BULLETIN DE LA S. M. F.

JOSEPH LE POTIER

Fibrés vectoriels de rang 1 d'ordre fini

Bulletin de la S. M. F., tome 104 (1976), p. 349-367
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1976__104__349_0>

Bull. Soc. math. France,
104, 1976, p. 349-367.

FIBRÉS VECTORIELS DE RANG 1 D'ORDRE FINI

PAR

JOSEPH LE POTIER

[Poitiers]

RÉSUMÉ. — Soit X une variété quasi projective lisse sur $\mathbf{C}$ admettant une complétion lisse $\overline{X}$ telle que $Y = \overline{X} - X$ soit un diviseur lisse. Dans le groupe de Picard $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)$ des fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 sur X, les fibrés qui portent une métrique hermitienne d'ordre fini λ le long de Y (λ réel $\geqslant 0$) donnent une filtration croissante $G_\lambda \mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)$, que l'on décrit en utilisant la suite exacte

$$\mathrm{H}^1(X, \mathcal{O}_X) \to \mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) \to H^2(X, \mathbf{Z}),$$

où $\mathcal{O}_X$ est le faisceau des fonctions holomorphes sur X.

Soient $\overline{X}$ une variété algébrique projective lisse sur $\mathbf{C}$, et Y un diviseur lisse de $\overline{X}$. On se propose d'étudier les fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 sur la variété algébrique $X = \overline{X} - Y$, et de préciser certains résultats de CORNALBA et GRIFFITHS ([1], [3]) concernant la croissance de ces fibrés.

1. Les filtrations G_l; résultats et exemples

1.1. LA MÉTRIQUE DE POINCARÉ. — Soient L_Y le fibré de rang 1 sur $\overline{X}$ associé à Y, et s une section holomorphe de L_Y, transverse à la section nulle, dont le lieu des zéros est Y. Soit $|\,|^2$ une métrique hermitienne sur L_Y, telle que $|s| < 1$. Considérons la forme de type (1,1) sur X :

$$dd^c \log \frac{1}{|s|^2 (\log |s|^2)^2}$$
$$= \left(1 + \frac{2}{\log |s|^2}\right) dd^c \log \frac{1}{|s|^2} + 4\sqrt{-1}\, \frac{d' \log |s|^2 \wedge \overline{d' \log |s|^2}}{(\log |s|^2|^2}.$$

La forme $dd^c \log (1/|s|^2)$ est la forme réelle de courbure du fibré L_Y et est donc de classe C^∞ sur $\overline{X}$; si θ est une forme de type (1,1), réelle, donnant sur $\overline{X}$ une métrique kählérienne, pour A réel positif assez grand, à la forme

$$A\,\theta + dd^c \log \frac{1}{|s|^2 (\log |s|^2)^2}$$

est associée une métrique sur X qu'on appelle *métrique de Poincaré*. Une telle métrique sera fixée dans toute la suite.

Pour la métrique de Poincaré, on a, pour tout réel $\varepsilon > 0$:

$$|d' \log|s|^2|_{\text{Poincaré}} \leqslant \text{Cte}\, |\log|s|| \leqslant \frac{\text{Cte}}{|s|^{\varepsilon}}.$$

1.2. MÉTRIQUES D'ORDRE FINI. — Soient E un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X, h une métrique hermitienne sur E, $c(E, h)$ la forme de Chern associée, et λ un nombre réel $\geqslant 0$. On dira que la métrique h est *d'ordre fini* λ le long de Y si, pour tout réel $\varepsilon > 0$, il existe une constante C telle que

$$|c(E, h)|_{\text{Poincaré}} \leqslant \frac{C}{|s|^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Par exemple, tout fibré vectoriel algébrique de rang 1 sur X est d'ordre 0, car il se prolonge à $\overline{X}$; nous verrons par la suite que la réciproque est fausse.

Rappelons le résultat fondamental de CORNALBA et GRIFFITHS ([1], th. 3). Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur $\overline{X}$, et supposons qu'il existe sur E une métrique hermitienne h d'ordre fini λ; alors il existe un recouvrement ouvert (U_i) de $\overline{X}$ et des sections holomorphes non nulles f_i de E sur $V_i = U_i - Y$, telles que, sur $V_i \cap V_j$, les fonctions de transition $f_{i,j} = f_i/f_j$ soient de la forme

$$f_{i,j} = \varepsilon_{i,j} \exp(g_{i,j}/s^l)\, s^{k_{i,j}},$$

où l est la partie entière de λ, $k_{i,j}$ un entier relatif, $g_{i,j}$ une section holomorphe de L_Y^l sur $U_i \cap U_j$, et $\varepsilon_{i,j}$ une section holomorphe non nulle de $L_Y^{-k_{i,j}}$ sur $U_i \cap U_j$.

On obtient immédiatement la conséquence suivante :

PROPOSITION 1. — *Supposons qu'il existe sur E une métrique hermitienne h d'ordre fini λ le long de Y; soit l la partie entière de λ; alors il existe sur E une métrique hermitienne h' d'ordre fini l le long de Y.*

Démonstration. — Soit (η_i) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement (U_i) de $\overline{X}$. Considérons la fonction de classe C^{∞}, $\rho_i : V_i \to)0, +\infty($, définie par $\rho_i = \prod_j |f_{i,j}|^{2\eta_j}$.

Sur l'ouvert $V_i \cap V_j$, on a $\rho_i = |f_{i,j}|^2 \rho_j$, et donc le système (ρ_i) définit sur E une métrique hermitienne h' dont la forme de Chern est donnée par

$$\begin{aligned} c(E, h')|_{Vi} &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d'' d' \log \rho_i \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d'' d' (\textstyle\sum_j \eta_j \log |f_{i,j}|^2). \end{aligned}$$

La proposition 1 s'obtient par dérivation, en remarquant que

$$\log |f_{i,j}|^2 = 2 R_e\left(\frac{g_{i,j}}{s^l}\right) + k_{i,j} \log |s|^2 + \log |\varepsilon_{i,j}|^2,$$

et en utilisant la majoration donnée au paragraphe 1.1 :

$$|d' \log |s|^2|_{\text{Poincaré}} \leqslant \frac{\text{Cte}}{|s|^\varepsilon}.$$

L'expression de $c(E, h')$ est assez compliquée; la proposition suivante donne pour la classe de Chern $c_{\mathbf{C}}(E)$ de E dans $H^2(X, \mathbf{C})$ un représentant qui s'écrit de manière plus simple.

PROPOSITION 2. — *Soit l un entier $\geqslant 0$. S'il existe sur E une métrique hermitienne d'ordre fini l le long de Y, on peut représenter la classe de Chern $c_{\mathbf{C}}(E)$ de E dans $H^2(X, \mathbf{C})$ par une forme différentielle $\varphi \in A^2(X)$ s'écrivant :*

$$\varphi = \frac{\alpha}{s^l} d' \log |s|^2 + \frac{\beta}{s^l},$$

avec $\alpha \in A^1(\overline{X}, L_Y^l)$, $\beta \in A^{1,1}(\overline{X}, L_Y^l) + A^{2,0}(\overline{X}, L_Y^l)$.

