

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE VIGUÉ

Opérateurs différentiels sur des cônes normaux de dimension 2

Bulletin de la S. M. F., tome 103 (1975), p. 113-128

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1975__103__113_0

© Bulletin de la S. M. F., 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS
SUR DES CÔNES NORMAUX DE DIMENSION 2**

PAR

JEAN-PIERRE VIGUÉ

[Orsay]

RÉSUMÉ. — On étudie l'algèbre des germes d'opérateurs différentiels holomorphes au voisinage du sommet O d'un cône normal X plongé dans \mathbb{C}^3 . On montre que si le genre de la courbe projective associée \bar{X} est supérieur ou égal à 1, la \mathbb{C} -algèbre $\text{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,O})$ des germes d'opérateurs différentiels sur X au voisinage du sommet O n'est pas engendrée par $\mathcal{O}_{X,O}$ et un nombre fini d'éléments.

1. Introduction

Si X est un espace analytique de faisceau structural \mathcal{O}_X , nous noterons $\text{Diff}^d(\mathcal{O}_X)$ le faisceau des germes d'opérateurs différentiels sur X d'ordre $\leq d$; $\text{Diff}^d(\mathcal{O}_X)$ est un faisceau de \mathcal{O}_X -modules cohérent. Si x est un point de X , on note $\text{Diff}^d(\mathcal{O}_{X,x})$ le $\mathcal{O}_{X,x}$ -module des germes d'opérateurs différentiels d'ordre $\leq d$ sur X au voisinage de x (pour les définitions, voir [2], [6] et [8]). On a

$$\text{Diff}^0(\mathcal{O}_{X,x}) = \mathcal{O}_{X,x},$$

et on pose

$$\text{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x}) = \varinjlim \text{Diff}^d(\mathcal{O}_{X,x}).$$

Pour la composition des opérateurs différentiels, $\text{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x})$ est une \mathbb{C} -algèbre filtrée. L'algèbre graduée associée

$$\text{Gr}(\text{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x})) = \bigoplus_{d=0}^\infty \text{Diff}^d(\mathcal{O}_{X,x}) / \text{Diff}^{d-1}(\mathcal{O}_{X,x})$$

est commutative et, en particulier, c'est une $\mathcal{O}_{X,x}$ -algèbre.

L'étude des algèbres $\text{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x})$ et $\text{Gr}(\text{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,x}))$ a été faite par KANTOR [5] dans le cas où (X, x) est une singularité-quotient (i. e., (X, x)

est isomorphe à un quotient de (\mathbf{C}^n, O) par un sous-groupe fini du groupe linéaire), et par moi-même [8] dans le cas où (X, x) est un germe de courbe irréductible, ou un germe d'espace analytique dont le normalisé est (\mathbf{C}^n, O) .

Soit $X \subset \mathbf{C}^n$ un cône normal de dimension 2, et soit O le sommet du cône. Soit $\bar{X} \subset P_{n-1}(\mathbf{C})$ la courbe projective associée au cône X , elle est sans singularités; soit g son genre. Si $g = 0$, on déduit facilement d'un résultat de BRIESKORN [3] que (X, O) est une singularité-quotient. On peut appliquer le résultat de KANTOR [5], et l'on trouve :

Soit X un cône normal de dimension 2 construit sur une courbe projective sans singularités de genre $g = 0$. Alors l'algèbre $\text{Gr}(\text{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,O}))$ est une $\mathcal{O}_{X,O}$ -algèbre de type fini. On en déduit que la \mathbf{C} -algèbre $\text{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,O})$ est engendrée par $\mathcal{O}_{X,O}$ et un nombre fini d'éléments.

Le cas du cône $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ dans \mathbf{C}^3 (genre $(\bar{X}) = 1$) a été étudié par I. BERNSTEIN, I. GEL'FAND et S. GEL'FAND [1]. Nous allons démontrer le résultat suivant qui généralise le résultat de [1].

THÉORÈME 1.1. — *Soit $X \subset \mathbf{C}^3$ un cône normal défini par un polynôme P homogène de degré n , et soit \bar{X} la courbe projective associée (\bar{X} est sans singularités). Si $n \geq 3$ (i. e., genre $(\bar{X}) \geq 1$), alors, pour tout $d \geq 0$, la \mathbf{C} -algèbre $\text{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,O})$ n'est pas engendrée par $\text{Diff}^d(\mathcal{O}_{X,O})$.*

Remarquons (voir [9]) que pour qu'un cône X de dimension 2 plongé dans \mathbf{C}^3 soit normal, il faut et il suffit que O soit le seul point singulier de X , ou ce qui revient au même, que \bar{X} soit sans singularités. Compte tenu de la proposition 7 de [8], on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.2. — *Sous les hypothèses du théorème 1.1, la $\mathcal{O}_{X,O}$ -algèbre $\text{Gr}(\text{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,O}))$ n'est pas une $\mathcal{O}_{X,O}$ -algèbre de type fini.*

Dans notre étude de la \mathbf{C} -algèbre $\text{Diff}^\infty(\mathcal{O}_{X,O})$, nous verrons que le cas $n = 3$ et le cas $n \geq 4$ sont assez différents. Nous montrerons comment le raisonnement de [1] se généralise au cas des cônes normaux définis par un polynôme P homogène de degré $n = 3$, et nous donnerons la démonstration complète dans le cas $n \geq 4$.

