

# BULLETIN DE LA S. M. F.

NICOLE CONZE

## **Algèbres d'opérateurs différentiels et quotients des algèbres enveloppantes**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 102 (1974), p. 379-415

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1974\\_\\_102\\_\\_379\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__379_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## ALGÈBRES D'OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS ET QUOTIENTS DES ALGÈBRES ENVELOPPANTES

PAR

NICOLE CONZE

---

RÉSUMÉ. — Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps de caractéristique zéro,  $U(\mathfrak{g})$  l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ , et  $I$  un idéal bilatère induit de  $U(\mathfrak{g})$ . On réalise l'algèbre quotient  $U(\mathfrak{g})/I$  comme algèbre d'opérateurs différentiels. On en déduit, en particulier, qu'un idéal bilatère de  $U(\mathfrak{g})$ , induit par un idéal bilatère complètement premier, est complètement premier. Lorsque  $\mathfrak{g}$  est semi-simple déployée, et  $I$  l'annulateur d'un  $\mathfrak{g}$ -module simple admettant un plus haut poids, on obtient un plongement de  $U(\mathfrak{g})/I$  dans l'algèbre  $\mathcal{A}_n$  des opérateurs différentiels à coefficients polynomiaux en  $n$ , variables ( $n = (1/2)(\dim \mathfrak{g} - \text{rang } \mathfrak{g})$ ), tel que  $\text{Fract}(U(\mathfrak{g})/I) = \text{Fract } \mathcal{A}_n$ . Grâce à des extensions du corps de base, on obtient un résultat analogue pour les algèbres  $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{p}$  est un idéal de  $U(\mathfrak{g})$ , engendré par un idéal premier du centre de  $U(\mathfrak{g})$ .

### Introduction.

Les algèbres de Lie étudiées sont définies sur un corps  $k$  de caractéristique zéro et sont de dimension finie. L'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$  est notée  $U(\mathfrak{g})$ .

Soient  $\mathfrak{b}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ , et  $J$  un idéal bilatère de  $U(\mathfrak{b})$ ; l'idéal induit à  $U(\mathfrak{g})$  par  $J$  est, par définition, le plus grand idéal bilatère  $I$  de  $U(\mathfrak{g})$  contenu dans l'idéal à gauche  $U(\mathfrak{g})J$ . Soit  $f$  une représentation de  $\mathfrak{b}$  de noyau  $J$  dans  $U(\mathfrak{b})$ ; alors  $I$  est le noyau dans  $U(\mathfrak{g})$  de la représentation  $\rho$  induite à  $\mathfrak{g}$  par  $f$  ([4], 5.1.7). On montre ici qu'on peut réaliser  $\rho$  par des opérateurs différentiels. Dans la première partie, on en déduit que si  $J$  est complètement premier,  $I$  l'est aussi, et que si  $U(\mathfrak{b})/J$  ne contient pas d'éléments nilpotents d'ordre  $> n$ , alors  $U(\mathfrak{g})/I$  n'en contient pas non plus.

Dans la deuxième partie, on étudie le cas où  $\mathfrak{g}$  est semi-simple déployée,  $\mathfrak{b}$  une sous-algèbre de Borel de  $\mathfrak{g}$ , et  $f$  une représentation de dimension 1 de  $\mathfrak{b}$ . Le  $\mathfrak{g}$ -module associé à  $\rho$  est un module de VERMA [14]. D'après [6], le noyau  $I$  de  $\rho$  est un idéal primitif de  $U(\mathfrak{g})$ , engendré par son inter-

section avec le centre  $Z$  de  $U(\mathfrak{g})$ . Par la méthode exposée dans la première partie, on obtient un plongement de  $U(\mathfrak{g})/I$  dans l'algèbre de Weyl  $\mathcal{A}_n$  des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux en  $n$  variables ( $n = (1/2)(\dim \mathfrak{g} - \text{rang } \mathfrak{g})$ ), avec des formules explicites. Suivant une suggestion de M. DUFLO, on étudie ensuite l'espace des  $k$ -homomorphismes  $\mathfrak{g}$ -finis d'un module de Verma dans un autre, en s'inspirant du mémoire [10] de I. M. GEL'FAND et A. A. KIRILLOV. On montre ainsi que le corps des fractions de  $U(\mathfrak{g})/I$  est isomorphe au corps des fractions de  $\mathcal{A}_n$ . (Cela avait été observé dans [5] lorsque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$ ). Signalons que [5] contient des résultats beaucoup plus complets sur les quotients primitifs de  $U(\mathfrak{g})$ , pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$ . Si  $I$  est un idéal de  $U(\mathfrak{g})$ , engendré par un idéal maximal de  $Z$ , il existe une extension finie  $k'$  de  $k$  telle que  $I \otimes k'$  soit l'annulateur d'un module de Verma sur  $\mathfrak{g} \otimes k'$ . On a donc

$$\text{Fract}((U(\mathfrak{g})/I) \otimes k') = \text{Fract}(\mathcal{A}_n \otimes k').$$

Utilisant des extensions du corps de base comme dans [8], on obtient un résultat analogue pour l'algèbre  $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$ , où  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $Z$ . (En particulier, pour  $\mathfrak{p} = 0$ , on retrouve le résultat principal de [10]).

L'essentiel de ces résultats a été annoncé dans [3].

J'exprime ma très vive reconnaissance à J. DIXMIER, qui a dirigé et encouragé mon travail avec beaucoup de patience et d'attention.

## 1. Préliminaires

1.1. Si  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie sur  $k$ , on note  $V^*$  l'espace dual de  $V$ ; on considère l'algèbre symétrique  $S(V)$  de  $V$  comme l'algèbre des fonctions polynômiales sur  $V^*$ . On note  $S_q(V)$  l'espace des éléments de  $S(V)$  de degré  $\leq q$ .

A tout  $f \in V^*$ , on associe la dérivation  $D(f)$  de  $S(V)$ , définie par

$$(D(f)x)(g) = \left. \frac{d}{dt} x(g+tf) \right|_{t=0} \quad \text{pour } x \in S(V) \text{ et } g \in V^*.$$

L'application  $f \rightarrow D(f)$  se prolonge en un isomorphisme, noté encore  $D$  de  $S(V^*)$  sur une sous-algèbre  $\mathcal{D}(V)$  de  $\text{End } S(V)$  dont les éléments, sont appelés opérateurs différentiels à coefficients constants sur  $V^*$ . L'algèbre des opérateurs différentiels à coefficients polynômiaux sur  $V^*$ , qu'on note  $\mathcal{A}(V)$ , est, par définition, la sous-algèbre de  $\text{End } S(V)$

engendrée par les éléments de  $\mathcal{D}(V)$  et les multiplications par les éléments de  $S(V)$  [si  $n = \dim V$ ,  $\mathcal{A}(V)$  est isomorphe à l'algèbre de Weyl  $\mathcal{A}_n$ ].

On note  $\hat{S}(V)$  l'algèbre complétée de  $S(V)$  pour la topologie définie par les puissances de l'idéal qui s'annule en 0. L'homomorphisme défini ci-dessus se prolonge par continuité en un isomorphisme, noté aussi  $D$ , de  $\hat{S}(V^*)$  sur une sous-algèbre  $\hat{\mathcal{D}}(V)$  de  $\text{End } \hat{S}(V)$ . On appelle algèbre des opérateurs différentiels de degré infini à coefficients polynômiaux sur  $V$ , et l'on note  $\hat{\mathcal{A}}(V)$ , la sous-algèbre de  $\text{End } \hat{S}(V)$  engendrée par  $\mathcal{A}(V)$  et  $\hat{\mathcal{D}}(V)$ .

1.2. Posons pour simplifier

$$\hat{\mathcal{A}} = \hat{\mathcal{A}}(V), \quad \hat{\mathcal{D}} = \hat{\mathcal{D}}(V).$$

Fixons une base  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de  $V$ , et notons  $\partial_1, \dots, \partial_n$  les dérivations définies par la base duale. Alors  $\hat{\mathcal{D}}$  s'identifie à l'algèbre de séries formelles  $k[[\partial_1, \dots, \partial_n]]$ . On note  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  les dérivations intérieures de  $\hat{\mathcal{A}}$  définies par  $X_1, \dots, X_n$ . Pour  $K = (k_1, \dots, k_n)$  et  $L = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ , on utilisera les notations habituelles de multi-indices  $|K| = k_1 + \dots + k_n$ ,  $\binom{K}{L} = \binom{k_1}{l_1} \dots \binom{k_n}{l_n}$  [où  $\binom{k}{l}$  est le coefficient du binôme],  $X^K = X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$ , etc.

On notera toujours par la même lettre un élément d'une algèbre et l'opérateur de multiplication par cet élément.

On aura besoin des lemmes suivants, qui sont sans doute bien connus.

1.3. LEMME :

(i)  $\Delta_i(\hat{\mathcal{D}}) \subset \hat{\mathcal{D}}$ .

(ii) L'algèbre  $\hat{\mathcal{A}}$  s'identifie à l'algèbre de Ore  $\hat{\mathcal{D}}_{\Delta_1, \dots, \Delta_n}[X_1, \dots, X_n]$ . Plus précisément, tout élément  $a \in \hat{\mathcal{A}}$  s'écrit de façon unique comme somme finie

$$a = \sum_{K \in \mathbb{N}^n} X^K p_K, \quad \text{avec } p_K \in \hat{\mathcal{D}}$$

et

$$(a|_{S_q(V)} = 0) \Leftrightarrow (p_K|_{S_q(V)} = 0 \text{ pour tout } K).$$

Démonstration. — On a  $\Delta_i(\partial_j) = 0$  ou  $-1$  suivant que  $i \neq j$  ou  $i = j$ , d'où

$$(1) \quad \Delta_i(\partial^K) = -k_i \partial_1^{k_1} \dots \partial_i^{k_i-1} \dots \partial_n^{k_n},$$

ce qui prouve (i). On en déduit immédiatement que tout élément  $a \in \mathcal{A}^\wedge$  s'écrit comme somme finie  $a = \sum X^K p_K$  avec  $p_K \in \mathcal{D}^\wedge$ . Un calcul facile montre, par récurrence sur  $|L|$ , qu'on a, pour  $a \in \mathcal{A}^\wedge$  et  $L \in \mathbb{N}^n$ ,

$$(2) \quad (\Delta^L a)(1) = \sum_{K \in \mathbb{N}^n} (-1)^{|K|} \binom{L}{K} X^{L-K} a(X^K),$$

$$(3) \quad a(X^L) = \sum_{K \in \mathbb{N}^n} (-1)^K \binom{L}{K} X^{L-K} (\Delta^K a)(1).$$

Soit  $a = \sum X^K p_K \in \mathcal{A}$  tel que  $a|_{S_q(V)} = 0$ . D'après la formule (2), on a, pour tout  $L$  tel que  $|L| \leq q$ ,

$$0 = (\Delta^L a)(1) = \sum X^K (\Delta^L p_K)(1).$$

Comme  $(\Delta^L p_K)(1)$  est scalaire, ceci implique  $(\Delta^L p_K)(1) = 0$  pour tout  $K$  et pour  $|L| \leq q$ , ce qui, grâce à (3), prouve (ii) et l'unicité.

Si  $a = \sum X^K p_K$ , on notera  $d(a)$  le plus petit entier  $d$  tel que  $p_K = 0$  pour  $|K| > d$ .

1.4. LEMME. — Soit  $\mathcal{B}$  une  $k$ -algèbre à unité.

(i) Si  $\mathcal{B}$  est intègre,  $\mathcal{A}^\wedge \otimes \mathcal{B}$  l'est aussi.

(ii) Si  $\mathcal{B}$  ne contient pas d'éléments nilpotents d'ordre  $> d_0$ , alors  $\mathcal{A}^\wedge \otimes \mathcal{B}$  n'en contient pas non plus.

*Démonstration.* — D'après le lemme 1.3 (ii), tout élément  $a$  de  $\mathcal{A}^\wedge \otimes \mathcal{B}$  s'écrit de façon unique comme somme finie  $a = \sum_{K \in \mathbb{N}^n} X^K p_K$ , avec  $p_K \in \mathcal{D}^\wedge \otimes \mathcal{B}$ . Introduisons sur  $\mathbb{N}^n$  l'ordre total suivant :  $(K \leq L) \Leftrightarrow (|K| < |L| \text{ ou } |K| = |L| \text{ et } K \text{ est inférieur à } L \text{ pour l'ordre lexicographique})$ . La formule (1) montre que si  $p \in \mathcal{D}^\wedge \otimes \mathcal{B}$ , on a

$$[X^K, p] = \sum_{|L| < |K|} X^L q_L \quad \text{avec } q_L \in \mathcal{D}^\wedge \otimes \mathcal{B}.$$

Soient

$$a = \sum_{K \leq K_0} X^K p_K \quad \text{et} \quad b = \sum_{L \leq L_0} X^L q_L$$

des éléments de  $\mathcal{A}^\wedge \otimes \mathcal{B}$  avec  $p_K, q_L \in \mathcal{D}^\wedge \otimes \mathcal{B}$ ,  $p_{K_0} \neq 0$  et  $q_{L_0} \neq 0$ . Alors

$$ab = X^{K_0+L_0} p_{K_0} q_{L_0} + \sum_{M < K_0+L_0} X^M r_M \quad \text{avec } r_M \in \mathcal{D}^\wedge \otimes \mathcal{B}.$$

Par suite

$$(ab = 0) \Rightarrow (p_{K_0} q_{L_0} = 0).$$

De même,

$$a^d = X^{dK_0} (p_{K_0})^d + \sum_{M < dK_0} X^M s_M,$$

donc

$$(a^d = 0) \Rightarrow ((p_{K_0})^d = 0).$$

Il suffit donc de démontrer les assertions (i) et (ii) avec  $\mathcal{D}^\wedge$  à la place de  $\mathcal{A}^\wedge$ , ce qui est immédiat puisque  $\mathcal{D}^\wedge$  est une algèbre de séries formelles sur  $k$ .

1.5. LEMME. — Soit  $\{a_q\}_{q \geq 0}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{A}^\wedge$  tels que :

(a)  $(q \leq r) \Rightarrow (a_q|_{S_q(V)} = a_r|_{S_q(V)}).$

(b) Il existe un entier  $d$  tel que  $d(a_q) \leq d$  pour tout  $q$ .

Alors il existe un élément  $a \in \mathcal{A}^\wedge$  unique tel que  $a|_{S_q(V)} = a_q|_{S_q(V)}$  pour tout  $q$ .

Démonstration. — Ecrivons :

$$a_q = \sum_{|K| \leq d} X^K p_{K,q}, \quad \text{où } p_{K,q} \in \mathcal{D}^\wedge.$$

D'après le lemme 1.3 (ii), on a

$$p_{K,q}|_{S_q(V)} = p_{K,r}|_{S_q(V)} \quad \text{si } q \leq r,$$

autrement dit, pour chaque  $K$ , la suite  $\{p_{K,q}\}$  est une suite de Cauchy dans  $\mathcal{D}^\wedge$ . Soit  $p_K$  sa limite. Il est clair que l'élément  $a = \sum_{|K| \leq d} X^K p_K$  satisfait à la conclusion du lemme.

