

# BULLETIN DE LA S. M. F.

AYDIN AYTUNA

ANNE-MARIE CHOLLET

## **Une extension d'un résultat de W. Rudin**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 104 (1976), p. 383-388

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1976\\_\\_104\\_\\_383\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__383_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## UNE EXTENSION D'UN RÉSULTAT DE W. RUDIN

par

AYDIN AYTUNA et ANNE-MARIE CHOLLET

[Seattle et Orsay]

RÉSUMÉ. — Soit  $D$  un domaine borné strictement pseudo-convexe de  $\mathbf{C}^n$ .

Pour toute mesure  $m$  sur  $\partial D$  (resp. sur  $\bar{D}$ ) telle que la mesure superficielle sur  $\partial D$  [resp. la mesure volume sur  $\bar{D}$ ] soit absolument continue par rapport à  $m$ , on montre que  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\partial D)$  [resp.  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\bar{D})$ ] est une sous-algèbre fermée de  $L^\infty(m)$ . On note  $\mathcal{H}^\infty(m)$  l'adhérence faible-étoile, dans  $L^\infty(m)$  des fonctions holomorphes sur  $D$ , continues dans  $\bar{D}$ .

On se propose d'étendre aux domaines strictement pseudo-convexes de  $\mathbf{C}^n$  un résultat de D. SARASON [7] pour le disque, et de W. RUDIN [6] pour la boule.

THÉORÈME. — Soient  $D = \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{C}^n; \sum_{i=1}^n |z_i|^2 < 1\}$ ,  $\partial D$  sa frontière, et  $\sigma$  la mesure superficielle sur  $\partial D$ . Alors  $\mathcal{H}^\infty(\sigma) + C(\partial D)$  est une sous-algèbre fermée de  $L^\infty(\sigma)$ .

$\mathcal{H}^\infty(\sigma)$  désigne ici l'algèbre des fonctions  $f^*$  sur  $\partial D$  limites radiales de fonctions  $f$  holomorphes et bornées dans  $D$ .

On obtient des résultats analogues, lorsque  $D$  est un domaine borné strictement pseudo-convexe de  $\mathbf{C}^n$ , pour des mesures  $m$  sur  $\partial D$  (resp. sur  $\bar{D}$ ) telles que la mesure superficielle sur  $\partial D$  (resp. la mesure volume sur  $\bar{D}$ ) soit absolument continue par rapport à  $m$ .

Ce résultat n'est plus vrai lorsque  $D$  est le polydisque de  $\mathbf{C}^n$ ,  $n > 1$ , et  $\partial D$  sa frontière distinguée. W. RUDIN a en effet montré que  $H^\infty(\sigma) + C(\partial D)$  n'est pas alors une sous-algèbre de  $L^\infty(\sigma)$ .

La démonstration se fait en deux parties. On établit, en utilisant un théorème de T. W. GAMELIN et J. GARNETT, que  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\text{supp } m)$  est fermé dans  $L^\infty(m)$ , puis, en utilisant un lemme de B. COLE et M. RANGE, que  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\text{supp } m)$  est une algèbre.

Ces résultats ont été établis indépendamment par les auteurs ([1], [2]). Prouvés ici dans  $\mathbf{C}^n$ , ils s'étendent à des domaines strictement pseudo-convexes dans une variété de Stein.

1. Soient  $A$  une algèbre uniforme sur un espace topologique compact  $X$ , et  $\nu$  une mesure positive sur  $X$ . On note  $C(X)$  l'algèbre des fonctions continues sur  $X$ , et  $\mathcal{H}^\infty(\nu)$  l'adhérence de  $A$  dans  $L^\infty(\nu)$  pour la topologie faible-étoile, c'est-à-dire la topologie  $\sigma[L^\infty(\nu), L^1(\nu)]$ . Pour toute fonction continue  $u$  sur  $X$ , on note  $d(u, A)$  [resp.  $d(u, \mathcal{H}^\infty(\nu))$ ] la distance de  $u$  à l'algèbre  $A$  [resp. à l'algèbre  $\mathcal{H}^\infty(\nu)$ ].