Je remercie Henri CARTAN

de l'aide et des encouragements qu'il m'a apportés.

2. Définitions et premières propriétés

Dans ce paragraphe, on supposera seulement que $X \subset \mathbf{C}^p$ ($p \geq 3$) est un cône normal construit sur une courbe projective lisse $\overline{X} \subset P_{p-1}(\mathbf{C})$ de genre g . Soit O le sommet de X .

LEMME 2.1. — *Soit U un voisinage ouvert du sommet O dans X . Tout opérateur différentiel défini sur $U - \{O\}$ se prolonge de manière unique en un opérateur différentiel sur U .*

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur l'ordre k de l'opérateur différentiel D . Si $k = 0$, D est la multiplication par une fonction holomorphe a sur $U - \{O\}$. Comme X est normal, a se prolonge en une fonction holomorphe sur U tout entier, et par suite, D se prolonge en un opérateur différentiel sur U . Supposons le résultat démontré à l'ordre $(k-1)$, montrons-le à l'ordre k .

Soit $D \in \Gamma(U - \{O\}, \text{Diff}^k(\mathcal{O}_X))$. Pour tout voisinage ouvert ω de O contenu dans U , et pour tout $f \in \Gamma(\omega, \mathcal{O}_X)$, $D(f)$ est une fonction holomorphe sur $\omega - \{O\}$; $O(f)$ se prolonge en une fonction holomorphe sur ω tout entier, nous la noterons $\Delta(f)$. Pour montrer que $\Delta \in \Gamma(U, \text{Diff}^k(\mathcal{O}_X))$, d'après la définition récurrente des opérateurs différentiels [8], il suffit de vérifier que, pour tout ouvert $\omega \subset U$, pour tout $a \in \Gamma(\omega, \mathcal{O}_X)$,

$$f \mapsto \Delta(af) - a \Delta(f) = \Delta'(f),$$

$$\Gamma(\omega, \mathcal{O}_X) \rightarrow \Gamma(\omega, \mathcal{O}_X)$$

est un opérateur différentiel sur ω d'ordre $\leq k-1$. C'est évident d'après l'hypothèse de récurrence.

DÉFINITION 2.2. — *Soit U un ouvert de X . On dit qu'un opérateur différentiel $D \in \Gamma(U, \text{Diff}^k(\mathcal{O}_X))$ est homogène de degré i , si pour tout ouvert $\omega \subset U$, pour tout $q \in \mathbf{Z}$, $D(M_q(\omega)) \subset M_{q+i}(\omega)$. [$M_q(\omega)$ désigne le \mathbf{C} -espace vectoriel des fonctions holomorphes sur ω et homogènes de degré q].*

Nous noterons D^k le $\mathcal{O}_{X,O}$ -module des germes d'opérateurs différentiels sur X au voisinage de O d'ordre $\leq k$. ($D^k = \text{Diff}^k(\mathcal{O}_{X,O})$). Soit D_i^k le \mathbf{C} -espace vectoriel des germes d'opérateurs différentiels sur X au voisinage de O d'ordre $\leq k$ et homogènes de degré i . On vérifie facilement que si $D \in D_i^k$, D se prolonge en un opérateur différentiel homogène d'ordre $\leq k$ et de degré i sur X tout entier.

LEMME 2.3. — Soit D un germe d'opérateur différentiel sur X au voisinage du sommet O d'ordre $\leq k$. Alors, D se décompose de manière unique sous la forme d'une série convergente

$$D = \sum_{i=-k}^{+\infty} D_i, \quad \text{où, pour tout } i, \quad D_i \in D_i^k.$$

Démonstration. — Soit J l'idéal homogène qui définit X , et soit $D \in D^k$. D'après une des définitions équivalentes des opérateurs différentiels, on sait qu'il existe un germe d'opérateur différentiel d'ordre $\leq k$ sur (\mathbb{C}^n, O) ,

$$\Delta = \sum_{|j| \leq k} f_j(x) \frac{\partial^{|j|}}{\partial x^j}.$$

tel que $\Delta(J) \subset J$, et tel que Δ , par passage au quotient, induise D . On peut décomposer Δ en

$$\Delta = \sum_{i=-k}^{+\infty} \Delta_i,$$

où, pour tout i , Δ_i est homogène de degré i . On montre que $\Delta_i(J) \subset J$, et, par passage au quotient, on obtient une décomposition

$$D = \sum_{i=-k}^{+\infty} D_i,$$

et on vérifie facilement qu'une telle décomposition est unique.

Exemple. — Soit I l'opérateur différentiel défini sur \mathbb{C}^p (coordonnées x_1, \dots, x_p) par

$$I = \sum_{i=1}^p x_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

I induit sur X un opérateur différentiel (que nous noterons encore I) d'ordre 1, homogène de degré 0.

Soit $X_0 = X - \{O\}$, et soit π l'application naturelle $X_0 \rightarrow \overline{X}$. Soit \mathcal{D}_i^k le faisceau sur X_0 des germes d'opérateurs différentiels d'ordre $\leq k$ et de degré i . Soit $\Delta_i^k = \pi_* \mathcal{D}_i^k$. Soit $\mathcal{L} = \Delta_1^0$ le faisceau des germes de fonctions homogènes de degré 1.

