BULLETIN DE LA S. M. F.

CHARLES DELORME

Espaces projectifs anisotropes

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 203-223

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__203_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
103, 1975, p. 203-223.

ESPACES PROJECTIFS ANISOTROPES

PAR

CHARLES DELORME

RÉSUMÉ. — Cet article traite des espaces projectifs attachés aux algèbres de polynômes graduées de façon inhabituelle. On y démontre des propriétés analogues à celle du cas classique : cohomologie, complexe dualisant,... en dépit de différences notables : ces espaces ne sont pas lisses, les modules associés aux modules gradués libres ne sont pas inversibles...

On donne comme application la construction de nombreux anneaux de Gorenstein non triviaux.

Introduction

Cet article présente des propriétés des espaces du type $P = \text{Proj}\, S$, où S est une algèbre de polynômes sur un anneau A, graduée de façon que les indéterminées soient homogènes de degrés entiers positifs divers, et que les éléments de A soient de degré 0.

Le chapitre 1 indique les réductions de degré qu'on peut opérer, et décrit les anneaux de coordonnées des schémas étudiés. Dans le chapitre 2, on recherche parmi les $\mathcal{O}_P(n)$ des modules amples, très amples, ou engendrés par leurs sections globales.

Le chapitre 3 traite de la cohomologie de ces espaces. Le chapitre 4 établit une correspondance entre les S-modules gradués et les $\mathcal{O}_P$-modules cohérents, semblable à celle du cas classique, où les degrés valent tous 1.

On décrit explicitement, au chapitre 5, le complexe dualisant de P (th. 5.2 et 5.7) et la relation entre la dualité de P et la dualité de S (5.6). Là encore les résultats ressemblent à ceux du cas classique.

Justification

Les espaces projectifs anisotropes sont assez importants pour qu'on les étudie systématiquement, mais on ne donne qu'une application un peu frappante, la construction, au paragraphe 5, de nombreux exemples non triviaux d'anneaux de Gorenstein.

A titre de curiosité, on montre au paragraphe 6 que toute courbe hyper-elliptique se plonge dans un plan projectif anisotrope, et peut être décrite globalement par une seule équation quasi homogène, bien que le faisceau d'idéaux ne soit pas inversible.

1. Réduction des degrés

1.1. Notations. — Soit x une application de source finie et non vide, de but l'ensemble $\mathbf{N}^+$ des entiers > 0.

On appelle :

$I(x)$ la source de x;

$r(x)+1 = |I(x)|$ le nombre d'éléments de $I(x)$;

$s(x)$ la somme $\sum_{i \in I(x)} x(i)$;

$m(x)$ le p. p. c. m. des $x(i)$;

$d(x, J)$ le p. g. c. d. des images par x des éléments de la partie non vide J de $I(x)$:

$$J_k = I(x) - \{k\},$$

$$\varepsilon(x) = \text{p.p.c.m.}_{j \in I(x)} d(x, J_j) \qquad (\text{pour } r(x) > 0).$$

1.2. Notations. — On appelle $S_A(x)$ l'algèbre graduée $A[X_i]_{i \in I(x)}$, où X_i a le degré $x(i)$, et $P_A(x)$ le schéma Proj $(S_A(x))$. Dans ces notations, on omettra parfois A et x si aucune confusion n'est à craindre.

Si M est un S-module gradué, on appelle comme d'habitude $M(n)$ le module obtenu par décalage de la graduation, c'est-à-dire $M(n)_p = M_{n+p}$, $\mathfrak{A}\, M$ le $\mathcal{O}_P$-module associé à M, et $\mathcal{O}_P(n) = \mathfrak{A}(S(n))$, où M_n est la composante de degré n de M.

On pose :

$D_i = \text{Spec}\,(S_{(X_i)})$ pour $i \in I$;

$D_J = \bigcap_{i \in J} D_i = \text{Spec}\,(S_{(X_J)})$, où $X_J = \prod_{i \in J} X_i$ et où J est une partie non vide de $I(x)$. Si $J \subset J'$, on a $D_J \supset D_J'$.

1.3. Proposition. — *Soit* $\tau(x) : I(x) \to \mathbf{N}^+$, *définie par les formules : si* $r(x) = 0 : \tau(x) = 1$, *et sinon* : $\tau(x)(i) = x(i)/\text{p.p.c.m.}_{k \in J_i} d(x, J_k)$.

On a $P_A(x) = P_A(\tau(x))$, et les modules non nuls de type $\mathcal{O}_p(n)$ sur $P_A(x)$ et $P_A(\tau(x))$ sont les mêmes. Autrement dit, on peut supposer que les $r(x)+1$ degrés $x(i)$ sont premiers entre eux $r(x)$ à $r(x)$.

C'est trivial pour $r = 0$. Sinon, soit T la sous-algèbre graduée de $S(x)$ dont les éléments homogènes sont ceux de $S(x)$ de degré multiple de $\varepsilon(x)$, avec la graduation induite. Alors Proj T = Proj $(S(x))$, et T n'est autre que $A[Y_i]_{i\in I}$, où $Y_i = X_i^{d(x,J_i)/d(x,I)}$ a pour degré $\varepsilon(x)\tau(x)(i)$. Ainsi, on passe de T à $S(\tau(x))$ en divisant tous les degrés par $\varepsilon(x)$, ce qui ne change pas le schéma Proj correspondant.

Les isomorphismes correspondants

$$S(\tau(x))_n \simeq T_{n\varepsilon(x)} = S(x)_{n\varepsilon(x)}$$

fournissent des isomorphismes naturels

$$g_*(\mathcal{O}_{P(\tau(x))}(n)) \simeq \mathcal{O}_{P(x)}(n\,\varepsilon(x)),$$

où g est l'isomorphisme naturel $P(\tau(x)) \to P(x)$.

Inversement, si n n'est pas multiple de $d(x, I)$, $S(x)(n) = 0$; on ne perd donc rien en simplifiant tous les degrés par leurs p. g. c. d. $d(x, I)$. Supposons maintenant $d(x, I) = 1$. Alors $x(i)$ et $d(x, J_i)$ sont premiers entre eux; un entier n se met de façon unique sous la forme $\lambda_i x(i)+\mu_i d(x, J_i)$, $0 \leqslant \lambda_i < d(x, J_i)$. Un monôme de degré $n+k\,d(x, J_i)$ a donc toujours $X_i^{\lambda_i}$ en facteur. D'où l'égalité de T-modules gradués

$$\oplus_{\varepsilon(x)\,|\,p}(S(x)(n))_p = \oplus_{\varepsilon(x)\,|\,p}((\textstyle\prod_{i\in I} X_i^{\lambda_i})(S(x)(n-\sum_{i\in I}\lambda_i x(i))))_p.$$

Les modules $\mathcal{O}_{P(x)}(n)$ et $\mathcal{O}_{P(x)}(n-\sum_{i\in I}\lambda_i x(i))$ sont donc isomorphes, et le second se retrouve comme module associé au $S(\tau(x))$-module gradué $S(\tau(x))((n-\sum_{i\in I}\lambda_i x(i))/\varepsilon(x))$. La réduction des degrés ne perd donc pas de modules du type $\mathcal{O}_P(n)$.