Comme habituellement, $A^r(\overline{X}, L_Y^l)$ (resp. $A^{p,q}(\overline{X}, L_Y^l)$) désigne l'espace des formes différentiellles de classe C^∞ sur $\overline{X}$, de degré r (resp. de type p, q) à valeurs dans le fibré L_Y^l.

Démonstration. — On peut écrire, avec les notations utilisées dans la démonstration de la proposition 1 :

$$c(E, h')|_{V_i} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d(\textstyle\sum_j \eta_j d' \log |f_{i,j}|^2) + d\gamma|_{V_i},$$

où γ est la forme de degré 1 globale sur X, définie par

$$\gamma|_{V_i} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \textstyle\sum_j d' \eta_j \log |f_{i,j}|^2.$$

Ainsi, la forme différentielle $\varphi \in A^2(X)$, définie sur V_i par

$$\varphi\,|_{V_i} = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} d\left(\sum_j \eta_j\, d' \log |f_{i,j}|^2\right)$$

$$= \frac{\sqrt{-1}}{2\pi} \sum_j d\eta_j \wedge d' \log |f_{i,j}|^2$$

représente la classe de Chern $c_{\mathbf{C}}(E)$, et s'écrit bien sous la forme voulue, comme on le voit en utilisant l'expression de $\log |f_{i,j}|^2$.

On désigne par $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 sur X, et par $G_\lambda \subseteq \mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)$ l'ensemble des classes de fibrés qui portent une métrique hermitienne d'ordre fini $\leqslant \lambda$ le long de Y. Si l est la partie entière de λ, on a donc, d'après la proposition 1 : $G_\lambda = G_l$.

Les sous-groupes $(G_l)_{l \in \mathbf{N}}$ forment une filtration croissante de $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)$; CORNALBA et GRIFFITHS ont montré ([1], th. 4) que si X est affine, on a

$$\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) = \bigcup_{l \in \mathbf{N}} G_l.$$

L'objet de ce travail est de décrire cette filtration; la variété X ne sera pas supposée affine.

1.3. LE MORPHISME DE HODGE-DELIGNE. — Soit $\Omega^p_{\overline{X}}\langle Y \rangle$ le faisceau des p-formes différentielles méromorphes sur $\overline{X}$, à pôle logarithmique le long de Y [2] : c'est le faisceau des formes différentielles φ méromorphes sur $\overline{X}$, ayant au pis un pôle simple le long de Y, et dont la différentielle $d\varphi$ est encore à pôle simple le long de Y. Si U est un ouvert de Stein de $\overline{X}$, dans lequel Y est donné par l'équation $f = 0$, l'espace des sections de $\Omega^p_{\overline{X}}\langle Y \rangle$ au-dessus de U est obtenu comme espace des p-formes différentielles holomorphes sur $U - Y$ qui s'écrivent $\alpha\,(df/f) + \beta$, avec α et β formes holomorphes dans U. Pour la dérivation extérieure, on obtient ainsi un complexe $\Omega^{\bullet}_{\overline{X}}\langle Y \rangle$, appelé complexe de De Rham logarithmique de $\overline{X}$ le long de Y.

D'après P. DELIGNE, l'hypercohomologie $H^k(\overline{X}, \Omega^{\bullet}_{\overline{X}}\langle Y \rangle)$ s'identifie à $H^k(X, \mathbf{C})$, et la suite spectrale d'hypercohomologie

$$E_1^{p,q} = H^q(\overline{X}, \Omega^p_{\overline{X}}\langle Y \rangle) \;\Rightarrow\; H^{p+q}(X, \mathbf{C}),$$

induit sur l'aboutissement une filtration décroissante F, appelée filtration de Hodge-Deligne; en particulier, $F^0 H^k(X, \mathbf{C}) = H^k(X, \mathbf{C})$, et le sous-espace $F^1 H^k(X, \mathbf{C})$ est le noyau du morphisme

$$H^k(\overline{X}, \Omega^{\bullet}_{\overline{X}}\langle Y\rangle) \to H^k(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}),$$

induit par le morphisme de complexes $\Omega^{\bullet}_{\overline{X}}\langle Y\rangle \to \mathcal{O}_{\overline{X}}$ donné par l'identité de $\mathcal{O}_{\overline{X}}$ en degré 0.

1.4. Énoncé des résultats. — Soient $\mathcal{O}_X$ le faisceau des fonctions holomorphes sur X, $\mathcal{O}_X^*$ le faisceau des fonctions holomorphes inversibles. Compte tenu de l'identification $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) \xrightarrow{\sim} H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, à la suite exacte de faisceaux sur X :

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathcal{O}_X \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_X^* \to 0,$$

on associe la suite exacte

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\exp} \mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) \xrightarrow{c_{\mathbf{Z}}} H^2(X, \mathbf{Z}),$$

où $c_{\mathbf{Z}}$ est l'application qui à un fibré associe sa classe de Chern entière. On munit $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ de la filtration croissante $G = (G_l)_{l \in \mathbf{N}}$, définie par

$$G_l H^1(X, \mathcal{O}_X) = \mathrm{Im}(H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(l\, Y)) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)),$$

où $\mathcal{O}_{\overline{X}}(lY)$ est le faisceau sur $\overline{X}$ des fonctions méromorphes qui présentent au pis un pôle d'ordre l le long de Y. De même, $H^2(X, \mathbf{Z})$ sera muni de la filtration croissante, notée encore $(G_l)_{l \in \mathbf{N}}$, définie par

$$G_l H^2(X, \mathbf{Z}) = \mathrm{Ker}(H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(l\, Y))),$$

où la flèche écrite est la composée des flèches naturelles

$$H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathbf{C}) \to H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \to H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(l\, Y)).$$

La filtration ainsi obtenue sur $H^2(X, \mathbf{Z})$ est stationnaire, car c'est un groupe abélien de type fini.

Théorème. — *Dans la suite exacte*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\exp} \mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) \xrightarrow{c_{\mathbf{Z}}} H^2(X, \mathbf{Z}),$$

les morphismes sont, pour les filtrations ci-dessus, des morphismes d'objets filtrés, et ces morphismes sont stricts.

