbf{C}$, $\alpha \neq 0$.

Démonstration. — Pour tout $\chi \in \Delta$, $\chi_\lambda \not\equiv 0$,

$$\varphi(|\chi|^2) = \varphi(\chi\bar{\chi}) = \varphi(\chi)\cdot\overline{\varphi(\chi)}$$

est le caractère 1 sur D; par le lemme 5,

$$|\chi_\lambda|^2 = \alpha \neq 0,$$

ce qui signifie que λ a la *propriété du module constant.*

D'autre part, $\varphi(\bar{\chi}\,\Psi) = 1$ si $\varphi(\chi) = \varphi(\Psi)$ et donc $\bar{\chi}_\lambda \Psi_\lambda = \beta \neq 0$. On en déduit :

$$\Psi_\lambda \chi_\lambda \bar{\chi}_\lambda = \alpha \Psi_\lambda = \beta \chi_\lambda,$$

ce qui prouve la première affirmation.

1° Pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\varphi(\gamma) = \gamma$, et $\varphi(\chi) = \gamma$ si, et seulement si, $(\chi\bar{\gamma})_\lambda = \alpha \neq 0$ ou $\chi_\lambda = \alpha\gamma$.

2° Si $\Psi \in \overline{\Gamma}$ est adhérent à (γ_{k_n}), on peut trouver une sous-suite (n_j) telle que, pour tout $d \in D$,

$$\hat{\delta}_d(\Psi) = \lim_j \hat{\delta}_d(\gamma_{k_{n_j}}).$$

Or, si $d \in D_n$, $\hat{\delta}_d(\gamma_{k_{n_j}})$ n'est autre que $\gamma_{k_n}(d)$ pour j assez grand et $\varphi(\chi) = \varphi(\Psi)$.

COROLLAIRE 2 (caractérisation des constantes dans $\overline{\Gamma}_\lambda$). — *Supposons que* λ *ne soit pas à support fini. La constante* $C \neq 0$, *appartient à* $\overline{\Gamma}_\lambda$ *si, et seulement si, il existe une suite d'entiers* (u_n) *vérifiant les deux conditions suivantes :*

1° $\lim_{n\to\infty} \gamma_{u_n}(d) = 1$ *pour tout* $d \in D$;

2° $\lim_{n\to\infty} \hat{\lambda}(u_n) = C$.

Démonstration. — Supposons que la suite (γ_{u_n}) tende vers C dans $\overline{\Gamma}_\lambda$. $\hat{\lambda}(u_n)$ tend vers C. D'autre part, soit $d \in D$, et soit l une valeur d'adhérence de la suite $y_{u_n}(d)$; si $\gamma_{u_{n_j}}(d)$ tend vers l, prenons pour $\chi \in \Delta$, un point adhérent à la suite $(\gamma_{u_{n_j}})$. Ainsi $\chi_\lambda = C$ et, par le lemme, $\Phi = \varphi(\chi) = 1$. Mais alors $\Phi(d) = \hat{\delta}_n(\chi)$ est valeur d'adhérence de la suite $\hat{\delta}_n(\gamma_{u_{n_j}})$. On en déduit $l = 1$, et $\gamma_{u_n}(d)$ tend vers 1.

Réciproquement, si $\gamma_{u_n}(d) = \exp 2\pi i u_n d$ tend vers 1, quand n tend vers ∞, pour tout $d \in D$, u_n tend vers zéro modulo p_m pour tout m. Quitte à extraire une sous-suite de la suite u_n, on peut trouver une suite $(m(n))$ telle que

$$m(n) \quad \text{tende vers } \infty \quad \text{avec } n,$$

et $p_{m(n)}$ divise u_n pour chaque n.

Soit alors $\gamma = \gamma_r \in \Gamma$, où r est un entier $\geqslant 0$. Pour n grand $p_{m(n)}$ est supérieur à r, et on peut écrire :

$$\hat{\lambda}(u_n + r) = \hat{f}_{m(n)}(r) . \hat{\lambda}(u_n) + \hat{f}_{m(n)}(r - p_{m(n)}) \hat{\lambda}(u_n + p_{m(n)}).$$

Quand n et $m(n)$ tendent vers ∞, on trouve, compte tenu de la seconde condition,

$$\lim_n \hat{\lambda}(u_n + r) = C \hat{\lambda}(r),$$

ce qui signifie que la constante C est dans $\overline{\Gamma}_\lambda$.

Application : Exemple de mesure spectrale dans $M_0(\mathbf{T})$. — On construit une suite α q-multiplicative, de module 1, où $q = (q_n)_{n \geqslant 1}$ avec $\lim q_n = +\infty$, pour laquelle $\lambda \in M_0$. D'après l'étude qui précède, il suffit que la suite de polynômes (P_n) vérifie :

(11) $\quad |\hat{P}_n(kp_n)| \leqslant C . q_{n+1}^{-\delta}$ pour tout $n \geqslant 0$ et $|k| < q_{n+1}$

où δ est un réel > 0 et C une constante, indépendants de n et de k.

En effet, soit $\chi \in \overline{\Gamma} \setminus \Gamma$, et $\Phi = (k_n)$ le caractère de D associé à χ. On va prouver, sous l'hypothèse (11), que $\hat{\lambda}(\chi) = 0$.

Par le corollaire 1, on peut supposer que χ est adhérent à la suite (γ_{k_n}).

Puisque $k_{n+1} = k_n + b_n p_n$,

$$\hat{\lambda}(k_{n+1}) = \hat{f}_n(k_n) . \hat{\lambda}(b_n p_n) + \hat{f}_n(k_n - p_n) \hat{\lambda}(b_n p_n + p_n)$$

et

$$|\hat{\lambda}(k_{n+1})| \leqslant \sup_{|b| < q_{n+1}} |\hat{\lambda}(bp_n)|.$$

Par ailleurs, si $|b| < q_{n+1}$,

$$\hat{\lambda}(bp_n) = \hat{P}_n(bp_n) + \hat{P}_n(bp_n - p_{n+1})\hat{\lambda}(p_{n+1})$$

et

$$|\hat{\lambda}(bp_n)| \leqslant 2C.q_{n+1}^{-\delta} \qquad \text{si (11) a lieu.}$$

Finalement, $|\hat{\lambda}(k_{n+1})| < 2C q_{n+1}^{-\delta}$ et $\hat{\lambda}(\chi) = 0$.