1.4. DÉFINITION. — *Si L est un ensemble fini, y une application $L \to \mathbf{N}^+$, n un entier, et d un entier > 0, on appelle $A[y, n, d]$ le sous-module libre sur A de l'anneau de polynômes $A[X_k]_{k\in L}$ engendré par les monômes X^b tels que*

$$\textstyle\sum_{k\in L} b(k)\,y(k) \equiv n \bmod (d), \qquad b(k) \geqslant 0.$$

La multiplication dans $A[X_k]_{k\in L}$ donne à $A[y, 0, d]$ une structure de A-algèbre, et aux $A[y, n, d]$ une structure de $A[y, 0, d]$-module, et fournit aussi des morphismes naturels

$$A[y, n, d] \otimes A[y, n', d] \to A[y, n+n', d],$$
$$A[y, n, d] \to \mathrm{Hom}(A[y, n', d], A[y, n+n', d]).$$

1.5. PROPOSITION. — *Soit J une partie non vide de $I(x)$.*

Soit G_J le groupe de rang $|J|-1$ formé des monômes X^c de $S_{(X_J)}$ tels que $c \mid I-J = 0$, et soit T_J un monôme de S_{X_J} de la forme X^t, avec $t \mid I-J = 0$, et $\sum_{i \in J} t(i)\, x(i) = d(x, J)$.

On a alors des isomorphismes de A-modules

$$\mathcal{O}_P(n)(D_J) \xrightarrow{\sim} A[G_J][x \mid I-J, n, d(x, J)]$$

compatibles aux structures de A-algèbres, de modules sur elles, et aux morphismes naturels.

$\mathcal{O}_P(n)(D_J)$ a une base sur A formée des monômes X^a tels que $a(i) \geqslant 0$ si $i \in I-J$ et que $\sum_{i \in I} a(i)\, x(i) = n$. Le morphisme annoncé est défini par

$$X^a \to ((\Pi_{i \in J} X_i^{a(i)})/T_J^e)(\Pi_{i \in I-J} X_i^{a(i)}),$$

où l'exposant e de T_J vaut $(\sum_{i \in J} a(i)\, x(i)/d(x, J))$. Les vérifications sont faciles.

1.6. COROLLAIRE. — *Si J est une partie non vide de I, et si n est multiple de $d(x, J)$, alors $\mathcal{O}_P(n)(D_J)$ est libre de rang 1 sur $\mathcal{O}_P(D_J)$ de base T_j^k, où $n = k.d(x, J)$.*

1.7. COROLLAIRE. — *Si J est une partie non vide de I, et si $d(x, J) = 1$, alors $\mathcal{O}_P(D_J) = A[G_J][X_i/T_J^{x(i)}]_{i \in I-J}$ est un localisé d'une algèbre de polynômes, donc D_J est lisse sur A, et $S_{X_J} = \mathcal{O}_P(D_J)[T_J, T_J^{-1}]$, donc la projection π : Spec $(S)-\{0\} \to$ Proj (S), restreinte à D_J, est isomorphe à $D_J \times$ Spec $(A[T, T^{-1}]) \to D_J$.*

1.8. *Remarques.* — D'après la réduction des degrés (proposition 1.3), les deux corollaires ci-dessus prennent effet sur un ouvert de P qui contient au moins tous les D_{J_i}.

La proposition 1.5 permet aussi de voir que si $x = \tau(x)$ et $d(x, J) \neq 1$, alors D_J n'est pas lisse, et si n n'est pas multiple de $d(x, J)$, alors $\mathcal{O}_P(n)(D_J)$ n'est pas libre sur $\mathcal{O}_P(D_J)$.

Si m est le p. p. c. m. des $x(i)$, $\mathcal{O}_P(qm)$ est inversible, et les morphismes

$$\mathcal{O}_P(qm)\otimes_{\mathcal{O}_P}\mathcal{O}_P(n)\to\mathcal{O}_P(qm+n)\quad\text{et}\quad\mathcal{O}_P(n)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P(qm),\ \mathcal{O}_P(qm+n))$$

sont bijectifs pour tous les entiers q et n, comme on peut s'en assurer en regardant sur chaque D_i.

2. Faisceaux amples

On examine le comportement de $O_p(n)$ et $O_p(nm)$ pour n assez grand (2.3). Pour préciser, introduisons quelques notations.

2.1. Définitions. — On appelle $G(x)$ le rationnel défini par les formules : si $r(x)=0$: $G(x)=-s(x)$, sinon :

$$G(x)=-s(x)+(1/r)\sum_{2\leqslant v\leqslant r+1}\binom{r-1}{v-2}^{-1}\sum_{|J|=v}m(x\,|\,J),$$

où r, s, m ont le même sens qu'en (1.1).

On appelle $D\,x\,(n)$ la condition portant sur l'entier n : « si

$$\sum_{i\in I}B(i)\,x(i)=n+k\,m(x),$$

avec k entier $\geqslant 0$ et $B\in N^I$, il existe $b\in\mathbf{N}^I$ tel que $B-b\in\mathbf{N}^I$ et $\sum_{i\in I}b(i)\,x(i)=km(x)$ ». Autrement dit, tout monôme X^B de degré $n+km(x)$ est divisible par un monôme X^b de degré $km(x)$.

On appelle $F(x)$ le plus petit entier tel que $n>F(x)$ implique $Dx(n)$.

On appelle $E(x)$ le plus petit entier tel que $n>m(x)\,E(x)$, et n multiple de $m(x)$ implique $Dx(n)$ (donc $m(x)\,E(x)\leqslant F(x)$).

2.2. Proposition. — *$F(x)$ est fini, et $F(x)\leqslant G(x)$ (ce qui signifie que si $n>G(x)$, alors $Dx(n)$ est vérifiée).*

On procède par récurrence sur k et $r(x)$. C'est vrai pour $k=0$. C'est vrai pour $r=0$.

Si c'est vrai pour $k=1$, avec x fixé, c'est vrai pour tout $k>0$. On le voit en remplaçant n par $n+(k-1)\,m(x)$.

Si c'est vrai pour les $x\,|\,J_i$, c'est vrai pour x, avec $k=1$.

En effet, il suffit de trouver $b\in\mathbf{N}^I$ tel qu'un des $b(i)$ soit nul. Il suffit donc qu'une des $r(x)+1$ inégalités soit satisfaite :

$$\sum_{j\in J_i}B(j)\,x(j)>G(x\,|\,J_i)+m(x),$$

car $m(x)$ est multiple de $m(x \mid J_i)$. Il suffit pour cela que l'inégalité suivante ait lieu :

$$\begin{aligned} & r(x) \sum_{j \in I} B(j)\, x(j) \\ & \quad = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J_i} B(j)\, x(j) > \sum_{i \in I} G(x \mid J_i) + m(x)(r(x)+1). \end{aligned}$$

Par construction de G, on a justement

$$\sum_{i \in I} G(x \mid J_i) + m(x) = r(x)\, G(x),$$

d'où la conclusion : il suffit que

$$\sum_{i \in I} B(i)\, x(i) > G(x) + m(x).$$

2.3. PROPOSITION.

(i) *Le module* $\mathcal{O}_P(m)$ *est ample.*

(ii) Si n > F, le module $\mathcal{O}_P(n)$ *est engendré par ses sections globales.*

(iii) *Si* $n > 0$ *et* $n > E$, *alors* $\mathcal{O}_P(nm)$ *est très ample.*

(ii) Soit $V \in S_v$, avec $v > 0$. Si $u \in \mathcal{O}_P(n)(D_V)$, u est de la forme U/V^q, avec $q > 0$, et $U \in S_{qv+n}$. Donc $u = UV^{qm-q}/V^{qm}$, avec $UV^{qm-q} \in S_{qmv+n}$. Alors UV^{qm-q} se met sous la forme $\sum U_\lambda V_\lambda$, où les U_λ sont des monômes de degré n et les V_λ des monômes de degré qmv. Or les U_λ définissent des sections globales de $\mathcal{O}_P(n)$ et les V_λ / V^{qm} sont des sections de $\mathcal{O}_P(D_V)$.