PROPOSITION 2.4 :

(a) Δ_i^k est un faisceau localement libre sur \overline{X} , et $H^0(\overline{X}, \Delta_i^k) = D_i^k$; \mathcal{L} est inversible.

(b) $\Delta_i^k = \Delta_0^k \otimes \mathcal{L}^i$.

(c) Soit $\sigma_k = \Delta_0^k / \Delta_0^{k-1}$ ($\sigma_0 = \mathcal{O}_{\bar{X}}$). Alors $\sigma_k = S^k(\sigma_1)$ (puissance symétrique k -ième).

(d) Soit \mathcal{N} le sous- $\mathcal{O}_{\bar{X}}$ -module libre de σ_1 engendré par I , et soit $\mathcal{K} = \sigma_1 / \mathcal{N}$. Alors \mathcal{K} est isomorphe au faisceau des germes de sections holomorphes du fibré tangent de \bar{X} .

La proposition 2.4. s'inspire de [1]. Sa démonstration est laissée en exercice!

PROPOSITION 2.5. — Pour tout $k \geq 1$, il existe deux suites exactes :

$$(1)_k \quad 0 \rightarrow \mathcal{N}^k \xrightarrow{\varphi_k} \sigma_k \xrightarrow{\psi_k} \mathcal{K} \otimes \sigma_{k-1} \rightarrow 0,$$

$$(2)_k \quad 0 \rightarrow \sigma_{k-1} \xrightarrow{\theta_k} \sigma_k \xrightarrow{\eta_k} \mathcal{K}^k \rightarrow 0,$$

où θ_k est induite par la multiplication par I .

Démonstration. — Soit U un ouvert de Stein contenu dans \bar{X} . Alors la suite

$$0 \rightarrow \Gamma(U, \mathcal{N}) \xrightarrow{\varphi_1} \Gamma(U, \sigma_1) \xrightarrow{\psi_1} \Gamma(U, \mathcal{K}) \rightarrow 0$$

est exacte, et on peut choisir U suffisamment petit de façon que $\Gamma(U, \mathcal{K})$ soit engendré comme $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ -module par une section partout non nulle $h(U)$. Soit $\tilde{h}(U) \in \Gamma(U, \sigma_1)$ telle que $\psi_1(\tilde{h}(U)) = h(U)$.

(a) Les $(\tilde{h}(U)^i I^{k-i})_{i=0, \dots, k}$ forment une base du $\Gamma(U, \mathcal{O}_{\bar{X}})$ -module libre $\Gamma(U, \sigma_k)$. Définissons

$$\begin{aligned} \varphi_{k|U}(I^k) &= I^k, \\ \psi_{k|U}(\tilde{h}(U)^i I^{k-i}) &= ih(U) \otimes (\tilde{h}(U)^{i-1} I^{k-i}). \end{aligned}$$

Il est clair que, sur U , $(\varphi_{k|U}, \psi_{k|U})$ définissent une suite exacte. Le seul point qui reste à vérifier est que les $(\varphi_{k|U}, \psi_{k|U})$ se recollent pour définir (φ_k, ψ_k) .

Soit V un autre ouvert. On choisit de même $h(V)$ et $\tilde{h}(V)$. On définit aussi $(\varphi_{k|V}, \psi_{k|V})$. Sur $U \cap V$, on a

$$\begin{aligned} h(V) &= f(x)h(U), \quad \text{avec } f(x) \neq 0, \text{ pour tout } x \in U \cap V; \\ \tilde{h}(V) &= f(x)\tilde{h}(U) + g(x)I. \end{aligned}$$

Il est évident que $\varphi_{k|U} = \varphi_{k|V}$ sur $U \cap V$. Comparons $\psi_{k|U}$ et $\psi_{k|V}$:

$$\begin{aligned} & \psi_{k|U}(\tilde{h}(V)^i I^{k-i}) \\ &= \psi_{k|U}[(f(x)\tilde{h}(U) + g(x)I)^i I^{k-i}] \\ &= \psi_{k|U}(\sum_{p=0}^i C_i^p (f(x)\tilde{h}(U))^p (g(x)I)^{i-p} I^{k-i}) \\ &= f(x)h(U) \otimes (\sum_{p=0}^i p C_i^p (f(x)\tilde{h}(U))^{p-1} (g(x)I)^{i-p} I^{k-i}) \\ &= i f(x)h(U) \otimes [(f(x)\tilde{h}(U) + g(x)I)^{i-1} I^{k-i}]. \end{aligned}$$

On a bien $\psi_{k|U} = \psi_{k|V}$, et l'existence de la suite exacte $(1)_k$ est démontrée.

(b) On définit de même

$$\begin{aligned} \theta_{k|U}(\tilde{h}(U)^i I^{(k-1)-i}) &= \tilde{h}(U)^i I^{k-i}; \\ \eta_{k|U}(\tilde{h}(U)^i I^{k-i}) &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ h(U)^k & \text{si } i = k. \end{cases} \end{aligned}$$

On montre de même que ces applications se recollent, et qu'elles définissent une suite exacte.