1.6. Pour toute algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ , on notera  $\sigma$  la symétrisation :  $S(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ . Les formules qui suivent montrent que, transportée par  $\sigma^{-1}$  dans  $S(\mathfrak{g})$ , la multiplication dans  $U(\mathfrak{g})$  par un élément de  $\mathfrak{g}$  s'écrit comme opérateur différentiel de degré infini à coefficients polynômes.

Soit  $\{X^1, \dots, X_n\}$  une base de  $\mathfrak{g}$ . On note  $\partial_1, \dots, \partial_n$  les dérivations définies par la base duale. On pose

$$A_i = \text{ad } X_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, n.$$

Pour des indices  $i_j \in \{1, \dots, n\}$ , on note  $s(A_{i_1} \dots A_{i_p})$  le produit symétrisé  $(1/p!) \sum_{\tau} A_{i_{\tau(1)}} \dots A_{i_{\tau(p)}}$ , où  $\tau$  parcourt l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, p\}$ . On note  $b_k$  les nombres de Bernoulli, définis par la série génératrice

$$\sum_{k \geq 0} b_k T^k = T(e^T - 1)^{-1}.$$

Pour  $K = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n$ , on pose

$$K! = k_1! \dots k_n!, \quad b_K = b_{|K|} |K|! (K!)^{-1},$$

$$c_K = b_K = -\frac{1}{2} \text{ si } |K| = 1, \quad c_K = -b_K \text{ si } |K| \geq 2.$$

On a, pour  $X \in \mathfrak{g}$  et  $x \in S(\mathfrak{g})$ ,

$$(4) \quad X \sigma(x) = \sum_{K \in \mathbf{N}^n} b_K \sigma(s(A^K)(X)) \partial^K(x),$$

$$(5) \quad \sigma(Xx) = \sigma(x)X + \sum_{K \in \mathbf{N}^n, |K| \geq 1} c_K \sigma(s(A^K)(X)) \partial^K(x).$$

Ces formules sont démontrées par exemple dans [1] (théorème III) et [11] (Lemme 2.1). Remarquons que la formule (5) se déduit de la formule (4) en utilisant

$$X \sigma(x) - \sigma(x)X = -\sum_{i=1}^n \sigma(A_i(X)) \partial_i(x).$$

## Première partie

### 2. Représentations induites

2.1. On reprend les données de l'introduction. Soit  $E$  le  $U(\mathfrak{b})$ -module associé à  $f$ . Rappelons que  $\rho$  est la représentation régulière gauche dans  $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} E$ . Choisissons un sous-espace  $\mathfrak{p}$  supplémentaire de  $\mathfrak{b}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Alors l'application  $x \otimes e \rightarrow \sigma(x) \otimes e$  se prolonge en une bijection linéaire  $\sigma \otimes 1$ , de  $S(\mathfrak{p}) \otimes E$  sur  $U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} E$ . Soit  $R$  la représentation de  $U(\mathfrak{g})$  dans  $S(\mathfrak{p}) \otimes E$ , déduite de  $\rho$  à l'aide de cette bijection. Posons

$$\mathcal{B} = f(U(\mathfrak{b})) \subset \text{End}_k E.$$

2.2. PROPOSITION :

$$R(U(\mathfrak{g})) \subset \hat{\mathcal{A}}(\mathfrak{p}) \otimes \mathcal{B}.$$

*Démonstration.* — On utilise les formules (4) et (5) de 1.6. On suppose la base  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de  $\mathfrak{g}$  choisie de façon que  $\{X_1, \dots, X_m\}$  soit une base de  $\mathfrak{p}$ , et  $\{X_{m+1}, \dots, X_n\}$  une base de  $\mathfrak{b}$ . On considère  $\mathbf{N}^m$  comme l'ensemble des points de  $\mathbf{N}^n$  dont les  $(n-m)$  dernières coordonnées sont nulles.

Soient  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $x \in S(\mathfrak{p})$ ,  $e \in E$ . L'élément  $R(X)(x \otimes e)$  est défini par

$$(\sigma \otimes 1)(R(X)(x \otimes e)) = X \sigma(x) \otimes e.$$

La formule (4) donne

$$X \sigma(x) = \sum_{K \in \mathbb{N}^m} b_K \sigma(s(A^K)(X) \partial^K(x)).$$

Posons

$$b_K s(A^K)(X) = Y_K + H_K, \quad \text{où } Y_K \in \mathfrak{p} \text{ et } H_K \in \mathfrak{b}.$$

On a

$$X \sigma(x) \otimes e = \sigma(\sum_{K \in \mathbb{N}^m} Y_K \partial^K(x)) \otimes e + \sum_{K \in \mathbb{N}^m} \sigma(H_K \partial^K(x)) \otimes e.$$

On a  $Y_K \partial^K(x) \in S(\mathfrak{p})$ . On utilise la formule (5) pour calculer les termes complémentaires  $\sigma(H_K \partial^K(x)) \otimes e$ . On obtient

$$\sigma(H_K \partial^K(x)) = \sigma(\partial^K(x)) H_K + \sum_{L \in \mathbb{N}^m, |L| \geq 1} c_L \sigma(s(A^L)(H_K) \partial^{K+L}(x)).$$

Posons

$$c_L s(A^L)(H_K) = Y_{K,L} + H_{K,L}, \quad \text{où } Y_{K,L} \in \mathfrak{p} \text{ et } H_{K,L} \in \mathfrak{b}.$$

Compte tenu de  $H_K \otimes e = 1 \otimes f(H_K) e$ , on obtient, les indices  $K$  et  $L$  variant dans  $\mathbb{N}^m$ ,

$$\begin{aligned} X \sigma(x) \otimes e &= \sigma(\sum_{K, |L| \geq 1} Y_K \partial^K(x) + Y_{K,L} \partial^{K+L}(x)) \otimes e \\ &\quad + \sum_{K, |L| \geq 1} \sigma(\partial^K(x)) \otimes f(H_K) e \\ &\quad + \sum_{K, |L| \geq 1} \sigma(H_{K,L} \partial^{K+L}(x)) \otimes e. \end{aligned}$$

On utilise à nouveau la formule (5) pour calculer les termes complémentaires  $\sigma(H_{K,L} \partial^{K+L}(x)) \otimes e$ , et ainsi de suite.

Définissons, par récurrence,  $Y_{K, L_1, \dots, L_p} \in \mathfrak{p}$  et  $H_{K, L_1, \dots, L_p} \in \mathfrak{b}$  par

$$c_L s(A^L)(H_{K, L_1, \dots, L_{p-1}}) = Y_{K, L_1, \dots, L_{p-1}, L} + H_{K, L_1, \dots, L_{p-1}, L}.$$

Si  $x \in S_q(\mathfrak{p})$ , on a, les indices  $K, L_1, \dots$  variant dans  $\mathbb{N}^m$

$$\begin{aligned} X \sigma(x) \otimes e &= \sigma \{ \sum_K Y_K \partial^K(x) + \sum_{K, |L_1| \geq 1} Y_{K, L_1} \partial^{K+L_1}(x) + \dots \\ &\quad + \sum_{K, |L_1| \geq 1, \dots, |L_q| \geq 1} Y_{K, L_1, \dots, L_q} \partial^{K+L_1+\dots+L_q}(x) \} \otimes e \\ &\quad + \sum_K \sigma(\partial^K(x)) \otimes f(H_K) e + \dots \\ &\quad + \sum_{K, |L_1| \geq 1, \dots, |L_q| \geq 1} \sigma(\partial^{K+L_1+\dots+L_q}(x)) \otimes f(H_{K, L_1, \dots, L_q}) e. \end{aligned}$$



En décomposant les  $H_{K, L_1, \dots, L_p}$  selon la base  $\{X_{m+1}, \dots, X_n\}$  de  $\mathfrak{b}$ , on obtient, toujours pour  $x \in \mathcal{S}_q(\mathfrak{p})$  :

$$R(X)(x \otimes e) = a_q^{(0)}(x) \otimes e \\ + a_q^{(1)}(x) \otimes f(X_{m+1})e + \dots + a_q^{(n-m)}(x) \otimes f(X_n)e,$$

où  $a_q^{(j)} \in \hat{\mathcal{A}}(\mathfrak{p})$  pour  $j = 0, 1, \dots, n-m$ .

Il résulte de sa construction même que, pour chaque  $j$ , la suite  $\{a_q^{(j)}\}$  satisfait aux conditions du lemme 1.5 [remarquer que  $d(a_q^{(j)}) \leq 1$ ]. Soit  $a^{(j)} \in \hat{\mathcal{A}}(\mathfrak{p})$  sa limite, donnée par le lemme 1.5. On a

$$R(X) = a^{(0)} \otimes 1 + \sum_{j=1}^{n-m} a^{(j)} \otimes f(X_{m+j}).$$

### 2.3. REMARQUES :

1° En général, la proposition 2.2 devient fautive si l'on remplace  $\hat{\mathcal{A}}(\mathfrak{p})$  par  $\mathcal{A}(\mathfrak{p})$ . Voici un exemple : soient  $\mathfrak{g} = kX \oplus kY$ , avec  $[X, Y] = Y$ ,  $\mathfrak{b} = kY$ ,  $f \in \mathfrak{b}^*$  définie par  $f(Y) = 1$ ,  $\mathfrak{p} = kX$ . On a  $R(Y)(X^p) = (X-1)^p$  pour tout  $p$ , donc  $R(Y) \notin \mathcal{A}(\mathfrak{p})$ . Néanmoins, l'algèbre  $R(U(\mathfrak{g})) (\simeq U(\mathfrak{g}))$  est isomorphe à une sous-algèbre de l'algèbre de Weyl  $\mathcal{A}_1$ .

2° Par contre, si  $\mathfrak{g}$  est nilpotente, la démonstration ci-dessus montre qu'on a toujours  $R(U(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{A}(\mathfrak{p}) \otimes \mathcal{B}$ . Soient  $g \in \mathfrak{g}^*$ ,  $\mathfrak{b}$  une polarisation en  $\mathfrak{g}$  [c'est-à-dire une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  qui est de plus un sous-espace totalement isotrope maximal pour la forme bilinéaire  $B_g(X, Y) = g([X, Y])$  sur  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ ] et  $f = g|_{\mathfrak{b}}$ . Dans ce cas, on a même  $R(U(\mathfrak{g})) = \mathcal{A}(\mathfrak{p})$  [2].

3° La remarque précédente et la deuxième partie de ce travail montrent que la proposition 2.2 doit être rapprochée de la conjecture de GEL'FAND KIRILLOV sur le corps enveloppant d'une algèbre de Lie algébrique [9].

## 3. Idéaux induits

3.1. THÉORÈME. — Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie,  $\mathfrak{b}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ ,  $J$  un idéal bilatère de  $U(\mathfrak{b})$ , et  $I$  l'idéal bilatère de  $U(\mathfrak{g})$  induit par  $J$ . Si  $J$  est complètement premier, alors  $I$  l'est aussi.

*Démonstration.* — D'après l'introduction, la proposition 2.2 et le lemme 1.4 (i), il existe un homomorphisme injectif de  $U(\mathfrak{g})/I$  dans une algèbre intègre.

3.2. En particulier, le noyau d'une représentation induite par une représentation de dimension 1 d'une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  est un idéal complètement premier.

L'intérêt de ce résultat vient de ce que, si le corps de base est algébriquement clos, « beaucoup » d'idéaux primitifs de  $U(\mathfrak{g})$  sont de cette nature. Précisément, on a le résultat suivant [6] : supposons  $k$  algébriquement clos. L'ensemble  $\Omega$  des  $f \in \mathfrak{g}^*$  qui admettent une polarisation résoluble contient un ouvert de Zariski non vide de  $\mathfrak{g}^*$ . Soient  $f \in \Omega$ , et  $\mathfrak{b}$  une polarisation résoluble en  $f$ . Alors le noyau  $I_f$  de la représentation induite à  $\mathfrak{g}$  par  $f|_{\mathfrak{b}}$  est primitif <sup>(1)</sup>. Pour tout ouvert de Zariski non vide  $\Omega' \subset \Omega$ , l'ensemble  $\{I_f\}_{f \in \Omega'}$  est dense dans l'espace des idéaux primitifs de  $U(\mathfrak{g})$ . On peut ajouter

**COROLLAIRE.** — *Les idéaux  $I_f$  sont complètement premiers.*

3.3. Soit  $I$  un idéal bilatère premier de  $U(\mathfrak{g})$ . Alors  $\text{Fract}(U(\mathfrak{g})/I)$  est une algèbre de matrices à  $n$  lignes et  $n$  colonnes. La proposition 2.2 permet de répondre en partie au problème n° 12 de [4] par le corollaire suivant.

**COROLLAIRE.** — *Soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie,  $\mathfrak{b}$  une sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$ ,  $J$  un idéal bilatère de  $U(\mathfrak{b})$ , et  $I$  l'idéal bilatère de  $U(\mathfrak{g})$  induit par  $J$ . Supposons  $J$  et  $I$  premiers. Soit  $n$  (resp.  $m$ ) l'entier tel que  $\text{Fract}(U(\mathfrak{g})/I)$  [resp.  $\text{Fract}(U(\mathfrak{b})/J)$ ] soit une algèbre de matrices à  $n$  (resp.  $m$ ) lignes et  $n$  (resp.  $m$ ) colonnes. Alors  $n \leq m$ .*

*Démonstration.* — D'après [7] (th. 2.3), l'entier  $n$  est caractérisé par la propriété suivante : il existe dans  $U(\mathfrak{g})/I$  des éléments  $\neq 0$  nilpotents d'ordre  $n$ , mais il n'en existe pas d'ordre  $n+1$ . Il suffit donc d'appliquer le lemme 1.4 (ii).

*Remarque.* — L'idéal  $J$  peut être premier sans que  $I$  le soit, comme le montre l'exemple suivant.

*Exemple d'un idéal non premier induit par un idéal premier (et même primitif).* — Soit  $\mathfrak{b} = \mathfrak{sl}(2, k)$ , de base  $X, Y, H$  avec  $[H, X] = 2X$ ,  $[H, Y] = -2Y$ ,  $[X, Y] = H$ . Soit  $\mathfrak{p} = kE_1 + kE_2$  l'algèbre de Lie commutative de dimension 2. On fait opérer  $\mathfrak{b}$  dans  $\mathfrak{p}$  par la représentation naturelle, ( $XE_1 = E_2$ ), et on forme le produit semi-direct  $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} \times \mathfrak{b}$ .

(1) Il s'agit ici de la représentation induite tordue (cf. la remarque 3.4 ci-après).