(iii) Tout monôme de S, de degré nmp, $p \in \mathbf{N}^+$, est un produit de monômes, de degré nm pour l'un, m pour les autres; en effet, comme $nm > E\,m$, on a $Dx(nm)$. Donc $\sum_{p \in \mathbf{N}} S_{nmp}$ est engendrée comme A-algèbre par S_{nm}. On applique alors EGA II ([2], 4.4.2).

(i) $\mathcal{O}_P(m)$ est inversible et $\mathcal{O}_P(mn) = \mathcal{O}_P(m)_{\otimes n}$ est très ample (1.8), ce qui suffit, selon EGA II ([2], 4.5.6).

2.4. DÉFINITIONS. — Soit $\sigma(x)$ l'injection naturelle de l'image de x dans $\mathbf{N}^+$. On a les inégalités :

$$s(x) > s(\sigma(x)) \quad \text{si } x \neq \sigma(x) \quad \text{(i. e. } x \text{ non injective)},$$
$$s(x) > s(\tau(x)) \quad \text{si } x \neq \tau(x) \quad (\tau \text{ a été défini en } 1.3).$$

On en déduit que la suite x, $\tau(x)$, $\sigma(\tau(x))$, $\tau(\sigma(\tau(x)))$, ... est stationnaire. On appelle $\rho(x)$ sa limite.

2.5. PROPOSITION. — *On a les égalités*

$$m(x) = m(\sigma(x)) \qquad et \qquad m(x) = m(\tau(x))\, \varepsilon(x),$$

$$F(x) = F(\sigma(x)),$$
$$E(x) = E(\sigma(x)) = E(\tau(x)) = E(\rho(x)).$$

Je ne donne pas ici la preuve, qui est fastidieuse.

2.6. *Remarques.* — Si $F(\rho(x)) < m(\rho(x))$, alors $E(x) = -1$ et $O_P(m)$ est très ample. Ceci se produit si $r(\rho(x)) \leqslant 2$. C'est trivial si $r(\rho(x)) = 0$. On ne peut avoir $r(\rho(x)) = 1$. Si $r(\rho(x)) = 2$, l'image de $\rho(x)$ est formée de trois entiers distincts, premiers entre eux deux à deux. En les nommant a, b, c, on a :

$$G(\rho(x)) = (1/2)(abc+ab+ac+bc)-(a+b+c) < abc = m(\rho(x)).$$

Il peut arriver que $O_P(m)$ ne soit pas très ample, comme le prouve l'exemple :

$$x = (1, 6, 10, 15), \qquad B = (1, 4, 2, 1)$$

car X^B est alors dans S_{2m}, mais pas dans l'image de $S_m \otimes S_m$.

Si $x = \tau(x)$ et $m(x) > 1$, on a $G(x) < r(x)\,m(x) - s(x)$.

3. **Cohomologie de** P

Les démonstrations de ce paragraphe n'utilisent rien des résultats qui précèdent. Les notations sont celles de 1.1 et 1.2.

3.1. THÉORÈME. — *Pour $n \geqslant 0$, le A-module $H^0(P, \mathcal{O}_P(n))$ est libre sur A, et a une base formée des X^B tels que $n = \sum_{i \in I} B(i)\,x(i)$ et $0 \leqq B(i)$; le morphisme naturel $S_n \to H^0(P, \mathcal{O}_P(n))$ est bijectif.*

Pour $n < 0$, le A-module $H^r(P, \mathcal{O}_P(n))$ est libre et possède une base formée des X^B tels que $n = \sum_{i \in I} B(i)\,x(i)$ et $0 > B(i)$.

Les autres groupes de cohomologie sont nuls.

Nous donnons ici la démonstration par J. GIRAUD de ce théorème. Quitte à ordonner les $r+1$ variables X_i, on peut supposer $I = \{0, \ldots, r\}$. A partir d'un S-module gradué M, on construit un complexe augmenté $M \to M^*$ de S-modules gradués par composition des suites exactes :

$$Q^{i-1} \to M^i \to Q^i \to 0, \qquad \text{pour} \quad 0 \leqslant i \leqslant r,$$

avec $Q^{-1} = M$, et $Q^{i-1} \to M^i$ est le morphisme naturel de Q^{i-1} vers son localisé $M^i = Q^{i-1} \otimes_S S[X_i^{-1}]$ muni de la graduation naturelle.

Ce complexe augmenté est transformé par le foncteur « faisceau associé » en un complexe de $\mathcal{O}_P$-modules :

$$0 \to \mathfrak{A} M \to \mathfrak{A} M^0 \to \ldots \to \mathfrak{A} M^r \to \mathfrak{A} Q^r \to 0.$$

On voit que $\mathfrak{A} Q^{i-1} \to \mathfrak{A} M^i$ est le morphisme d'adjonction $\mathfrak{A} Q^{i-1} \to w_{i*} w_i^* \mathfrak{A} Q^{i-1}$ pour l'immersion ouverte $w_i : D_i \to P$.

On en déduit trois choses : d'abord, $\mathfrak{A} M^i$ est acyclique pour le foncteur $\Gamma = H^0(P, .)$ car w_i et D_i sont affines; ensuite le support de $\mathfrak{A} Q^i$ est inclus dans le fermé $\bigcap_{0 \leqslant j \leqslant i} (P\text{-}D_j)$, en particulier $\mathfrak{A} Q^r = 0$; enfin $(M^i)_0 \to \Gamma\, \mathfrak{A} M^i$ est un isomorphisme.

Supposons maintenant que $M = S(n)$, et posons $M^{-1} = M$ et $M^{r+1} = Q^r$. Une base homogène de M^i est constituée des X^B avec $B(j) < 0$ pour $0 \leqslant j < i$ et $B(j) \geqslant 0$ pour $i < j \leqslant r$, et $B(i)$ quelconque, avec degré $(X^B) = \sum_{i \in I} B(i)\, x(i) - n$. La différentielle $d^i : M^i \to M^{i+1}$ envoie X^B sur X^B si cette fraction monomiale figure dans la base de M^{i+1}, sur 0 sinon.

Il en résulte que le complexe $0 \to M^{-1} \to M^0 \to \ldots \to M^{r+1} \to 0$ est exact, ainsi que son transformé par le foncteur $\mathfrak{A}$ qui est exact. La cohomologie de $\mathcal{O}_P(n)$ est l'homologie du complexe $\Gamma\, \mathfrak{A} M^0 \to \ldots \to \Gamma\, \mathfrak{A} M^r$, qui est aussi $M_0^0 \to \ldots \to M_0^r$, d'où la conclusion.

3.2. Proposition. — *Si V est un A-module, la cohomologie de $V \otimes_A \mathcal{O}_P(n)$ est donnée par*

$$H^p(P,\ V \otimes_A \mathcal{O}_P(n)) = V \otimes_A H^p(P, \mathcal{O}_P(n)).$$

On applique la construction précédente à $N = V \otimes_A S(n)$; le complexe N^* est exact, puisque c'est $V \otimes_A M^*$, où M^* est obtenu à partir de $M = S(n)$, et que M^* est plat sur A.

4. Faisceaux cohérents et modules gradués

Dans ce paragraphe, la condition $x = \tau(x)$ est supposée réalisée.

4.1. Lemme. — *Le morphisme naturel*

$$\varphi : \quad V \otimes_A O_P(n) \to \mathrm{Hom}(O_P(n'),\ V \otimes_A O_P(n+n'),$$

où V est un A-module, est bijectif.