Corollaire 1. — *Supposons* $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ *et* $H^2(X, \mathcal{O}_X) = 0$. *Alors l'isomorphisme*

$$c_{\mathbf{Z}}: \quad \mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) \to H^2(X, \mathbf{Z})$$

est un isomorphisme d'objets filtrés, et les filtrations sont stationnaires. Ceci est vrai en particulier si X *est de Stein.*

Corollaire 2. — *Supposons* $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ *et* $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(Y)) = 0$. *Alors la filtration de* $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)$, *décrite ci-dessus, se réduit aux termes* $G_0 \subseteq G_1$, *et on a :*

1° $G_1 = \mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)$;

2° G_0 *est l'image réciproque de* $F^1 \; H^2(X, \mathbf{C})$ *par l'application* $c_{\mathbf{C}} : \mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) \to H^2(X, \mathbf{C})$ *qui à un fibré associe sa classe de Chern complexe.*

Ces résultats sont vrais en particulier lorsque Y *est suffisamment ample.*

3° *Si de plus* $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) \neq 0$, *alors* $G_0 \neq G_1$.

Démonstration. — Seule l'assertion 3° demande une explication. Puisque la variété X est kählérienne, l'application

$$H^2(\overline{X}, \mathbf{C}) \to H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$$

est surjective; il en résulte que l'on peut trouver une classe de cohomologie entière $\xi \in H^2(\overline{X}, \mathbf{Z})$ dont l'image dans $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ est non nulle. Alors $\xi \mid X$ est la classe de Chern d'un fibré holomorphe de rang 1 qui ne porte pas de métrique d'ordre 0.

Pour les fibrés qui se prolongent topologiquement à $\overline{X}$, Griffiths et Cornalba ([1], th. 5) donnent des résultats analogues à ceux du corollaire 2. Signalons aussi que les fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 sur X, qui sont isomorphes à des fibrés algébriques, correspondent aux fibrés de G_0 dont le résidu dans $H^1(Y, \mathbf{C})$ est nul, c'est-à-dire qui se prolongent topologiquement à $\overline{X}$. Ce complément, dû à Griffiths ([3], th. 3), est vrai sans hypothèse sur Y ou X, et s'obtient aussi comme conséquence de notre théorème.

Corollaire 3. — *Soit* $\mathcal{O}_{X, \mathrm{alg}}$ *le faisceau des fonctions algébriques régulières sur la variété algébrique* X; *posons*

$$G_{0.f}\,\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) = \bigcup_{l \in \mathbf{N}} G_l\,\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X).$$

On a une suite exacte

$$H^1(X, \mathcal{O}_{X.\,\mathrm{alg}}) \to G_{0.f}\,\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) \xrightarrow{c_{\mathbf{Z}}} H^2(X, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathcal{O}_{X,\,\mathrm{alg}}).$$

Démonstration. — Ceci résulte de l'identification

$$H^q(X, \mathcal{O}_{X,\,\mathrm{alg}}) = \xrightarrow{\lim} H^q(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(l\,Y)).$$

COROLLAIRE 4. — *Supposons* $H^2(X, \mathcal{O}_{X,\,\mathrm{alg}}) = 0$, *et* $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. *Alors il existe, sur tout fibré vectoriel holomorphe de rang* 1 *au-dessus de* X, *une métrique d'ordre fini. Ceci arrive en particulier dans les cas suivants :*

(*a*) *X est affine*;

(*b*) *X est de dimension* 2, *et* $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Le résultat (*a*) n'est autre que celui de CORNALBA et GRIFFITHS ([1], th. 4).

COROLLAIRE 5. — *Lorsque la flèche naturelle*

$$H^1(X, \mathcal{O}_{X,\,\mathrm{alg}}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$$

n'est pas surjective, il existe sur X des fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 *sur X qui ne portent aucune métrique d'ordre fini.*

Démonstration. — L'hypothèse entraîne que la flèche

$$H^1(X, \mathcal{O}_{X,\,\mathrm{alg}}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)/H^1(X, \mathbf{Z})$$

n'est pas surjective, car $H^1(X, \mathbf{Z})$ est au plus dénombrable. Un élément du conoyau de cette flèche donne, dans $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)$, une classe qui n'est pas dans $G_{0.f}\,\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)$ d'après le corollaire 3.

1.5. EXEMPLES. — (A) Soit Y une courbe lisse de $\overline{X} = P_2(\mathbf{C})$, de degré $d > 1$, et donc de genre $g = (1/2)(d-1)(d-2)$; $X = \overline{X} - Y$ est affine, et l'on a en outre $H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = 0$, donc tout fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur $X = \overline{X} - Y$ a une métrique d'ordre 0.

Dans le cas présent

$$\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathbf{Z}/d\mathbf{Z} \oplus \underbrace{\mathbf{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbf{Z}}_{2g}$$

comme il résulte de la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(Y, \mathbf{Z}) & \to & H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}) & \to & H^2(X, \mathbf{Z}) & \to & H^1(Y, \mathbf{Z}) \to 0 \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr & & & & \\ \mathbf{Z} & & \mathbf{Z} & & & & \end{array}$$

où la première flèche est la multiplication par d. Dans cette décomposition, le sous-groupe $\mathbf{Z}/d\mathbf{Z}$ correspond exactement aux fibrés vectoriels algébriques de rang 1 sur X; les autres fibrés ont une métrique d'ordre 0, mais ne sont pas algébriques.

Ceci précise ainsi la proposition 4.8 de GRIFFITHS dans [3].

(B) Soit $X = \mathbf{C}^2 - \{0\}$; on prendra pour $\bar{X}$ l'éclaté de l'origine dans $P_2(\mathbf{C})$. Le morphisme naturel $H^1(X, \mathcal{O}_{X,\mathrm{alg}}) \to H^1(X, \mathcal{O}_X)$ est alors injectif, mais n'est pas surjectif. En effet, le calcul de $H^1(X, \mathcal{O}_{X,\mathrm{alg}})$ à l'aide du recouvrement affine

$$U_1 = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2;\ x \neq 0\}; \qquad U_2 = \{(x, y) \in \mathbf{C}^2;\ y \neq 0\}$$

permet d'identifier $H^1(X, \mathcal{O}_{X,\mathrm{alg}})$ à l'espace vectoriel des fractions rationnelles $\sum_{\nu<0,\mu<0} a_{\nu\mu}\, x^\nu y^\mu$ tandis que $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ s'identifie à l'espace des séries convergentes sur $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$ $\sum_{\nu<0,\mu<0} b_{\nu\mu}\, x^\nu y^\mu$.

Il résulte du corollaire 5 qu'il existe sur X des fibrés vectoriels holomorphes de rang 1 qui ne sont pas d'ordre fini le long de $Y = \bar{X} - X$; par exemple le fibré obtenu en recollant les fibrés triviaux $U_1 \times \mathbf{C}$ et $U_2 \times \mathbf{C}$ au-dessus de $U_{12} = U_1 \cap U_2$ grâce à l'automorphisme

$$U_{12} \times \mathbf{C} \to U_{12} \times \mathbf{C}$$
$$((x, y), t) \mapsto ((x, y), \exp(\sin 1/xy)\, t).$$

n'est pas d'ordre fini le long de Y.