3. Opérateurs différentiels d'ordre 1 sur X

Nous supposons dans ce paragraphe que X est un cône normal plongé dans \mathbf{C}^3 , défini par un polynôme homogène P de degré $n \geq 3$. Montrons la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. — *Pour tout i , $0 \leq i \leq n-3$, D_i^1/D_i^0 est engendré comme \mathbf{C} -espace vectoriel par les $x^p \cdot I$, où $|p| = p_1 + p_2 + p_3 = i$.*

Démonstration. — Les $x^p \cdot I$ sont bien des éléments de D_i^1 . Il suffit de vérifier que modulo D_i^0 , ils engendrent D_i^1 . Soit $\Delta \in D_i^1/D_i^0$. Il existe un opérateur différentiel D sur \mathbf{C}^3 ,

$$D = \sum_{j=1}^3 f_j \frac{\partial}{\partial x_j},$$

tel que D définisse un opérateur différentiel D_0 sur (X, O) dont la classe dans D_i^1/D_i^0 est égale à Δ . On peut choisir D de façon que les f_j soient des polynômes homogènes de degré $(i+1)$.

Comme D définit un opérateur différentiel sur (X, O) , on sait que

$$D(P) = Q \cdot P,$$

où Q est un polynôme homogène de degré i .

Donc

$$\left(D - \left(\frac{1}{n} Q \right) I \right) (P) = 0.$$

Pour montrer que $D = \left(\frac{1}{n} Q \right) I$, il suffit de démontrer le lemme suivant.

LEMME 3.2. — Soit $P \in \mathbf{C}[x_1, x_2, x_3]$ un polynôme homogène de degré n , tel que la courbe projective associée $\bar{X} \subset P_2(\mathbf{C})$ soit sans singularités. Alors l'ensemble des polynômes (f_1, f_2, f_3) de degrés $\leq n-2$, solutions de l'équation

$$\sum_{j=1}^3 f_j \frac{\partial P}{\partial x_j} = 0$$

est réduit à $(0, 0, 0)$.

Démonstration. — Soit $J \subset \mathbf{C}\{x_1, x_2, x_3\}$ l'idéal engendré par $(\partial P/\partial x_1, \partial P/\partial x_2, \partial P/\partial x_3)$. Du fait que O est le seul point singulier de X , on déduit que J est un idéal de hauteur 3. Un lemme sur les anneaux de Cohen-Macaulay (voir par exemple [7]) montre que $(\partial P/\partial x_1, \partial P/\partial x_2, \partial P/\partial x_3)$ forment une suite régulière.

Du fait que $f_3 \partial P/\partial x_3 = 0$ dans $\mathbf{C}\{x_1, x_2, x_3\}/(\partial P/\partial x_1, \partial P/\partial x_2)$, on déduit que f_3 appartient à $(\partial P/\partial x_1, \partial P/\partial x_2)$, et si on suppose que $\deg(f_3) \leq n-2$, cela entraîne $f_3 = 0$. De même, on montre que $f_1 = f_2 = 0$.

On remarque que la démonstration de [1] se généralise au cas d'un cône normal $X \subset \mathbf{C}^3$, défini par un polynôme homogène P de degré 3, une fois qu'on a démontré

$$\dim H^0(\bar{X}, \sigma_1) = \dim D_0^1/D_0^0 = 1.$$

Le théorème 1.1 est ainsi démontré dans le cas $n = 3$. Le reste de cet article sera consacré à la démonstration du théorème dans le cas $n \geq 4$.

4. Opérateurs différentiels de degré ≤ 0

Dans ce paragraphe, nous supposons seulement que $X \subset \mathbf{C}^p$ est un cône normal de dimension 2, construit sur une courbe projective lisse \bar{X} de genre $g \geq 2$.

PROPOSITION 4.1. — Soit $X \subset \mathbf{C}^p$ un cône normal construit sur une courbe projective lisse \bar{X} de genre $g \geq 1$. Alors, pour tout $i < 0$, pour tout $k \geq 0$, $D_i^k = 0$.

Démonstration. — Montrons d'abord que $H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i) = 0$ par récurrence sur k .

Pour $k = 0$, on doit étudier $H^0(\bar{X}, \mathcal{L}^i)$. On sait que $\deg \mathcal{L} > 0$. Pour tout $i < 0$, $\deg \mathcal{L}^i < 0$, et par suite, $H^0(\bar{X}, \mathcal{L}^i) = 0$. Supposons le résultat démontré à l'ordre $(k-1)$, montrons-le à l'ordre k . A partir de la suite exacte $(2)_k$, on obtient par multiplication tensorielle par le faisceau localement libre \mathcal{L}^i la suite exacte

$$0 \rightarrow \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^i \rightarrow \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i \rightarrow \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i \rightarrow 0,$$

et la suite exacte de cohomologie

$$0 \rightarrow H^0(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^i) \rightarrow H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i) \rightarrow H^0(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i).$$

On a

$$\deg(\mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i) = k \deg \mathcal{K} + i \deg \mathcal{L}.$$

On sait que $\deg \mathcal{K} = -(2g-2) \leq 0$, et que $i \deg \mathcal{L} < 0$. Donc $\deg(\mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i) < 0$, et par suite $H^0(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i) = 0$. Par l'hypothèse de récurrence, $H^0(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^i) = 0$, On en déduit que $H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i) = 0$.