On pose pour simplifier $R = \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P(n'), V \otimes_A \mathcal{O}_P(n+n'))$. On écarte le cas trivial $r = 0$. Soit $j \in I$. Posons $C_j = \bigcup_{i \in J_j} D_{J_i}$ (notations 1.1

et 1.2); C_j est l'ouvert de P, où X_j est inversible et où au plus un des X_i n'est pas inversible. On a les inclusions $D_{J_i} \subset C_j \subset D_j$ pour $i \neq j$. On a donc un diagramme commutatif, où les flèches horizontales sont des morphismes de restriction :

$$\begin{tikzcd}
V\otimes \mathcal{O}_P(n)(D_j) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi(D_j)"] & V\otimes \mathcal{O}_P(n)(C_j) \arrow[d, "\varphi(C_j)"] & \\
R(D_j) \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & R(C_j) \arrow[r] & R(D_I)
\end{tikzcd}$$

Sur un ouvert D_{J_i}, $\mathcal{O}_P(n)(D_{J_i})$ est libre sur $\mathcal{O}_P(D_{J_i})$, et a une base X^B, avec $B(i) = 0$ (car $d(x, J_i) = 1$). De même, $\mathcal{O}_P(n')(D_{J_i})$ a une base $X^{B'}$, avec $B'(i) = 0$. On a

$$\varphi(D_{J_i})(v \otimes X^B)(X^{B'}) = v \otimes X^{B+B'},$$

et $X^{B+B'}$ est encore une base de $\mathcal{O}_P(n+n')(D_{J_i})$. Ceci prouve que $\varphi(D_{J_i})$ est bijectif.

On en tire évidemment que $\varphi(C_j)$ est bijectif. Pour montrer que $\varphi(D_j)$ est bijectif, il suffit de vérifier que :

(*a*) La flèche du haut est bijective;

(*b*) La longue flèche du bas est injective.

(*a*) $V \otimes \mathcal{O}_P(n)(D_j) \to V \otimes \mathcal{O}_P(n)(C_j)$ est bijectif, car la base de $\mathcal{O}_P(n)(D_j)$ sur A, formée de monômes de degré n dans S_{X_j} est l'intersection des bases monomiales des $\mathcal{O}_P(n)(D_{J_i})$, dont la réunion est une partie de la base monomiale de $\mathcal{O}_P(n)(D_I)$, donc $V \otimes \mathcal{O}_P(n)(D_j)$ est bien le produit fibré des $V \otimes \mathcal{O}_P(n)(D_{J_i})$ sur $V \otimes \mathcal{O}_P(n)(D_I)$ de même que $V \otimes \mathcal{O}_P(n)(C_j)$, car $V \otimes \mathcal{O}_P(n)$ est un faisceau.

(*b*) $V \otimes \mathcal{O}_P(n+n')(D_j) \to V \otimes \mathcal{O}_P(n+n')(D_I)$ est injectif, car la base monomiale de $\mathcal{O}_P(n+n')(D_j)$ sur A est une partie de la base monomiale de $\mathcal{O}_P(n+n')(D_I)$. D'où la conclusion, car D_j et D_I sont affines.

4.2. Proposition. — *Pour tout $\mathcal{O}_P$-module quasi cohérent N, on pose*

$$\Gamma_n N = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P(-n), N) \qquad et \qquad \Gamma_+ N = \oplus_{n>0} \Gamma_n N.$$

Le foncteur Γ_+ ainsi défini est un adjoint à droite du foncteur $\mathfrak{A}_+$, restriction de $\mathfrak{A}$ à la catégorie des S-modules gradués dont les composantes de degré $\leqslant 0$ sont nulles.

Pour le prouver, on va définir les deux morphismes d'adjonction $\alpha : \mathrm{id} \to \Gamma_+ \mathfrak{A}_+$ et $\beta : \mathfrak{A}_+ \Gamma_+ \to \mathrm{id}$.

Si U est un élément de M_n, où M est un S-module gradué, $\alpha(M)(U)$ est l'homomorphisme global $\mathcal{O}_P(-n) \to \mathfrak{A} M$ qui à $W/V^a \in \mathcal{O}_P(-n)(D_V)$ fait correspondre $WU/V^a \in \mathfrak{A} M(D_V)$, où W et V sont deux éléments homogènes de S dont les degrés w et v vérifient $w = av - n$ et $v > 0$.

Si W est un morphisme global de $\mathcal{O}_P(-n)$ vers un $\mathcal{O}_P$-module quasi cohérent N, et si $V \in S_n$, $\beta(N)(D_V)$ envoie $W/V \in (\mathfrak{A}_+ \Gamma_+ N)(D_V)$ sur $W(1/V) \in N(D_V)$.

Il est aisé de vérifier les deux identités habituelles :

$$(1_{\Gamma+} \star \beta) \circ (\alpha \star 1_{\Gamma+}) = 1_{\Gamma+},$$
$$(\beta \star 1_{\mathfrak{A}+}) \circ (1_{\mathfrak{A}+} \star \alpha) = 1_{\mathfrak{A}+}$$

([1], I.7, prop. 7 et 8).

4.3. Proposition. — *Si N est un $\mathcal{O}_P$-module quasi cohérent, $\beta(N)$ est un isomorphisme.*

Ce morphisme est injectif : si $W(1/V) = 0$, c'est que W est nul sur D_V, car $1/V$ est une base du $\mathcal{O}_P(D_V)$-module $\mathcal{O}_P(-n)(D_V)$, où n est le degré de V. Il en résulte que W/V est nul.

Ce morphisme est surjectif : une section de N sur D_V est de la forme $U/V^{qm(E+2)}$, avec $U \in \Gamma_{qm(E+2)} N$, car $\mathcal{O}_P(m(E+2))$ est très ample (2.3), en vertu de EGA II ([2], 2.7.5).

Dans ce qui suit, l'anneau A est supposé noethérien.

4.4. Lemme. — *Les $\mathcal{O}_P(n)$ sont cohérents.*

D'après 2.3, $\mathcal{O}_P(n+qm)$ est engendré par ses sections globales pour q assez grand, et ces sections globales forment un A-module de type fini, selon 3.1. D'après 2.3, $\mathcal{O}_P(m)$ est ample, donc $\mathcal{O}_P(n)$ est localement isomorphe à $\mathcal{O}_P(n+qm)$ (1.8), donc localement de type fini.

4.5. Corollaire. — *Si M est un S-module gradué de type fini, $\mathfrak{A} M$ est un $\mathcal{O}_P$-module cohérent.*

4.6. Proposition. — *Si N est un $\mathcal{O}_P$-module cohérent, $\Gamma_+ N$ est un S-module gradué de type fini, et réciproquement.*

Considérons la sous-algèbre graduée S' de S, dont les éléments homogènes sont les éléments homogènes de S de degré multiple de $m(x)$ (qui est le p. p. c. m. des $x(i)$), munie de la graduation induite. Alors $P' = \operatorname{Proj}(S')$ est égal à P, et on a $\mathcal{O}_P(qm) = \mathcal{O}_{P'}(qm)$, qui est ample si $q > 0$. Si N est cohérent, Hom $(\mathcal{O}_P(-n), N)$ est cohérent. Comme $\mathcal{O}_P(m) = \mathcal{O}_{P'}(m)$ est ample, on a

$$\Gamma_{mg+n} N = \Gamma_{mg}(\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_P(-n), N)).$$

Par conséquent, $\Gamma_+ N = \bigoplus_{0<n\leqslant m}(\bigoplus_{g\geqslant 0} \Gamma_{mg+n} N)$ est somme directe de m modules gradués de type fini sur S', donc est de type fini sur S' et *a fortiori* sur S. La réciproque a été vue en 4.5.