PROPOSITION 1. — Si, pour toute fonction  $u$  continue sur  $X$ , on a

$$d(u, A) = d(u, \mathcal{H}^\infty(\nu)),$$

alors  $\mathcal{H}^\infty(\nu) + C(X)$  est fermé dans  $L^\infty(\nu)$ .

Preuve. — On a

$$C(X) \xrightarrow{i} L^\infty(\nu) \xrightarrow{\pi} L^\infty(\nu)/\mathcal{H}^\infty(\nu),$$

où  $i$  est l'injection canonique, et  $\pi$  l'application quotient.

L'image réciproque par  $\pi$  dans  $L^\infty(\nu)$  de  $\pi(i[C(X)])$  s'identifie à  $\mathcal{H}^\infty(\nu) + C(X)$ . Elle est fermée dans  $L^\infty(\nu)$  si  $\pi(i[C(X)])$  est fermé dans  $L^\infty(\nu)/\mathcal{H}^\infty(\nu)$ . Mais, par hypothèse, les espaces  $C(X)/A$  et  $\pi(i[C(X)])$  sont isométriquement isomorphes. Puisque  $C(X)/A$  est complet,  $\pi(i[C(X)])$  l'est aussi, ce qui établit la proposition.

2. Soit  $\mathcal{M}$  le spectre de  $\mathcal{H}^\infty(\nu)$ ; pour tout point de  $X$ , on note  $\mathcal{M}_p$  la fibre de  $\mathcal{M}$  au-dessus de  $p$ , c'est-à-dire, l'ensemble des homomorphismes  $\varphi$  de  $\mathcal{M}$  qui vérifient  $\varphi(f) = f(p)$  pour tout élément  $f$  de  $A$ .

On dira que l'algèbre  $A$  a la propriété (L) si, pour tout point  $p$  du support de  $\nu$ , pour toute fonction  $u$  de  $C(X)$ , et toute fonction  $f$  de  $\mathcal{H}^\infty(\nu)$  vérifiant  $|f| \leq u$  presque partout par rapport à  $\nu$ , on a

$$|\Phi(f)| \leq u(p), \text{ pour tout } \Phi \text{ de } \mathcal{M}_p.$$

Soit  $\tau$  une mesure sur  $X$ , on dit que  $\tau$  est absolument continue par rapport à  $A^\perp$  si, et seulement si,  $\tau$  est absolument continue par rapport à une mesure sur  $X$  orthogonale à  $A$ .

THÉORÈME 2. — Soient  $A$  une algèbre uniforme sur un espace topologique compact  $X$ , et  $\nu$  une mesure positive dont le support est  $X$ . Si  $A$  a la propriété (L) et si, pour toute mesure  $\tau$  sur  $X$  absolument continue par rapport à  $A^\perp$ , l'application restriction de  $L^\infty(\nu + |\tau|)$  à  $L^\infty(\nu)$  est une isométrie de  $\mathcal{H}^\infty(\nu + |\tau|)$  sur  $\mathcal{H}^\infty(\nu)$ , alors, pour toute fonction  $u$  continue sur  $X$ , on a

$$d(u, A) = d(u, \mathcal{H}^\infty(\nu)).$$

3. Un domaine  $D$  de  $\mathbf{C}^n$ ,  $n \geq 1$ , à frontière  $C^3$  strictement pseudo-convexe est un ouvert de  $\mathbf{C}^n$  tel que l'adhérence  $\bar{D}$  de  $D$  soit compacte et qu'il existe une fonction  $\rho$ , à valeurs réelles, de classe  $C^3$  dans un voisinage  $U$  de  $\bar{D}$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$1^\circ D = \{ z; \rho(z) < 0 \},$$

$$2^\circ \text{grad } \rho \neq 0 \text{ sur } \partial D,$$

3°  $\rho$  est strictement plurisousharmonique dans un voisinage de  $\partial D$ .