(C) Soient Λ le sous-groupe discret de $\mathbf{C}^2$ engendré par la base (e_1, e_2) de $\mathbf{C}^2$, et $X = \mathbf{C}^2/\Lambda$. Soit z un vecteur de $\mathbf{C}^2$ tel que les vecteurs (e_1, e_2, z, iz) soient $\mathbf{R}$-indépendants. Si $\pi : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}$ est une forme $\mathbf{C}$-linéaire de noyau la droite engendrée par z, $\pi(\Lambda)$ est un réseau dans $\mathbf{C}$; la projection induite par π :

$$X = \mathbf{C}^2/\Lambda \to \mathbf{C}/\pi(\Lambda) = \Gamma$$

permet de regarder X comme fibré principal analytique de groupe structural $\mathbf{C}$, non trivial, au-dessus de la courbe elliptique Γ. Ce fibré est en fait algébrique, ce qui donne à X une structure de variété algébrique; on prendra pour $\bar{X}$ le fibré au-dessus de Γ de fibre $P_1(\mathbf{C})$ associé au fibré principal ci-dessus.

Comme variété analytique, $X \simeq \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$, et X est donc de Stein ([1]). On a donc

$$\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X) \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z},$$

([1]) Ainsi que l'a remarqué J.-P. SERRE, cette variété algébrique n'est pas affine.

et tous ces fibrés sont isomorphes à des fibrés algébriques : en effet, la restriction $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathbf{Z})$ est surjective, et $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}) = 0$ ce qui montre que tout fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X se prolonge analytiquement à $\overline{X}$.

Pour la structure de variété algébrique X' sur $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$, héritée du plongement $\mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^* \to P_2(\mathbf{C}) = \overline{X}'$, aucun des fibrés analytiques non triviaux n'est isomorphe à un fibré algébrique. Bien que le diviseur à l'infini $Y' = \overline{X}' - X'$ ait ici des croisements normaux, on peut étendre à cette situation la définition des fibrés d'ordre fini; tous les fibrés de $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X')$ sont d'ordre 0 le long de Y' [3].

(D) Soit M une surface de Riemann de genre $g > 0$; considérons la variété algébrique $X_1 = X \times M$, où X est la variété introduite dans l'exemple C, plongée dans $\overline{X}_1 = \overline{X} \times M$. On a une suite exacte

$$\begin{array}{c} \mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X_1) \to H^2(X_1, \mathbf{Z}) \to 0 \\ \qquad \| \\ \qquad \mathbf{Z}^{4g+2} \end{array}$$

qui résulte de $H^2(X_1, \mathcal{O}_{\overline{X}_1}) = 0$. Dans cet exemple, la flèche

$$H^2(X_1, \mathbf{C}) \to H^2(\overline{X}_1, \mathcal{O}_{\overline{X}^1}) \simeq \mathbf{C}^g$$

est non nulle, donc il existe une classe entière $\xi \in H^2(X_1, \mathbf{Z})$ dont l'image est non nulle dans $H^2(\overline{X}_1, \mathcal{O}_{\overline{X}_1})$. On en déduit que $G_0 \neq G_1$. En fait, la filtration de $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X_1)$ se réduit ici à

$$G_0 \subsetneq G_1 = \mathrm{Pic}_{an}(X_1)$$

comme on le voit en remarquant que la filtration de $H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$ se réduit à $G_0 = H^1(X_1, \mathcal{O}_{X_1})$, et celle de $H^2(X_1, \mathbf{Z})$ à $G_0 \subset G_1 = H^2(X_1, \mathbf{Z})$, car la flèche

$$H^2(\overline{X}_1, \mathcal{O}_{\overline{X}^1}) \to H^2(\overline{X}_1, \mathcal{O}_{\overline{X}^1}(Y_1)),$$

où $Y_1 = \overline{X}_1 - X_1$, est nulle. Par ailleurs, les éléments de G_0 correspondent aux fibrés algébriques, car la flèche $H^2(\overline{X}_1, \mathbf{Z}) \to H^2(X_1, \mathbf{Z})$ est surjective.

Par contre, sur la variété algébrique $X_1' = X' \times M$, qui est analytiquement isomorphe à X_1, tous ces fibrés sont d'ordre 0 le long du diviseur $Y_1' = P_2(\mathbf{C}) \times M - X_1'$.

2. **Le morphisme** exp

2.1. Compatibilité aux filtrations. — Soit $g \in H^1(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(L_Y^l))$ une classe de cohomologie, et $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de $\overline{X}$ tel que g soit représenté, en cohomologie de Čech, par un 1-cocycle

$$(g_{i,j}) \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(L_Y^l)).$$

A ce cocycle est associé un fibré vectoriel de rang 1 holomorphe sur X, défini par les fonctions de transition $f_{i,j} = \exp(g_{i,j}/s^l)$, dont la classe d'isomorphisme dans $\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)$, qui ne dépend que de g, est par définition $\exp g$.

La démonstration de la proposition 1 montre qu'il existe sur ce fibré une métrique hermitienne d'ordre $\leqslant l$, et donc

$$\exp(G_l H^1(X, \mathcal{O}_X)) \subseteq G_l \mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X).$$

2.2. Une interprétation du résidu de $c_{\mathbf{Z}}(E)$. — Soient E un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X sur lequel existe une métrique d'ordre fini $\leqslant l$ le long de Y, et $\mathcal{U} = (U_i)$ un recouvrement ouvert de $\overline{X}$ par des ouverts de Stein tel que E soit représenté sur le recouvrement $\mathcal{V} = \mathcal{U} \cap X$ par les fonctions de transition

$$f_{i,j} = \varepsilon_{i,j} \exp(g_{i,j}/s^l)\, s^{k_{i,j}}$$

(*cf.* § 1.2). Considérons le complexe des cochaînes de Čech $\check{C}^{\bullet}(\mathcal{V}, \Omega_X^{\bullet})$ du recouvrement $\mathcal{V}$ de X à valeurs dans le complexe de De Rham holomorphe $\Omega_X^{\bullet}$: par définition

$$\check{C}^{\bullet}(\mathcal{V}, \Omega_X^{\bullet})^r = \bigoplus_{p+q=r} \check{C}^p(\mathcal{V}, \Omega_X^q),$$

et sa différentielle est donnée par $\delta + (-1)^p d$, où δ est la différentielle de Čech, et d la dérivation extérieure. On a un morphisme canonique

$$H^r(\check{C}^{\bullet}(\mathcal{V}, \Omega_X^{\bullet})) \to H^r(X, \mathbf{C})$$

obtenu en plongeant le complexe $\Omega_X^{\bullet}$ dans le complexe de De Rham $A_X^{\bullet}$ des formes de classe C^{∞}, et en identifiant

$$H^r(\check{C}^{\bullet}(\mathcal{V}, A_X^{\bullet})) \xrightarrow{\sim} H^r(X, \mathbf{C}),$$

où $\check{C}^{\bullet}(\mathcal{V}, A_X^{\bullet})$ est défini de manière analogue à $\check{C}^{\bullet}(\mathcal{V}, \Omega_X^{\bullet})$. Le recouvrement $\mathcal{V}$ étant de Stein, ce morphisme est en fait un isomorphisme.