Soit  $f$  une représentation de  $\mathfrak{b}$  dans un espace  $E$ . On définit la représentation  $R$  de  $\mathfrak{g}$  comme dans la proposition 2.2, en prenant  $\mathfrak{p} = k E_1 + k E_2$  comme supplémentaire de  $\mathfrak{b}$  dans  $\mathfrak{g}$ . Identifions  $S(\mathfrak{p})$  à  $k[E_1, E_2]$ , et notons  $Q_i$  la multiplication par  $E_i$ ,  $P_i$  la dérivation par  $E_i$ , pour  $i = 1, 2$ . On obtient

$$\begin{aligned} R(X) &= f(X) + P_2 Q_1, & R(Y) &= f(Y) + P_1 Q_2, \\ R(H) &= f(H) + P_1 Q_1 - P_2 Q_2, \\ R(E_1) &= Q_1, & R(E_2) &= Q_2. \end{aligned}$$

On vérifie que l'élément  $u = HE_1 E_2 + XE_2^2 - YE_1^2$  est central dans  $U(\mathfrak{g})$ .

On a

$$R(u) = f(H) Q_1 Q_2 + f(X) Q_2^2 - f(Y) Q_1^2.$$

Prenons par exemple pour  $f$  la représentation irréductible de dimension 2 :

$$f(X) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad f(H) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Alors

$$R(u) = \begin{bmatrix} Q_1 Q_2 & Q_2^2 \\ -Q_1^2 & -Q_1 Q_2 \end{bmatrix}$$

est de carré nul.

Soient  $I$  le noyau de  $R$ , et  $I'$  l'idéal bilatère de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par  $u$ . Comme  $u$  est central, on a  $I'^2 \subset I$ , et donc  $I$  n'est pas premier, ni même semi-premier.

3.4. REMARQUE. — Le théorème 3.1 et le corollaire 3.3 restent vrais si on considère l'induction tordue ([4], 5.2) au lieu de l'induction ordinaire. En effet, soient  $f$  une représentation de  $\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ ,  $\rho$  la représentation induite par  $f$ , et  $\rho'$  la représentation induite tordue par  $f$ . Soit  $\lambda$  le caractère de  $\mathfrak{b}$  défini par  $\lambda(H) = (1/2)(\text{tr ad}_{\mathfrak{g}} H - \text{tr ad}_{\mathfrak{b}} H)$  pour  $H \in \mathfrak{b}$ . Alors  $\rho'$  est la représentation induite au sens ordinaire par la représentation  $f' = f \otimes \lambda$  de  $\mathfrak{b}$ . Soit  $\tau$  l'automorphisme de  $U(\mathfrak{b})$  défini par  $\tau(H) = H + \lambda(H)$  pour  $H \in \mathfrak{b}$ . Alors  $\text{Ker } f' = \tau^{-1}(\text{Ker } f)$ , d'où notre assertion.

## Deuxième partie

### 4. Notations

$\mathfrak{g}$  est désormais une algèbre de Lie semi-simple, déployée sur  $k$ . On fixe une sous-algèbre de Cartan déployante  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$ , le système  $\{\alpha; \alpha > 0\}$

des racines positives de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ , une base de Weyl

$$\{ X_\alpha; \alpha > 0 \} \cup \{ Y_\alpha; \alpha > 0 \} \cup \{ H_\gamma; \gamma \text{ simple} \}$$

de  $\mathfrak{g}$ , où  $X_\alpha \in \mathfrak{g}(\alpha)$ ,  $Y_\alpha \in \mathfrak{g}(-\alpha)$  pour  $\alpha > 0$ , et  $[X_\gamma, Y_\gamma] = H_\gamma$  pour  $\gamma$  simple. On pose

$$\mathfrak{n}_+ = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}(\alpha), \quad \mathfrak{n} = \sum_{\alpha > 0} \mathfrak{g}(-\alpha).$$

On a

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+,$$

d'où

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{h}) \oplus (\mathfrak{n}U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+).$$

On note  $P$  la projection de  $U(\mathfrak{g})$  sur  $U(\mathfrak{h})$  relative à cette décomposition. Soit  $W$  le groupe de Weyl. Soient  $\delta = (1/2) \sum_{\alpha > 0} \alpha$ , et  $t$  l'automorphisme de  $U(\mathfrak{h})$  défini par  $(t.h)(\lambda) = h(\lambda + \delta)$  pour  $h \in U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$  et  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Le groupe de Weyl affine est  $W_a = \{ t^{-1}wt; w \in W \}$ . Alors  $P$  induit un isomorphisme du centre  $Z$  de  $U(\mathfrak{g})$  sur la sous-algèbre  $U(\mathfrak{h})^{W_a}$  de  $U(\mathfrak{h})$  formée des éléments invariants par  $W_a$ .

On notera  $u \mapsto u^T$  pour  $u \in U(\mathfrak{g})$ , l'antiautomorphisme de  $U(\mathfrak{g})$  défini par  $X^T = -X$  pour  $X \in \mathfrak{g}$ .

On pose  $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathfrak{n})$ . On note  $\partial_\alpha, \dots, \partial_\beta$  les dérivations de  $S(\mathfrak{n})$  définies par la base  $\{ Y_\alpha^*, \dots, Y_\beta^* \}$  de  $\mathfrak{n}^*$  duale de la base  $\{ Y_\alpha, \dots, Y_\beta \}$  de  $\mathfrak{n}$ . On pose  $A_\alpha = \text{ad } Y_\alpha$  pour  $\alpha > 0$ .

### 5. Modules de Verma

5.1. Un élément  $\lambda$  de  $\mathfrak{h}^*$  se prolonge de façon unique en une représentation de dimension 1 de l'algèbre de Borel  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}_+$ , nulle sur  $\mathfrak{n}_+$ . La représentation induite à  $\mathfrak{g}$  est notée  $\rho_\lambda$ . Soit  $J_\lambda$  l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par  $\mathfrak{n}_+$  et les éléments  $H - \lambda(H)$  pour  $H \in \mathfrak{h}$ . Alors l'espace de  $\rho_\lambda$  s'identifie au module de Verma  $M_\lambda = U(\mathfrak{g})/J_\lambda$ , et  $\rho_\lambda$  à la représentation régulière gauche de  $U(\mathfrak{g})$  dans  $M_\lambda$ .

Plus généralement, soient  $\mathcal{L}$  une  $k$ -algèbre commutative, à unité, et  $\lambda$  un homomorphisme de  $U(\mathfrak{h})$  dans  $\mathcal{L}$ . On appellera module de Verma associé à  $\lambda$  le  $(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L})$ -module  $M_\lambda = (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L})/J_\lambda$ , où  $J_\lambda$  est l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}$  engendré par  $\mathfrak{n}_+$  et les éléments  $H \otimes 1 - 1 \otimes \lambda(H)$ , pour  $H \in \mathfrak{h}$ . L'algèbre  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}$  opère dans  $M_\lambda$  par la représentation régulière gauche  $\rho_\lambda$ . [On s'intéressera en fait aux cas suivants : le cas habi-

tuel, où  $\mathcal{L} = k$ ; le cas où  $\mathcal{L} = U(\mathfrak{h})$ , et  $\lambda$  est l'application identique; et le cas, englobant les précédents, où  $\mathfrak{p}$  étant un idéal bilatère premier de  $U(\mathfrak{g})$ ,  $\mathcal{L}$  est une extension finie du centre  $Z(\mathfrak{p})$  de  $U(\mathfrak{g})/\mathfrak{p}$ , et  $\lambda$  est tel que  $\lambda(P(z)) = z \bmod \mathfrak{p}$  pour tout  $z$  dans  $Z$ .]

Ces « modules de Verma généralisés » ont évidemment des propriétés analogues à celles des modules de Verma habituels [14] (ce sont des modules de Verma au sens habituel pour l'algèbre de Lie  $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{L}$  définie sur l'anneau de base  $\mathcal{L}$ ).

5.2. PROPOSITION. — Pour tout  $z \in Z$ , on a

$$\rho_\lambda(z) = \lambda(P(z))1.$$

Ce résultat est immédiat.

5.3. LEMME. — Soit  $m_\lambda$  l'image de  $1 \otimes 1 \in U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}$  dans  $M_\lambda$ . L'application  $v \otimes h \mapsto \rho_\lambda(v \otimes h) m_\lambda$  définit un isomorphisme de  $\mathcal{L}$ -modules de  $U(\mathfrak{n}) \otimes \mathcal{L}$  sur  $M_\lambda$ .

Démonstration. — D'après POINCARÉ-BIRKHOFF-WITT, on a

$$U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L} = (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}) \mathfrak{n}_+ \oplus (U(\mathfrak{n} + \mathfrak{h}) \otimes \mathcal{L})$$

et

$$U(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{L} = \text{Ker } \lambda \oplus \mathcal{L},$$

où  $\text{Ker } \lambda$  est le noyau du  $\mathcal{L}$ -homomorphisme de  $U(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{L}$  dans  $\mathcal{L}$  qui prolonge  $\lambda$ . On a

$$U(\mathfrak{n} + \mathfrak{h}) = U(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h})$$

(produit tensoriel d'espaces vectoriels), d'où

$$U(\mathfrak{n} + \mathfrak{h}) \otimes \mathcal{L} = U(\mathfrak{n}) \otimes \mathcal{L} \oplus (U(\mathfrak{n}) \otimes \text{Ker } \lambda),$$

d'où

$$U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L} = U(\mathfrak{n}) \otimes \mathcal{L} + (U(\mathfrak{n}) \otimes \text{Ker } \lambda) + (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}) \mathfrak{n}_+.$$

Il est clair que

$$(U(\mathfrak{n}) \otimes \text{Ker } \lambda) + (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}) \mathfrak{n}_+ \subset J_\lambda.$$

De la décomposition ci-dessus, on déduit que

$$J_\lambda^{\mathfrak{u}} = (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}) \mathfrak{n}_+ + (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}) \text{Ker } \lambda$$

est contenu dans

$$U(\mathfrak{n}) \otimes \text{Ker } \lambda + (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}) \mathfrak{n}_+ \text{Ker } \lambda.$$

Comme  $[\mathfrak{h}, \mathfrak{n}_+] \subset \mathfrak{n}_+$ , on a

$$\mathfrak{n}_+ \text{Ker } \lambda \subset (U(\mathfrak{h}) \otimes \mathcal{L}) \mathfrak{n}_+,$$

d'où

$$J_\lambda = U(\mathfrak{n}) \otimes \text{Ker } \lambda + (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}) \mathfrak{n}_+,$$

et finalement

$$U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L} = U(\mathfrak{n}) \otimes \mathcal{L} \oplus J_\lambda.$$

5.4. PROPOSITION. — *Le noyau  $I_\lambda$  de  $\rho_\lambda$  est engendré par son intersection avec le centre  $Z \otimes \mathcal{L}$  de  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}$ .*

*Démonstration.* — Lorsque  $\mathcal{L} = k$ , et  $k$  algébriquement clos, c'est le théorème III.2 de [6]. La proposition se démontre comme ce théorème. Soient  $\mathcal{H}_S$  l'espace des éléments harmoniques de  $S(\mathfrak{g})$ , et  $\mathcal{H} = \sigma(\mathcal{H}_S)$  l'espace des éléments harmoniques de  $U(\mathfrak{g})$  [12]. On prouve d'abord le résultat suivant :

1° *Soit  $P_0$  la projection de  $S(\mathfrak{g})$  sur  $S(\mathfrak{n})$  parallèlement à  $S(\mathfrak{g}) \mathfrak{b}$ . Soit  $x \in \mathcal{H}_S$  un élément  $\mathfrak{n}$ -invariant. Alors  $(P_0(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$ .*

Pour  $k$  algébriquement clos, c'est le lemme III.1 de [6]. Pour  $k$  quelconque, on l'obtient en remarquant que, si  $\mathfrak{g}^-$ ,  $\mathfrak{b}^-$ ,  $\mathfrak{n}^-$ , etc. sont les algèbres obtenues en étendant les scalaires de  $k$  à sa clôture algébrique  $k^-$ , alors  $\mathcal{H}_S$  est contenu dans l'espace des éléments harmoniques  $\mathcal{H}_S^-$  de  $S(\mathfrak{g}^-)$ .

Notons maintenant  $P_0$  la projection de  $U(\mathfrak{g})$  sur  $U(\mathfrak{n})$  parallèlement à  $U(\mathfrak{g}) \mathfrak{b}$ . Le résultat suivant (qui, pour  $k$  algébriquement clos, est le lemme III.2 de [6]), se déduit du 1° exactement comme le lemme III.2 du lemme III.1 dans [6].

2° *Soit  $u \in \mathcal{H}$  un élément  $\mathfrak{n}$ -invariant. La filtration de  $P_0(u)$  est égale à la filtration de  $u$ .*

Cela posé, notons  $I'$  l'idéal de  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}$  engendré par  $I_\lambda \cap Z \otimes \mathcal{L}$ . Pour la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$ ,  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}$  est un module localement fini dont  $I_\lambda$  et  $I'$  sont des sous-modules. Si  $I_\lambda$  est différent de  $I'$ , il contient donc un élément  $a$ ,  $\mathfrak{n}$ -invariant, qui n'est pas dans  $I'$ . Fixons une base  $\{l_i\}$  de  $\mathcal{L}$ . Alors  $a$  s'écrit de manière unique  $a = \sum u_i \otimes l_i$ , où les  $u_i \in U(\mathfrak{g})$  sont  $\mathfrak{n}$ -invariants. Soit  $\{k_t\}$  une base de l'espace des éléments  $\mathfrak{n}$ -invariants

de  $\mathcal{H}$ , telle que  $\sigma^{-1}(k_t)$  soit homogène de degré  $n_t$ . Chaque  $u_i$  s'écrit de manière unique :

$$u_i = \sum_t k_t z_{t,i}, \quad \text{avec } z_{t,i} \in Z,$$

et l'on a

$$a = \sum_t k_t z_t, \quad \text{où } z_t = \sum_i z_{t,i} \otimes l_i \in Z \otimes \mathcal{L}.$$

Définissons  $c_t \in \mathcal{L}$  par  $\rho_\lambda(z_t) = c_t \cdot 1$ . Comme  $a \notin I'$ , il existe  $t$  tel que  $c_t \neq 0$ . Soit  $n = \sup \{n_t, c_t \neq 0\}$ . Posons

$$b = \sum_{n=n_t} k_t c_t,$$

et écrivons :

$$b = \sum_i v_i \otimes l_i, \quad \text{avec } v_i \in U(\mathfrak{g}).$$

Les  $v_i$  sont des éléments harmoniques  $n$ -invariants. Ils ne sont pas tous nuls et, pour  $v_i \neq 0$ , l'élément  $\sigma^{-1}(v_i)$  est homogène de degré  $n$ . Pour chaque entier  $p \geq 0$ , notons  $U_p(\mathfrak{n})$  l'espace des éléments de  $U(\mathfrak{n})$  de filtration au plus  $p$ , et  $M_p$  l'image de  $U_p(\mathfrak{n}) \otimes \mathcal{L}$  dans  $M_\lambda$  par la bijection 5.3. Soit  $\{a_0, a_1, \dots, a_j, \dots\}$  une base de  $U(\mathfrak{b})$  telle que  $a_0 = 1$  et  $\{a_1, \dots\}$  soit une base de  $U(\mathfrak{b}) \setminus \mathbb{C}$ . Ecrivons :

$$v_i = P_0(v_i) + \sum_{j \geq 1} v_{i,j} a_j,$$

où les  $v_{i,j} \in U(\mathfrak{n})$ . Comme  $a \in I_\lambda$ , on a  $\rho_\lambda(a) m_\lambda = 0$ . D'autre part, on a

$$\rho_\lambda(a) m_\lambda = \sum_t \rho_\lambda(k_t) c_t m_\lambda \equiv \rho_\lambda(b) m_\lambda \pmod{M_{n-1}}.$$

On a

$$b = \sum_i P_0(v_i) \otimes l_i + \sum_{i,j \geq 1} v_{i,j} a_j \otimes l_i.$$

Comme  $U(\mathfrak{b})$  agit sur  $m_\lambda$  par des éléments de  $\mathcal{L}$ , on a

$$\rho_\lambda(b) m_\lambda \equiv \sum_i \rho_\lambda(P_0(v_i)) l_i m_\lambda \pmod{M_{n-1}}.$$

On en déduit que

$$\rho_\lambda(\sum_i P_0(v_i) \otimes l_i) m_\lambda \in M_{n-1},$$

mais ceci est impossible puisque

$$\sum_i P_0(v_i) \otimes l_i \notin U_{n-1}(\mathfrak{n}) \otimes \mathcal{L}$$

d'après 2°.

