BULLETIN DE LA S. M. F.

MARCEL BERGER

Une inégalité universelle pour la première valeur propre du laplacien

Bulletin de la S. M. F., tome 107 (1979), p. 3-9

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1979__107__3_0>

Bull. Soc. math. France,
107, 1979, p. 3-9.

UNE INÉGALITÉ UNIVERSELLE POUR LA PREMIÈRE VALEUR PROPRE DU LAPLACIEN

PAR

MARCEL BERGER (*)

[C.N.R.S.]

RÉSUMÉ. — Soit (M, g) une variété riemannienne compacte, et r un nombre réel inférieur au rayon d'injectivité. Pour tout point m de M, désignons par $\lambda_1(m, r, g)$ la première valeur propre du problème de Dirichlet pour le laplacien Δ de (M, g) et la boule métrique $B(m, r)$ de centre m et de rayon r. On démontre dans ce travail qu'il existe une constante $a(n)$ ne dépendant que de la dimension n de M telle que, pour tout (M, g) et tout r, il existe un m tel que $r^{n+2}\lambda_1(m, r, g) < a(n)\operatorname{Vol}(g)$, où $\operatorname{Vol}(g)$ désigne le volume total de (M, g).

ABSTRACT. — Let (M, g) be a compact riemannian manifold and r any real number smaller than the injectivity radius of (M, g). For every point m in M let $\lambda_1(m, r, g)$ denote the first eigenvalue of the Dirichlet problem for the laplacian Δ of (M, g) and the metric ball $B(m, r)$ of center m and radius r. We prove that there exists a constant $a(n)$ depending only on the dimension n of M such that for every (M, g) and any r there exists an m with $r^{n+2}\lambda_1(m, r, g) < a(n)\operatorname{Vol}(g)$, where $\operatorname{Vol}(g)$ is the total volume of (M, g).

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n; pour tout point m de M et tout réel r, on désigne par $B(m, r)$ la boule métrique ouverte de centre m et de rayon r, par $B'(m, r)$ la boule fermée correspondante et par $S(m, r)$ leur sphère frontière.

Désormais r sera toujours strictement inférieur au rayon d'injectivité $\operatorname{Inj}(g)$ de (M, g); alors $B'(m, r)$ est une bonne variété à bord, et on peut donc définir $\lambda_1(m, r, g)$ la première valeur propre du problème de

(*) Texte reçu le 25 septembre 1978.
Marcel BERGER, Laboratoire associé au C.N.R.S. n° 212, Mathématiques, Tour 45-55, 5e étage, Université de Paris-VII, 2, place Jussieu, 75221 Paris Cedex 05.

Dirichlet pour $B'(m, r)$ et le laplacien Δ de (M, g) sur $B'(m, r)$. Pour r fixé, la fonction $m \mapsto \lambda_1(m, r, g)$ est continue, donc admet un minimum sur M qui est strictement positif, soit

1 $$\lambda_1(r, g) = \inf\{\lambda_1(m, r, g);\ m \in M\}.$$

On a alors la proposition suivante :

2. Proposition. — *Pour tout entier n, il existe un réel a (n) strictement positif tel que, pour toute variété compacte de dimension n, pour toute structure riemannienne g sur M, et pour tout réel r strictement inférieur au rayon d'injectivité* Inj (g) de (M, g), *on a*

$$\lambda_1(r, g) + \frac{\pi^2}{4r^2} < a(n)\frac{\mathrm{Vol}(g)}{r^{n+2}},$$

où Vol (g) *désigne le volume de la variété riemannienne* (M, g).

La valeur la plus intéressante pour r nous semble être $r = \mathrm{Inj}(g)/2$; en effet, lorsque r est très petit, $\lambda_1(r, g)$ tend vers l'infini, et l'inégalité obtenue a peu d'intérêt. De même, lorsque r tend vers Inj (g), la valeur de $\lambda_1(r, g)$ peut tendre vers zéro, et l'inégalité obtenue est alors franchement mauvaise. C'est pourquoi nous poserons, pour une variété riemannienne (M, g),

3 $$\lambda_1^{\bullet}(g) = \lambda_1\left(\frac{\mathrm{Inj}(g)}{2}, g\right).$$

D'où le corollaire suivant :