On désigne par  $\mathcal{H}^\infty(D)$  l'algèbre des fonctions holomorphes et bornées dans  $D$ , et par  $A(D)$  l'algèbre des fonctions holomorphes dans  $D$ , continues dans  $\bar{D}$ .

Pour toute mesure  $\nu$  sur  $\bar{D}$ , on note  $\mathcal{H}^\infty(\nu)$  l'adhérence faible-étoile dans  $L^\infty(\nu)$  des fonctions de  $A(D)$ . Si  $\nu$  est la mesure volume sur  $D$ , on sait [3] que  $\mathcal{H}^\infty(D) = \mathcal{H}^\infty(\nu)$ .

4. PROPOSITION 3. — *Si  $D$  est un domaine strictement pseudo-convexe dans  $\mathbf{C}^n$ , et si  $\nu$  est la mesure volume sur  $\bar{D}$ , alors  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\bar{D})$  est un sous-espace fermé de  $L^\infty(m)$  pour toute mesure  $m$  sur  $\bar{D}$  telle que  $\nu$  soit absolument continue par rapport à  $m$ .*

*Preuve.* — Le théorème 2 s'applique avec  $A = A(D)$  et  $\nu = \nu$ . L'algèbre  $\mathcal{H}^\infty(\nu)$  a en effet la propriété (L). Elle est clairement vérifiée en tout point  $p$  de  $D$  car  $\mathcal{M}_p$  se réduit à l'homomorphisme évaluation au point  $p$ . Elle l'est également en tout point  $p$  de  $\partial D$ . On sait, en effet, [8], que tout point  $p$  de la frontière d'un domaine  $D$  strictement pseudo-convexe est pic pour  $A(D)$ , c'est-à-dire qu'en chaque point  $p$  de  $\partial D$ , il existe une fonction de  $A(D)$  égale à 1 au point  $p$  et de module strictement inférieur à 1 partout ailleurs. De plus, pour toute mesure  $\tau$  absolument continue par rapport à  $A^\perp$ , on conduit d'après un résultat de B. COLE et R. M. RANGE [3] que l'application restriction de  $L^\infty(\nu + |\tau|)$  à  $L^\infty(\nu)$  est une isométrie de  $\mathcal{H}^\infty(\nu + |\tau|)$  sur  $\mathcal{H}^\infty(\nu)$ . On a donc

$$d(u, \mathcal{H}^\infty(\nu)) = d(u, A(D))$$

pour toute fonction  $u$  de  $C(\bar{D})$ .

Pour toute fonction  $f$  de  $L^\infty(m)$ , soit  $f$  la classe d'équivalence de  $f$  dans  $L^\infty(\nu)$ . On a  $\|\tilde{f}\|_\infty^\nu \leq \|f\|_\infty^m$ , si on désigne par  $\|\cdot\|_\infty^\mu$  la norme dans  $L^\infty(\mu)$ .

On déduit de là, pour toute fonction  $u$  de  $C(\bar{D})$ ,

$$d(u, \mathcal{H}^\infty(m)) = d(u, A(D)),$$

et la proposition 1 implique le résultat.

**PROPOSITION 4.** — *Si  $D$  est un domaine strictement pseudo-convexe dans  $\mathbf{C}^n$ , et si  $\sigma$  est la mesure superficielle sur  $\partial D$ , alors  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\partial D)$  est un sous-espace fermé de  $L^\infty(m)$  pour toute mesure  $m$  sur  $\partial D$  telle que  $\sigma$  soit absolument continue par rapport à  $m$ .*

*Preuve.* — En utilisant les résultats correspondants de [3], on reprend la démonstration de la proposition 3.

5. — Dans la suite, il sera fait usage d'un lemme établi dans [3].