On construit à présent à la suite α sur chaque bloc d'entiers kp_n, $0 \leqslant k < q_{n+1}$ de façon à vérifier (11). Notons, pour n fixé,

$$\alpha(kp_n) = \exp 2\pi i f_n(k) \qquad \text{si} \quad 0 \leqslant k < q_{n+1},$$

de sorte que :

$$\hat{P}_n(kp_n) = \frac{1}{q_{n+1}} \sum_{j=0}^{q_{n+1}-k-1} \exp 2\pi i [f_n(k+j) - f_n(j)]. \tag{12}$$

Prenons alors, pour suite (q_n), une suite de nombres premiers tendant vers ∞, et pour f_n le polynôme :

$$f_n(x) = \frac{1}{q_{n+1}} x^{10}.$$

Pour certaines valeurs de k, la somme trigonométrique (12) peut être majorée à l'aide du théorème [7].

THÉORÈME. — *Soit $N \geqslant 1$, et soit g un polynôme réel de degré $r+1 \geqslant 9$,*

$$g(x) = \alpha_{r+1} x^{r+1} + \ldots + \alpha_1 x, \qquad (\alpha_{r+1} \neq 0).$$

Si a/q est une approximation rationnelle de α_{r+1} telle que

$$(a, q) = 1, \ |\alpha_{r+1} - a/q| < q^{-2} \qquad \text{et} \qquad N \leqslant q \leqslant N^{r-1},$$

alors $|\sum_{n=1}^{N} \exp 2\pi i g(n)| < C(r) N^{1-\varepsilon}$, *où* $0 < \varepsilon < 1$, $C(r)$ *et* ε *ne dépendant que de* r.

Si $0 \leqslant k \leqslant \theta q_{n+1}$ avec $1 - \theta = q_{n+1}^{-6/7}$,

$$q_{n+1} \leqslant [(1-\theta) q_{n+1}]^7 \leqslant [q_{n+1} - k]^7,$$

or $f_n(k+j) - f_n(j) = 10 k/q_{n+1} j^9 + \ldots$ est un polynôme en j de degré 9 dont le premier coefficient remplit les hypothèses du théorème puisque, pour n assez grand $(10k, q_{n+1}) = 1$, quel que soit $k < q_{n+1}$.

On en déduit que $|\hat{P}_n(kp_n)| \leqslant C.q_{n+1}^{-\varepsilon}$, C et ε étant indépendants de n et de k.

Si $\theta\, q_{n+1} < k < q_{n+1}$,

$$|\hat{P}_n(kp_n)| \leqslant (q_{n+1}-k)\frac{1}{q_{n+1}} \leqslant q_{n+1}^{-6/7}.$$

Pour la suite α et la suite (q_n) ainsi choisies, la condition (11) est vérifiée et $\lambda \in M_0$.

4. Étude de la « tameness »

On a vu dans le paragraphe précédent que λ avait la propriété du module constant, à savoir

$$\text{Si } \chi \in \Delta,\ |\chi_\lambda| = C, C = \text{Cte}.$$

On cherche à préciser la forme des χ sur la mesure λ. On dira avec BROWN [2] que λ est *tame* si, pour tout $\chi \in \Delta$, il existe $\gamma \in \Gamma$ et $a \in \mathbf{C}$, $|a| \leqslant 1$ tels que $\chi_\lambda = a\,\gamma$, λ-presque partout.
Avant de décider quand la mesure spectrale λ est « tame », on démontre un lemme simple auquel on aura souvent recours [19].

LEMME 6. — *Soit (u_n) une suite d'entiers telle que $\hat{\lambda}(u_n)$ tende vers C avec $|C| = 1$. Alors la suite de caractères (γ_{u_n}) converge vers C dans $L^1(\lambda)$.*

Démonstration. — Considérons

$$\int |\gamma_{u_n}-C|^2\,d\lambda = \int (2-\bar{\gamma}_{u_n}C-\gamma_{u_n}\bar{C})\,d\lambda,$$
$$= 2-\bar{C}\hat{\lambda}(u_n)-C\,\overline{\hat{\lambda}(u_n)},$$

et quand n tend vers ∞, $\int |\gamma_{u_n}-C|^2\,d\lambda$ tend vers 0 puisque $|C| = 1$; ce qui prouve le lemme.

PROPOSITION 7 [1]. — *Supposons que λ ne soit pas à support fini.*

Si $\lim\sup_{n\to\infty} |\hat{\lambda}(n)| = 1$, *la mesure λ n'est pas tame.*

Démonstration. — On va exhiber un caractère χ de $\bar{\Gamma}$ tel que χ_λ ne soit pas de la forme $a\,\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, $|a| \leqslant 1$.

---

[1] Il existe une autre démonstration de ce résultat, due à HOST et PARREAU [9] établie pour une mesure quelconque.

Supposons qu'il existe une suite d'entiers (k_n) telle que $\hat{\lambda}(k_n)$ tende vers C, $|C| = 1$; par le lemme 6, la suite γ_{k_n} converge vers C dans $L^1(\lambda)$, et C est une constante dans $\overline{\Gamma}_\lambda$. On déduit du corollaire 2, du paragraphe 3, que $\gamma_{k_n}(d)$ tend vers 1 pour tout $d \in D$. Quitte à extraire une sous-suite convenable de la suite (k_n), on peut trouver une suite (n_j) telle que, pour tout j.

$$p_{n_j} \text{ divise } k_j \qquad \text{et} \qquad k_j < p_{n(j+1)}.$$

Supposons en outre que $\gamma_{p_{n_j}}$ converge vers h dans $\overline{\Gamma}_\lambda$ de soite que $h_\lambda = a$, a constante, par le même corollaire.

On va distinguer deux cas, $|a| = 1$ et $|a| < 1$.

Si $|a| = 1$, posons $u_j = 1+p_{n_1}+\ldots+p_{n_j}$ et $\varphi_j = \bar{h}^j \gamma_{u_j} \in \overline{\Gamma}$ en imposant à la suite p_{n_j} que $|\hat{\lambda}(p_{n_j})-a| \leqslant 2^{-j}$.

On va montrer alors que (φ_j) converge fortement dans $L^1(\lambda)$.