On montre alors facilement par récurrence sur k que $D_i^k = 0$. Il suffit pour cela de considérer la suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta_i^{k-1} \rightarrow \Delta_i^k \rightarrow \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i \rightarrow 0,$$

et la suite exacte de cohomologie associée

$$0 \rightarrow D_i^{k-1} \rightarrow D_i^k \rightarrow H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i).$$

PROPOSITION 4.2. — Soit $X \subset \mathbf{C}^p$ un cône normal construit sur une courbe projective lisse \bar{X} de genre $g \geq 2$. Alors, le \mathbf{C} -espace vectoriel D_0^k admet une base formée des vecteurs $1, I, I^2, \dots, I^k$.

Démonstration. — Il est clair que $1, I, I^2, \dots, I^k$ forment un système libre du \mathbf{C} -espace vectoriel D_0^k . Pour montrer la proposition, il suffit de démontrer par récurrence sur k que $\dim_{\mathbf{C}} H^0(\bar{X}, \sigma_k) = 1$.

La propriété est vraie pour $k = 0$, car $\sigma_0 = \mathcal{O}_{\bar{X}}$. Supposons-la démontrée à l'ordre $(k-1)$, montrons-la à l'ordre k .

De la suite exacte $(2)_k$, on tire la suite exacte de cohomologie

$$0 \rightarrow H^0(\bar{X}, \sigma_{k-1}) \rightarrow H^0(\bar{X}, \sigma_k) \rightarrow H^0(\bar{X}, \mathcal{K}^k).$$

On a $\deg \mathcal{K}^k = k \deg \mathcal{K} = k(2-2g) < 0$, et par suite $H^0(\bar{X}, \mathcal{K}^k) = 0$. On en déduit

$$\dim H^0(\bar{X}, \sigma_k) = \dim H^0(\bar{X}, \sigma_{k-1}) = 1,$$

et la proposition est démontrée.

Remarquons (nous l'utiliserons par la suite) que, pour tout $k \geq 0$, on a

$$D_0^k/D_0^{k-1} = H^0(\bar{X}, \sigma_k).$$

5. Étude d'une suite exacte

A partir de maintenant, nous supposerons que $X \subset \mathbf{C}^3$ est un cône normal défini par un polynôme P homogène de degré $n \geq 4$. On sait que la courbe projective associée \bar{X} est sans singularités et que son genre est $g = ((n-1)(n-2))/2$. On a aussi :

$$\deg(\Omega) = n(n-3) \quad \text{et} \quad \deg(\mathcal{K}) = -n(n-3).$$

[Ω désigne le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes sur \bar{X} de degré 1.]

LEMME 5.1. — $\deg \mathcal{L} = n$ et \mathcal{L}^{n-3} est isomorphe à Ω .

Démonstration. — Toute section holomorphe de \mathcal{L} a n zéros comptés avec leurs ordres de multiplicité, ce qui entraîne $\deg \mathcal{L} = n$.

Étudions \mathcal{L}^{n-3} . On montre que

$$\dim H^0(\bar{X}, \mathcal{L}^{n-3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

On déduit du théorème de Riemann-Roch que $\dim H^1(\bar{X}, \mathcal{L}^{n-3}) = 1$. D'après [4], ceci entraîne que \mathcal{L}^{n-3} est isomorphe à Ω .

Nous allons maintenant étudier, pour tout $k \geq 1$, pour tout $i \geq 0$ la suite exacte

$$0 \rightarrow \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^i \rightarrow \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i \rightarrow \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i \rightarrow 0,$$

et la suite exacte de cohomologie associée

$$(3) \quad 0 \rightarrow H^0(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^i) \xrightarrow{\varphi_{k,i}} H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i) \xrightarrow{\psi_{k,i}} H^0(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i) \\ \rightarrow H^1(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^i) \xrightarrow{\theta_{k,i}} H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i) \xrightarrow{\eta_{k,i}} H^1(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i) \rightarrow 0.$$

(La suite exacte s'arrête, car on sait que, pour tout faisceau cohérent \mathcal{F} sur \bar{X} , on a, pour tout $i \geq 2$, $H^i(\bar{X}, \mathcal{F}) = 0$). L'étude de cette suite exacte nous permettra de calculer les opérateurs différentiels sur X .

LEMME 5.2 :

- (a) $[i \geq (n-3)k + (n-2)] \Rightarrow [H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i) = 0]$;
- (b) Pour tout $k \geq 0$, $\dim H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)(k+1)}) = 1$;
- (c) Pour tout $k \geq 0$, $\dim H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) = ((n-1)(n-2))/2$.

Démonstration :

(a) se démontre, pour un i donné, par récurrence sur k . Si $k = 0$, $\sigma_0 \otimes \mathcal{L}^i$ est isomorphe à \mathcal{L}^i . Dès que $i \geq n-2$, on a

$$\deg \mathcal{L}^i > (2g-2) = n(n-3),$$

et par suite, $H^1(\bar{X}, \mathcal{L}^i) = 0$.

Supposons le résultat démontré à l'ordre $(k-1)$, montrons-le à l'ordre k [on suppose bien sûr que $i \geq (n-3)k + (n-2)$]. Dans (3), $H^1(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^i) = 0$ par l'hypothèse de récurrence. Du fait que \mathcal{K}^k est le dual de Ω et du lemme 5.1, on déduit que $\mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i$ est isomorphe à $\mathcal{L}^{i-(n-3)k}$; donc $[i \geq (n-3)k + (n-2)]$ entraîne $[H^1(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i) = 0]$, et par suite $H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i) = 0$.