4.7. *Remarque.* – Si on ne fait pas l'hypothèse $\tau(x) = x$, c'est-à-dire « les $x(i)$ sont $r(x)$ à $r(x)$ premiers entre eux », le lemme 1 tombe en défaut, car le morphisme naturel n'est plus toujours celui qui décrit l'isomorphisme entre les modules $V \otimes \mathcal{O}_P(n)$ et Hom $(\mathcal{O}_P(n'), V \otimes \mathcal{O}_P(n+n'))$.

4.8. *Exemple.* – Cet exemple a pour but de montrer que « tout ne se passe pas comme dans le cas classique ». Soit $x = (1.1.2)$, soit k un corps. Posons $S = S_k(x)$ et $P = P_k(x)$. Soit M le S-module gradué $S/(X_0, X_1)$.

L'anneau de coordonnées de $\mathcal{O}_P(D_2)$ est isomorphe à

$$B = k[u, v, w]/uw - v^2.$$

Il n'est donc pas régulier (comme on l'avait prévu en 1.8). Le module $\mathcal{O}_P(1)(D_2)$ est isomorphe à $Bu + Bv$ (ou $Bv + Bw$), et n'est donc pas inversible.

Le $\mathcal{O}_P$-module $\mathfrak{A} M$ est nul sur D_0 et D_1, et $M(D_2)$ est isomorphe à $B/(uB + vB + wB) \cong k$.

Le morphisme naturel $\mathcal{O}_P(1) \otimes_{\mathcal{O}_P} \mathcal{O}_P(1) \to \mathcal{O}_P(2)$ ne donne pas un isomorphisme comme dans le cas classique, mais a un noyau et un conoyau isomorphes à $\mathfrak{A} M$.

On peut vérifier aussi que Hom $(\mathcal{O}_P(-1), M)$, isomorphe à $(\mathfrak{A} M)^2$ n'est pas isomorphe à $\mathfrak{A}(M(1))$, qui est nul.

Enfin, on peut noter que $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{O}_P(1), \mathcal{O}_P(1))$ est isomorphe à $\mathfrak{A} M$ pour tout $i > 0$.

5. **Dualité**

Dans ce paragraphe, on a $x = \tau(x)$, et A est noethérien.

5.1. Préliminaires. – DP est la catégorie dérivée de la catégorie des $\mathcal{O}_P$-modules cohérents, $D^- P$, $D^+ P$, $D^b P$ sont ses sous-catégories formées des classes de complexes limités en degrés positifs, en degrés négatifs, des deux côtés, respectivement. De même DA est la catégorie dérivée de la catégorie des A-modules de type fini, etc.

A un complexe F^* de $D^+ A$, on fait correspondre le complexe G^* de $D^+ P$ défini par $G^* = F^* \otimes_A^L \mathcal{O}_P(-s)[r]$, le symbole $[r]$ exprimant un décalage des degrés : $G^p = F^{p+r} \otimes_A \mathcal{O}_P(-s)$, car $\mathcal{O}_P(-s)$ est plat sur A.

On dira que F^* est injectivement borné s'il est quasi isomorphe à un complexe de A-modules injectifs, nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

On dira que F^* est dualisant s'il est injectivement borné et si on a un isomorphisme fonctoriel sur DA :

$$\mathrm{id} \to R\,\mathrm{Hom}(R\,\mathrm{Hom}(.,F^*), F^*).$$

5.2. Théorème (*dualité globale*). — *Le foncteur $R\Gamma$ donne lieu à un isomorphisme de foncteurs contravariants de $D^- P$ vers DA, qui se prolonge à DP si F^* est injectivement borné,*

$$R\,\mathrm{Hom}(M^*, G^*) \to R\,\mathrm{Hom}_A(R\Gamma M^*, F^*).$$

Si Ψ est le foncteur $\mathrm{Hom}(H^r(P, .), F^*)$, on a un isomorphisme sur $D^- P$: $R\Psi \to R\,\mathrm{Hom}_A(LH^r(P, .), F^*)$. Les modules $\mathcal{O}_P(n)$, avec $n < 0$, sont acycliques pour le foncteur exact à droite $H^r(P, .)$, et $H^r(P, \mathcal{O}_P(n))$ est libre sur A, donc acyclique pour $\mathrm{Hom}(. , F^*)$ (3.1). Comme tout $\mathcal{O}_P$-module cohérent a une résolution à gauche par des sommes de modules du type $\mathcal{O}_P(n)$, on a l'existence de $R\Psi$, et l'isomorphisme annoncé sur $D^- P$ ([3], I.5.4).

Si de plus F^* est injectivement borné, les foncteurs $LH^r(P, .)$ et $R\,\mathrm{Hom}(., F^*)$ sont bornés, par conséquent $R\Psi$ est borné aussi et se prolonge à DP, ainsi que l'isomorphisme

$$R\Psi \to R\,\mathrm{Hom}(LH^r(P, .), F^*)$$

([3], I.5.4 et I.7.1).

Le foncteur $H^r(P, .)$ fournit un morphisme :

$$\theta : \quad \mathrm{Hom}_P(N, G^*) \to \mathrm{Hom}_A(H^r(P, N), H^r(P, G^*)).$$

On va voir que θ est un isomorphisme si $N = \mathcal{O}_P(n)$.

C'est trivial si $r = 0$.

Dans le cas général, on sait d'après 4.1 et 3.2, appliqués au complexe F^* au lieu du module V (ce qui est permis grâce à la platitude des $\mathcal{O}_P(n)$ et des $H^r(\mathcal{O}_P(n))$ sur A) que

$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_P(n),\ G^*) = F^* \otimes_A \mathcal{O}_P(-s-n)[r],$$
$$\operatorname{Hom}(\mathcal{O}_P(n),\ G^*) = F^* \otimes_A \Gamma\, \mathcal{O}_P(-s-n)[r],$$
$$H^r(P,\ G^*) = F^* \otimes_A H^r(P,\ \mathcal{O}_P(-s))[r] = F^*[r].$$

L'image par θ d'un élément $v \otimes X^B$, avec $v \in F^m$,

$$\textstyle\sum_{i \in I} B(i)\, x(i) = -n-s,$$

et $B(i) \geqslant 0$ pour $i \in I$, envoie X^D, avec $\sum_{i \in I} D(i)\, x(i) = n$ et $D(i) < 0$ pour $i \in I$, sur $v \otimes X^{B+D}$ si $(B+D)(i) = -1$ pour $i \in I$, sur 0 sinon. D'où la conclusion.

Comme tout $\mathcal{O}_P$-module cohérent a une résolution par les sommes de $\mathcal{O}_P(n)$, cet isomorphisme se prolonge en un isomorphisme sur DP si F^* est injectivement borné, sur $D^- P$ sinon :

$$R \operatorname{Hom}(M^*,\ G^*) \to R\,\Psi(M^*)[r].$$

En composant cet isomorphisme avec celui déjà vu et l'isomorphisme dû au décalage $LH^r(P, .) = R\Gamma(.)[r]$, on obtient l'isomorphisme annoncé.

5.3. *Remarque.* — Si F^* est composé de A-modules de type fini, il en va de même pour R Hom (M^*, G^*).

5.4. PROPOSITION. — *Si V est un A-module, et si $W = \mathcal{O}_P(-s) \otimes V$, on a* $\operatorname{Ext}^p_{\mathcal{O}_P}(\mathcal{O}_P(-n), W) = 0$ *pour tout $p > 0$ et tout $n \in Z$.*

La question est locale sur P, on peut donc supposer $n > 0$, quitte à remplacer $\mathcal{O}_P(-n)$ par $\mathcal{O}_P(-n-qm)$, qui lui est localement isomorphe.