Soit $l > j$,

$$\int |\varphi_l-\varphi_j|^2 d\lambda = 2[1-\operatorname{Re}(a^{j-l}\lambda(p_{n_{(j+1)}}+\ldots+p_{n_l}))].$$

Il faut donc calculer pour $l \geqslant j$,

$$\hat{\lambda}(p_{n_j}+\ldots+p_{n_l}) = \hat{f}_{n(j+1)}(p_{n_j})\hat{\lambda}(p_{n(j+1)}+\ldots+p_{n_l}) + \hat{f}_{n(j+1)}(p_{n_j}-p_{n(j+1)}) \times\hat{\lambda}(p_{n(j+1)}+\ldots+p_{n_l}+p_{n(j+1)}). \tag{13}$$

Par ailleurs,

$$\hat{f}_{n(j+1)}(p_{n_j}) = \hat{\lambda}(p_{n_j})-\hat{f}_{n(j+1)}(p_{n_j}-p_{n(j+1)})\hat{\lambda}(p_{n(j+1)}), \tag{14}$$

et en reportant dans (13), on trouve

$$\hat{\lambda}(p_{n_j}+\ldots+p_{n_l}) = \hat{\lambda}(p_{n_j}).\hat{\lambda}(p_{n(j+1)}+\ldots+p_{n_l})+\varepsilon_{jl}, \tag{15}$$

avec

$$\varepsilon_{jl} = \hat{f}_{n(j+1)}(p_{n_j}-p_{n(j+1)})[\hat{\lambda}(p_{n(j+1)}+\ldots+p_{n_l}+p_{n(j+1)}) -\hat{\lambda}(p_{n(j+1)})\hat{\lambda}(p_{n(j+1)}+\ldots+p_{n_l})].$$

Ainsi,

$$|\varepsilon_{jl}| \leqslant \frac{1}{q_{n(j)}}\left|\int \gamma_{p_{n(j+1)}+\ldots+p_{n_l}}(\gamma_{p_{n(j+1)}}-\hat{\lambda}(p_{n(j+1)}))\,d\lambda\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{q_{n(j)}}\left|\int |\gamma_{p_{n(j+1)}}-a|\,d\lambda+|a-\hat{\lambda}(p_{n(j+1)})|\right|$$

et ε_{jl} tend vers zéro quand j tend vers ∞, quel que soit l, car la convergence de $(\gamma_{p_{n_j}})$ vers a est forte (lemme 6).

De plus, par hypothèse sur p_{n_j},

$$|\varepsilon_{jl}| < 2^{-j} \quad \text{pour tout } l > j.$$

Finalement, en itérant la relation (15), on obtient :

$$\hat{\lambda}(p_{n_j}+\ldots+p_{n_l}) = \hat{\lambda}(p_{n_j})\ldots\hat{\lambda}(p_{n_l})+\textstyle\sum_{k=j}^{l-1} v_{jkl},$$

où $|v_{jkl}| = |\hat{\lambda}(p_{n_j})\ldots\hat{\lambda}(p_{n_{(k-1)}})|\,|\varepsilon_{kl}| \leqslant 2^{-k}$ pour tous $j \leqslant k < l$.
On en déduit que $\hat{\lambda}(p_{n_{(j+1)}}+\ldots+p_{n_l}) = a^{l-j}+0(2^{-j})$ quand l et j tendent vers ∞, et que $\int |\varphi_l-\varphi_j|^2\, d\lambda$ tend vers zéro.

Si $\chi \in \overline{\Gamma}$ est la limite dans $L^1(\lambda)$ de la suite (φ_j), χ_λ n'est pas de la forme $\alpha\gamma$ avec $|\alpha| \leqslant 1$; dans le cas contaire, d'après le corollaire 1 du paragraphe 3, le caractère Φ de D associé à χ serait un caractère fort. Or Φ est défini par la suite (u_j) qui n'est pas stationnaire.

Si $|a| < 1$, la convergence de $\gamma_{p_{n_j}}$ vers a n'a plus lieu forcément dans $L^1(\lambda)$, mais on a de toute façon

$$\lim_j \hat{\lambda}(k_j-p_{n_{(j+1)}}) = \overline{a}\, C$$

car la convergence de γ_{k_j} vers C est forte. On peut donc supposer

$$|\hat{\lambda}(k_j-p_{n_{(j+1)}})-\hat{\lambda}(k_j).\overline{\hat{\lambda}(p_{n_{(j+1)}})}| \leqslant 2^{-(j+1)}.$$

De la relation (14) et de la relation

$$\hat{\lambda}(k_j-p_{n_{(j+1)}}) = \hat{f}_{n_{(j+1)}}(k_j-p_{n_{(j+1)}})+\hat{f}_{n_{(j+1)}}(k_j)\overline{\hat{\lambda}(p_{n_{(j+1)}})},$$

on tire

$$\hat{f}_{n_{(j+1)}}(k_j-p_{n_{(j+1)}}) = \frac{\hat{\lambda}(k_j-p_{n_{(j+1)}})-\hat{\lambda}(k_j).\overline{\hat{\lambda}(p_{n_{(j+1)}})}}{1-|\hat{\lambda}(p_{n_{(j+1)}})|^2}$$
$$= 0(2^{-(j+1)}), \quad \text{puisque } |a| < 1.$$

On pose alors $r_j = 1+k_1+\ldots+k_j$ et $\varphi_j = \overline{\Psi^j}\,\gamma_{r_j}$, où Ψ est un caractère adhérent à γ_{k_j} dans $\overline{\Gamma}_\lambda$ et $\Psi_\lambda = C$.

De la même façon, on montre que la suite (φ_j) converge fortement dans $L^1(\lambda)$ en écrivant cette fois, pour $l \geqslant j$:

$$\hat{\lambda}(k_j+\ldots+k_l) = \hat{\lambda}(k_j)\hat{\lambda}(k_{j+1}+\ldots+k_l)+\varepsilon_{jl},$$

où $|\varepsilon_{jl}| \leqslant 2 |\hat{f}_{n_{(\cdot+1)}}(k_j - p_{n_{j+1}})| = 0(2^{-j})$ pour tout $l \geqslant j$, et finalement

$$\begin{aligned}\hat{\lambda}(k_{j+1}+\ldots+k_l) &= \hat{\lambda}(k_{j+1})\ldots\hat{\lambda}(k_l)+0(2^{-j})\\ &= C^{l-j}+0(2^{-j}).\end{aligned}$$

Ainsi $\int |\varphi_l - \varphi_j|^2 \, d\lambda = 2\,[1 - \operatorname{Re}(C^{j-l}\,\hat{\lambda}\,(k_{j+1}+\ldots+k_l))]$ tend vers zéro quand j et l tendent vers ∞.

Si $\chi \in \overline{\Gamma}$ est la limite dans $L^1(\lambda)$ de la suite (φ_j), χ_λ n'est pas de la forme $\alpha\gamma$, $|\alpha| \leqslant 1$, et la proposition est démontrée.