Remarquons que les résultats (b) et (c) sont déjà connus pour $k = 0$. On peut donc supposer $k \geq 1$.

(b) Considérons le morceau de la suite exacte (3) pour $i = (n-3)(k+1)$:

$$H^1(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^{(n-3)(k+1)}) \rightarrow H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)(k+1)}) \\ \rightarrow H^1(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)(k+1)}) \rightarrow 0.$$

D'après (a), $H^1(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^{(n-3)(k+1)}) = 0$; d'autre part, on sait que $\mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)(k+1)}$ est isomorphe à \mathcal{L}^{n-3} et que $\dim H^1(\bar{X}, \mathcal{L}^{n-3}) = 1$.
 Donc, $\dim H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)(k+1)}) = 1$.

(c) Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{N}^k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k} \rightarrow \sigma_k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k} \rightarrow \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k} \rightarrow 0,$$

et le morceau de suite exacte de cohomologie associée :

$$\begin{aligned} H^1(\bar{X}, \mathcal{N}^k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) &\rightarrow H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) \\ &\rightarrow H^1(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Si $k > 1$,

$$H^1(\bar{X}, \mathcal{N}^k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) = H^1(\bar{X}, \mathcal{L}^{(n-3)k}) = 0.$$

On a donc

$$\dim H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) = \dim H^1(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}).$$

Mais $\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^{n-3}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\bar{X}}$; on en déduit

$$\dim H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) = \dim H^1(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^{(n-3)(k-1)}).$$

Finalement, on trouve

$$\dim H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) = \dim H^1(\bar{X}, \sigma_1 \otimes \mathcal{L}^{n-3}),$$

et (c) sera une conséquence du lemme suivant.

LEMME 5.3. — $\dim H^1(\bar{X}, \sigma_1 \otimes \mathcal{L}^{n-3}) = ((n-1)(n-2))/2$.

Démonstration. — Considérons la suite exacte (3) pour $k = 1, i = n-3$. Dans cette suite exacte, on connaît les dimensions de tous les espaces vectoriels sauf celle de $H^1(\bar{X}, \sigma_1 \otimes \mathcal{L}^{n-3})$. En effet, $\sigma_0 \otimes \mathcal{L}^{n-3}$ est isomorphe à Ω . On a donc

$$\dim H^0(\bar{X}, \sigma_0 \otimes \mathcal{L}^{n-3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}, \quad \dim H^1(\bar{X}, \sigma_0 \otimes \mathcal{L}^{n-3}) = 1.$$

On déduit de la proposition 3.1 que

$$\dim H^0(\bar{X}, \sigma_1 \otimes \mathcal{L}^{n-3}) = \dim D_{n-3}^1/D_{n-3}^0 = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Enfin, $\mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^{n-3}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\bar{X}}$, on a donc :

$$\dim H^0(\bar{X}, \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^{n-3}) = 1, \quad \dim H^1(\bar{X}, \mathcal{K} \otimes \mathcal{L}^{n-3}) = g = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

On trouve finalement

$$\dim H^1(\bar{X}, \sigma_1 \otimes \mathcal{L}^{n-3}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

PROPOSITION 5.4 :

(a) $[i \geq (n-3)k+1] \Rightarrow [\psi_{k,i} \text{ est surjective}]$;

(b) $\dim H^0(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) = 1$, $\psi_{k,(n-3)k} = 0$, et par suite $\varphi_{k,(n-3)k}$ est un isomorphisme;

(c) $[i \leq (n-3)k-1] \Rightarrow [H^0(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i) = 0]$, et par suite $\varphi_{k,i}$ est un isomorphisme.

Démonstration :

(a) Si $i \geq (n-3)k+1$, on a vu que $H^1(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^i) = 0$, par suite $\psi_{k,i}$ est surjective.

(c) Si $i \leq (n-3)k-1$, on a

$$\deg(\mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i) = -kn(n-3) + in < 0,$$

ce qui entraîne $H^0(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^i) = 0$. On en déduit que $\varphi_{k,i}$ est un isomorphisme.

(b) Soit $i = (n-3)k$. Le faisceau $\mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\bar{X}}$, on a donc :

$$\begin{aligned} \dim H^0(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) &= 1, \\ \dim H^1(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) &= \frac{(n-1)(n-2)}{2}. \end{aligned}$$

D'après le lemme 5.2,

$$\dim H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

On en déduit que $\theta_{k,(n-3)k} = 0$.

On sait aussi que $\dim H^1(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k}) = 1$. Cela entraîne que $\psi_{k,(n-3)k} = 0$, et que $\varphi_{k,(n-3)k}$ est un isomorphisme.

C. Q. F. D.

Il faut maintenant étudier les rapports entre les D_i^k et les $H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i)$.