LEMME 1. — *Dans l'isomorphisme ci-dessus, le cocycle*

$$(1/2\,\pi\sqrt{-1})\,d\log f_{i,j})$$

a pour image la classe de Chern $c_{\mathbf{C}}(E)$ *de* E *dans* $H^2(X, \mathbf{C})$.

Démonstration. — Posons, avec les notations du paragraphe 1.2 :

$$\omega_i = \frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\sum_j \eta_j\, d\log f_{i,j}.$$

Le système $\omega = (\omega_i)$ définit une cochaîne de $\check{C}^0(\mathscr{V}, A_X^1)$, et la démonstration de la proposition 2 a montré que le cocycle $d\omega = (d\omega_i)$ de $\check{C}^0(\mathscr{V}, A_X^2)$ donne un représentant pour $c_{\mathbf{C}}(E)$. Le cocycle

$$-\delta\omega = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\,d\log f_{i,j}\right),$$

qui lui est cohomologue dans $\check{C}^{\bullet}(\mathscr{V}, A_X^{\bullet})$, est aussi un représentant pour $c_{\mathbf{C}}(E)$.

LEMME 2. — *Le cocycle* $k = (k_{i,j}) \in \check{C}^1(\mathscr{U} \cap Y, \mathbf{Z})$ *a pour image dans* $H^1(Y, \mathbf{Z})$ *le résidu de la classe de Chern* $c_{\mathbf{Z}}(E)$.

Démonstration. — Le morphisme résidu res : $\Omega_{\bar{X}}\langle Y\rangle \to \Omega_Y^{\bullet}(-1)$ induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(\check{C}^{\bullet}(\mathscr{U}, \Omega_{\bar{X}}^{\bullet}\langle Y\rangle)) & \to & H^2(X, \mathbf{C}) \\ {\scriptstyle\text{res}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\text{res}} \\ H^1(\check{C}^{\bullet}(\mathscr{U} \cap Y, \Omega_Y^{\bullet})) & \to & H^1(Y, \mathbf{C}) \end{array}$$

Soit $i : X \to \bar{X}$ l'injection canonique; le morphisme canonique

$$\Omega_{\bar{X}}^{\bullet}\langle Y\rangle \to i_*\,\Omega_X^{\bullet}$$

induit un isomorphisme en cohomologie

$$H^r(\check{C}^{\bullet}(\mathscr{U}, \Omega_{\bar{X}}^{\bullet}\langle Y\rangle)) \to H^r(\check{C}^{\bullet}(\mathscr{V}, \Omega_X^{\bullet}))$$

comme on le voit en utilisant le fait que, pour tout ouvert de Stein U de $\bar{X}$, le morphisme de restriction

$$\Gamma(U, \Omega_{\bar{X}}^{\bullet}\langle Y\rangle) \to \Gamma(U \cap X, \Omega_X^{\bullet})$$

est un quasi-isomorphisme d'après DELIGNE et l'une des suites spectrales d'un bicomplexe. Plus précisément, si on considère les sous-complexes

$$F^1 \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{\overline{X}}\langle Y\rangle) \subset \check{C}^\bullet(\mathcal{U}, \Omega^\bullet_{\overline{X}}\langle Y\rangle)$$

et

$$F^1 \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega^\bullet_X) \subset \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega^\bullet_X),$$

engendrés par les cochaînes de type (p, q), avec $p \neq 0$, le morphisme de restriction

$$F^1 \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega^\bullet_{\overline{X}}\langle Y\rangle) \to F^1 \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega^\bullet_X)$$

induit un isomorphisme en cohomologie. Le cocycle

$$\check{c} = (1/2\pi\sqrt{-1})\, d\log f_{i,j})$$

de $F^1 \check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega^\bullet_X)$ peut donc s'écrire :

$$\check{c} = a + b + (\delta - d)\,\rho,$$

avec $a \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \Omega^1_{\overline{X}}\langle Y\rangle)$, $b \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \Omega^0_{\overline{X}}\langle Y\rangle)$ et $\rho \in \check{C}^1(\mathcal{V}, \Omega^0_X)$. On obtient en particulier, en décomposant en types

$$\check{c} = a - d\rho.$$

D'autre part, en utilisant la connexion associée à la métrique sur le fibré L_Y, on peut écrire sur $V_{i,j} = V_i \cap V_j$:

$$\check{c}_{i,j} = d\left(\frac{g_{i,j}}{s^l}\right) + k_{i,j}\frac{Ds}{s} + h_{i,j},$$

où $h_{i,j}$ est de classe C^∞ sur $U_i \cap U_j$. Il en résulte que $k = (k_{i,j})$ est le résidu de a, et aussi celui de $a+b$. Comme $a+b$ est cohomologue à $\check{c}$ dans $\check{C}^\bullet(\mathcal{V}, \Omega^\bullet_X)$, il a aussi pour image $c_{\mathbf{C}}(E)$ dans $H^2(X, \mathbf{C})$. Du diagramme commutatif ci-dessus résulte que l'image de k dans $H^1(Y, \mathbf{C})$ est le résidu de $c_{\mathbf{C}}(E)$. On obtient alors le lemme 2 en remarquant que le morphisme $H^1(Y, \mathbf{Z}) \to H^1(Y, \mathbf{C})$ est injectif.

2.3. Le morphisme exp est strict. — Supposons qu'outre les hypothèses du paragraphe 2.2, le fibré E provienne de $H^1(X, \mathcal{O}_X)$, ou si l'on préfère, que sa classe de Chern $c_{\mathbf{Z}}(E)$ soit nulle. L'application

$$H^1(\mathcal{U} \cap Y, \mathbf{Z}) \to H^1(Y, \mathbf{Z})$$

étant injective, le cocycle $k = (k_{i,j})$ est cohomologue à 0; ainsi il existe $(k_i) \in \check{C}^0(\mathcal{U}, \mathbf{Z})$ tel que $k_i - k_j = k_{i,j}$ chaque fois que $U_i \cap U_j \cap Y \neq \emptyset$.