COROLLAIRE. — *Si* $\sup q_n = +\infty$, *et si* α *est fortement q-multiplicative, de module* 1, *la mesure* λ *n'est pas « tame ».*

Démonstration. — C'est évident puisqu'on a vu dans le second paragraphe, que dans ce cas $\lim \sup_{n\to\infty} |\lambda(p_n)| = 1$.

Dans l'autre direction, on n'a pu obtenir qu'un résultat partiel.

PROPOSITION 8. — *Si* $\lim \sup_{n\to\infty} |\hat{\lambda}(n)| < 1$ la mesure λ est « *tame* » *dans les deux cas suivants :*

1° *pour toute suite* α *q-multiplicative de module* 1, *lorsqu'une infinité de* q_n *sont pairs*;

2° *pour les suites* α *fortement q-multiplicatives de module* 1.

Démonstration. — Remarquons tout d'abord, que l'hypothèse

$$\lim \sup_{n\to\infty} |\hat{\lambda}(n)| < 1$$

impose que la mesure λ soit continue.

Soit $\chi \in \Delta$ tel que $\chi_\lambda \not\equiv 0$; quitte à le remplacer par $\gamma\chi$, $\gamma \in \Gamma$ bien choisi, on peut supposer $\hat{\lambda}(\chi) \neq 0$; notons $\Phi = (k_n)$ le caractère de D associé à χ, avec

$$k_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} b_k p_k \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant b_k \leqslant q_{k+1}-1.$$

Si $\varphi \in \overline{\Gamma}$ est adhérent à la suite (γ_{k_n}) dans $\overline{\Gamma}_\lambda$, $\varphi_\lambda = \alpha\chi_\lambda$ (corollaire 1 du paragraphe 3) de sorte que l'on peut se restreindre au cas χ adhérent à (γ_{k_n}) dans $\overline{\Gamma}_\lambda$ pour conclure.

Supposons que la suite (k_n) ne soit pas stationnaire, c'est-à-dire qu'une infinité de b_k soient distincts de 0 et de $q_{k+1}-1$. On va aboutir, dans les deux cas cités dans la proposition, à une contradiction.

On a établi, dans la démonstration du lemme 5, la relation $(\mathscr{R})$

$$\hat{\lambda}(\chi) = \hat{f}_n(k_n)\,\hat{\lambda}(\gamma_{k_n}\bar{\chi}) + \hat{f}_n(k_n - p_n)\,.\,\hat{\lambda}(\gamma_{k_n-p_n}\bar{\chi}) \qquad \text{pour} \quad n \geqslant 0$$

et, de la même façon, si $\gamma = \gamma_r \in \Gamma$, $r \geqslant 0$, on a

$$(\mathscr{R}) \qquad \hat{\lambda}(\chi\gamma) = \hat{f}_n(k_n+r)\hat{\lambda}(\bar{\gamma}_{k_n}\chi)+\hat{f}_n(k_n+r-p_n)\hat{\lambda}(\overline{\gamma_{k_n-p_n}}\chi),$$

pour n assez grand de façon que $0 \leqslant k_n+r < p_n$, ce qui est possible puisque (k_n) n'est pas stationnaire.

Quitte à extraire des sous-suites, on peut supposer que :

γ_{k_n} tend vers χ dans $\bar{\Gamma}_\lambda$;

$\gamma_{k_n-p_n}$ tend vers Ψ dans $\bar{\Gamma}_\lambda$;

$\hat{\lambda}(p_n)$ tend vers C avec $|C| < 1$ par hypothèse;

$\hat{f}_n(k_n+r)$ tend vers a_r;

et

$\hat{f}_n(k_n+r-p_n)$ tend vers b_r pour tout $r \geqslant 0$.

De plus, l'application $r \to a_r$ est une transformée de Fourier de mesure bornée sur $\mathbf{T}$, comme limite simple de telles applications uniformément bornées.

On notera donc

$$\hat{\sigma}(\gamma) = \hat{\sigma}(\gamma_r) = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(k_n+r),$$

de même

$$\hat{\tau}(\gamma) = \hat{\tau}(\gamma_r) = \lim_{n\to\infty} \hat{f}_n(k_n+r-p_n),$$

où σ et τ sont des mesures bornées sur $\mathbf{T}$ vérifiant :

$$(16) \qquad |\hat{\sigma}(\gamma)|+|\hat{\tau}(\gamma)| \leqslant 1,$$

puisque $|\hat{f}_n(k)|+|\hat{f}_n(k-p_n)| \leqslant 1$ pour tout $k < p_n$.

Enfin, χ et Ψ définissant le même caractère Φ de D, $\Psi_\lambda = \alpha\chi_\lambda$, où $\alpha \in \mathbf{C}$ (corollaire 1 du paragraphe 3).

On trouve donc, en passant à la limite dans $(\mathscr{R})$,

$$\hat{\lambda}(\chi\gamma) = \hat{\sigma}(\gamma)\hat{\lambda}(|\chi|^2)+\hat{\tau}(\gamma).\hat{\lambda}(\bar{\Psi}\chi)$$

ou

$$(17) \qquad \hat{\lambda}(\chi\gamma) = [\hat{\sigma}(\gamma)+\bar{\alpha}\hat{\tau}(\gamma)]\,|\chi_\lambda|^2,$$

par propriété du module constant.

Par ailleurs, les relations

$$(\mathscr{R}') \qquad \begin{cases} \hat{\lambda}(k_n+r) = \hat{f}_n(k_n+r)+\hat{f}_n(k_n+r-p_n)\hat{\lambda}(p_n), \\ \hat{\lambda}(k_n+r-p_n) = \hat{f}_n(k_n+r-p_n)+\hat{f}_n(k_n+r)\overline{\hat{\lambda}(p_n)}, \end{cases}$$

donnent après passage à la limite

$$\begin{cases} \hat{\sigma}(\gamma) + C\hat{\tau}(\gamma) = \hat{\lambda}(\chi\gamma), \\ \hat{\tau}(\gamma) + \bar{C}\hat{\sigma}(\gamma) = \alpha\hat{\lambda}(\chi\gamma), \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(18) \qquad \begin{cases} \hat{\sigma}(\gamma) = \hat{\lambda}(\chi\gamma) \cdot \dfrac{1-\alpha C}{1-|C|^2} \\ \hat{\tau}(\gamma) = \hat{\lambda}(\chi\gamma) \cdot \dfrac{\alpha-\bar{C}}{1-|C|^2} \end{cases}$$