5.5. D'après 5.3, l'application  $x \otimes h \mapsto \rho_\lambda(\sigma(x) \otimes h) m_\lambda$  définit un isomorphisme de  $\mathcal{L}$ -modules de  $S(\mathfrak{n}) \otimes \mathcal{L}$  sur  $M_\lambda$ . On note  $R_\lambda$  la repré-

sentation de  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}$  dans  $S(\mathfrak{n}) \otimes \mathcal{L}$  qui se déduit de  $\rho_\lambda$  par cet isomorphisme. Remarquons que  $R_\lambda$  est un homomorphisme de  $\mathcal{L}$ -algèbres de  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}$  dans  $\text{End}_{\mathcal{L}}(S(\mathfrak{n}) \otimes \mathcal{L})$ .

5.6. THÉORÈME. — On a

$$R_\lambda(U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}) \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}.$$

*Démonstration.* — Il suffit de prouver  $R_\lambda(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ . On notera  $\{\alpha, \dots, \beta\}$  l'ensemble des racines positives de  $\mathfrak{h}$  dans  $\mathfrak{g}$ . On reprend la démonstration et les notations de la proposition 2.2, en remplaçant  $\{X_1, \dots, X_m\}$  par  $\{Y_\alpha, \dots, Y_\beta\}$ , base de  $\mathfrak{n}$  contenue dans la base de  $\mathfrak{g}$  fixée au début,  $\{\partial_1, \dots, \partial_m\}$  par  $\{\partial_\alpha, \dots, \partial_\beta\}$ ,  $\{A_1, \dots, A_m\}$  par  $\{A_\alpha, \dots, A_\beta\}$  etc. (cf. § 4).

Soient  $X \in \mathfrak{g}$  et  $x \in S(\mathfrak{n})$ . L'élément

$$y = R_\lambda(X)x \in S(\mathfrak{n}) \otimes \mathcal{L}$$

est défini par

$$X \sigma(x) \in (\sigma \otimes 1)(y) + J_\lambda.$$

1° Soit  $H \in \mathfrak{h}$ . Comme  $\sigma(Y_\alpha^{k_\alpha} \dots Y_\beta^{k_\beta})$  est de poids  $-(k_\alpha \alpha + \dots + k_\beta \beta)$ , on a

$$H \sigma(Y_\alpha^{k_\alpha} \dots Y_\beta^{k_\beta}) \in \lambda(H) \sigma(Y_\alpha^{k_\alpha} \dots Y_\beta^{k_\beta}) - (k_\alpha \alpha(H) + \dots + k_\beta \beta(H)) \sigma(Y_\alpha^{k_\alpha} \dots Y_\beta^{k_\beta}) + J_\lambda,$$

d'où, pour  $x \in S(\mathfrak{n})$ ,

$$(6) \quad R_\lambda(H)x = \lambda(H)x - \sum_{\alpha > 0} \alpha(H) Y_\alpha \partial_\alpha(x),$$

donc  $R_\lambda(H) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ .

2° Soient  $Y \in \mathfrak{n}$  et  $x \in S(\mathfrak{n})$ . La formule (4) devient

$$Y \sigma(x) = \sum_{K=(k_\alpha, \dots, k_\beta)} b_K \sigma(s(A^K)(Y) \partial^K(x)),$$

d'où

$$(7) \quad R_\lambda(Y)x = \sum_{K=(k_\alpha, \dots, k_\beta)} b_K s(A^K)(Y) \partial^K(x).$$

Comme  $\mathfrak{n}$  est nilpotente, les termes de cette somme sont nuls pour  $|K| > k_0$ , où  $k_0$  ne dépend pas de  $x$ , d'où  $R_\lambda(Y) \in \mathcal{A}$ .

3° Soit  $\gamma$  une racine simple. Pour  $x \in S(\mathfrak{n})$ , on a

$$X_\gamma \sigma(x) \in [X_\gamma, \sigma(x)] + J_\lambda$$



et

$$[X_\gamma, \sigma(x)] = \sigma(\sum_{\alpha > 0} [X_\gamma, Y_\alpha] \partial_\alpha(x)).$$

Si  $\alpha \neq \gamma$ , ou bien  $\alpha - \gamma$  n'est pas racine, ou bien c'est une racine positive.

On a donc

$$([X_\gamma, Y_\alpha] \neq 0) \Rightarrow (\alpha \geq \gamma, [X_\gamma, Y_\alpha] \in \mathfrak{n} \text{ pour } \alpha > \gamma, \text{ et } [X_\gamma, Y_\gamma] = H_\gamma),$$

d'où

$$X_\gamma \sigma(x) \in \sum_{\alpha > \gamma} \sigma([X_\gamma, Y_\alpha] \partial_\alpha(x)) + \sigma(H_\gamma \partial_\gamma(x)) + J_\lambda.$$

On applique la formule (5) pour calculer  $\sigma(H_\gamma \partial_\gamma(x))$  :

$$\sigma(H_\gamma \partial_\gamma(x)) = \sigma(\partial_\gamma(x)) H_\gamma + \sigma\left\{ \sum_{|K| \geq 1} c_K S(A^K)(H_\gamma) \partial^K \partial_\gamma(x) \right\}.$$

Remarquons que, comme  $[\mathfrak{n}, H_\gamma] \subset \mathfrak{n}$ , le terme entre  $\{ \}$  est dans  $S(\mathfrak{n})$ , et que les termes de la somme sont nuls pour  $|K| > k_1$ , où  $k_1$  ne dépend pas de  $x$ . On a finalement

$$(8) \quad R_\lambda(X_\gamma) = \lambda(H_\gamma) \partial_\gamma + \sum_{\alpha > \gamma} [X_\gamma, Y_\alpha] \partial_\alpha + \sum_{|K| \geq 1} c_K S(A^K)(H_\gamma) \partial^K \partial_\gamma,$$

ce qui prouve que  $R_\lambda(X_\gamma) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$ . Comme  $\mathfrak{n}_+$  est engendrée par les  $X_\gamma$ , avec  $\gamma$  simple, le théorème est démontré.

### 6. Les espaces $L(M_\lambda, M_\mu)$

6.1. Soient  $\lambda, \mu$  deux homomorphismes de  $U(\mathfrak{h})$  dans  $\mathcal{L}$ . On définit une structure de  $\mathfrak{g}$ -module sur  $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(M_\lambda, M_\mu)$  en posant

$$X.D = \rho_\mu(x) D - D \rho_\lambda(x) \quad \text{pour } X \in \mathfrak{g} \text{ et } D \in \text{Hom}_{\mathcal{L}}(M_\lambda, M_\mu).$$

On note  $L(M_\lambda, M_\mu)$  le sous- $\mathfrak{g}$ -module, localement fini, de  $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(M_\lambda, M_\mu)$  formé des éléments qui engendrent un  $\mathfrak{g}$ -module de dimension finie. Remarquons que  $L(M_\lambda, M_\mu)$  est aussi un sous- $\mathcal{L}$ -module de  $\text{Hom}_{\mathcal{L}}(M_\lambda, M_\mu)$ .

Comme c'est le seul cas que nous utiliserons, nous nous bornerons ici à étudier ces espaces lorsque  $\mathcal{L} = k$ . Mais les résultats obtenus s'étendent, convenablement formulés, aux modules de Verma généralisés. En fait, bien que ce ne soit pas encore apparent, l'étude menée dans [10] est celle de  $L(M_{\tilde{\lambda}}, M_{\tilde{\lambda}+\mu})$  dans la situation suivante :  $\mathcal{L} = U(\mathfrak{h})$ ,  $\mu \in \mathfrak{h}^*$ ,  $\tilde{\lambda}$  est défini par  $\tilde{\lambda}(H) = H$ , et  $\tilde{\lambda} + \mu$  par  $(\tilde{\lambda} + \mu)(H) = H + \mu(H)$  pour  $H \in \mathfrak{h}$ .

Bien entendu, les démonstrations de ce paragraphe, et du suivant, sont inspirées de [10].

Soient  $\mathcal{P}$  le réseau des poids,  $\mathcal{P}^+$  l'ensemble des poids dominants. Pour  $\delta \in \mathcal{P}^+$ , on notera  $E^\delta$  le  $\mathfrak{g}$ -module irréductible de dimension finie de plus haut poids  $\delta$ . Soit  $w_0$  l'élément du groupe de Weyl qui transforme toutes les racines positives en racines négatives. On pose  $\delta^* = -w_0(\delta)$ . Le module contragrédient de  $E^\delta$  est  $E^{\delta^*}$ . Le plus bas poids de  $E^\delta$  est  $-\delta^*$ .

6.2. LEMME. — Soient  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ . L'application qui a

$$\theta \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^\delta, L(M_\lambda, M_\mu))$$

associe  $\theta' : M_\lambda \otimes E^\delta \rightarrow M_\mu$ , défini par  $\theta'(m \otimes e) = \theta(e) m$  pour  $m \in M_\lambda, e \in E^\delta$  est une bijection linéaire de  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^\delta, L(M_\lambda, M_\mu))$  sur  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M_\lambda \otimes E^\delta, M_\mu)$ .

Ce résultat est immédiat.

6.3. Soit  $e_{-\delta^*}$  un vecteur de poids  $-\delta^*$  dans  $E^\delta$ . L'annulateur de  $e_{-\delta^*}$  dans  $U(\mathfrak{n}_+)$  est noté  $\mathcal{K}_\delta$ .

LEMME. — Le vecteur  $m_\lambda \otimes e_{-\delta^*}$  est générateur pour le  $\mathfrak{g}$ -module  $M_\lambda \otimes E^\delta$ . Son annulateur est l'idéal à gauche de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par  $\mathcal{K}_\delta$  et les éléments de la forme  $H - (\lambda - \delta^*)(H)$  pour  $H \in \mathfrak{h}$ .

Démonstration. — Le vecteur  $m_\lambda \otimes e_{-\delta^*}$  est générateur pour la représentation de  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$  dans  $M_\lambda \otimes E^\delta$ . Il est annulé par  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})(\mathfrak{n}_+ \times \mathfrak{n})$  et les éléments de la forme  $(H, 0) - \lambda(H)$  pour  $H \in \mathfrak{h}$ . Soit  $j$  l'homomorphisme diagonal de  $U(\mathfrak{g})$  dans  $U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})$ , défini par  $j(X) = (X, X)$  pour  $X \in \mathfrak{g}$ . On a

$$\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} = j(\mathfrak{g}) + (\mathfrak{h} \times 0) + (\mathfrak{n}_+ \times \mathfrak{n}),$$

donc

$$U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}) = j(U(\mathfrak{g})) + U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})(\mathfrak{n}_+ \times \mathfrak{n}) + \sum_{H \in \mathfrak{h}} U(\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})((H, 0) - \lambda(H)),$$

ce qui prouve que  $m_\lambda \otimes e_{-\delta^*}$  est générateur pour  $j(U(\mathfrak{g}))$ .

Si  $u \in U(\mathfrak{n}_+)$ , on a

$$u.(m_\lambda \otimes e_{-\delta^*}) = m_\lambda \otimes u.e_{-\delta^*},$$

donc  $m_\lambda \otimes e_{-\delta^*}$  est annulé par  $\mathcal{K}_\delta$ . Il est clair que  $m_\lambda \otimes e_{-\delta^*}$  est de poids  $\lambda - \delta^*$  pour  $\mathfrak{h}$ . On a

$$U(\mathfrak{g}) = (U(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{n}_+)) \oplus U(\mathfrak{g}) \text{Ker}(\lambda - \delta^*)$$

en notant  $\text{Ker}(\lambda - \delta^*)$  le noyau de  $\lambda - \delta^*$  dans  $U(\mathfrak{h})$ . Soit  $\{v_i\}$  une base supplémentaire de  $\mathcal{K}_\delta$  dans  $U(\mathfrak{n}_+)$ . Les vecteurs  $v_i \cdot e_{-\delta^*}$  forment une base de  $E^\delta$ . Soit  $a \in U(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{n}_+)$ . Ecrivons :

$$a \in \sum u_i \otimes v_i + U(\mathfrak{n}) \mathcal{K}_\delta \quad \text{avec } u_i \in U(\mathfrak{n}).$$

Alors :

$$a \cdot (m_\lambda \otimes e_{-\delta^*}) = \sum u_i m_\lambda \otimes v_i e_{-\delta^*},$$

donc

$$(a \cdot (m_\lambda \otimes e_{-\delta^*}) = 0) \Rightarrow (u_i \cdot m_\lambda = 0 \text{ pour tout } i).$$

D'après 5.3, ceci implique  $u_i = 0$  pour tout  $i$ , ce qui prouve que l'annulateur de  $m_\lambda \otimes e_{-\delta^*}$  est contenu dans  $U(\mathfrak{n}) \mathcal{K}_\delta + U(\mathfrak{g}) \text{Ker}(\lambda - \delta^*)$ , et achève la démonstration.

6.4. Si  $\mathcal{X}$  est contenu dans un  $\mathfrak{g}$ -module, on note  $\mathcal{X}(\xi)$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathcal{X}$  de poids  $\xi$  pour  $\mathfrak{h}$ .

LEMME. — L'application qui à  $\theta \in \text{Hom}_\mathfrak{g}(M_\lambda \otimes E^\delta, M_\mu)$  associe

$$\theta(m_\lambda \otimes e_{-\delta^*}) \in M_\mu$$

est une bijection linéaire de  $\text{Hom}_\mathfrak{g}(M_\lambda \otimes E^\delta, M_\mu)$  sur le sous-espace

$$\mathcal{W}_{\lambda, \mu}^\delta = \{m \in M_\mu(\lambda - \delta^*), \mathcal{K}_\delta \cdot m = 0\}.$$

C'est une conséquence immédiate du lemme précédent.