**LEMME 5.** — *Il existe un opérateur linéaire  $S$  de l'espace des  $(0,1)$ -formes bornées  $\bar{\partial}$ -fermées sur  $D$  dans  $C(\bar{D})$  qui applique les formes à coefficients  $C^\infty$  sur les fonctions de classe  $C^\infty$  dans  $D$  de sorte que*

(1) *si  $u = S(\omega)$ , alors  $\bar{\partial}u = \omega$  dans  $D$ ;*

(2) *si  $\{\omega_n\}$  converge vers 0 pour la topologie faible-étoile induite par  $L^\infty(v)$ , alors  $S(\omega_n)$  converge uniformément vers 0 dans  $C(\bar{D})$ .*

On désigne par  $C^\infty(\bar{D})$  l'algèbre des fonctions de classe  $C^\infty$  dans  $D$  dont toutes les dérivées appartiennent à  $C(\bar{D})$ .

**PROPOSITION 6.** — *Soit  $D$  un domaine strictement pseudo-convexe dans  $\mathbf{C}^n$ , et  $m$  une mesure sur  $\bar{D}$  telle que  $v$  soit absolument continue par rapport à  $m$ . Si  $f$  appartient à  $\mathcal{H}^\infty(m)$ , et  $\varphi$  à  $C^\infty(\bar{D})$ , alors  $f\varphi$  appartient à  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\bar{D})$ .*

*Preuve.* — Soit  $\Sigma$  l'ensemble des fonctions  $f$  de  $\mathcal{H}^\infty(m)$  telles que, pour toute fonction  $\varphi$  de  $C^\infty(\bar{D})$ ,  $\varphi f$  appartienne à  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\bar{D})$ . On va prouver qu'il est fermé pour la topologie faible-étoile de  $\mathcal{H}^\infty(m)$ .

D'après une version du théorème de Krejn-Smuljan [4], il suffit de montrer que si une suite  $(f_n)$  de  $\Sigma$  converge de manière ponctuelle bornée presque partout (p. p.)  $m$  vers une fonction  $f$  de  $\mathcal{H}^\infty(m)$ , alors  $f$  appartient à  $\Sigma$ . Soit  $(f_n)$  une telle suite. On a donc, si  $\varphi$  appartient à  $C^\infty(\bar{D})$ ,

$$\varphi f_n = h_n + \gamma_n(\text{p. p. } m) \quad \text{avec } h_n \text{ dans } H^\infty(m) \text{ et } \gamma_n \text{ dans } C(\bar{D}).$$

Soit maintenant  $\alpha_n = S(\tilde{f}_n \bar{\partial}\varphi)$  où  $\tilde{f}_n$  désigne la classe d'équivalence de  $f_n$  dans  $L^\infty(v)$ , et  $S$  l'opérateur linéaire du lemme 5. Alors  $\varphi \tilde{f}_n = \tilde{g}_n + \alpha_n$

(p. p.  $v$ ), avec  $\tilde{g}_n$  dans  $\mathcal{H}^\infty(v)$ , et de là,  $\alpha_n - \gamma_n$  est égale p. p.  $v$  à une fonction  $G_n$  de  $A(D)$  :

$$f_n \varphi - \alpha_n = f_n \varphi - \gamma_n + (\gamma_n - \alpha_n) = h_n - G_n(\text{p. p. } m),$$

donc  $f_n \varphi - \alpha_n$  appartient à  $\mathcal{H}^\infty(m)$ .

Puisque  $(f_n)$  converge de manière ponctuelle bornée p. p.  $m$ ,  $(\tilde{f}_n)$  converge vers  $\tilde{f}$  pour la topologie faible-étoile de  $\mathcal{H}^\infty(v)$  et donc, d'après le lemme 5,  $(\alpha_n)$  converge uniformément vers  $\alpha$  dans  $C(\bar{D})$ , avec  $\alpha = S(\tilde{f} \bar{\partial} \varphi)$ . Donc  $f_n \varphi - \alpha_n$  converge vers  $f \varphi - \alpha$  pour la topologie faible-étoile de  $L^\infty(m)$ . Puisque  $\mathcal{H}^\infty(m)$  est fermé pour cette topologie,  $f \varphi - \alpha$  appartient à  $\mathcal{H}^\infty(m)$ , donc  $f$  appartient à  $\Sigma$ . De là,  $\Sigma$  est fermé pour la topologie faible-étoile de  $L^\infty(m)$  et, puisqu'il contient  $A(D)$ , il coïncide avec  $\mathcal{H}^\infty(m)$ .