En reportant dans (17) l'expression de $\hat{\sigma}(\gamma)$ et de $\hat{\tau}(\gamma)$, on trouve

$$\hat{\lambda}(\chi\gamma) = \hat{\lambda}(\chi\gamma) \cdot |\chi_\lambda|^2 \cdot \left[\frac{|\alpha-\bar{C}|^2 + 1 - |C|^2}{1-|C|^2} \right].$$

Comme $\hat{\lambda}(\chi)$ est non nul, on obtient la valeur de la constante $|\chi_\lambda|^2$ à savoir

$$(19) \qquad |\chi_\lambda|^2 = \frac{1-|C|^2}{1-|C|^2+|\alpha-\bar{C}|^2}.$$

On peut supposer $|\alpha| \leqslant 1$, car dans le cas contraire, on prendrait pour χ le point adhérent à $\gamma_{k_n - p_n}$, et Ψ_λ serait égal à $1/\alpha\, \chi_\lambda$.

En utilisant à présent, le fait que σ et τ sont des mesures bornées sur **T**, on les évalue au point $\bar{\chi} \in \bar{\Gamma}$, et on obtient d'après (16), (17), (18) et (19) :

$$(20) \qquad \begin{cases} |\hat{\sigma}(\bar{\chi})| + |\hat{\tau}(\bar{\chi})| \leqslant 1, \\ \hat{\sigma}(\bar{\chi}) + \bar{\alpha}\hat{\tau}(\bar{\chi}) = 1, \\ \hat{\sigma}(\bar{\chi}) = \dfrac{1-\alpha C}{1-|C|^2+|\alpha-\bar{C}|^2}, \ \hat{\tau}(\bar{\chi}) = \dfrac{\alpha-\bar{C}}{1-|C|^2+|\alpha-\bar{C}|^2}. \end{cases}$$

Mais les hypothèses, $|\hat{\lambda}(\varphi)| < 1$ pour tout $\varphi \in \bar{\Gamma}$ et $|\alpha| \leqslant 1$, entraînent

$$0 < |\hat{\sigma}(\bar{\chi})| < 1$$

et

$$0 < |\hat{\tau}(\bar{\chi})| < 1.$$

En effet, $|\hat{\sigma}(\bar{\chi})| = 1$ équivaut à $\hat{\tau}(\bar{\chi}) = 0$ par (20); dans ce cas, $\alpha = \bar{C}$, de sorte que $|\chi_\lambda|^2 = 1$ par (19), ce qui est exclu. Et $\hat{\sigma}(\chi) = 0$ implique

$\alpha = 1/C$, donc $|\alpha| > 1$, ce qui est impossible et exclut du même coup $|\hat{\tau}(\bar{\chi})| = 1$. Puisque

$$1 = \hat{\sigma}(\bar{\chi}) + \bar{\alpha}\hat{\tau}(\bar{\chi}) \leqslant |\hat{\sigma}(\bar{\chi})| + |\hat{\tau}(\bar{\chi})| \leqslant 1,$$

On en déduit que $|\alpha| = 1$, $\hat{\sigma}(\chi)$ et $\bar{\alpha}\hat{\tau}(\bar{\chi})$ sont réels. Cela implique $\alpha C \in R$ et $|\alpha C| = |C|$ ou $\alpha C = \pm |C|$ ce qui donne en reportant dans (18), (19) et (20) :

$$(21) \quad \begin{cases} |\chi_\lambda|^2 = \dfrac{1}{2}(1+\alpha C), \\ \hat{\sigma}(\bar{\chi}) = \dfrac{1}{2}, \ \hat{\tau}(\bar{\chi}) = \dfrac{\alpha}{2}, \\ \hat{\sigma}(\gamma) = \dfrac{\hat{\lambda}(\chi\gamma)}{1+\alpha C}, \ \hat{\tau}(\gamma) = \dfrac{\alpha . \hat{\lambda}(\chi\gamma)}{1+\alpha C}. \end{cases}$$

1^er^ *cas*. — On va voir qu'un tel caractère χ ne peut exister lorsqu'il y a une infinité de q_n pairs.

Pour cela considérons la suite $(\gamma_{2k_n - p_n})$, et quitte à en extraire une sous-suite, supposons que $\gamma_{2k_n - p_n}$ converge vers h dans $\bar{\Gamma}_\lambda$.

On va prouver que h est dans Γ, et que c'est impossible dans ce premier cas.

On peut choisir une suite (m_n), $m_n > 0$, de façon que, dans $\bar{\Gamma}_\lambda$:

$$\gamma_{2k_n - p_n} \bar{\gamma}_{k_{n+m_n}} \text{ converge vers } h\bar{\chi};$$

$$\gamma_{k_{n+m_n}} \bar{\gamma}_{k_n} \text{ converge vers } |\chi|^2$$

et

$$\gamma_{k_{n+m_n}} \bar{\gamma}_{k_n - p_n} \text{ converge vers } \chi\bar{\Psi} = \alpha |\chi|^2,$$

en invoquant la continuité séparée du produit dans Δ_λ.

Or l'entier $r_n = 2k_n - k_{n+m_n} - p_n$ s'écrit :

$$r_n = k_n - p_n - \textstyle\sum_{k=n}^{n+m_n-1} b_k p_k,$$

puisque l'on a noté $k_n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k p_k$.

r_n se met donc sous la forme $k_n - l_n p_n$ avec $l_n \geqslant 1$, ce qui permet d'écrire :

$$\hat{\lambda}(r_n) = \hat{\lambda}(k_n - l_n p_n) = \hat{f}_n(k_n)\hat{\lambda}(l_n p_n) + \hat{f}_n(k_n - p_n)\overline{\hat{\lambda}(l_n p_n - p_n)}$$
$$= \hat{f}_n(k_n)\overline{\hat{\lambda}(k_{n+m_n} + p_n - k_n)} + \hat{f}_n(k_n - p_n)\overline{\hat{\lambda}(k_{n+m_n} - k_n)}.$$

Par choix de la suite (m_n), on obtient en passant à la limite

$$\hat{\lambda}(h\bar{\chi}) = \hat{\sigma}(1)\alpha|\chi_\lambda|^2 + \hat{\tau}(1)|\chi_\lambda|^2.$$

A l'aide des expressions obtenues en (21), il vient finalement

$$\hat{\lambda}(h\bar{\chi}) = \alpha\hat{\lambda}(\chi).$$

Comme $h\bar{\chi}$ et χ définissent le même caractère Φ de D, $h_\lambda \bar{\chi}_\lambda = \beta\chi_\lambda$ et $\beta = \alpha$ par ce qui précède.