On va procéder par récurrence sur r.

C'est trivial si $r = 0$.

C'est vrai si $r = 1$, la condition $x = \tau(x)$ imposant alors $x(i) = 1$ pour $i \in I$; $\mathcal{O}_P(-n)$ est donc localement libre sur tout P dans ce cas.

Supposons donc que la proposition est vraie pour $r = m \geqslant 1$, et voyons si elle l'est encore pour $r = m+1$. Soit J une partie à deux éléments de I (qui en a $m+2$). Appelons I' le quotient de I par la relation d'équivalence qui confond les deux éléments de J et sépare tout le reste de I. Soit x' la fonction de I' dans N^+, définie par $x'(\{J\}) = d(x, J)$ et

$$x'(\{i\}) = x(i)/d(x, I-J)$$

pour $i \in I-J$.

Si $x = \tau(x)$, les nombres $d(x, J)$ et $d(x, I-J)$ sont premiers entre eux, et on a aussi $x' = \tau(x')$.

On pose enfin $A[G_J] = A'$ et $V' = V \otimes_A A'$.

On a alors une suite d'égalités (*cf.* 1.5) :

$$\begin{aligned} W(D_J) &= V' \otimes_A A'[x \mid I-J, \ -s(x), \ d(x, J)] \\ &= V \otimes_A A'[x \mid I-J, \ -s(x \mid I-J), \ d(x, J)] \\ &= V \otimes_A A'[x' \mid I'-\{J\}, \ -s(x' \mid I'-\{J\}), \ x'(\{J\})] \\ &= V' \otimes_{A'} A'[x' \mid I'-\{J\}, \ -s(x'), \ d(x', \{\{J\}\})] \\ &= V' \otimes_{A'} \mathcal{O}_{P_{A'}(x')}(-s(x'))(D_{\{J\}}) = W'(D_{\{J\}}). \end{aligned}$$

De même, pour tout n, en prenant un nombre n' tel que $n' \, d(x, I-J) = n$ modulo $d(x, J)$, on a

$$\mathcal{O}_{P_A(x)}(-n)(D_J) = \mathcal{O}_{P_{A'}(x')}(-n')(D_{\{J\}}).$$

Comme D_J et $D_{\{J\}}$ sont affines, on en tire que

$$Z^p(D_J) = Ext^p(\mathcal{O}_{P_A(x)}(-n), \ W)(D_J)$$

est égal à

$$Ext^p(\mathcal{O}_{P_{A'}(x')}(-n'), \ W')(D_{\{J\}}),$$

nul par la propriété appliquée à I', x', n', etc.

La réunion des ouverts D_J, où J parcourt l'ensemble des parties à deux éléments de I, a pour complémentaire le fermé réunion des $r+1$ fermés isomorphes à Spec A définis par les idéaux $(X_j)_{j \in J_k}$, où k parcourt I.

Les modules $Z^p, p > 0$, étant cohérents et nuls sur les D_J, $|J| \geqslant 2$, ont pour support un schéma fini sur A. Ils sont donc acycliques pour Γ, ainsi que Z^0, qui est isomorphe à $V \otimes_A \mathcal{O}_P(n-s)$, avec $n > 0$. L'isomorphisme bien connu $R \operatorname{Hom}(., W) \to R \Gamma R \operatorname{Hom}(., W)$ montre que les A-modules $\Gamma(Z^p)$ sont isomorphes aux $\operatorname{Ext}^p(\mathcal{O}_P(-n), W)$, qui sont nuls pour $p > 0$, en vertu du théorème 5.2. On en déduit que les Z^p eux-mêmes sont nuls pour $p > 0$.

C. Q. F. D.

5.5. Corollaire. — *$\mathcal{O}_P(n)$ est acyclique pour* Hom $(., G^*)$, *i. e.*

$$R \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_P(-n), \ G^*) = \operatorname{Hom}(\mathcal{O}_P(-n), \ G^*),$$

5.6. PROPOSITION. — *Si E^* est le complexe de S-modules gradués $F^* \otimes_A^L S(-s) = F^* \otimes_A S(-s)$ le morphisme naturel, où M est un S-module gradué de type fini et où* Hom (M, E^*) *est muni de sa graduation naturelle*

$$\varphi : \quad \mathfrak{A}\,\mathrm{Hom}(M, E^*) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{A} M, \mathfrak{A} E^*)$$

est un isomorphisme, et se prolonge en isomorphisme sur la catégorie DS dérivée de la catégorie des S-modules gradués de type fini.

$$\mathfrak{A} R\,\mathrm{Hom}(M^*, E^*) \to R\,\mathrm{Hom}(\mathfrak{A} M^*, \mathfrak{A} E^*).$$

Soit $\Phi = \mathfrak{A}\,\mathrm{Hom}(., E^*)$. On a deux isomorphismes naturels définis sur DS :

$$R\Phi \to \mathfrak{A} R\,\mathrm{Hom}(., E^*),$$
$$R\Phi \to R\,\mathrm{Hom}(\mathfrak{A}\,., \mathfrak{A} E^*).$$

Pour le premier, on notera que R Hom $(., E^*)$ est borné, donc il suffit de considérer $D^- S$. Tout complexe de $D^- S$ est quasi isomorphe à un complexe de $D^- S$ dont les objets sont des sommes finies de $S(n)$. Ces modules sont acycliques pour Hom $(., E^*)$, et leurs images par ce foncteur sont acycliques pour $\mathfrak{A}$ qui est exact.

Pour le second, on constate que les gradués libres sont acycliques pour $\mathfrak{A}$, et leurs images par ce foncteur sont acycliques pour Hom $(., \mathfrak{A} E^*)$, selon 5.5, et φ est un isomorphisme pour les gradués libres (d'après 4.1, applicable à F^* pour des raisons de platitude sur A).

En composant ces deux isomorphismes, on obtient les isomorphismes annoncés.

5.7. THÉORÈME (*dualité locale*). — *Si F^* est dualisant pour A, G^* est dualisant pour P.*

Si F^* est dualisant pour A, alors Spec A est de dimension finie ([3], V.7.2). Donc P est aussi de dimension finie.

Si F^* est dualisant pour A, F^* est aussi ponctuellement dualisant pour A (évident, par restriction aux spectres des anneaux locaux de Spec A).

Une caractérisation des complexes ponctuellement dualisants est donnée par (HARTSHORNE [3], V.3.4) : pour tout point fermé ξ de Spec A, $R\,\mathrm{Hom}_A(k(\xi), F^*)$ est quasi isomorphe à $k(\xi)[d(\xi)]$, pour un certain entier $d(\xi)$.

Soit η un point fermé de P, et soit $\xi = \rho(\eta)$ le point fermé de Spec A qui est son image par le morphisme naturel $P \xrightarrow{\rho} \mathrm{Spec}\, A$. Le O_P-module cohérent $k(\eta)$, concentré en η, a pour image directe un $k(\xi)$-espace vectoriel de dimension finie, soit L.

En appliquant le théorème 5.2, on trouve

$$R\operatorname{Hom}(k(\eta), G^*) \cong R\operatorname{Hom}(L, F^*) \cong L[d(\xi)]$$

car les $R^i\,\Gamma\,k(x)$ sont nuls pour $i \neq 0$.