PROPOSITION 5.5. — Pour tout i , pour tout k , $D_i^k/D_i^{k-1} = H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i)$. De plus, pour tout $k > 0$, pour tout $i \leq (n-3)k$, tout opérateur différentiel $D \in D_i^k$ s'écrit :

$$D = I \cdot \Delta_1 + \Delta_2, \text{ avec ordre } (\Delta_2) < k.$$

Démonstration. — Considérons la suite exacte

$$0 \rightarrow \Delta_i^{k-1} \rightarrow \Delta_i^k \rightarrow \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i \rightarrow 0,$$

et la suite exacte de cohomologie associée

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(\bar{X}, \Delta_i^{k-1}) \rightarrow H^0(\bar{X}, \Delta_i^k) \rightarrow H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i) \\ \rightarrow H^1(\bar{X}, \Delta_i^{k-1}) \rightarrow H^1(\bar{X}, \Delta_i^k) \rightarrow H^1(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

En étudiant cette suite exacte, on montre d'abord facilement par récurrence sur $k \geq 0$ que, pour $i \geq (n-3)k + (n-2)$, $H^1(\bar{X}, \Delta_i^k) = 0$. On en déduit que, pour $i \geq (n-3)k + 1$, on a $H^1(\bar{X}, \Delta_i^{k-1}) = 0$, et par suite $D_i^k/D_i^{k-1} = H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i)$. La première partie de la proposition est démontrée pour $i \geq (n-3)k + 1$.

Supposons maintenant que $i \leq (n-3)k$. Le cas $i = 0$ a déjà été traité dans la proposition 4.2, on peut donc supposer $i > 0$. Montrons que $D_i^k/D_i^{k-1} = H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i)$ et que $D_i^k/D_i^{k-1} = I \cdot (D_i^{k-1}/D_i^{k-2})$ par récurrence sur $k \geq i(n-3) > 0$. Pour cela, considérons le diagramme commutatif suivant, où les suites horizontales sont exactes :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & D_i^{k-1}/D_i^{k-2} & \xrightarrow{(\times I)} & D_i^k/D_i^{k-1} \\ & & \downarrow \wr & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H^0(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^i) & \xrightarrow{(\times I)} & H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i) \rightarrow 0. \end{array}$$

Par l'hypothèse de récurrence, la première flèche verticale est un isomorphisme. Comme le diagramme est commutatif, ce'a entraîne que l'application $D_i^k/D_i^{k-1} \rightarrow H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i)$ est surjective, et par suite bijective (en effet, on sait que D_i^k/D_i^{k-1} s'injecte dans $H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^i)$). On en déduit que l'application $D_i^{k-1}/D_i^{k-2} \xrightarrow{(\times I)} D_i^k/D_i^{k-1}$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration de la proposition.

6. Fin de la démonstration

Le théorème 1.1 sera une conséquence, dans le cas $n \geq 4$, de la proposition suivante.

PROPOSITION 6.1. — *Pour tout i , pour tout $k \geq 0$, soit H_i^k le sous-espace vectoriel de D_i^k formé des opérateurs différentiels obtenus comme somme de produits d'opérateurs d'ordre $< k$. Alors, pour tout $k \geq 2$,*

$$\dim_{\mathbb{C}} D_{(n-3)k+1}^k / H_{(n-3)k+1}^k = 3.$$

Montrons d'abord le lemme ci-après.

LEMME 6.2. — *Soient $k > 0$, et $i = (n-3)k+1$. Soit D un opérateur différentiel homogène de degré i , et supposons que $D = D_1 \circ \dots \circ D_r$, avec, pour tout j ($j = 1, \dots, r$), ordre $(D_j) < k$. Alors :*

$$D = I \cdot \Delta + \delta_0, \text{ avec ordre } (\delta_0) < k.$$

Démonstration. — Elle se fait par récurrence sur $m = \text{ordre}(D)$. Si $m < k$, $D = \delta_0$, et il n'y a rien à démontrer. Supposons le résultat démontré à l'ordre $(m-1)$, et montrons-le à l'ordre $m \geq k$.

Du fait que D est homogène de degré i , on déduit que chacun des D_j est homogène, et l'on a

$$\text{deg}(D_1) + \dots + \text{deg}(D_r) = i = (n-3)k+1;$$

d'autre part,

$$\text{ordre}(D_1) + \dots + \text{ordre}(D_r) = m \geq k,$$

et donc

$$(n-3)\text{ordre}(D_1) + \dots + (n-3)\text{ordre}(D_r) \geq (n-3)k.$$

Comme, pour tout j , ordre $(D_j) < k$, on sait que, dans le produit, il y a au moins deux facteurs. Il existe donc un indice j_0 tel que

$$(n-3)\text{ordre}(D_{j_0}) \geq \text{deg}(D_{j_0}) > 0.$$

Alors d'après la proposition 5.5,

$$D_{j_0} = I \cdot \Delta_1 + \Delta_2,$$

avec ordre $(\Delta_2) < \text{ordre}(D_{j_0})$.

On a donc :

$$\begin{aligned} D &= D_1 \circ \dots \circ D_{j_0-1} \circ (I \cdot \Delta_1 + \Delta_2) \circ \dots \circ D_r \\ &= I \circ (D_1 \circ \dots \circ D_{j_0-1} \circ \Delta_1 \circ \dots \circ D_r) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{j_0-1} D_1 \circ \dots \circ D'_j \circ \dots \circ D_{j_0-1} \circ \Delta_1 \circ \dots \circ D_r \\ &\quad + D_1 \circ \dots \circ D_{j_0-1} \circ \Delta_2 \circ \dots \circ D_r, \end{aligned}$$

où $D'_j = D_j \circ I - I \circ D_j$, et on sait que $\text{ordre}(D'_j) \leq \text{ordre}(D_j)$. On applique alors l'hypothèse de récurrence aux

$$(D_1 \circ \dots \circ D'_j \circ \dots \circ D_{j_0-1} \circ \Delta_1 \circ \dots \circ D_r)$$

et à

$$(D_1 \circ \dots \circ D_{j_0-1} \circ \Delta_2 \circ \dots \circ D_r),$$

qui sont tous d'ordre $< m$, et de degré i , et on obtient le résultat annoncé.