On en déduit $|h_\lambda \bar{\chi}_\lambda| = |\chi_\lambda|$, puisque $|\alpha| = 1$, et $|h_\lambda| = 1$.

L'hypothèse faite sur λ, entraîne alors que h est dans Γ et donc que la suite $(2k_n - p_n)$ est stationnaire. Cela signifie que l'une des deux suites $2k_n - p_n$ ou $p_n - (2k_n - p_n)$ est constante à partir d'un certain rang. Or la suite k_n étant supposée non stationnaire, $p_n - k_n$ et $p_n - (2k_n - p_n)$ tendent vers ∞; il existe donc n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$,

$$2k_n - p_n = 2k_{n+1} - p_{n+1}$$

ou

$$b_n = \frac{q_{n+1} - 1}{2},$$

ce qui est impossible si une infinité de q_n sont pairs, et démontre le premier cas.

2e cas. — Supposons q_n impair pour $n \geqslant n_0$, et notons χ_0 le caractère adhérent à la suite $\gamma_{k'_n}$ avec $k'_n = \sum_{k \geqslant n_0} b_k p_k$ et $b_k = (q_{k+1} - 1)/2$. χ_λ s'écrit $\lambda_{k_{n_0}}(\chi_0)_\lambda$ et tout caractère $\Psi \in \Delta$ est de la forme $a\gamma$ ou $a\gamma.\chi_0$ sur la mesure λ.

La suite α étant maintenant fortement q-multiplicative de module 1, on va montrer que χ_0 est nul sur λ.

D'après la relation $(\mathscr{R})$, pour tout $n \geqslant n_0$ et tout $\gamma = \gamma_r \in \Gamma$,

$$|\hat{\lambda}(\chi_0\gamma)| \leqslant |\hat{f}_n(k'_n + r)| + |\hat{f}_n(k'_n + r - p_n)|.$$

Il suffit donc de prouver que le second membre tend vers zéro avec n et pour cela on va comparer f_{n+2} avec f_n.

Posons, pour $n \geqslant n_0$:

$$\alpha_n = \hat{f}_n(k'_n) \qquad \text{et} \qquad \beta_n = \hat{f}_n(k'_n - p_n),$$

en faisant $r = 0$ pour alléger les calculs. La relation $f_{n+2} = P_{n+1} P_n . f_n$ permet d'établir en toute généralité

$$\begin{aligned}\alpha_{n+2} = \alpha_n \big[&\hat{P}_n(b_n p_n) . \hat{P}_{n+1}(b_{n+1} p_{n+1}) + \hat{P}_n(b_n p_n - p_{n+1}) \\ &\times \hat{P}_{n+1}(b_{n+1} p_{n+1} + p_{n+1})\big] \\ &+ \beta_n \big[\hat{P}_n(b_n p_n + p_n) \hat{P}_{n+1}(b_{n+1} p_{n+1}) \\ &+ \hat{P}_n(b_n p_n + p_n - p_{n+1}) \hat{P}_{n+1}(b_n p_{n+1} + p_{n+1})\big]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\beta_{n+2} = \alpha_n \big[&\hat{P}_n(b_n p_n) \hat{P}_{n+1}(b_{n+1} p_{n+1} - p_{n+2}) + \hat{P}_n(b_n p_n - p_{n+1}) \\ &\times \hat{P}_{n+1}(b_{n+1} p_{n+1} + p_{n+1} - p_{n+2})\big] \\ &+ \beta_n \big[\hat{P}_n(b_n p_n + p_n) \hat{P}_{n+1}(b_{n+1} p_{n+1} - p_{n+2}) \\ &+ \hat{P}_n(b_n p_n + p_n - p_{n+1}) \hat{P}_{n+1}(b_{n+1} p_{n+1} + p_{n+1} - p_{n+2})\big]\end{aligned}$$

Puisque $b_n = (q_{n+1} - 1)/2$ pour $n \geqslant n_0$, $1 + b_n - q_{n+1} = -b_n$, et les relations se simplifient en

$$\alpha_{n+2} = \alpha_n A_n + \beta_n B_n,$$
$$\beta_{n+2} = \alpha_n \overline{B_n} + \beta_n \overline{A_n},$$

avec

$$A_n = \hat{P}_n(b_n p_n) \hat{P}_{n+1}(b_{n+1} p_{n+1}) + \overline{\hat{P}_n(b_n p_n + p_n)} \hat{P}_{n+1}(b_{n+1} p_{n+1} + p_{n+1}),$$
$$B_n = \hat{P}_n(b_n p_n + p_n) \hat{P}_{n+1}(b_{n+1} p_{n+1}) + \overline{\hat{P}_n(b_n p_n)} \hat{P}_{n+1}(b_{n+1} p_{n+1} + p_{n+1}).$$

On en déduit la majoration

$$|\alpha_{n+2}| + |\beta_{n+2}| \leqslant (|A_n| + |B_n|)(|\alpha_n| + |\beta_n|).$$

Supposons à présent la suite α fortement q-multiplicative, et notons, pour tout $k \geqslant 0$,

$$\alpha(p_k) = \exp 2\pi i c_k.$$

Ainsi

$$\hat{P}_k(a p_k) = \exp 2\pi i a c_k \left(1 - \frac{|a|}{q_{k+1}}\right) \quad \text{pour tout } |a| < q_{k+1},$$

et on obtient, pour $|A_n|$ et $|B_n|$, les expressions suivantes :

$$|A_n| = \frac{1}{4}\left|\left(1 + \frac{1}{q_{n+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{q_{n+2}}\right) + \exp 2\pi i \tau_{n+1}\left(1 - \frac{1}{q_{n+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{q_{n+2}}\right)\right|$$

$$|B_n| = \frac{1}{4}\left|\left(1 - \frac{1}{q_{n+1}}\right)\left(1 + \frac{1}{q_{n+2}}\right) + \exp 2\pi i \tau_{n+1}\left(1 + \frac{1}{q_{n+1}}\right)\left(1 - \frac{1}{q_{n+2}}\right)\right|$$

où l'on a posé $\tau_{n+1} = c_{n+1} - q_{n+1} c_n$.