Quitte à le raffiner au besoin, on peut supposer que le recouvrement $\mathcal{U}$ vérifie les propriétés suivantes :

(*a*) Sur U_i le fibré L_Y est trivial; on désignera par e_i une section non nulle de L_Y sur U_i, et on posera, sur U_i, $s = s_i\, e_i$;

(*b*) Les ouverts U_i et $U_{i,j} = U_i \cap U_j$ sont simplement connexes. On peut alors écrire, sur $V_{i,j}$:

$$\frac{f_i}{s_i^{ki}} = \exp(g'_{i,j}/s^l)\frac{f_j}{s_j^{kj}},$$

avec $g'_{i,j}$ section holomorphe de L_Y^l sur $U_{i,j}$. Ainsi les sections $f'_i = f_i/s_i^{k_i}$ de E sur V_i définissent des trivialisations de E avec, pour fonctions de transition

$$f'_{i,j} = \exp(g'_{i,j}/s^l).$$

Considérons le cocycle $\check{c}' \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbf{Z})$:

$$\check{c}' = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\delta\left(\frac{g'_{i,j}}{s^l}\right).$$

Par le morphisme canonique

$$\begin{array}{l} H^2(\mathcal{U}, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathbf{Z}) \\ \quad\;\; \downarrow \\ H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}) \end{array}$$

la classe de $\check{c}'$ a pour image $c_{\mathbf{Z}}(E)$, qui est nulle par hypothèse. Supposons d'abord Y connexe; le noyau du morphisme $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}) \to H^2(X, \mathbf{Z})$ est engendré par la classe de Chern $c_{\mathbf{Z}}(L_Y)$, et donc la classe $(\check{c}')$ de $\check{c}'$ dans $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z})$ s'écrit $(\check{c}') = \mu\, c_{\mathbf{Z}}(L_Y)$, avec $\mu \in \mathbf{Z}$. Si l'on écrit, sur $U_{i,j}$:

$$e_i = e^{h_{i,j}} e_j,$$

avec $h_{i,j}$ holomorphe sur $U_{i,j}$, $c_{\mathbf{Z}}(L_Y)$ est l'image dans $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z})$ du cocycle $\check{\gamma} \in \check{C}^2(\mathcal{U}, \mathbf{Z})$:

$$\check{\gamma} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\delta(h_{i,j}),$$

et l'on a donc $\check{c}' = \mu\check{\gamma} + \delta\nu$, avec $\nu = (\nu_{i,j}) \in \check{C}^1(\mathcal{U}, \mathbf{Z})$. Les sections $f'_i s_i^{\mu}$ de E sur V_i définissent de nouvelles trivialisations de E, avec, pour fonctions de transition

$$\begin{aligned} f''_{i,j} &= \exp(g'_{i,j}/s^l - \mu\, h_{i,j}) \\ &= \exp g''_{i,j}, \end{aligned}$$

avec $g''_{i,j} = (g'_{i,j}/s^l) - \mu\, h_{i,j} - 2\,\pi\sqrt{-1}\,\nu_{i,j}$. Mais $(g''_{i,j})$ définit un cocycle de $\check{C}^1(\mathcal{U}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(l\,X))$ dont l'image par l'application exponentielle est isomorphe au fibré E. Ainsi

$$G_l \operatorname{Pic}_{an}(X) \cap \operatorname{Im} H^1(X, \mathcal{O}_X) \subseteq \operatorname{Im} G_l H^1(X, \mathcal{O}_X).$$

Si Y n'est pas connexe, on a, dans $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z})$:

$$(\check{c}') = \sum_1^m \mu_i\, c_{\mathbf{Z}}(L_{Y_i})$$

avec $\mu_i \in \mathbf{Z}$, où les Y_i sont les composantes connexes de Y. Il suffit de remplacer, dans la démonstration ci-dessus, L_Y par $L_{Y_1}^{\mu_1} \otimes \ldots \otimes L_{Y_m}^{\mu_m}$

3. **Le morphisme** $c_{\mathbf{Z}}$

3.1 Soit $A^{\bullet}_{\overline{X}}\langle Y\rangle$ le sous-complexe de $A^{\bullet}(X)$ des formes différentielles φ de classe C^∞ sur X qui s'écrivent :

$$\varphi = \alpha\, d' \log |s|^2 + \beta \,|\, X,$$

avec $\alpha \in A^{r-1}(\overline{X})$, $\beta \in A^r(\overline{X})$, où r désigne le degré de φ. D'après P. Deligne [2], l'inclusion $A^{\bullet}_{\overline{X}}\langle Y\rangle \subsetneq A^{\bullet}(X)$ induit en cohomologie un isomorphisme $H^r(A^{\bullet}_{\overline{X}}\langle Y\rangle) \to H^r(X, \mathbf{C})$.

De plus, le morphisme $H^r(X, \mathbf{C}) \to H^r(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$, décrit au paragraphe 1.3, s'interprète comme morphisme induit en cohomologie par le morphisme de complexes $A^{\bullet}_{\overline{X}}\langle Y\rangle \to A^{0,\cdot}(X)$ qui à la forme $\varphi = \alpha\, d' \log |s|^2 + \beta \,|\, X$ de $A^r_{\overline{X}}\langle Y\rangle$ associe la partie $\beta^{0,r}$ de type $(0, r)$ de β.

3.2. Soit $\Omega^p_{\overline{X}}(\star\, Y)$ le faisceau sur $\overline{X}$ des p-formes différentielles méromorphes à pôle le long de Y; la dérivation extérieure donne un complexe noté $\Omega^{\bullet}_X(\star\, Y)$:

$$0 \to \Omega^0_{\overline{X}}(\star\, Y) \xrightarrow{d} \Omega^1_{\overline{X}}(\star\, Y) \xrightarrow{d} \Omega^2_{\overline{X}}(\star\, Y) \to \ldots$$

Soit l un entier > 0. On considère le sous-complexe $P_l\,\Omega^{\bullet}_X(\star\, Y)$ de $\Omega^{\bullet}_{\overline{X}}(\star\, X)$, défini par

$$0 \to \Omega^0_{\overline{X}}(l\, Y) \xrightarrow{d} \Omega^1_{\overline{X}}((l+1)\, Y) \xrightarrow{d} \Omega^2_{\overline{X}}((l+2)\, Y) \to \ldots$$

où $\Omega^p_{\overline{X}}(l\, Y)$ est le faisceau sur $\overline{X}$ des p-formes méromorphes ayant au pis un pôle d'ordre l le long de Y. D'après Deligne [2] (prop. 3.1.8), l'inclusion $\Omega^{\bullet}_X\langle Y\rangle \to P_l\,\Omega^{\bullet}_{\overline{X}}(\star\, Y)$ induit un isomorphisme en hyper-cohomologie

$$H^r(\overline{X}, \Omega^{\bullet}_{\overline{X}}\langle Y\rangle) \to H^r(\overline{X}, \mathrm{P}_l\,\Omega^{\bullet}_{\overline{X}}(\star\, Y)).$$

Soit $A_{\overline{X}}^{0,\cdot}$ le faisceau des formes différentielles de classe C^{∞}, de type (0,.) sur $\overline{X}$. L'hypercohomologie $H^r(\overline{X}, P_l\,\Omega_{\overline{X}}^{\cdot}(\star\, Y))$ se calcule comme cohomologie du sous-complexe $P_l\,A^{\cdot}(\overline{X}, \star\, Y)$ de $A^{\cdot}(X)$, défini par

$$P_l\,A^{\cdot}(\overline{X}, \star\, Y) = \Gamma(\overline{X}, P_l\,\Omega_{\overline{X}}^{\cdot}(\star\, Y) \otimes_{\mathcal{O}_{\overline{X}}} A_{\overline{X}}^{0,\cdot}).$$

En d'autres termes, $P_l\,A^{\cdot}(\overline{X}, \star\, Y)$ est le complexe des formes différentielles φ de classe C^{∞} sur X qui s'écrivent, en degré r;

$$\varphi = \sum_{i=0}^{r} \frac{\varphi^{i,r-i}}{s^{l+i}},$$

avec $\varphi^{i,r-i} \in A^{i,r-i}(\overline{X}, L_Y^{l+i})$.