4. Corollaire. — *Avec les mêmes quantificateurs que dans la proposition* **2**, *il existe une constante universelle strictement positive b (n) telle que*

$$\lambda_1^{\bullet}(g) + \frac{\pi^2}{\mathrm{Inj}^2(g)} < b(n)\frac{\mathrm{Vol}(g)}{\mathrm{Inj}^{n+2}(g)}.$$

Il est intéressant de se demander si l'on a toujours l'inégalité

5 $$\lambda_1^{\bullet}(g) \geqslant \lambda_1(g),$$

où $\lambda_1(g)$ désigne la première valeur propre non nulle du laplacien Δ sur la variété sans bord M. Il existe toujours un cas où **5** est vraie, c'est celui ci-dessous; ce qui fournit donc dans ce cas, pour $\lambda_1(g)$, une borne universelle, universelle en ce sens par exemple qu'elle ne dépend pas de bornes pour la courbure de (M, g).

6. PROPOSITION. — *Soit (M, g) une variété riemannienne compacte admettant une isométrie involutive sans point fixe. Alors on a $\lambda_1(g) \leqq \lambda_1'(g)$ et en particulier*

$$\lambda_1(g)+\frac{\pi^2}{\operatorname{Inj}^2(g)}<b(n)\frac{\operatorname{Vol}(g)}{\operatorname{Inj}^{n+2}(g)}.$$

Dans la démonstration de la proposition **2** nous n'avons pas étudié de près la valeur de $a(n)$, car en effet la méthode utilisée ne permet pas, à l'heure actuelle, d'obtenir une constante optimale; voir les négligences strictes de cette démonstration.

Démonstration de la proposition **2**. — Elle est directement inspirée de l'appendice D de [BESSE], dont nous utilisons les notations, définitions et résultats. Le rayon r étant fixé et strictement inférieur à $\operatorname{Inj}(g)$, l'idée est d'utiliser pour toutes les boules $B(m, r)$ le principe du minimum pour $\lambda_1(m, r, g)$ avec la fonction test

7 $$k_m: \quad v \mapsto \cos\frac{\pi . d(m, v)}{2r}$$

(où d désigne la métrique de (M, g)), et de faire ensuite la moyenne de ce principe du minimum pour la mesure canonique $d\mu$ de (M, g) et m parcourant M.

Puisque la fonction k_m est bien nulle sur $S(m, r)$, et d'après la définition **1**, on a donc

8 $$\int_{B(m,r)} |dk_m|^2\, d\mu \geqslant \lambda_1(r, g) \int_{B(m,r)} k_m^2\, d\mu,$$

d'après le très classique principe du minimum (*cf.* par exemple [B-G-M], page 186), pour le cas sans bord, la démonstration étant la même dans le cas où il y a un bord). De **8** on déduit donc, par intégration en m sur M, que

9 $$\int_{m\in M}\int_{B(m,r)} |dk_m|^2\, d\mu \otimes d\mu$$
$$\geqslant \lambda_1(r, g) \int_{m\in M}\int_{B(m,r)} k_m^2\, d\mu \otimes d\mu.$$

Nous introduisons, pour calculer dans **9**, la fonction $f(u, x)$ du volume en coordonnées polaires de centre m de (M, g), soient $(u, x) \in U_m M \times \mathbf{R}_+$, définies sur le produit de la demi-droite réelle positive par la sphère $U_m M$ des vecteurs unités tangents à M en m. La définition de $f(u, x)$ étant celle de l'égalité de mesures $d\mu = f(u, x)\, d\sigma \circ dx$, où dx est la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$, et $d\sigma$ la mesure canonique sur $U_m M$.

Alors, d'après la définition **7** pour k_m, et en posant $y = d(m, .)$, on obtient :

$$\int_{B(m,r)} |dk_m|^2\, d\mu = \frac{\pi^2}{4r^2}\int_{u \in U_m M}\int_{y=0}^{y=r} \sin^2\frac{\pi y}{2r} f(u, y)\, dy \otimes d\sigma.$$

$$\int_{B(m,r)} k_m^2\, d\mu = \int_{u \in U_m M}\int_{y=0}^{y=r} \cos^2\frac{\pi y}{2r} f(u, y)\, dy \otimes d\sigma.$$