L'identité $|a+b\exp 2\pi i\tau|^2 = (a+b)^2-4ab\sin^2\pi\tau$ pour a, b réels, donne immédiatement

$$|A_n|^2 = \frac{1}{4}\left[\left(1+\frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}}\right)^2-\left(1-\frac{1}{q_{n+1}^2}\right)\left(1-\frac{1}{q_{n+2}^2}\right)\sin^2\pi\tau_{n+1}\right]$$

et

$$|B_n|^2 = \frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}}\right)^2-\left(1-\frac{1}{q_{n+1}^2}\right)\left(1-\frac{1}{q_{n+2}^2}\right)\sin^2\pi\tau_{n+1}\right],$$

de sorte que

$$(|A_n|+|B_n|)^2 \leqslant 1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{q_{n+1}^2}\right)\left(1-\frac{1}{q_{n+2}^2}\right)\sin^2\pi\tau_{n+1}.$$

Les q_n étant supposés impairs ($n \geqslant n_0$), on a obtenu la majoration

$$|\alpha_{n+2}|+|\beta_{n+2}| \leqslant K_n(|\alpha_n|+|\beta_n|)$$

avec $K_n^2 \leqslant 1-32/81\sin^2\pi(c_{n+1}-q_{n+1}c_n)$.

La mesure λ étant continue comme on l'a remarqué en début de démonstration, par le théorème 3 de COQUET, KAMAE, MENDÈS FRANCE rappelé dans le second paragraphe, la série $\sum \sin^2\pi(c_{n+1}-q_{n+1}c_n)$ diverge, et le produit $\prod K_n$ diverge vers zéro.

On a prouvé ainsi $\hat{\lambda}(\chi_0) = 0$ et de même $\hat{\lambda}(\chi_0\gamma) = 0$ pour tout γ, ce qui signifie $(\chi_0)_\lambda = 0$, et termine la démonstration de la proposition dans ce deuxième cas.

COROLLAIRE. — *Soit* α *une suite fortement q-multiplicative de module* 1 :

— *si* $\sup q_n = +\infty$, *la mesure* λ *associée n'est pas tame;*

— *si* $\sup q_n < +\infty$, *la mesure* λ *est tame si* $\liminf |(\exp 2\pi i\tau_n - 1|$ *est* > 0; *elle n'est pas tame si* $\exp 2\pi i\tau_n$ *tend vers* 1.

En particulier, lorsque $\alpha(n) = \exp 2\pi ic\, S_q(n)$, $c \in R$, λ *est tame si, et seulement si,* $\sup q_n < +\infty$, *lorsqu'elle est continue.*

Démonstration. — Le cas $\sup q_n = +\infty$ a été traité précédemment. Supposons la suite (q_n) bornée.

LEMME 7. — *Si* $\sup q_n < +\infty$, *pour toute suite* α,

$$\limsup_{n\to\infty}|\hat{\lambda}(n)| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \limsup_{n\to\infty}|\hat{\lambda}(p_n)| < 1.$$

Démonstration. — Supposons que, pour $n > n_0$, $|\hat{\lambda}(p_n)|$ soit inférieur ou égal à a, $a < 1$; on peut trouver $c < 1$ tel que

$$|\hat{\lambda}(bp_n)| \leqslant c < 1 \quad \text{pour tout } b \neq 0, |b| < q_{n+1}.$$

En effet,

$$\hat{\lambda}(bp_n) = \hat{P}_n(bp_n) + \hat{P}_n(bp_n - p_{n+1})\hat{\lambda}(p_{n+1})(b > 0)$$

et

$$|\hat{\lambda}(bp_n)| \leqslant 1 - \frac{b}{q_{n+1}} + \frac{b}{q_{n+1}}.a; \qquad \text{si} \quad q = \sup q_n,$$

$$|\hat{\lambda}(bp_n)| \leqslant 1 - \frac{b}{q} + \frac{ab}{q} \leqslant 1 - \frac{1}{q} + \frac{a}{q} = c < 1.$$

Plus généralement, si $b \in Z$, et $b \neq 0$,

$$|\hat{\lambda}(bp_n)| \leqslant c < 1,$$

comme on peut le voir par récurrence, en décomposant b sur la base (q_n). Si on a par ailleurs, $\limsup |\hat{\lambda}(n)| = 1$, on peut trouver une suite d'entiers (u_n) telle que $\hat{\lambda}(u_n)$ tende vers α, $|\alpha| = 1$; la convergence de γ_{u_n} vers α est donc forte (lemme 6), et $\gamma_{u_n}(d)$ tend vers 1 pour tout $d \in D$. On peut ainsi exhiber une suite (n_j) telle que p_j divise u_{n_j} pour tout j et alors :

$$|\hat{\lambda}(u_{n_j})| = |\hat{\lambda}(b_j p_j)| \text{ tend vers 1 quand } j \text{ tend vers } \infty,$$

ce qui est impossible si $|\hat{\lambda}(b_j p_j)| \leqslant c < 1$; le lemme est démontré.

Supposons donc la suite α fortement q-multiplicative, et

$$\limsup |\hat{\lambda}(p_n)| = 1;$$

il faut prouver que $\exp 2\pi i \tau_n$ s'approche de 1, au sens

$$\liminf |\exp 2\pi i \tau_n - 1| = 0.$$

Pour tout $n \geqslant 0$,

$$\hat{\lambda}(p_n) = \exp 2\pi i c_n \exp(-2\pi i c_n q_{n+1})\hat{\lambda}(p_{n+1})\frac{1}{q_{n+1}} + \exp 2\pi i c_n\left(1 - \frac{1}{q_{n+1}}\right) \tag{22}$$

en notant $\alpha(p_n) = \exp 2\pi i c_n$. Si, pour un indice $n \geqslant 0$,

$$|\hat{\lambda}(p_n)| = \left|1 - \frac{1}{q_{n+1}} + \frac{1}{q_{n+1}}\exp(-2\pi i c_n q_{n+1})\hat{\lambda}(p_{n+1})\right|$$

est proche de 1, nécessairement, $\hat{\lambda}(p_{n+1}) \exp(-2\pi i c_n q_{n+1})$, est proche de 1, puisque la suite (q_n) est bornée.

Posons alors :

$$\hat{\lambda}(p_{n+1})\exp(-2\pi i c_n q_{n+1}) = 1+\varepsilon_{n+1},$$
$$\hat{\lambda}(p_n)\exp(-2\pi i c_{n-1} q_n) = 1+\varepsilon_n,$$

où ε_n et ε_{n+1} sont voisins de zéro. La relation (22) s'écrit :

$$(1+\varepsilon_n)\exp(-2\pi i \tau_n) = 1+\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}}$$

et $\exp 2\pi i\tau_n$ est proche de 1.