Comme le support de $k(\eta)$ est de dimension 0, on en tire que l'homologie de $R\operatorname{Hom}(k(\eta), G^*)$ est isomorphe en degré $d(\xi)$ à $k(\eta)$, à 0 ailleurs. Autrement dit, G^* est ponctuellement dualisant pour P.

D'après HARTSHORNE ([3], V.8.2), ceci (et le fait que P soit de dimension finie) implique que G^* est dualisant.

5.8. CONSTRUCTION D'ANNEAUX DE GORENSTEIN. — Le théorème 5.7, joint à la proposition 1.5 et au corollaire 1.6, donne les deux résultats suivants :

Si A est un anneau de Gorenstein, si $x = \tau(x)$, et si $s(x)$ est multiple de $m(x)$, alors $P_A(x)$ est un schéma de Gorenstein.

Si A est un anneau de Gorenstein, si $y_1, y_2, \ldots, y_r$, d sont $r+1$ nombres premiers entre eux r à r, et si d divise la somme des y_i, l'anneau $A[y, 0, d]$ est de Gorenstein, y désignant l'application $\{1, \ldots, r\} \to \mathbf{N}$ définie par $i \mapsto y_i$.

5.9. PROPOSITION. — *Si A est un anneau de Gorenstein, si un quotient gradué R de S a une résolution graduée libre sur S (avec $S^0 = S$) :*

$$0 \to S^p \to S^{p-1} \to \ldots \to S^0 \to R \to 0,$$

si R est plat de dimension $1+r-p$ sur A, si S^p est de la forme $S(-k)$, (alors $\operatorname{Ext}^p_S(R, S(-s))$ est isomorphe à $R(k-s)$ et dualisant pour R), en posant $Q = \operatorname{Proj} R$, le complexe $\mathcal{O}_Q(k-s)[r-p]$ est dualisant localement et globalement pour Q.

En particulier, si $k-s$ est multiple de $d(x, J)$, $\mathcal{O}_Q(D_J)$ est un anneau de Gorenstein, et si $k-s$ est multiple de m, Q est un schéma de Gorenstein.

C'est là une application de 5.6.

5.10. *Exemples.* — Si k est un corps, $P_k(1, 6, 14, 21)$ est un schéma de Gorenstein de dimension 3 (car $s = m = 42$), $k[(3, 5, 6), 0, 7]$ est un anneau de Gorenstein à 13 générateurs, de dimension 3, le schéma

$$\mathrm{Proj}(k[X, Y, Z, T, U]/(X^2 - YZ, XZ - YT, Z^2 - XT, UZ, UT)),$$

où les degrés de X, Y, Z, T, U, valent respectivement 3, 4, 2, 1, 3, est un schéma de Gorenstein de dimension 1, etc.

5.11. PROPOSITION. — *Pour tout espace du type $P_A(x)$, il existe un A-schéma Q recouvert par des ouverts affines isomorphes au spectre de l'anneau de polynômes à $r(x)$ variables sur A (donc Q est lisse sur A) et un morphisme birationnel et projectif de A-schémas $f : Q \to P_A(x)$ avec $f_* \mathcal{O}_Q = \mathcal{O}_P$ et $R^i f_* \mathcal{O}_Q = 0$ pour $i \neq 0$.*

Nous ne donnons pas ici de démonstration, la méthode utilisée étant la même que celle de [4] (chap. I, § 2 et 3).

5.12. *Remarque.* — Dans [4] (I.3), il est montré aussi que $F^* \otimes_A \Omega_{Q/A}$ est acyclique pour f_*; ce qui permet de dire que $Rf_*(F^* \otimes_A \Omega_{Q/A}[r])$ est dualisant localement et globalement pour $P_A(x)$, si F^* est dualisant pour A.

On arrive ainsi à une autre description du complexe dualisant.

6. Courbes « presque planes »

6.1. LEMME. — *Si A est factoriel, et si $P = P_A(x)$, un sous-schéma fermé Q de P, purement de codimension 1 sans composante immergée, est défini par une seule équation homogène.*

Ecartons le cas trivial $r = 0$, qui donne $P = \mathrm{Spec}(A)$.

L'ouvert U de P qui est la réunion des D_{J_i}, $i \in I(x)$, contient tous les points de P de hauteur 1, donc tous les points maximaux de Q. En outre, la projection $\pi : \mathrm{Spec}(S) - \{0\} \to P$ est lisse au-dessus de cet ouvert et localement triviale au-dessus de U (1.7).

Le sous-schéma fermé $\pi^{-1} Q$ de $\mathrm{Spec}(S) - \{0\}$ a pour adhérence schématique dans $\mathrm{Spec}(S)$ un fermé qui coïncide avec lui hors de l'origine. L'idéal J qui décrit ce fermé est gradué, donc son p. g. c. d. F, qui existe puisque S est factoriel, est homogène. Le sous-schéma fermé $\mathrm{Spec}(S/F) - \{0\}$ de $\mathrm{Spec}(S) - \{0\}$ coïncide avec $\pi^{-1} Q$ en les points de hauteur 1 de $\mathrm{Spec}(S) - \{0\}$, donc aux points maximaux de $\pi^{-1} Q$.

Son image par π est le sous-schéma fermé $\mathrm{Proj}(S/F)$ de P, qui est inclus dans Q, car $J \subset F.S$, et qui coïncide avec Q en ses points maximaux, donc partout, puisque Q n'a pas de composante immergée. Donc $Q = \text{Proj}(S/F)$.

6.2. PROPOSITION. — *Si k est un corps parfait, toute courbe hyperelliptique lisse sur k admet une immersion régulière dans un schéma du type $P_k(x)$ avec $r(x) = 2$; autrement dit, une telle courbe est « presque plane ».*

Pour que la courbe tracée sur P d'équation F soit lisse, il suffit que le schéma Spec S/F soit régulier en dehors de l'origine, les anneaux localisés de S/F par des éléments de degré positif étant alors normaux, ainsi que leurs composantes de degré 0, qui ont la dimension 1 et sont les anneaux de coordonnées de Proj (S/F).

Les trois variables définissant S sont appelées X, Y, Z, et on choisit déjà $x = y = 1$ pour le degré des deux premières, et on pose $u = Y/X$ et $v = Z/X^z$, où z est le degré de Z.

Une courbe hyperelliptique sur k est caractérisée par le fait que son corps de fonctions K ne contient pas d'élément algébrique de degré 2 sur k, mais a un sous-corps $L = k(u)$ transcendant sur k, tel que $[K : L] = 2$. Soit $v \in K$ tel que $L(v) = K$.

Il s'agit de trouver z et v de façon que la relation de dépendance de v sur L soit de la forme $F(1, u, v) = 0$, où F est homogène dans S et n'a de zéro commun avec ses dérivées qu'en l'origine de Spec (S).

On peut toujours supposer v entier sur $k[u]$, quitte à le multiplier par un polynôme en u convenable. La relation est alors du type

$$v^2 + A(u)\,v + B(u) = 0 = f(u, v),$$

où A et B sont deux polynômes à coefficients dans k.

Si la caractéristique de k n'est pas 2, on peut supposer que A est nul, quitte à remplacer v par $2v + A(u)$. Si P est le polynôme de plus haut degré parmi ceux dont le carré divise B, on peut remplacer v par $v/P(u)$, et se ramener ainsi au cas où B n'a pas de facteur carré. Puisque k est parfait, B et sa dérivée n'ont pas de zéro commun.

Si le degré b de B est pair, on choisit $z = b/2$. La relation s'écrit alors $F = Z^2 + D(X, Y)$, avec $D(1, u) = B(u)$. D et ses dérivées ne s'annulent ensemble que si $X = Y = 0$, ce qui convient.