6.5. LEMME ([13], § 2). — Supposons  $M_\mu$  irréductible. Soit  $\xi \in \mathfrak{h}^*$ . La forme bilinéaire  $(v, u) \rightarrow P(vu)(\mu)$  sur  $U(\mathfrak{n}_+)(\xi) \times U(\mathfrak{n})(-\xi)$  est non dégénérée.

6.6. Rappelons que l'application  $u \mapsto \rho_\mu(u) m_\mu$  est une bijection linéaire de  $U(\mathfrak{n})$  sur  $M_\mu$ . Le sous-espace  $\mathcal{W}_{\lambda, \mu}^\delta$  est l'image de

$$\mathcal{V}_{\lambda, \mu}^\delta = \{u \in U(\mathfrak{n})(\lambda - \mu - \delta^*), \mathcal{K}_\delta u \subset J_\mu\}.$$

6.7. Si  $a \in J_\mu$ , on a  $P(a)(\mu) = 0$ . Si  $u \in \mathcal{V}_{\lambda, \mu}^\delta$ , la forme linéaire  $v \mapsto P(vu)(\mu)$  sur  $U(\mathfrak{n}_+)$  induit donc une forme linéaire  $v e_{-\delta^*} \mapsto P(vu)(\mu)$  sur  $E^\delta$ . On note  $f_u$  sa restriction à  $E^\delta(\mu - \lambda)$ .

LEMME. — Supposons  $M_\mu$  irréductible. L'application  $u \mapsto f_u$  est une bijection linéaire de  $\mathcal{V}_{\lambda, \mu}^\delta$  sur  $(E^\delta(\mu - \lambda))^*$ .

Démonstration. — Si  $f_u = 0$ , on a  $P(vu)(\mu) = 0$  pour tout  $v \in U(\mathfrak{n}_+)(\mu - \lambda + \delta^*)$ , donc  $u = 0$  d'après 6.5. Toujours d'après 6.5, toute forme linéaire  $f$  sur  $U(\mathfrak{n}_+)(\mu - \lambda + \delta^*)$  est de la forme  $v \mapsto P(vu)(\mu)$  avec un  $u \in U(\mathfrak{n})(\lambda - \mu - \delta^*)$ . Si  $f$  est nulle sur  $\mathcal{K}_\delta(\mu - \lambda + \delta^*)$ , on a  $P(vu)(\mu) = 0$  pour tout  $v \in \mathcal{K}_\delta$ , car  $P(a) = 0$  si  $a \in U(\mathfrak{g})(\xi)$  avec  $\xi \neq 0$ . Comme  $\mathcal{K}_\delta$  est un idéal à gauche de  $U(\mathfrak{n}_+)$ , on a donc  $P(bvu)(\mu) = 0$  pour tous  $b \in U(\mathfrak{n}_+)$  et  $v \in \mathcal{K}_\delta$ . En décomposant un élément  $b \in U(\mathfrak{g})$  selon

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{n}_+),$$

on en déduit  $P(bvu)(\mu) = 0$  pour tous  $b \in U(\mathfrak{g})$  et  $v \in \mathcal{K}_\delta$ .

Soit  $M_\mu^- = \rho_\mu(\mathfrak{n} U(\mathfrak{n})) m_\mu$ . Pour tout  $a \in U(\mathfrak{g})$ , on a

$$\rho_\mu(a) m_\mu \in P(a)(\mu) m_\mu + M_\mu^-.$$

Comme  $M_\mu$  est irréductible, tout sous-module de  $M_\mu$ , contenu dans  $M_\mu^-$ , est nul. Par suite, si  $a \in U(\mathfrak{g})$  est tel que  $P(ba)(\mu) m_\mu = 0$  pour tout  $b \in U(\mathfrak{g})$ , alors  $\rho_\mu(a) m_\mu = 0$ .

On a donc  $\rho_\mu(vu) m_\mu = 0$  pour tout  $v \in \mathcal{K}_\delta$ , donc  $u \in \mathcal{V}_{\lambda, \mu}^\delta$ .

6.8. THÉORÈME. — Soient  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ ,  $\delta \in \mathcal{P}^+$ .

(i) Si  $M_\mu$  est irréductible, on a

$$\dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^\delta, L(M_\lambda, M_\mu)) = \dim E^\delta(\mu - \lambda).$$

(ii) Quel que soit  $\mu$ , on a

$$\dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^\delta, L(M_\lambda, M_\mu)) \geq \dim E^\delta(\mu - \lambda).$$

Démonstration. — D'après 6.2, 6.4 et 6.6, on a

$$\dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^\delta, L(M_\lambda, M_\mu)) = \dim \mathcal{V}_{\lambda, \mu}^\delta.$$

D'après 6.7, on a

$$\dim \mathcal{V}_{\lambda, \mu}^\delta = \dim E^\delta(\mu - \lambda)$$

lorsque  $M_\mu$  est irréductible, d'où (i).

Soit  $\xi \in \mathcal{P}$ . Posons  $r = \dim E^\delta(\xi)$ . Soit  $\mathcal{G}_r$  la grassmannienne des sous-espaces de dimension  $r$  de  $U(\mathfrak{n})(-\xi - \delta^*)$ . Alors

$$\mathcal{X} = \{(\mu, \mathcal{V}) \in \mathfrak{h}^* \times \mathcal{G}_r, \mathcal{X}_\delta \mathcal{V} \subset J_\mu\}$$

est une partie fermée de la variété produit  $\mathfrak{h}^* \times \mathcal{G}_r$ . Comme  $\mathcal{G}_r$  est complète, la projection  $\mathcal{X}'$  de  $\mathcal{X}$  sur  $\mathfrak{h}^*$  est fermée. D'après 6.7, on a  $\mu \in \mathcal{X}'$  si  $M_\mu$  est irréductible. Comme  $\{\mu \in \mathfrak{h}^*, M_\mu \text{ irréductible}\}$  est dense dans  $\mathfrak{h}^*$  [14], on a  $\mathcal{X}' = \mathfrak{h}^*$ . Autrement dit, quel que soit  $\mu \in \mathfrak{h}^*$ , l'espace  $\mathcal{V}_{\lambda, \mu}^\delta$  contient un sous-espace de dimension  $\dim E^\delta(\mu - \lambda)$ , d'où (ii).

6.9. COROLLAIRE. — *Supposons  $M_\mu$  irréductible. Alors*

$$L(M_\mu, M_\mu) = \rho_\mu(U(\mathfrak{g})).$$

*Démonstration.* — D'après [6] (th. III.2),  $\rho_\mu(U(\mathfrak{g}))$ , sous-module de  $L(M_\mu, M_\mu)$ , est isomorphe à  $U(\mathfrak{g})/I_\mu$  muni de la structure de  $\mathfrak{g}$ -module correspondant à la représentation adjointe de  $\mathfrak{g}$ . D'après [12], on a

$$\dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^\delta, U(\mathfrak{g})/I_\mu) = \dim E^\delta(0) \quad \text{pour tout } \delta \in \mathcal{P}^+.$$

Utilisant 6.8 (i), on obtient

$$\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^\delta, L(M_\mu, M_\mu)) = \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^\delta, \rho_\mu(U(\mathfrak{g}))) \quad \text{pour tout } \delta \in \mathcal{P}^+.$$

6.10. REMARQUES :

1° L'inégalité 6.8 (ii) peut être stricte; par exemple pour  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, k)$ , identifions  $\mathfrak{h}^*$  à  $k$  en prenant pour base le poids fondamental. On a, pour  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ ,

$$\dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^0, L(M_{-n-1}, M_{n-1})) = \dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(M_{-n-1}, M_{n-1}) = 1,$$

tandis que  $E^0(2n) = 0$ .

Nous n'avons pas trouvé d'exemple où

$$\dim \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^\delta, L(M_\mu, M_\mu)) > \dim E^\delta(0).$$

2° Le corollaire 6.9 répond, pour les modules de Verma, à une question posée par B. KOSTANT : soient  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie semi-simple,  $M$  un  $\mathfrak{g}$ -module simple, et  $\rho$  la représentation de  $U(\mathfrak{g})$  dans  $M$ ; tout  $k$ -endomorphisme  $\mathfrak{g}$ -fini de  $M$  est-il de la forme  $\rho(u)$  pour  $u \in U(\mathfrak{g})$ ?

**7. Le module de Verma générique**

7.1. Soit  $\pi$  la projection naturelle de  $U(\mathfrak{g})$  sur  $M = U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})n_+$ . Comme  $[\mathfrak{h}, n_+] \subset n_+$ , on définit une représentation  $\rho$  de  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$  dans  $M$  en posant, pour  $a, u \in U(\mathfrak{g})$  et  $h \in U(\mathfrak{h})$ ,

$$\rho(a \otimes h)\pi(u) = \pi(auh).$$

7.2. Prenons pour  $\mathcal{L}$  une copie de  $U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$ , et définissons  $\tilde{\lambda} : U(\mathfrak{h}) \rightarrow \mathcal{L}$  par  $\tilde{\lambda}(h) = h$  pour  $h \in U(\mathfrak{h})$ . Notons  $\tilde{M}$  le module de Verma sur  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$  associé à  $\tilde{\lambda}$ , et  $\tilde{\rho}$  la représentation de  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$  dans  $\tilde{M}$ . Soit  $\tilde{\pi}$  la projection naturelle de  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$  sur

$$\tilde{M} = (U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h}))/J_{\tilde{\lambda}}.$$

LEMME. — L'application  $\sum u_i \otimes h_i \mapsto \pi \sum u_i h_i$  de  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$  dans  $M$  admet  $J_{\tilde{\lambda}}$  pour noyau et induit un isomorphisme de  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$ -modules de  $\tilde{M}$  sur  $M$ .

Démonstration. — Il est clair que l'image est  $M$  tout entier et que  $J_{\tilde{\lambda}}$  est dans le noyau. On a

$$U(\mathfrak{g}) = (U(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h})) \oplus U(\mathfrak{g})n_+$$

et, d'après 5.3,

$$U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h}) = (U(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h})) \oplus J_{\tilde{\lambda}},$$

d'où la première assertion. Soient  $a, a' \in U(\mathfrak{g})$  et  $h, h' \in U(\mathfrak{h})$ . On a

$$\tilde{\rho}(a \otimes h)\tilde{\pi}(a' \otimes h') = \tilde{\pi}(aa' \otimes hh')$$

et

$$\rho(a \otimes h)\pi(a' h') = \pi(aa' hh'),$$

ce qui achève la démonstration.

7.3. Rappelons (5.5) que l'application  $x \otimes h \rightarrow \tilde{\pi}(\sigma(x) \otimes h)$  définit un isomorphisme de  $U(\mathfrak{h})$ -modules de  $S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h})$  sur  $\tilde{M}$ . L'application composée  $S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h}) \rightarrow \tilde{M} \rightarrow M$  est définie par  $x \otimes h \rightarrow \pi(\sigma(x)h)$  pour  $x \in S(\mathfrak{n})$ ,  $h \in U(\mathfrak{h})$ .

Notons  $R$  la représentation de  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$  dans  $S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h})$  déduite de  $\rho$  à l'aide de cette bijection. Alors  $R$  est aussi la représentation

de  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$  dans  $S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h})$  déduite de  $\tilde{\rho}$  par la bijection  $S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h}) \rightarrow \tilde{M}$ . On a donc  $R(U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})) \subset \mathcal{A} \otimes U(\mathfrak{h})$ , et  $R$  est un homomorphisme de  $U(\mathfrak{h})$ -modules.

7.4. Soit  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Notons  $\pi_\lambda$  la projection naturelle de  $M = U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$ , et de  $U(\mathfrak{g})$ , sur  $M_\lambda = U(\mathfrak{g})/J_\lambda$ , et  $\bar{J}_\lambda = J_\lambda/U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$  le noyau de  $\pi_\lambda$  dans  $M$ .

LEMME. — Pour  $m \in M$ ,  $a \in U(\mathfrak{g})$  et  $h \in U(\mathfrak{h})$ , on a

$$\pi_\lambda(\rho(a \otimes h)m) = h(\lambda)\rho_\lambda(a)\pi_\lambda(m).$$

Démonstration. — Cela résulte immédiatement des définitions et de

$$(9) \quad \pi_\lambda(uh) = h(\lambda)\pi_\lambda(u) \quad \text{pour } u \in U(\mathfrak{g}), \quad h \in U(\mathfrak{h}).$$

7.5. Notons  $e_\lambda$  les applications de  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$  sur  $U(\mathfrak{g})$ , de  $S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h})$  sur  $S(\mathfrak{n})$ , de  $\mathcal{A} \otimes U(\mathfrak{h})$  sur  $\mathcal{A}$ , définies par

$$e_\lambda(u \otimes h) = h(\lambda)u,$$

pour  $u \in U(\mathfrak{g})$ ,  $h \in U(\mathfrak{h})$ , etc.

LEMME. — Les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h}) & \rightarrow & M \\ e_\lambda \downarrow & & \downarrow \pi_\lambda \\ S(\mathfrak{n}) & \longrightarrow & M_\lambda \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h}) & \xrightarrow{R} & \mathcal{A} \otimes U(\mathfrak{h}) \\ e_\lambda \downarrow & & \downarrow e_\lambda \\ U(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{R_\lambda} & \mathcal{A} \end{array}$$

sont commutatifs.

Démonstration. — La commutativité du premier diagramme se déduit de (9). Utilisant 7.4, on en déduit que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h}) & \xrightarrow{R(u \otimes h)} & S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h}) \\ e_\lambda \downarrow & & \downarrow e_\lambda \\ S(\mathfrak{n}) & \xrightarrow{h(\lambda)R_\lambda(u)} & S(\mathfrak{n}) \end{array}$$

est commutatif pour tous  $u \in U(\mathfrak{g})$ ,  $h \in U(\mathfrak{h})$ , donc que le second diagramme est commutatif.

7.6. Soient  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$  et  $T \in \text{End}_k M$ . Supposons  $T\bar{J}_\lambda \subset \bar{J}_\mu$ . Alors  $T$  induit une application linéaire de  $M_\lambda$  dans  $M_\mu$ , qu'on note  $T_{\mu,\lambda}$ .

LEMME :

(i) Si  $T$  est  $\mathfrak{g}$ -fini, alors  $T_{\mu,\lambda} \in L(M_\lambda, M_\mu)$ .

(ii) Soient  $T, T' \in \text{End}_k M$ . Alors  $(TT')_{\nu,\lambda} = T_{\nu,\mu} T'_{\mu,\lambda}$  chaque fois que le deuxième membre est défini.

(iii) Soit  $A \in \mathcal{A}$ . Considérons  $A$  d'une part comme un élément de  $\text{End}_k M$ , d'autre part comme un élément de  $\text{End}_k M_\lambda$ . Alors  $A\bar{J}_\lambda \subset \bar{J}_\lambda$  et  $A_{\lambda,\lambda} = A$ .