PROPOSITION 6.3. — Pour tout $k \geq 2$ ⁽¹⁾,

$$H_{(n-3)k+1}^k = I \cdot D_{(n-3)k+1}^{k-1} + D_{(n-3)k+1}^{k-1}.$$

Démonstration. — Comme $k \geq 2$, I est un opérateur différentiel d'ordre $\leq k-1$; il est clair que $H_{(n-3)k+1}^k$ contient alors $I \cdot D_{(n-3)k+1}^{k-1} + D_{(n-3)k+1}^{k-1}$. Réciproquement, soit $D \in H_{(n-3)k+1}^k$. On a

$$D = \sum_{j \in J} D_{j_1} \circ \dots \circ D_{j_r},$$

avec pour tout j_l , $\text{ordre}(D_{j_l}) < k$. Quitte à décomposer chacun des D_{j_l} en somme d'opérateurs différentiels homogènes, ce qui est possible d'après le lemme 2.3, on peut les supposer homogènes. On a donc, d'après le lemme 6.2,

$$D = \sum_{j \in J} (I \cdot \Delta_{j,1} + \Delta_{j,2}),$$

avec, pour tout j , $\text{ordre}(\Delta_{j,2}) < k$. Finalement, on trouve :

$$D = I \cdot \Delta_1 + \Delta_2, \quad \text{avec } \text{ordre}(\Delta_2) < k.$$

C. Q. F. D.

⁽¹⁾ Si on ne suppose pas $k \geq 2$, on peut seulement montrer que $H_{(n-3)k+1}^k$ est contenu dans $I \cdot D_{(n-3)k+1}^{k-1} + D_{(n-3)k+1}^{k-1}$.

Nous pouvons maintenant montrer la proposition 6.1. : On déduit de la proposition 6.3 que, pour tout $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} H_{(n-3)k+1}^k / D_{(n-3)k+1}^{k-1} &= I \cdot (D_{(n-3)k+1}^{k-1} / D_{(n-3)k+1}^{k-2}), \\ D_{(n-3)k+1}^k / H_{(n-3)k+1}^k &= [D_{(n-3)k+1}^k / D_{(n-3)k+1}^{k-1}] / [I \cdot (D_{(n-3)k+1}^{k-1} / D_{(n-3)k+1}^{k-2})] \\ &= H^0(\bar{X}, \sigma_k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k+1}) / I \cdot H^0(\bar{X}, \sigma_{k-1} \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k+1}). \end{aligned}$$

$D_{(n-3)k+1}^k / H_{(n-3)k+1}^k$ est donc isomorphe à $\text{Im } \psi_{k, (n-3)k+1}$, et comme $\psi_{k, (n-3)k+1}$ est surjective, on trouve :

$$\begin{aligned} \dim D_{(n-3)k+1}^k / H_{(n-3)k+1}^k &= \dim H^0(\bar{X}, \mathcal{K}^k \otimes \mathcal{L}^{(n-3)k+1}) = \dim H^0(\bar{X}, \mathcal{L}) = 3, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 6.1.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BERNSTEIN (I. N), GEL'FAND (I. M.) et GEL'FAND (S. I.). — Opérateurs différentiels sur un cône cubique [en russe], *Uspekhi Mat. Nauk*, t. 27, 1972, p. 185-190; et [en anglais], *Russian math. Surv.*, t. 27, 1972, p. 169-174.
- [2] BLOOM (T.). — Opérateurs différentiels sur un espace analytique complexe, *Séminaire Lelong : Analyse*, Année 1967-1968. — Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1968 (*Lecture Notes in Mathematics*, 71).
- [3] BRIESKORN (E.). — Rationale Singularitäten komplexer Flächen, *Invent. Math.*, t. 4, 1968, p. 336-358.
- [4] GUNNING (R. C.). — *Lectures on Riemann surfaces*. — Princeton, Princeton University Press, 1966 (*Mathematical Notes*).
- [5] KANTOR (J.-M.). — Opérateurs différentiels sur les singularités-quotients, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 273, 1971, Série A, p. 897-899.
- [6] MALGRANGE (B.). — Analytic spaces, "Topics in several complex variables", p. 1-29. — Genève, Enseignement Mathématique, 1968 (*Monographies de l'Enseignement mathématique*, 17).
- [7] MATSUMURA (H.). — *Commutative algebra*. — New York, Amsterdam W. A. Benjamin, 1970 (*Mathematics Lecture Note Series*).
- [8] VIGUÉ (J.-P.). — Opérateurs différentiels sur les espaces analytiques, *Invent. Math.*, t. 20, 1973, p. 313-336.
- [9] WHITNEY (H.). — *Complex analytic varieties*. — Reading, Addison-Wesley Publishing Company, 1972.

(Texte reçu le 2 juillet 1974.)

Jean-Pierre VIGUÉ,
Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université de Paris-Sud,
Centre universitaire d'Orsay,
91405 Orsay.