Si b est impair, on prend $z = (b+1)/2$. La relation s'écrit

$$F = Z^2 + XD(X, Y),$$

où D n'a pas de zéro commun avec ses dérivées hors de l'origine, et ne contient pas X en facteur. Ce qui convient aussi.

Si la caractéristique de k est 2, si $f(u, v) = v^2+A(u)\,v+B(u)$ et ses dérivées par rapport à u et v ne s'annulent pas ensemble, les degrés a et b de A et B vérifiant de surcroît $2a \geqslant b$ ou b impair, le plongement est possible.

Si $2a \geqslant b$, on choisit $z = a$, et si b est impair et supérieur à $2a$, on choisit $z = (b+1)/2$. Dans les deux cas, F s'écrit $Z^2+C(X, Y)\,Z+D(X, Y) = 0$, mais l'hypothèse sur f et ses dérivées implique que F et ses dérivées ne s'annulent ensemble que si $X = 0$; donc $Y = Z = 0$, à cause des termes de plus haut degré en Y de C et D et leurs dérivées.

Tout se ramène à modifier v de façon que sa relation de dépendance intégrale sur L soit de la forme indiquée.

Si la forme n'est pas bonne, on va opérer une modification de v qui fait décroître strictement la quantité $\sup(2a, b)$. Au bout d'un nombre fini de ces modifications, la forme f sera donc convenable.

On rappelle qu'un polynôme à une variable sur un corps parfait de caractéristique 2 est toujours de la forme $C(X) = X\,C'(X) + C^{\circ}(X)$, où C' et C° sont deux carrés, C' n'étant autre que la dérivée de C par rapport à X, et C° la partie paire de C.

(i) Si $b > 2a$ et b pair, on remplace v par $v+\sqrt{B^{\circ}}$.

(ii) Si $f = v^2+Av+B$ et ses dérivées A et $A'v+B'$ ont un zéro commun, c'est que A et $A'^{\,2}B+B'^2$ ont un p. g. c. d. non nul. Soit U un facteur *premier* de A et $A'^{\,2}B+B'^2$.

Si U divise A', U^2 divise A et A' qui est un carré, donc divise B'. Soit T le reste de la division de $\sqrt{B^{\circ}}$ par U. On peut alors remplacer v par $(v+T)/U$.

Si U ne divise pas A', de $A'^{\,2}B+B'^2 = 0 \bmod U$, on en tire que B est congru modulo U au carré d'un polynôme T de degré inférieur à celui de U. Alors on peut remplacer v par $(v+T)/U$.

7.3. Exemple de courbe qui n'est pas presque plane. — On se propose de construire une courbe lisse, non hyperelliptique, de genre 5, dont le plongement canonique, qui est lisse, n'est contenu dans aucune quadrique de rang $\leqslant 3$.

Montrons qu'une telle courbe n'est pas presque plane.

Si F est l'équation dans $P = \mathrm{P}_k(x)$, avec $r(x) = 2$, d'une courbe Q lisse de genre 5, le cobord de la suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_P(-d) \xrightarrow{F} \mathcal{O}_P \to \mathcal{O}_A \to 0$$

envoie bijectivement $H^1(Q, \mathcal{O}_Q)$ dans $H^2(P, \mathcal{O}_P(-d))$, d étant le degré de F. Une base de $H^1(Q, \mathcal{O}_Q)$ est donc formée des classes des monômes X^a, avec $\sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} a(i)\, x(i) = -d$, et $a(i) < 0$ pour $0 \leqslant i \leqslant 2$. Les a de ce type sont au nombre de 5. Parmi eux, il y en a certainement 3, soient a^0, a', a'', avec $2a' = a^0 + a''$. Ceci correspond à une équation du type $X^0 X'' - X'^2 = 0$ dans le plongement canonique, donc à une quadrique de rang 3 qui contient l'image de Q.

Considérons l'espace projectif ordinaire R de dimension 4 sur un corps k de caractéristique 3, i. e. $R = \mathrm{Proj}\,(k[X, Y, Z, T, U])$, et son sous-schéma Q défini par l'idéal qu'engendrent les trois polynômes homogènes du second degré :

(1) $$X^2 + Y^2 + ZU,$$

(2) $$Z^2 + T^2 + XU,$$

(3) $$XY + ZT + U^2.$$

La matrice des dérivées partielles

$$\begin{bmatrix} 2X & 2Y & U & O & Z \\ U & 0 & 2Z & 2T & X \\ Y & X & Z & Z & 2U \end{bmatrix}$$

a parmi ses mineurs

(4) $$YZ^2 + 2\,YT^2 + 2\,UTX,$$

(5) $$TX^2 + 2\,TY^2 + 2\,UYZ.$$

Pour montrer que Q est une courbe lisse, il n'y a qu'à s'assurer que le schéma défini par l'annulation de 1, 2, 3, 4 et 5 est vide. Ceci veut dire en effet que la matrice des dérivées partielles est de rang 3 sur tout le schéma Q.

On utilise la combinaison linéaire des polynômes (1) à (5), dont les coefficients sont respectivement T, Y, 0, 2, 2 qui vaut $(Y+T)(2\,TY + UX + UZ)$. Le reste du calcul est simple et ennuyeux. Q est donc une intersection complète dans R, et le cobord itéré de la résolution de Koszul sur R correspondante met en bijection $H^1(Q, \mathcal{O}_Q)$ et $H^4(R, \mathcal{O}_R(-6))$, qui est le dual de $H^0(R, \mathcal{O}_R(1)) = H^0(Q, \mathcal{O}_Q(1))$. Ceci montre que Q est de genre 5 et que les équations 1 à 3 définissent le plongement canonique de Q.

Reste à voir que parmi les hypersurfaces de degré 2 de R, qui contiennent Q, aucune n'est de rang $\leqslant 3$. Ces hypersurfaces sont dans la famille projective de rang 2 engendrée par les hypersurfaces correspondant à (1), (2), (3) (car Q est intersection complète dans R). La matrice associée à une combinaison linéaire de 1, 2, 3 est :

$$\begin{bmatrix} 2a & c & 0 & 0 & b \\ c & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2b & c & a \\ 0 & 0 & c & 2b & 0 \\ b & 0 & a & 0 & 2c \end{bmatrix}$$

On y trouve des mineurs d'ordre 4 :

$$\begin{array}{llll} (1,1) & a(c(b^2-c^2)-a^2b), & (4,4) & (a^2-c^2)(bc-a^2)-ab^3, \\ (2,2) & (b^2-c^2)(ac-b^2)-a^3b, & (5,5) & (a^2-c^2)(b^2-{}^2c\ ) \\ (3,3) & b(c(a^2-c^2)-b^2a), & (2,4) & -c^2ab, \end{array}$$

qui ne peuvent être nuls simultanément que si a, b, c sont tous trois nuls.

C. Q. F. D.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Gabriel (P.). — Des catégories abéliennes, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 323-448 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1961).

[2] Grothendieck (A.). — *Éléments de géométrie algébrique* [EGA], II : *Étude globale de quelques classes de morphismes*. — Paris, Presses universitaires de France, 1966 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 8).

[3] Hartshorne (R.). — *Residues and duality*. — Berlin, Springer-Verlag, 1966 (*Lecture Notes in Mathematics*, 20).

[4] Kempf (G.), Kundsen (F.), Mumford (D.) and Saint-Donat (B.). — *Toroidal embeddings, I*. — Berlin, Springer-Verlag, 1973 (*Lecture Notes in Mathematics*, 339).

(Texte reçu le 1er juillet 1974.)

Charles Delorme,
33, boulevard Dubreuil,
91400 Orsay.