

BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Remarques sur les équations différentielles linéaires du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 8 (1880), p. 35-36

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1880__8__35_0

© Bulletin de la S. M. F., 1880, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Remarques sur les équations différentielles linéaires
du second ordre; par M. LAGUERRE.*

(Séance du 5 décembre 1879.)

1. En désignant par P, Q, R des fonctions données de x et par z et u des fonctions arbitraires de cette variable, posons

$$Pz'' + Qz' + Rz = Z$$

et

$$Pu'' + Qu' + Ru = U.$$

Si l'on pose, pour abrégér,

$$S = e^{\int \frac{Q}{P} dx},$$

on déduit des équations précédentes

$$\begin{aligned} \frac{S(Zu - Uz)}{P} &= S(uz'' - zu'') + \frac{SQ}{P}(uz' - zu') \\ &= S(uz'' - zu'') + S'(uz' - zu'), \end{aligned}$$

d'où, en intégrant,

$$(A) \quad \int \frac{S(Zu - Uz) dx}{P} = S(uz' - zu').$$

2. En particulier, si u désigne une solution de l'équation

$$(1) \quad Py'' + Qy' + Ry = 0,$$

on a l'identité suivante :

$$(B) \quad \int \frac{SZu dx}{P} = S(uz' - zu').$$

Soit v une solution quelconque de l'équation (1); α désignant un paramètre arbitraire contenu dans les fonctions P, Q, R (ce paramètre peut du reste être la variable indépendante x elle-même), si l'on pose

$$\frac{dv}{d\alpha} = z,$$

3.

on voit que z satisfait à la relation

$$Pz'' + Qz' + Rz = - \left(\frac{dP}{d\alpha} v'' + \frac{dQ}{d\alpha} v' + \frac{dR}{d\alpha} v \right).$$

Si, dans l'équation (B), on remplace z par $\frac{dv}{d\alpha}$ et Z par sa valeur, il vient

$$(C) \quad \int \frac{S}{P} \left(\frac{dP}{d\alpha} v'' + \frac{dQ}{d\alpha} v' + \frac{dR}{d\alpha} v \right) u dx = S \left(\frac{dv}{d\alpha} \frac{du}{dx} - u \frac{d^2 v}{d\alpha dx} \right).$$

3. En désignant toujours par u et v deux solutions quelconques de l'équation (1), posons

$$z = uv;$$

il est aisé de voir que z satisfait à l'équation

$$Pz'' + Qz' + Rz = 2Pu'v' - Ruv;$$

l'équation (B) donne dans ce cas la relation suivante :

$$(D) \quad \int \frac{S(2Pu'v' - Ruv) u dx}{P} = Su^2 v'.$$

4. Il serait facile de multiplier le nombre de ces formules; je me contente ici de transcrire celles dont l'application est la plus fréquente, me réservant d'y renvoyer lorsque j'en aurai à faire usage dans les Communications que j'aurai occasion de présenter à la Société.