Comme la mesure canonique $d\mu_1$ du fibré unitaire total UM de (M, g) peut s'écrire (*cf.* [BESSE], **1.123**) $d\mu_1 = d\sigma \circ d\mu$, l'inégalité **9** devient

$$\frac{\pi^2}{4r^2}\int_{UM}\int_{y=0}^{y=r} \sin^2\frac{\pi y}{2r} f(u, y)\, dy \otimes d\mu_1$$
$$\geqslant \lambda_1(r, g)\int_{UM}\int_{y=0}^{y=r} \cos^2\frac{\pi y}{2r} f(u, y)\, dy \otimes d\mu_1.$$

On remplace $\sin^2$ par $1-\cos^2$, et on remarque que l'on a toujours $\int_{B(m,r)} d\mu \leqslant \operatorname{Vol}(g)$, d'où

10
$$\frac{\pi^2}{4r^2}\operatorname{Vol}^2(g)$$
$$\geqslant \left(\lambda_1(r, g) + \frac{\pi^2}{4r^2}\right)\int_{UM}\int_{y=0}^{y=r} \cos^2\frac{\pi y}{2r} f(u, y)\, dy \otimes d\mu_1.$$

Comme dans [BESSE] (page 240), nous intégrons maintenant l'inégalité **10** sur $(0, r)$ pour la mesure de Lebesgue dx, et utilisons l'invariance de $d\mu_1$ sous le flot géodésique ζ de UM pour obtenir :

11
$$\frac{\pi^2}{4r^2}\operatorname{Vol}^2(g)\int_{x=0}^{x=r} dx = \frac{\pi^2}{4r}\operatorname{Vol}^2(g)$$
$$\geqslant \left(\lambda_1(r, g) + \frac{\pi^2}{4r^2}\right)\int_{UM}\int_{x=0}^{x=r}\int_{y=0}^{y=r} \cos^2\frac{\pi y}{2r} f(\zeta^x(u), y)\, dy \otimes dx \otimes d\mu_1.$$

12. LEMME. — *Pour tout r et tout élément de volume en coordonnées polaires et le flot géodésique ζ d'une variété riemannienne, on a une inégalité universelle*

$$\int_{x=0}^{x=r}\int_{y=0}^{y=r}\cos^2\frac{\pi y}{2r}f(\zeta^x(u),\,y)\,dy\otimes dx > c(n)\,r^{n+1},$$

où la constante c (n) ne dépend que de la dimension n de la variété considérée.

Si l'on n'avait pas de cosinus, on serait dans le cas de l'inégalité

13 $$\int_{x=0}^{x=r}\int_{y=0}^{y=r}f(\zeta^x(u),\,y)\,dy\otimes dx > \int_{x=0}^{x=r}\int_{y=0}^{y=\pi-x}f(\zeta^x(u),\,y)\,dy\otimes dx$$
$$\geqslant \int_{x=0}^{x=r}\int_{y=0}^{y=\pi-x}\sin^{n-1}y\,dy\otimes dx = d(n)\,r^{n+1},$$

démontrée dans [BESSE], comme conjugaison de **D.14** et de l'inégalité de Kazdan **E.2** (et compte tenu d'une « dénormalisation » de π en r quelconque).

Or nous pouvons nous ramener à **13** ainsi; fixons un ε quelconque dans (0, 1); comme cosinus est une fonction décroissante sur (0, π/2) et que nous réduisons le domaine d'intégration, on a bien

$$\int_{x=0}^{x=r}\int_{y=0}^{y=r}\cos^2\frac{\pi y}{2r}f(\zeta^x(u),\,y)\,dy\otimes dx$$
$$> \cos^2\frac{\pi\varepsilon}{2}\int_{x=0}^{x=\varepsilon r}\int_{y=0}^{y=\varepsilon r}f(\zeta^x(u),\,y)\,dy\otimes dx$$
$$> d(n)\,\varepsilon^{n+1}\,r^{n+1}\cos^2\frac{\pi\varepsilon}{2} = c(n)\,r^{n+1}.$$

Ce qui démontre le lemme **12**. Nous ne cherchons pas le meilleur choix possible pour ε, vues les nombreuses négligences que nous avons déjà commises. ∎