Le résultat de DELIGNE peut donc s'énoncer : L'injection

$$A_{\overline{X}}^{\cdot}\langle Y\rangle \to P_l\,A^{\cdot}(\overline{X}, \star\, Y)$$

induit un isomorphisme en cohomologie.

3.3. COMPATIBILITÉ DE $c_{\mathbf{Z}}$ AUX FILTRATIONS. — Il s'agit de montrer que

$$c_{\mathbf{Z}}(G_l\,\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)) \subset G_l\,H^2(X, \mathbf{Z})$$

c'est-à-dire encore de montrer que si E est un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X qui porte une métrique d'ordre $\leqslant l$ le long de Y, la classe de Chern $c_{\mathbf{C}}(E)$ a une image nulle dans $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(l\,Y))$. D'après la proposition 2, $c_{\mathbf{C}}(E)$ a un représentant dans $A^2(X)$ de la forme

$$\frac{\alpha}{s^l}\,d'\log|s|^2 + \frac{\beta}{s^l},$$

avec $\alpha \in A^1(\overline{X}, L_Y^l)$, $\beta \in A^{1,1}(\overline{X}, L_Y^l) + A^{2,0}(\overline{X}, L_Y^l)$. Ainsi, lorsque $l = 0$, ce représentant est dans $A_{\overline{X}}^2\langle Y\rangle$, et se projette sur 0 dans $A^{0,2}(\overline{X})$. Ceci montre que

$$c_{\mathbf{Z}}(G_0\,\mathrm{Pic}_{\mathrm{an}}(X)) \subseteq G_0\,H^2(X, \mathbf{Z}).$$

Lorsque l est positif, on peut écrire, d'après le paragraphe 3.2 :

$$\frac{\alpha}{s^l}\,d'\log|s|^2 + \frac{\beta}{s^l} = \alpha_1\,d'\log|s|^2 + \beta_1 + d\rho,$$

avec $\rho \in P_l A^1(\overline{X}, \star Y)$, $\alpha_1 \in A^1(\overline{X})$ et $\beta_1 \in A^2(\overline{X})$. On a donc, en décomposant en types

$$\rho = \frac{\rho^{0,1}}{s^l} + \frac{\rho^{1,0}}{s^{l+1}},$$

avec $\rho^{0,1} \in A^{0,1}(\overline{X}, L_Y^l)$ et $\rho^{1,0} \in A^{1,0}(\overline{X}, L_Y^{l+1})$. Ceci donne, en prenant la partie de type (0,2) dans l'égalité ci-dessus

$$\beta_1^{0,2} + d''\left(\frac{\rho^{0,1}}{s^l}\right) = 0.$$

D'après le paragraphe 3.1, l'image de $c_{\mathbf{C}}(E)$ dans $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ est donnée *via* l'isomorphisme de Dolbeault, par la classe de $\beta_1^{0,2}$ dans $H^2(A^{0,\cdot}(\overline{X}))$. Dans $A^{0,2}(\overline{X}, L_Y^l)$, on a donc

$$\beta_1^{0,2} s^l = d'' \rho^{0,1},$$

ce qui montre que l'image de $c_{\mathbf{C}}(E)$ dans $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(L_Y^l))$ est nulle, et donc que $c_{\mathbf{Z}}(E) \in G_l H^2(X, \mathbf{Z})$.

3.4. UNE VARIANTE DE 3.1. — Soient V un voisinage ouvert de Y dans $\overline{X}$ tel que l'inclusion de Y dans V soit une équivalence d'homotopie, et $\varepsilon : \overline{X} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^∞ à support compact dans V, qui vaut 1 au voisinage de Y. On considère le complexe $B_{\mathbf{X}}^{\bullet}\langle Y \rangle$, défini par

$$B_{\overline{X}}^r \langle Y \rangle = A^{r-1}(V) \oplus A^r(\overline{X})$$

et dont la différentielle $d : B_{\overline{X}}^r \langle Y \rangle \to B_{\overline{X}}^{r+1} \langle Y \rangle$ est donnée par la matrice

$$\begin{pmatrix} d & 0 \\ (-1)^{r-1}\omega_\varepsilon & d \end{pmatrix}, \qquad \text{où} \quad \omega_\varepsilon = d'' d'(\varepsilon \log |s|^2).$$

L'application $\Phi : B_{\overline{X}}^{\bullet}\langle Y \rangle \to A_{\overline{X}}^{\bullet}\langle Y \rangle$ définie par

$$\Phi(\alpha, \beta) = \alpha\, d'(\varepsilon \log |s|^2) + \beta$$

est alors un morphisme de complexes.

PROPOSITION 3. — *Le morphisme Φ induit un isomorphisme en cohomologie.*

Démonstration. — On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A^{\bullet}(X) & \to & B^{\bullet}_X\langle Y\rangle & \to & A^{\bullet}(V)(-1) & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle 1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} & & \downarrow & & \\ 0 & \to & A^{\bullet}(X) & \to & A^{\bullet}_X\langle Y\rangle & \xrightarrow{\text{res}} & A^{\bullet}(Y)(-1) & \to & 0 \end{array}$$

dans lequel la première ligne est exacte; la seconde ligne n'est pas exacte, mais induit cependant une suite exacte longue en cohomologie; la flèche $A^{\bullet}(V)(-1) \to A^{\bullet}(Y)(-1)$ est la restriction à Y, et induit donc un isomorphisme en cohomologie; il résulte du lemme des cinq qu'il en est de même pour Φ.

COROLLAIRE 1. — *Toute classe de cohomologie $c \in H^r(X, \mathbf{C})$ peut se représenter par une forme fermée $\varphi \in A^r(X)$ s'écrivant :*

$$\varphi = \alpha\, d'(\varepsilon \log |s|^2) + \beta,$$

avec $\alpha \in A^{r-1}(V)$, $\beta \in A^r(\overline{X})$, et $d\alpha = 0$. L'image de c dans $H^r(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ est donnée par la classe de la partie $\beta^{0,r}$ de type $(0, r)$ de β dans $H^r(A^{0,\cdot}(\overline{X}))$.