Démonstration. — (i) provient de ce que  $M_\lambda$  est un  $\mathfrak{g}$ -module quotient de  $M$ . (ii) est évident. (iii) se déduit immédiatement de la commutativité du premier diagramme de 7.5, après avoir remarqué que  $A$  commute à  $\rho(1 \otimes \mathfrak{h})$ , d'où  $A\bar{J}_\lambda \subset \bar{J}_\lambda$  pour tout  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ .

### 9. Le dual de $M$

9.1. On note  $M^*$  l'espace dual de  $M$ . C'est donc l'espace des formes linéaires sur  $U(\mathfrak{g})$  qui sont nulles sur  $U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$ . On munit  $U(\mathfrak{g})^*$  de la structure d'algèbre qui se déduit du coproduit  $j$  sur  $U(\mathfrak{g})$  : rappelons que  $j$  est l'homomorphisme diagonal  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ . Soient  $\varphi, \varphi' \in U(\mathfrak{g})^*$ . Les produit  $\varphi\varphi'$  est défini par

$$\langle u, \varphi\varphi' \rangle = \langle j(u), \varphi \otimes \varphi' \rangle \quad \text{pour } u \in U(\mathfrak{g}).$$

Notons  $\rho^*$  la représentation de  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$  dans  $U(\mathfrak{g})^*$ , définie par

$$\langle u, \rho^*(a \otimes h)\varphi \rangle = \langle a^T u h, \varphi \rangle$$

pour

$$u, a \in U(\mathfrak{g}), \quad h \in U(\mathfrak{h}) \quad \text{et} \quad \varphi \in U(\mathfrak{g})^*.$$

Il est clair que  $M^*$  est stable et que la restriction de  $\rho^*$  à  $M^*$  est la  $\bar{\rho}$  représentation contragrédiente de  $\rho$ .

Soit  $\mathcal{E}$  l'espace des éléments  $\mathfrak{g}$ -finis de  $U(\mathfrak{g})^*$ . On pose

$$\mathcal{F} = M^* \cap \mathcal{E}.$$

Alors  $\mathcal{F}$  est un sous- $(U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h}))$ -module de  $M^*$ .

LEMME. —  $M^*$  et  $\mathcal{F}$  sont des sous-algèbres de  $U(\mathfrak{g})^*$ .

Démonstration. — On a

$$j(U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+) \subset (U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+) \otimes U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \otimes (U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+),$$



ce qui prouve que  $M^*$  est une sous-algèbre de  $U(\mathfrak{g})^*$ . D'autre part,  $\rho^*(X)$ , pour  $X \in \mathfrak{g}$ , est une dérivation de  $U(\mathfrak{g})^*$ ; par suite  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{F}$  sont des sous-algèbres.

9.2. Pour  $\delta \in \mathcal{P}^+$ , notons  $\mathcal{E}^\delta$  la somme des sous- $\mathfrak{g}$ -modules irréductibles de plus haut poids  $\delta$  de  $\mathcal{E}$ , et posons  $\mathcal{F}^\delta = \mathcal{F} \cap \mathcal{E}^\delta$ .

LEMME :

(i) On a

$$\mathcal{F} = \bigoplus \mathcal{F}^\delta.$$

Pour tout  $\delta \in \mathcal{P}^+$ ,  $\mathcal{F}^\delta$  est non nul et irréductible.

(ii) On a

$$\mathcal{F}^\delta = \{ \varphi \in \mathcal{F}, \rho^*(1 \otimes H)\varphi = \delta^*(H)\varphi \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h} \}.$$

(iii) Pour  $\delta, \gamma \in \mathcal{P}^+$ , on a

$$\mathcal{F}^\delta \mathcal{F}^\gamma = \mathcal{F}^{\delta+\gamma}.$$

(iv)  $\mathcal{F}$  est une algèbre de type fini.

*Démonstration.* — (i) et (ii) se déduisent de la structure connue de  $\mathcal{E}$  (voir par exemple [4], 2.7) : pour  $e \in E^\delta$  et  $e^* \in E^{\delta^*} = (E^\delta)^*$ , soit  $\varphi(e, e^*)$  la forme linéaire

$$\langle u, \varphi(e, e^*) \rangle = \langle e, ue^* \rangle$$

pour  $u \in U(\mathfrak{g})$ . Alors  $\varphi(e, e^*) \in \mathcal{E}^\delta$ . Pour  $e^*$  fixé dans  $E^{\delta^*}$ , l'application  $e \mapsto \theta_{e^*}(e) = \varphi(e, e^*)$  est un homomorphisme de  $\mathfrak{g}$ -modules de  $E^\delta$  dans  $\mathcal{E}$  et  $e^* \mapsto \theta_{e^*}$  est une bijection de  $E^{\delta^*}$  sur  $\text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^\delta, \mathcal{E})$ .

Soit  $e^* \in E^{\delta^*}$ . Alors :

$$(\theta_{e^*} \in \text{Hom}_{\mathfrak{g}}(E^\delta, \mathcal{F}))$$

$$\Leftrightarrow (0 = \langle uX, \varphi(e, e^*) \rangle$$

$$= \langle u^T e, X e^* \rangle \text{ pour tous } u \in U(\mathfrak{g}), X \in \mathfrak{n}_+, e \in E^\delta)$$

$$\Leftrightarrow (e^* \in E^{\delta^*}(\delta^*)),$$

ce qui prouve (i).

Pour  $\delta \in \mathcal{P}^+$ , notons  $e_\delta$  un vecteur non nul de  $E^\delta(\delta)$ . Pour  $u \in U(\mathfrak{g})$ ,  $H \in \mathfrak{h}$ ,  $e \in E^\delta$ , on a

$$\begin{aligned} &\langle u, \rho^*(1 \otimes H)\varphi(e, e_{\delta^*}) \rangle \\ &= \langle e, u H e_{\delta^*} \rangle = \delta^*(H) \langle e, u e_{\delta^*} \rangle = \delta^*(H) \langle u, \varphi(e, e_{\delta^*}) \rangle, \end{aligned}$$

ce qui prouve (ii), compte tenu de (i).

Soient  $\delta, \gamma \in \mathcal{P}^+$ ,  $\varphi \in \mathcal{F}^\delta$ ,  $\varphi' \in \mathcal{F}^\gamma$ ,  $\varphi \neq 0$ ,  $\varphi' \neq 0$ . On a  $\varphi\varphi' \neq 0$ ,  $\varphi\varphi' \in \mathcal{F}^{\delta+\gamma}$  d'après (ii). D'après (i), on a

$$\mathcal{F}^{\delta+\gamma} = \rho^*(U(\mathfrak{g}))\varphi\varphi' \subset (\rho^*(U(\mathfrak{g}))\varphi)(\rho^*(U(\mathfrak{g}))\varphi') = \mathcal{F}^\delta \mathcal{F}^\gamma,$$

d'où (iii).

Soient  $\varpi_1, \dots, \varpi_r$  les poids fondamentaux. Alors  $\mathcal{F}$  est engendrée, comme algèbre, par  $\mathcal{F}^{\varpi_1} + \dots + \mathcal{F}^{\varpi_r}$ , d'où (iv).

9.3. LEMME :

(i) Soit  $u \in U(\mathfrak{g})$ . Alors

$$(\langle u, \varphi \rangle = 0 \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{F}) \Leftrightarrow (u \in U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+).$$

(ii) La dualité canonique entre  $\mathcal{F}$  et  $M$  est séparante.

*Démonstration.* — Supposons  $\langle u, \varphi \rangle = 0$  pour tout  $\varphi \in \mathcal{F}$ . Alors, pour tous  $\delta \in \mathcal{P}^+$  et  $e \in E^\delta$ , on a  $\langle e, u e_\delta \rangle = 0$ , donc  $u e_\delta = 0$ . Pour tous  $v \in U(\mathfrak{g})$  et  $\delta \in \mathcal{P}^+$ , on a donc

$$0 = v u e_\delta \in P(vu)(\delta) e_\delta \oplus \bigoplus_{\gamma \neq \delta} E^\delta(\gamma),$$

d'où  $P(vu)(\delta) = 0$ . Comme  $\mathcal{P}^+$  est Zariski-dense dans  $\mathfrak{h}^*$ , cela implique  $P(vu) = 0$  pour tout  $v \in U(\mathfrak{g})$ , donc  $u \in U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$ , d'après [10] (lemme 11.1) L'assertion (ii) résulte de (i).

9.4. Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie. Les notations sont celles de 1.1. On associe à  $P \in S^\wedge(V^*)$  la forme linéaire  $x \mapsto D(P)x(0)$  sur  $S(V)$ . Ceci définit un isomorphisme d'algèbres de  $S^\wedge(V^*)$  sur  $S(V)^*$ .

Identifions  $\mathfrak{n}^*$  à l'orthogonal de  $\mathfrak{h}$ , et  $\mathfrak{h}^*$  à l'orthogonal de  $\mathfrak{n}$  dans  $(\mathfrak{n}+\mathfrak{h})^*$ . Alors  $S(\mathfrak{n}+\mathfrak{h})^* = (S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h}))^*$  s'identifie à  $S^\wedge(\mathfrak{n}^*+\mathfrak{h}^*)$ . Notons  $\Phi$  la bijection  $M^* \rightarrow S(\mathfrak{n}+\mathfrak{h})^*$ , transposée de la bijection  $S(\mathfrak{n}+\mathfrak{h}) \rightarrow M$  (7.3), et  $\mathcal{Q}$  la bijection  $M^* \rightarrow S^\wedge(\mathfrak{n}^*+\mathfrak{h}^*)$  qui s'en déduit. Pour  $x \in S(\mathfrak{n})$ ,  $\mathfrak{h} \in U(\mathfrak{h})$ ,  $\varphi \in M^*$ , on a

$$(10) \quad \langle xh, \Phi(\varphi) \rangle = \langle \sigma(x)h, \varphi \rangle,$$

d'où

$$(11) \quad D(Q(\varphi))xh(0) = \langle \sigma(x)h, \varphi \rangle.$$

LEMME. —  $Q$  est un isomorphisme d'algèbres de  $M^*$  sur  $S^\wedge(\mathfrak{n}^* + \mathfrak{h}^*)$ .

Démonstration. — Il suffit de montrer que  $\Phi$  est un isomorphisme d'algèbres. Notons  $j$  les coproduits  $U(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$  et  $S(\mathfrak{g}) \rightarrow S(\mathfrak{g}) \otimes S(\mathfrak{g})$ . On voit facilement que  $j \circ \sigma = (\sigma \otimes \sigma) \circ j$ . Soient  $\varphi, \varphi' \in M^*, x \in S(\mathfrak{n}), h \in U(\mathfrak{h})$ . Écrivons

$$j(x) = \sum_i x_i \otimes x'_i \quad \text{avec } x_i, x'_i \in S(\mathfrak{n}),$$

et

$$j(h) = \sum_k h_k \otimes h'_k \quad \text{avec } h_k, h'_k \in U(\mathfrak{h}).$$

On a

$$j(\sigma(x)h) = j \circ \sigma(x)j(h) = (\sigma \otimes \sigma) \circ j(x)j(h),$$

d'où, d'après (10),

$$\begin{aligned} \langle xh, \Phi(\varphi\varphi') \rangle &= \langle \sigma(x)h, \varphi\varphi' \rangle = \langle j(\sigma(x)h), \varphi \otimes \varphi' \rangle \\ &= \sum_{i,k} \langle \sigma(x_i)h_k \otimes \sigma(x'_i)h'_k, \varphi \otimes \varphi' \rangle \\ &= \sum_{i,k} \langle \sigma(x_i)h_k, \varphi \rangle \langle \sigma(x'_i)h'_k, \varphi' \rangle \\ &= \sum_{i,k} \langle x_i h_k, \Phi(\varphi) \rangle \langle x'_i h'_k, \Phi(\varphi') \rangle \\ &= \langle j(xh), \Phi(\varphi) \otimes \Phi(\varphi') \rangle \\ &= \langle xh, \Phi(\varphi)\Phi(\varphi') \rangle. \end{aligned}$$

9.5. On note  $R^*$  la représentation de  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$  dans  $S^\wedge(\mathfrak{n}^* + \mathfrak{h}^*)$  qui se déduit de  $p^*$  par la bijection  $Q$ . Pour  $A \in \text{End}_k S(\mathfrak{n} + \mathfrak{h})$ , on note  ${}^t A \in \text{End}_k S^\wedge(\mathfrak{n}^* + \mathfrak{h}^*)$  l'endomorphisme adjoint de  $A$ , défini par

$$D({}^t A q)p(0) = D(q)A p(0) \quad \text{pour } p \in S(\mathfrak{n} + \mathfrak{h}), q \in S^\wedge(\mathfrak{n}^* + \mathfrak{h}^*).$$

Pour  $u \in U(\mathfrak{g})$ , on a donc  $R^*(u) = {}^t R(u^T)$ .

Si  $V$  est un espace vectoriel, on a, pour  $p \in S(V), q \in S^\wedge(V^*)$ ,

$$D(q)p(0) = D(p)q(0).$$

[On prolonge par continuité les opérateurs différentiels sur  $S(V^*)$  en des opérateurs sur  $S^\wedge(V^*)$ .]

Par suite, on a  ${}^t \partial_\alpha = Y_\alpha^*$ ,  ${}^t(Y) = D(Y)$  pour  $Y \in \mathfrak{n}$  (rappelons que  $\{Y_\alpha^*\}$  est la base de  $\mathfrak{n}$  introduite en 4). La formule (8) de 5 devient, par transpo-

sition, si  $\gamma$  est une racine simple,

$$(12) \quad R^*(X_\gamma) = -Y_\gamma^* \otimes D(H_\gamma) - \sum_{\alpha > \gamma} Y_\alpha^* D([X_\gamma, Y_\alpha]) - \sum_{|\kappa| \geq 1} c_\kappa Y_\alpha^{*\kappa_\alpha} \dots Y_\beta^{*\kappa_\beta} Y_\gamma^* D(Y_\gamma, \kappa),$$

où

$$Y_{\gamma, \kappa} = s(A_\alpha^{K_\alpha} \dots A_\beta^{K_\beta})(H_\gamma).$$

Cette formule montre que, pour tout  $u \in U(n_+)$ , on a

$$(13) \quad \begin{cases} R^*(u) = \sum q_i D(p_i) \otimes D(h_i), \\ \text{avec} \\ q_i \in S(n^*), \quad p_i \in S(n) \quad \text{et} \quad h_i \in S(\mathfrak{h}). \end{cases}$$

9.6. Pour  $\delta \in \mathcal{P}^+$ , fixons  $e_{-\delta^*} \in E^\delta(-\delta^*)$  et  $e_{\delta^*} \in E^{\delta^*}(\delta^*)$  tels que  $\langle e_{-\delta^*}, e_{\delta^*} \rangle = 1$ , et posons  $\varphi_\delta = \varphi(e_{-\delta^*}, e_{\delta^*})$  (cf. 9.2).