On déduit maintenant de **11** et du lemme **12** que

$$\frac{\pi^2}{4r}\mathrm{Vol}^2(g) > \left(\lambda_1(r,\,g)+\frac{\pi^2}{4r^2}\right)\mathrm{Vol}(UM)\,d(n)\,r^{n+1}$$
$$= \left(\lambda_1(r,\,g)+\frac{\pi^2}{4r^2}\right)\mathrm{Vol}(g)\,\beta(n-1)\,d(n)\,r^{n+1},$$

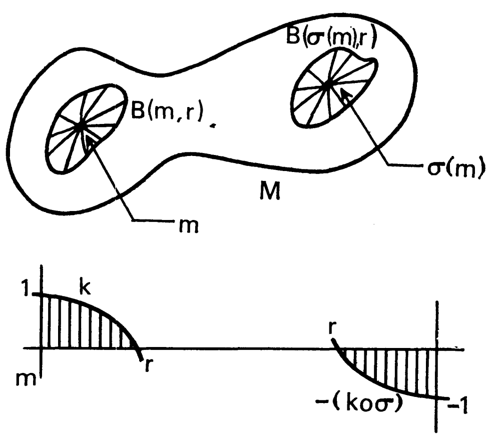
où β $(n-1)$ désigne le volume de la sphère standard $S^{n-1}\subset \mathbf{R}^n$ (*cf.* [BESSE], **1.124**). Ce qui achève la démonstration de la proposition **2.** ∎

Démonstration de la proposition **6**.

14. LEMME. — *Soit* (M, g) *une variété riemannienne compacte admettant une isométrie involutive* σ *sans point fixe. Alors, pour tout point* m *de* M, *on a* $d(m, \sigma(m)) \geqslant \mathrm{Inj}(g)$.

Soit en effet γ une plus courte géodésique de m à $\sigma(m)$; alors $\sigma(\gamma)$ est aussi une plus courte géodésique de m à $\sigma(m)$. Si $\gamma = \sigma(\gamma)$, le point milieu de γ serait un point fixe de σ, donc $\gamma \neq \sigma(\gamma)$, ce qui implique que $\sigma(m)$ appartient au cut-locus de m, et donc que $d(m, \sigma(m)) \geqslant \mathrm{Inj}(g)$ (*cf.* par exemple [BESSE], section **5.B**). ■

Démontrons maintenant la proposition **6**. Posons dorénavant $r = \mathrm{Inj}(g)/2$, et soit m un point de M tel que $\lambda_1(m, r, g) = \lambda_1^{\cdot}(g)$. Soit enfin k la fonction $B(m, r) \to \mathbf{R}$ qui vérifie $\Delta k = \lambda_1^{\cdot}(g)\, k$ et s'annule



sur $S(m, r)$. D'après la définition de r et le lemme **14,** on a $B(m, r) \cap B(\sigma(m), r) = \emptyset$; on peut donc définir une fonction $\tilde{k}$ sur tout M par

$$\tilde{k} = k \quad \text{sur } B(m, r),$$
$$\tilde{k} = -(k \circ \sigma) \quad \text{sur } B(\sigma(m), r),$$
$$\tilde{k} = 0 \quad \text{sur } M - ((B(m, r) \cup B(\sigma(m), r)).$$

Et comme σ est une isométrie, on a $\Delta (k \circ \sigma) = \lambda_1^{\bullet}(g)(k \circ \sigma)$, puis $\| d\tilde{k} \|^2 = \lambda_1^{\bullet}(g) \| \tilde{k} \|^2$, et enfin

$$\int_M \tilde{k}\, d\mu = \int_{B(m,r)} k\, d\mu + \int_{B(\sigma(m),r)} (-(k \circ \sigma))\, d\mu$$
$$= \int_{B(m,r)} k\, d\mu - \int_{B(m,r)} k\, d\mu = 0.$$

Le principe du minimum montre donc $\lambda_1^{\bullet}(g) \geqslant \lambda_1(g)$, d'où la proposition **6.** ■

BIBLIOGRAPHIE

[BESSE] BESSE (Arthur L.). — *Manifolds all of whose geodesics are closed.* — Berlin, Springer-Verlag, 1978 (*Ergebnisse der Mathematik*, 93).

[B-G-M] BERGER (M.), GAUDUCHON (P.) et MAZET (E.). — *Le spectre d'une variété riemannienne.* — Berlin, Springer-Verlag, 1971 (*Lecture Notes in Mathematics*, 194).