Ceci prouve que si la suite $\exp 2\pi i\tau_n$ ne s'approche pas de 1

$$\limsup |\hat{\lambda}(p_n)|$$

est strictement inférieur à 1, et λ est tame (lemme 7, prop. 8).

Réciproquement, supposons $\lim_{n\to\infty} \exp 2\pi i\tau_n = 1$, et notons

$$u_n = \hat{\lambda}(p_n)\exp(-2\pi i c_n);$$

on déduit de la relation (22) :

$$u_n = 1-\frac{1}{q_{n+1}}+\frac{1}{q_{n+1}}\exp(2\pi i\tau_{n+1})u_{n+1}$$

et ainsi

$$(23)\qquad 1-u_n = \frac{\exp 2\pi i\tau_{n+1}}{q_{n+1}}(1-u_{n+1})+\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}}$$

où ε_n désigne cette fois $(1-\exp 2\pi i\tau_n)$.

En reportant dans (23) l'expression de u_{n+1} en fonction de u_{n+2}, on trouve

$$1-u_n = \frac{\exp 2\pi i(\tau_{n+1}+\tau_{n+2})}{q_{n+1}q_{n+2}}(1-u_{n+2})+\exp 2\pi i\tau_{n+1}\frac{\varepsilon_{n+2}}{q_{n+1}q_{n+2}}+\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}}$$

et en recommençant,

$$1-u_n = \frac{\exp 2\pi i(\tau_{n+1}+\ldots+\tau_{n+j})}{q_{n+1}q_{n+2}\cdots q_{n+j}}(1-u_{n+j})$$
$$+\frac{\exp 2\pi i(\tau_{n+1}+\ldots+\tau_{n+j-1})}{q_{n+1}\cdots q_{n+j}}\varepsilon_{n+j}+\ldots+\frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}}$$

ceci pour tout $j \geqslant 1$.

Or par hypothèse, pour $n > N$, $|\varepsilon_n| \leqslant \varepsilon$ et

$$\begin{aligned}|1-u_N| &\leqslant \frac{|1-u_{N+j}|}{q_{N+1}\dots q_{N+j}} + \varepsilon\left(\frac{1}{q_{N+1}} + \dots + \frac{1}{q_{N+1}\dots q_{N+j}}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2^{j-1}} + \varepsilon \qquad \text{pour} \quad j \geqslant 1,\end{aligned}$$

ce qui prouve $\lim |\hat{\lambda}(p_n)| = 1$, et λ n'est pas tame.

Si $\alpha(n) = \exp 2\pi ic\, S_q(n)$, la mesure λ associée est continue si, et seulement si, $\tau_n = c(q_n - 1)$ n'appartient pas à Z pour tout n, q_n ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (théorème 3 de COQUET, KAMAE, MENDÈS FRANCE). Dans ce cas $(\exp 2\pi i \tau_n)$ ne s'approche pas de 1, et λ est tame.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BÉSINEAU (J.). — Indépendance stochastique d'ensembles liés à la fonction « somme des chiffres », *Acta Arithm.*, Warszawa, t. 20, 1972, p. 401-416.

[2] BROWN (G.). — Riesz products and generalized characters, *Proc. London math. Soc.*, Séries 3, t. 30, 1975, p. 209-238.

[3] BROWN (G.). — Singular infinitely divisible distributions whose characteristic functions vanish at infinity, *Proc. Camb. phil. Soc.* (à paraître).

[4] BROWN (G.) and MORAN (W.). — A dichotomy for infinite convolutions of discrete measures, *Proc. Camb. phil. Soc.*, t. 73, 1973, p. 307-316.

[5] BROWN (G.) and MORAN (W.). — Bernoulli measure algebras, *Acta Math.*, Uppsala, t. 132, 1974, p. 77-109.

[6] COQUET (J.), KAMAE (T.) et MENDÈS FRANCE (M.). — Sur la mesure spectrale de certaines suites arithmétiques, *Bull. Soc. math. France*, t. 105, 1977, p. 369-384.

[7] ELLISON (W. J.) et MENDÈS FRANCE (M.). — *Les nombres premiers.* — Paris, Hermann, 1975 (*Act. scient. et ind.*, 1366; *Publ. Inst. Math. Univ. Nancago*, 9).

[8] HOFFMAN (K.). — *Banach spaces of analytic functions.* — Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1962 (*Prentice Hall Series in modern Analysis*).

[9] HOST (B.) et PARREAU (F.). — *Séminaire d'analyse harmonique*, Villetaneuse, 1977-1978 (à paraître).

[10] KAMAE (T.). — Sum of digits to different bases and mutual singularity of their spectral measures, *Osaka J. Math.*, t. 15, 1978, p. 569-574.

[11] KAMAE (T.). — Mutual singularity of spectra of dynamical systems given by "sums of digits" to different bases, « *Systèmes dynamiques*, I » [1977, Warszawa], *Astérisque*, 1977, p. 109-114.

[12] KEANE (M.). — Stongly mixing g-measures, *Invent. Math.*, t. 16, 1972, p. 309-324.

[13] MENDÈS FRANCE (M.). — Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires, *J. Anal. math.*, Jérusalem, t. 20, 1967, p. 1-56 (*Thèse Sc. math., Paris*, 1966).

[14] Peyrière (J.). — Sur les produits de Riesz, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 276, 1973, p. 1417-1419.

[15] Peyrière (J.). — Étude de quelques propriétés des produits de Riesz, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 25, 1975, n° 2, p. 127-169.

[16] Queffelec (Martine). — *Sur la singularité des produits de Riesz et des mesures spectrales associées à la somme des chiffres* (à paraître).

[17] Rudin (W.). — *Fourier analysis on groups.* — New York, Interscience publ., 1962 (*Interscience Tracts in pure and appl. Mathematics*, 12).

[18] Šrejder (A.). — The structure of maximal ideals in rings of measures with convolutions, *Mat. Sbornik* [en russe], N. S., t. 27, (69), 1950, p. 297-318.

[19] Taylor (J. D.). — *Measure algebras.* — Providence, American mathematical Society, 1973 (*Conference Board of the mathematical Sciences. Regional Conference Series in Mathematics*, 16).

[20] Wiener (N.). — *The Fourier integral and certain of its applications.* — Cambridge, University Press, 1933 [réédition Dover Publications, 1958].