COROLLAIRE 2. — *Toute classe de cohomologie $c \in H^r(X, \mathbf{C})$ peut se représenter par une forme fermée $\varphi \in A^r(X)$ s'écrivant :*

$$\varphi = \alpha\, d^c(\varepsilon \log |s|^2) + \beta,$$

avec $\alpha \in A^{r-1}(V)$, $\beta \in A^r(X)$ et $d\alpha = 0$. L'image de c dans $H^r(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}})$ est donnée par la classe de $\beta^{0,r}$ dans $H^r(A^{0,\cdot}(\overline{X}))$. Si de plus $c \in H^r(X, \mathbf{R})$, on peut prendre α et β *réelles.*

Le corollaire 2 résulte du corollaire 1 en utilisant la relation

$$d + \sqrt{-1}\, d^c = 2\, d'.$$

3.5. CALCUL D'UNE FORME DE CHERN. — Soit $\omega^{0,1}$ une forme de type $(0, 1)$ sur X, d''-fermée. Soit F le fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X dont le fibré C^{∞} sous-jacent est le fibré trivial $X \times \mathbf{C}$, et dont les sections holomorphes sont les fonctions de classe C^{∞} $f : X \to \mathbf{C}$ qui vérifient l'équation

$$d'' f - 2\pi \sqrt{-1}\, \omega^{0,1} f = 0.$$

LEMME. — *La structure hermitienne triviale h_0 sur $X \times \mathbf{C}$ a pour forme de Chern, pour la structure holomorphe ci-dessus*

$$c(F, h_0) = 2\, R_e(d'\, \omega^{0,1}).$$

Démonstration. — La connexion associée est définie par

$$D = D' + d'' - 2\pi\sqrt{-1}\,\omega^{0,1}, \qquad \text{avec} \quad D' = d' - 2\pi\sqrt{-1}\,\overline{\omega}^{0,1},$$

c'est-à-dire

$$D = d - 4\pi\sqrt{-1}\,R_e\,\omega^{0,1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} c(F, h_0) &= \sqrt{-1}/2\pi\, D^2 \\ &= 2\,d(R_e\,\omega^{0,1}) = 2\,R_e(d'\,\omega^{0,1}). \end{aligned}$$

3.6. Le morphisme $c_{\mathbf{Z}}$ est strict. — Il s'agit de montrer que l'on a l'inclusion

$$G_l H^2(X, \mathbf{Z}) \cap \operatorname{Im} c_{\mathbf{Z}} \subset c_{\mathbf{Z}}(G_l \operatorname{Pic}_{\mathrm{an}}(X)).$$

Soit E un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X dont la classe en Chern $c_{\mathbf{C}}(E)$ s'annule dans $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(L_Y^l))$. Nous allons construire un fibré vectoriel holomorphe de rang 1 sur X, E', portant une métrique hermitienne d'ordre fini $\leqslant l$ le long de Y, et tel que $c_{\mathbf{Z}}(E') = c_{\mathbf{Z}}(E)$.

Soit h une métrique hermitienne arbitraire sur E. D'après le corollaire 2 du paragraphe 3.4, on peut écrire :

$$c(E, h) = \alpha\, d^c(\varepsilon \log|s|^2) + \beta + d\rho,$$

avec $\alpha \in A^1(V)$, $\beta \in A^2(\overline{X})$, $\rho \in A^1(X)$, $d\alpha = 0$, α, β, ρ étant des formes réelles. En décomposant en types, on obtient :

$$\begin{cases} c(E, h) = 2\operatorname{Im}(\alpha^{0,1}\, d'(\varepsilon \log|s|^2)) + \beta^{1,1} + 2\,R_e\, d'\,\rho^{0,1} \\ \qquad -\sqrt{-1}\,\alpha^{0,1}\, d''(\varepsilon \log|s|^2) + \beta^{0,2} + d''\,\rho^{0,1} = 0. \end{cases}$$

Comme $d''\,\alpha^{0,1} = 0$, la deuxième égalité s'écrit encore :

$$d''(-\sqrt{-1}\,\alpha^{0,1}\,\varepsilon \log|s|^2 + \rho^{0,1}) + \beta^{0,2} = 0.$$

La forme $\beta^{0,2}\, s^l$ représente l'image de $c_{\mathbf{C}}(E)$ dans $H^2(\overline{X}, \mathcal{O}_{\overline{X}}(L_Y^l))$ On peut donc écrire par hypothèse

$$\beta^{0,2}\, s^l = d''\,\gamma^{0,1} \qquad \text{avec} \quad \gamma^{0,1} \in A^{0,1}(\overline{X}, L_Y^l).$$

Il en résulte que si l'on pose

$$\omega^{0,1} = -\sqrt{-1}\,\alpha^{0,1}\,\varepsilon \log|s|^2 + \rho^{0,1} + (\gamma^{0,1}/s^l),$$

la forme $\omega^{0,1}$ est de classe C^∞ sur X et d''-fermée; de plus

$$c(E, h) = \psi + 2\,R_e(d'\,\omega^{0,1}),$$

avec

$$\psi = -2\,\mathrm{Im}\,d'\,\alpha^{0,1}\,\varepsilon\log|s|^2 + 4\,\mathrm{Im}(\alpha^{0,1}\,d'(\varepsilon\log|s|^2)) \\ -2\,R_e\,d'\left(\frac{\gamma^{0,1}}{s^l}\right) + \beta^{1,1}.$$

Soit (F, h_0) le fibré vectoriel hermitien associé à la forme $\omega^{0,1}$ au paragraphe 3.5; le fibré hermitien $E' = E \otimes \check{F}$ a alors ψ pour forme de Chern. Il est clair que $c_{\mathbf{Z}}(E') = c_{\mathbf{Z}}(E)$. De plus, pour tout réel $\lambda > l$, on a

$$|\psi|_{\text{Poincaré}} \leqslant \frac{\text{Cte}}{|s|^\lambda},$$

ce qui montre que la métrique hermitienne sur E' est d'ordre $\leqslant l$, et termine la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Cornalba (M.) and Griffiths (P. A.). — Analytic cycles and vector bundles on non-compact algebraic varieties, *Invent. Math.*, Berlin, t. 28, 1975, p. 1-106.

[2] Deligne (P.). — *Théorie de Hodge*, II., Paris, Presses universitaires de France, 1972 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 40, p. 5-72).

[3] Griffiths (P. A.). — Function theory of finite order on algebraic varieties, *J. of diff. Geom.*, t. 6, 1972, p. 285-306, et t. 7, 1973, p. 45-66.

(Texte reçu le 26 janvier 1976.)

Joseph Le Potier,
Mathématiques,
U.E.R.
Sciences Fondamentales et Appliquées,
Université de Poitiers,
40, avenue du Recteur-Pineau,
86022 Poitiers.