**THÉORÈME 7.** — *Si  $D$  est un domaine strictement pseudo-convexe dans  $\mathbb{C}^n$ , alors  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\bar{D})$  est une sous-algèbre fermée de  $L^\infty(m)$  pour toute mesure  $m$  sur  $D$  telle que  $v$  soit absolument continue par rapport à  $m$ .*

*Preuve.* — Il suffit de montrer que  $f\alpha$  appartient à  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\bar{D})$  pour tout  $f$  dans  $\mathcal{H}^\infty(m)$  et tout  $\alpha$  dans  $C(\bar{D})$ . On approche  $\alpha$  uniformément dans  $D$  par des fonctions  $\varphi_n$  de  $C^\infty(\bar{D})$ . Alors  $f\varphi_n$  tend vers  $f\alpha$  dans  $L^\infty(m)$ , et on utilise les propositions 4 et 6 pour conclure.

**PROPOSITION 8.** — *Soit  $D$  un domaine strictement pseudo-convexe dans  $\mathbb{C}^n$ , et  $m$  une mesure sur  $\partial D$  telle que  $\sigma$  soit absolument continue par rapport à  $m$ . Si  $f$  appartient à  $\mathcal{H}^\infty(m)$ , et  $\varphi$  à  $C^\infty(\bar{D})$ , alors  $f\varphi$  appartient à  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\partial D)$ .*

**THÉORÈME 9.** — *Soit  $D$  un domaine strictement pseudo-convexe dans  $\mathbb{C}^n$ , alors  $\mathcal{H}^\infty(m) + C(\partial D)$  est une sous-algèbre fermée de  $L^\infty(m)$  pour toute mesure  $m$  sur  $\partial D$  telle que  $\sigma$  soit absolument continue par rapport à  $m$ .*

Les preuves de la proposition 8 et du théorème 9 reprennent celles de la proposition 6 et du théorème 7.

*Note.* — T. W. GAMELIN a signalé aux auteurs des résultats de B. COLE, non publiés, étendant, sous certaines hypothèses, à  $A^{**} + C(X)$ , le résultat de W. RUDIN; ici  $A^{**}$  désigne le bidual de  $A$ , une algèbre uniforme sur  $X$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AYTUNA (A.). — *Thèse.* — University of Washington, Seattle.  
 [2] CHOLLET (A.-M.). — *Une extension d'un résultat de W. Rudin.* — Orsay, Université de Paris-Sud, 1974 (*Publications de l'Université Paris-Sud, Analyse harmonique*, 112).

- [3] COLE (B.) and RANGE (R. M.). — A measure on complex manifolds and some applications, *J. funct. Anal.*, t. 11, 1972, p. 393-400.
- [4] GAMELIN (T. W.). — *Uniform algebras*. — Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1969.
- [5] GAMELIN (T. W.) and GARNETT (J.). — Bounded approximation by rational functions (à paraître).
- [6] RUDIN (W.). — Spaces of type  $H^\infty + C$ , *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 25, 1975, p. 99-125.
- [7] SARASON (D.). — Algebras of functions on the unit circle, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 79, 1973, p. 286-299.
- [8] STEIN (E. M.). — *Boundary behavior of holomorphic functions of several complex variables*. — Princeton, Princeton University Press, 1972 (*Mathematical Notes*).

(Texte reçu le 24 octobre 1975.)

Aydin AYTUNA,  
Department of Mathematics,  
University of Washington,  
Seattle, Wash. 98105 (États-Unis).

et

Anne-Marie CHOLLET,  
Mathématiques, Bâtiment 425,  
Université Paris-Sud,  
91405 Orsay.