PROPOSITION :

- (i)  $\varphi_\delta \in \mathcal{F}^\delta(-\delta^*)$ .
- (ii)  $Q(\varphi_\delta) = \exp(\delta^*) = 1 + (\delta^*/1!) + \dots + (\delta^{*n}/n!) + \dots$
- (iii)  $Q(\mathcal{F}_\delta) \subset S(n^*) \exp(\delta^*)$ .

(iv) Soit  $k[\mathcal{P}^+]$  la sous-algèbre de  $S^\wedge(\mathfrak{h}^*)$  engendrée par  $\{\exp(\delta), \delta \in \mathcal{P}^+\}$ . Alors  $Q(\mathcal{F})$  est une sous-algèbre de  $S(n^*) \otimes k[\mathcal{P}^+]$ , et

$$\text{Fract } Q(\mathcal{F}) = \text{Fract}(S(n^*) \otimes k[\mathcal{P}^+]).$$

Démonstration. — (i) est évident. Soient  $x \in S(n)$  et  $h \in \bar{U}(\mathfrak{h})$ . On a

$$\begin{aligned} \langle \sigma(x)h, \varphi_\delta \rangle &= \langle 1, \rho^*(h^T) \rho^*(\sigma(x)^T) \varphi_\delta \rangle = x(0)h^T(-\delta^*) \langle 1, \varphi_\delta \rangle \\ &= x(0)h(\delta^*) = D(\exp(\delta^*))xh(0), \end{aligned}$$

d'où (ii).

Soit  $\varphi \in \mathcal{F}^\delta$ . Alors  $\varphi = \rho^*(u) \varphi_\delta$  avec un  $u \in U(n_+)$ , donc

$$Q(\varphi) = R^*(u) \exp(\delta^*).$$

Pour  $p \in S(n)$ , on a

$$D(p) \exp(\delta^*) = p(0) \exp(\delta^*),$$

et pour  $h \in U(\mathfrak{h})$ , on a

$$D(h) \exp(\delta^*) = h(\delta^*) \exp(\delta^*).$$

Appliquant (13), on obtient

$$Q(\varphi) = \sum p_i(0) h_i(\delta^*) q_i \exp(\delta^*) \in S(n^*) \exp(\delta^*).$$

D'après 9.2, 9.4, (ii) et (iii),  $Q(\mathcal{F})$  est une sous-algèbre de  $S(\mathfrak{n}^*) \otimes k[\mathcal{P}^+]$  qui contient  $k[\mathcal{P}^+]$ . Pour prouver la dernière assertion, il faut exploiter (12) de façon plus précise. Remarquons que  $R^*(X_\gamma)$  se prolonge de manière unique en un opérateur différentiel sur  $\text{Fract}(S(\mathfrak{n}^*) \otimes k[\mathcal{P}^+])$  qui conserve  $\text{Fract } Q(\mathcal{F})$ . Reprenant le calcul précédent, on obtient, pour toute racine simple  $\gamma$ ,

$$R^*(X_\gamma) Q(\varphi_\delta) = -\delta^*(H_\gamma) Y_\gamma^* \exp(\delta^*).$$

Il existe  $\delta \in \mathcal{P}^+$  tel que  $\delta^*(H_\gamma) \neq 0$ , d'où  $Y_\gamma^* \in \text{Fract } Q(\mathcal{F})$ . Soit  $\beta$  une racine  $> 0$ . Supposons montré que  $(\alpha < \beta) \Rightarrow (Y_\alpha^* \in \text{Fract } Q(\mathcal{F}))$ . Soit  $\gamma$  une racine simple telle que  $\beta - \gamma$  soit racine. La formule (12) donne

$$R^*(X_\gamma) Y_{\beta-\gamma}^* = c Y_\beta^* + q,$$

où  $q \in S(\mathfrak{n}^*)$  est un polynôme par rapport aux  $Y_\alpha^*$  pour  $\alpha < \beta$ , et  $c$  est un scalaire non nul. On a donc  $Y_\beta^* \in \text{Fract } Q(\mathcal{F})$ .

9.7. LEMME. — Soit  $\mathcal{S}$  une algèbre de polynômes sur  $k$ . Soit  $\mathcal{T} \subset \mathcal{S}$  une sous-algèbre de type fini telle que  $\text{Fract } \mathcal{T} = \text{Fract } \mathcal{S}$ . Pour tout opérateur différentiel  $A$  à coefficients polynômiaux sur  $\mathcal{S}$ , il existe  $f \in \mathcal{T}$ ,  $f \neq 0$ , tel que  $f A(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$ .

Démonstration. — Il suffit de démontrer cela pour  $A$  à coefficients constants. Soit  $\{g_1, \dots, g_s\}$  un système de générateurs de  $\mathcal{T}$ . Soit  $D$  une dérivation. Pour chaque  $g_i$ , il existe  $f_i \in \mathcal{T}$  tel que  $f_i D g_i \in \mathcal{T}$ . De  $D g g' = g D g' + g' D g$ , on déduit  $f_1 \dots f_s D g \in \mathcal{T}$  pour tout  $g \in \mathcal{T}$ . Supposons le lemme vrai pour  $A$ . Soit  $D$  une dérivation. Soient  $f, f' \in \mathcal{T}$  tels que  $f A(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$ ,  $f' D(\mathcal{T}) \subset \mathcal{T}$ . On a, pour tout  $g \in \mathcal{T}$ ,

$$D(f A g) = f D A g + (D f)(A g).$$

Multipliant cette égalité par  $ff'$ , on obtient

$$f' f^2 D A g = f f' D(f A g) - f'(D f) f(A g) \in \mathcal{T},$$

ce qui prouve le lemme pour  $DA$ , donc pour tout  $A$  par récurrence sur le degré de  $A$ .

9.8. LEMME. — Soit  $A \in \mathcal{A}$ . Il existe  $\delta \in \mathcal{P}^+$  et  $f \in Q(\mathcal{F}^\delta)$ ,  $f \neq 0$ , tels que  $f' A(Q(\mathcal{F})) \subset Q(\mathcal{F})$ .

*Démonstration.* — On a

$$k[\mathcal{P}^+] = k[\exp(\mathfrak{w}_1), \dots, \exp(\mathfrak{w}_r)],$$

on  $\mathfrak{w}_1, \dots, \mathfrak{w}_r$  sont les poids fondamentaux. On applique le lemme précédent à l'anneau de polynômes  $S(\mathfrak{n}^*) \otimes k[\mathcal{P}^+]$  et à la sous-algèbre de type fini  $Q(\mathcal{F})$ . Soit  $f' \in Q(\mathcal{F})$ ,  $f' \neq 0$ , telle que  $f' {}^tA(Q(\mathcal{F})) \subset Q(\mathcal{F})$ . Soit  $f' = \sum f'_\delta$  la décomposition de  $f'$  selon les  $Q(\mathcal{F}^\delta)$ . Soient  $\delta' \in \mathcal{P}^+$  et  $g \in \mathcal{F}^{\delta'}$ . Comme  ${}^tA$  commute à  $R(1 \otimes \mathfrak{h})$ , l'élément  $(f'_\delta {}^tA g)$  de  $S^\wedge(\mathfrak{n}^* + \mathfrak{h}^*)$  est de poids  $\delta^* + \delta'^*$  pour  $R(1 \otimes \mathfrak{h})$ , d'après 9.2 (ii). On déduit de 9.2 (i) et (ii) que, si  $g' = \sum g'_\delta \in Q(\mathcal{F})$  avec  $g'_\delta \in S^\wedge(\mathfrak{n}^* + \mathfrak{h}^*)$ ,  $g'_\delta$  de poids  $\delta$  pour  $R^*(1 \otimes \mathfrak{h})$ , alors  $g'_\delta \in Q(\mathcal{F}^\delta)$  pour tout  $\delta$ . Appliquant ceci à  $g' = f' {}^tA g = \sum f'_\delta {}^tA g$ , on obtient  $f'_\delta {}^tA(Q(\mathcal{F})) \subset Q(\mathcal{F})$  pour tout  $\delta$ . Il existe un  $\delta$  tel que  $f'_\delta \neq 0$ , on prend  $f = f'_\delta$ .

9.9. Soit  $\mathcal{R}$  l'anneau des  $k$ -endomorphismes  $T$  de  $\mathcal{F}$  qui satisfont à la condition suivante : il existe un entier  $k \geq 0$  tel que, quels que soient  $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \in \mathcal{F}$ , on ait

$$[\varphi_1, [\varphi_2, [\dots, [\varphi_{k+1}, T], \dots]]] = 0.$$

(Rappelons qu'on note aussi  $\varphi_i$  l'opérateur de multiplication par  $\varphi_i$  dans  $\mathcal{F}$ .)

**PROPOSITION.** —  $\mathcal{R}$  est un sous- $\mathfrak{g}$ -module de  $\text{End } \mathcal{F}$  et les éléments de  $\mathcal{R}$  sont  $\mathfrak{g}$ -finis.

*Démonstration.* — Pour  $k \in \mathbb{N}$ , posons

$$\mathcal{R}_k = \{ T \in \mathcal{R}, [\varphi_1, [\varphi_2, [\dots, [\varphi_{k+1}, T], \dots]]] = 0 \text{ pour tous } \varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \in \mathcal{F} \}.$$

On a donc  $\mathcal{R} = \bigcup_k \mathcal{R}_k$ . Pour  $\mu \in \mathfrak{h}^*$ , posons

$$\mathcal{R}_\mu = \{ T \in \mathcal{R}, [\rho^*(1 \otimes H), T] = \mu(H) T \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h} \}.$$

1° On a  $\mathcal{R} = \bigoplus_{\mu \in \mathcal{P}} \mathcal{R}_\mu$ . — Soit  $T \in \mathcal{R}$ . Pour  $f \in \mathcal{F}^\delta$ , posons  $T_\mu f = (Tf)_{\delta+\mu}$ , composante de  $Tf$  sur  $\mathcal{F}^{\delta+\mu}$ . Alors  $(T_\mu \neq 0) \Rightarrow (\mu \in \mathcal{P})$  et, pour tout  $f \in \mathcal{F}$  on a  $Tf = \sum T_\mu f$ , somme finie. Pour  $H \in \mathfrak{h}$ , on a, d'après 9.2 (ii),

$$[\rho^*(1 \otimes H), T_\mu] = \mu(H) T_\mu.$$

Soit  $\varphi \in \mathcal{F}^{\delta'}$ . Pour  $f \in \mathcal{F}^\delta$ , on a

$$[\varphi, T]f = \sum [\varphi, T_\mu]f, \quad [\varphi, T_\mu]f \in \mathcal{F}^{\delta'+\delta+\mu}$$

d'après 9.3 (iii); pour chaque  $\mu$ ,  $[\varphi, T_\mu]f$  est donc la composante de  $[\varphi, T]f$  sur  $\mathcal{F}^{\delta'+\delta+\mu}$ , d'où  $[\varphi, T_\mu] = [\varphi, T]_{\delta+\mu}$ . Il en résulte que  $(T \in \mathcal{R}_k) \Rightarrow (T_\mu \in \mathcal{R}_k)$ , donc  $T_\mu \in \mathcal{R}_\mu$ . Il reste à montrer que les  $T_\mu \neq 0$  sont en nombre fini. Par récurrence sur l'entier  $k$ , on montre, pour  $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \in \mathcal{F}$  et  $T \in \text{End } \mathcal{F}$ ,

$$\begin{aligned} & [\varphi_1, [\varphi_2, [\dots [\varphi_{k+1}, T] \dots]] \\ &= \varphi_1 \dots \varphi_{k+1} T - \sum_i \varphi_1 \dots \hat{\varphi}_i \dots \varphi_{k+1} T \circ \varphi_i \\ & \quad + \sum_{i,j} \varphi_1 \dots \hat{\varphi}_i \dots \hat{\varphi}_j \dots \varphi_{k+1} T \circ \varphi_i \varphi_j + \dots \\ & \quad + (-1)^{k+1} T \circ \varphi_1 \dots \varphi_{k+1}, \end{aligned}$$

(le symbole  $\hat{\phantom{x}}$  sur un facteur signifie qu'il doit être omis).

La condition  $T \in \mathcal{R}_k$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} (14) \quad T(\varphi_1 \dots \varphi_{k+1}) &= \sum_i \varphi_i T(\varphi_1 \dots \hat{\varphi}_i \dots \varphi_{k+1}) \\ & \quad - \sum_{i,j} \varphi_i \varphi_j T(\varphi_1 \dots \hat{\varphi}_i \dots \hat{\varphi}_j \dots \varphi_{k+1}) + \dots \\ & \quad + (-1)^k \varphi_1 \dots \varphi_{k+1} T(1) \end{aligned}$$

pour tous  $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \in \mathcal{F}$ .

Soit  $\mathcal{F}_k$  l'ensemble des produits d'au plus  $k$  fonctions prises dans un système fini, fixé, de générateurs de  $\mathcal{F}$ . Si  $T \in \mathcal{R}_k$ , l'ensemble  $\mathcal{P}(T, k)$  des  $\mu \in \mathcal{P}$  tels que  $T_\mu|_{\mathcal{F}_k} \neq 0$  est fini. Si  $\mu \notin \mathcal{P}(T, k)$ , (14), appliqué à  $T_\mu$ , montre que  $T_\mu = 0$ . L'assertion 1° est ainsi établie.

2°  $\mathcal{R}_k$  est un  $\mathcal{F}$ -module de type fini. — D'après (14), l'application  $T \rightarrow (Tf)_{f \in \mathcal{F}_k}$  est un homomorphisme injectif de  $\mathcal{F}$ -modules de  $\mathcal{R}_k$  dans le  $\mathcal{F}$ -module de type fini  $\mathcal{F}^{\text{card } \mathcal{F}_k}$ . Comme  $\mathcal{F}$  est noethérienne, on en déduit que  $\mathcal{R}_k$  est de type fini sur  $\mathcal{F}$ .

3° Pour  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mu \in \mathcal{P}$ , l'espace  $\mathcal{R}_k \cap \mathcal{R}_\mu$  est un sous-g-module de dimension finie de  $\text{End } \mathcal{F}$  (d'où la proposition). — Soit  $X \in \mathfrak{g}$ . Comme  $\rho^*(X)$  est une dérivation de  $\mathcal{F}$ , on a, pour  $\varphi \in \mathcal{F}$  et  $T \in \text{End } \mathcal{F}$ ,

$$[\varphi, [\rho^*(X), T]] = [\rho^*(X)\varphi, T] + [\rho^*(X), [\varphi, T]],$$

d'où, pour  $\varphi_1, \dots, \varphi_{k+1} \in \mathcal{F}$ ,

$$\begin{aligned} & [\varphi_1, [\dots [\varphi_{k+1}, [\rho^*(X), T] \dots]] \\ &= [\varphi_1, \dots [\varphi_k, [\rho^*(X)\varphi_{k+1}, T] \dots]] \\ & \quad + [\varphi_1, [\dots, [\varphi_k, [\rho^*(X), [\varphi_{k+1}, T] \dots]]]. \end{aligned}$$

Si  $T \in \mathcal{R}_k$ , on a  $[\varphi_{k+1}, T] \in \mathcal{R}_{k-1}$ , et la formule précédente entraîne, par récurrence sur  $k$ , que  $[\rho^*(X), T] \in \mathcal{R}_k$ , ce qui prouve que  $\mathcal{R}_k$ , et donc  $\mathcal{R}$ , est un sous- $\mathfrak{g}$ -module de  $\text{End } \mathcal{F}$ . Il est clair que  $\mathcal{R}_\mu$  est un sous- $\mathfrak{g}$ -module de  $\mathcal{R}$ .

D'après le 2°, on a

$$\mathcal{R}_k = \sum_{i=1}^d \mathcal{F} T_i \quad \text{avec } T_i \in \mathcal{R}_{\mu_i}.$$

Soit

$$T = \sum f_i T_i \in \mathcal{R}_\mu.$$

Écrivons

$$f_i = g_i + g'_i, \quad \text{avec } g_i \in \mathcal{F}^{\mu - \mu_i}, \quad g'_i \in \bigoplus_{\nu \neq \mu - \mu_i} \mathcal{F}^\nu.$$

Pour  $f \in \mathcal{F}^\delta$ , on a

$$\mathcal{F}^{\mu + \delta} \ni Tf = \sum g_i T_i f + \sum g'_i T_i f,$$

où

$$\sum g_i T_i f \in \mathcal{F}^{\mu + \delta} \quad \text{et} \quad \sum g'_i T_i f \in \bigoplus_{\delta' \neq \mu + \delta} \mathcal{F}^{\delta'}.$$

On a donc

$$\sum g'_i T_i f = 0,$$

d'où

$$\sum g'_i T_i = 0 \quad \text{et} \quad T = \sum g_i T_i.$$

On déduit alors le 3° de ce que les espace  $\mathcal{F}^{\mu - \mu_i}$  sont de dimension finie.

9.10. On notera  ${}^tT$  l'endomorphisme de  $M^*$  transposé de  $T \in \text{End}_k M$ .

**COROLLAIRE.** — Soit  $T \in \text{End}_k M$ . Supposons  ${}^tT(\mathcal{F}) \subset \mathcal{F}$  et  ${}^tT|_{\mathcal{F}} \in \mathcal{R}$ . Alors  $T$  est  $\mathfrak{g}$ -fini.

*Remarque.* — En fait, ces conditions sont équivalentes.

*Démonstration.* — D'après 9.9, l'opérateur  ${}^tT|_{\mathcal{F}}$  est  $\mathfrak{g}$ -fini. Il existe donc  $T_1, \dots, T_s \in U(\mathfrak{g})$  tels que pour tout  $u \in U(\mathfrak{g})$ ,  ${}^t(u \cdot T)|_{\mathcal{F}} = u \cdot {}^tT|_{\mathcal{F}}$  soit combinaison linéaire des  ${}^tT_i|_{\mathcal{F}}$ . Le lemme 9.3 entraîne alors que  $u \cdot T$  est combinaison linéaire des  $T_i$ .

9.11. **REMARQUE.** — Soient  $G$  le groupe algébrique connexe, simplement connexe, d'algèbre de Lie  $\mathfrak{g}$ ,  $N$  le sous-groupe connexe correspondant à  $\pi_+$ . L'espace  $\mathcal{F}$  est isomorphe, comme  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$ -module et comme algèbre, à l'espace  $k[G]^N$  des fonctions régulières sur  $G$  qui sont invariantes à droite par  $N$ , espace étudié dans [10]. Nous aurions pu établir cet isomorphisme et éviter ainsi de refaire des démonstrations qui se trouvent



dans [10] (lemme 9.2, prop. 9.9 notamment). Mais, pour pouvoir utiliser les résultats de [10], il nous aurait fallu montrer que le plongement  $Q$  de 9.6 coïncide avec le plongement de  $k[G]^N$  dans un anneau de polynômes défini dans [10], et introduire des identifications supplémentaires, nuisibles à la clarté de l'exposé.

## 10. Le corps des fractions de $U(\mathfrak{g})/I$

10.1. LEMME. — Soit  $T \in \text{End}_k M$  tel que

$$[\rho(1 \otimes H), T] = -\mu(H) T \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h}, \text{ avec } \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Alors pour tout  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ , on a  $T \bar{J}_{\lambda+\mu} \subset \bar{J}_\lambda$ .

*Démonstration.* — Soient  $u \in U(\mathfrak{g})$ ,  $H \in \mathfrak{h}$ . On a

$$T\pi(uH) = T\rho(1 \otimes H)\pi(u) = (\rho(1 \otimes H) + \mu(H))T\pi(u).$$

Soit  $v \in U(\mathfrak{g})$  tel que  $\pi(v) = T\pi(u)$ . On a

$$T\pi(u(H - (\lambda + \mu)(H))) = \pi(v(H - \lambda(H))) \in \bar{J}_\lambda.$$

10.2. LEMME. — Soient  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ ,  $A \in \mathcal{A}$ . Considérons  $A$  comme un endomorphisme de  $M_\lambda$ . Il existe  $\delta \in \mathcal{P}^+$  et  $S \in L(M_{\lambda+\delta}, M_\lambda)$ ,  $S \neq 0$ , tel que  $AS \in L(M_{\lambda+\delta}, M_\lambda)$ .

*Démonstration.* — Considérons d'abord  $A$  comme un endomorphisme de  $M$ , et  ${}^tA$  comme un endomorphisme de  $M^*$ , et aussi comme un opérateur différentiel sur  $S(\mathfrak{n}) \otimes k[\mathcal{P}^+]$ . D'après 9.8, il existe  $\delta \in \mathcal{P}^+$  et  $f \in Q(\mathcal{F}^{\delta^*})$ ,  $f \neq 0$ , tels que  $f{}^tA(Q(\mathcal{F})) \subset Q(\mathcal{F})$ . La multiplication par  $f$  dans  $S^\wedge(\mathfrak{n}^* + \mathfrak{h}^*)$  est l'opérateur transposé de

$$D(f) \in \text{End}(S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h})).$$

Notons  $T \in \text{End } M$  l'opérateur correspondant à  $D(f)$ . Alors  ${}^tT$  est la multiplication dans  $M^*$  par  $Q^{-1}f \in \mathcal{F}$ , donc  $T$  est  $\mathfrak{g}$ -fini d'après le corollaire 9.10. D'après le choix de  $f$ , l'endomorphisme  $Q^{-1}f{}^tAQ$  de  $M^*$  conserve  $\mathcal{F}$ , et sa restriction à  $\mathcal{F}$  est un élément de  $\mathcal{R}$ . On a  ${}^t(AT) = Q^{-1}f{}^tAQ$ , donc  $AT$  satisfait aux conditions du corollaire 9.10, et par suite est  $\mathfrak{g}$ -fini. D'après 9.2 (ii), on a

$$\rho^*(1 \otimes H) Q^{-1}f = \delta(H) Q^{-1}f \text{ pour tout } H \in \mathfrak{h},$$

d'où l'on déduit  $[\rho(1 \otimes H), T] = -\delta(H)T$ , et aussi

$$[\rho(1 \otimes H), AT] = -\delta(H)AT$$

pour tout  $H \in \mathfrak{h}$ , car  $A$  commute à  $\rho(1 \otimes H)$ . D'après 10.1, on a  $T\bar{J}_{\lambda+\delta} \subset \bar{J}_\lambda$  et  $AT\bar{J}_{\lambda+\delta} \subset \bar{J}_\lambda$ . Posons  $S = T_{\lambda, \lambda+\delta}$  (cf. 7.6). Alors  $(AT)_{\lambda, \lambda+\delta} = AS$  d'après le lemme 7.6 (ii) et (iii). D'après 7.6 (i), on a  $S \in L(M_{\lambda+\delta}, M_\lambda)$  et  $AS \in L(M_{\lambda+\delta}, M_\lambda)$ . Il reste à vérifier que  $S \neq 0$ , c'est-à-dire que  $T(M) \not\subset \bar{J}_\lambda$ .

Notons  $\text{Ker } \lambda$  le noyau de  $\lambda$  dans  $U(\mathfrak{h})$ . Alors l'image dans  $M$  de  $S(\mathfrak{n}) \text{Ker } \lambda$  est contenu dans  $\bar{J}_\lambda$ . De la décomposition

$$S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{n}) \oplus S(\mathfrak{n}) \text{Ker } \lambda,$$

on déduit que  $\bar{J}_\lambda$  est exactement l'image de  $S(\mathfrak{n}) \text{Ker } \lambda$ . Pour  $x \in S(\mathfrak{n})$ , et  $h \in \text{Ker } \lambda$ , on a

$$\langle xh, \exp(\lambda) \rangle = h(\lambda) \langle x, \exp(\lambda) \rangle = 0.$$

Si  $T(M) \subset \bar{J}_\lambda$ , alors  $D(f)(S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h})) \subset S(\mathfrak{n}) \text{Ker } \lambda$ , donc pour tout  $y \in S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h})$ , on a

$$0 = \langle D(f)y, \exp(\lambda) \rangle = \langle y, f \exp(\lambda) \rangle,$$

d'où  $f \exp(\lambda) = 0$  et  $f = 0$ , contradiction.

10.3. LEMME.

(i) Soient  $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$ . Identifions canoniquement  $M_\lambda$  et  $M_\mu$  à  $S(\mathfrak{n})$ . Alors  $L(M_\lambda, M_\mu) \subset \mathcal{A}$ .

(ii) Soient  $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{h}^*$ . Soient  $D \in L(M_\lambda, M_\mu)$ ,  $D' \in L(M_\mu, M_\nu)$ . Alors  $DD' \in L(M_\lambda, M_\nu)$  et  $(DD' = 0) \Rightarrow (D = 0 \text{ ou } D' = 0)$ .

*Démonstration.* — D'après 5.6,  $\mathcal{A}$  est stable sous l'action de  $\mathfrak{g}$  dans  $\text{End}_k(M_\lambda, M_\mu)$ . Il suffit donc, pour (i), de montrer que si  $D \in L(M_\lambda, M_\mu)$  est invariant par  $\mathfrak{n}$ , on a  $D \in \mathcal{A}$ . Pour  $x \in S(\mathfrak{n})$ , on a  $Dx = DR_\lambda(\sigma(x))1$ . Si  $D$  est invariant par  $\mathfrak{n}$ , on a donc, en posant  $D.1 = y$ ,

$$Dx = R_\lambda(\sigma(x)).y = \sigma^{-1}(\sigma(x)\sigma(y)).$$

La formule (5) et la nilpotence de  $\mathfrak{n}$  entraînent  $D \in \mathcal{A}$ .

Si  $D \in L(M_\lambda, M_\mu)$  et  $D' \in L(M_\mu, M_\nu)$ , il est clair que  $DD' \in L(M_\lambda, M_\nu)$ . La dernière assertion de (ii) résulte de (i), puisque  $\mathcal{A}$  est intègre.

10.4. THÉORÈME. — Soit  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Supposons  $M_\lambda$  irréductible. Alors  $\text{Fract}(R_\lambda(U(\mathfrak{g}))) = \text{Fract } \mathcal{A}$ .

*Démonstration.* — Soit  $A \in \mathcal{A}$ . Soient  $\delta \in \mathcal{P}^+$  et  $S \in L(M_{\lambda+\delta}, M_\lambda)$ ,  $S \neq 0$ , tels que  $AS \in L(M_{\lambda+\delta}, M_\lambda)$  (10.2). D'après le théorème 6.8 (ii), l'espace  $L(M_\lambda, M_{\lambda+\delta})$  n'est pas réduit à 0. Prenons  $S' \in L(M_\lambda, M_{\lambda+\delta})$ ,  $S' \neq 0$ . D'après 10.3, on a  $AS \neq 0$ ,  $SS' \neq 0$ ,  $ASS' \neq 0$ ,  $SS' \in L(M_\lambda, M_\lambda)$  et  $ASS' \in L(M_\lambda, M_\lambda)$ . D'après le corollaire 6.9, on a

$$L(M_\lambda, M_\lambda) = \rho_\lambda(U(\mathfrak{g})).$$

Par suite,  $A \in \text{Fract } R_\lambda(U(\mathfrak{g}))$ . Comme  $R_\lambda(U(\mathfrak{g})) \subset \mathcal{A}$  (5.6), le théorème est démontré.

10.5. COROLLAIRE. — Soit  $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ . Soit  $I_\lambda$  l'idéal de  $U(\mathfrak{g})$  engendré par le noyau du caractère  $z \rightarrow P(z)(\lambda)$  du centre  $Z$  de  $U(\mathfrak{g})$ . Il existe un plongement de  $U(\mathfrak{g})/I_\lambda$  dans  $\mathcal{A}$  tel que  $\text{Fract}(U(\mathfrak{g})/I_\lambda) = \text{Fract } \mathcal{A}$ .

*Démonstration.* — On a  $I_\lambda = I_{\lambda'}$  pour tout  $\lambda'$  dans l'orbite de  $\lambda$  sous le groupe de Weyl affine  $W_a$ . Soit  $\lambda' \in W_a \lambda$  tel que  $M_{\lambda'}$  soit irréductible (un tel  $\lambda'$  existe, d'après [14]). Alors  $I_{\lambda'}$  est le noyau de la représentation de  $U(\mathfrak{g})$  dans  $M_{\lambda'}$ , d'après [6] (th. III.2). Le théorème 10.4 montre que  $R_{\lambda'}$  fournit le plongement cherché.

## 11. Idéaux premiers de $U(\mathfrak{g})$ engendrés par leur intersection avec le centre

11.1. Soient  $\mathcal{L}$  une  $k$ -algèbre commutative, intègre, à unité, et  $\chi$  un  $k$ -homomorphisme de  $Z$  dans  $\mathcal{L}$ . Comme  $z \mapsto P(z)$  est un isomorphisme de  $Z$  sur  $U(\mathfrak{h})^{W_a}$ , il existe un corps  $K$ , extension finie de  $\text{Fract } \mathcal{L}$ , et un homomorphisme  $\lambda$  de  $U(\mathfrak{h})$  dans  $K$  tels que

$$\chi(z) = \lambda(P(z)) \quad \text{pour tout } z \in Z.$$

Quitte à remplacer  $\lambda$  par  $w\lambda$ ,  $w \in W_a$ , on peut supposer que, quelle que soit la racine  $\alpha > 0$ ,  $(\delta + \lambda)(H_\alpha) \notin \{1, 2, \dots\}$ , où  $\delta = (1/2) \sum_{\alpha > 0} \alpha$ . Prolongeons  $\chi$  en un  $\mathcal{L}$ -homomorphisme du centre  $Z \otimes \mathcal{L}$  de  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}$  sur  $\mathcal{L}$ , et notons  $I_\chi$  l'idéal de  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}$  engendré par  $\text{Ker } \chi$ . D'après 5.6, la représentation de  $U(\mathfrak{g}) \otimes K$  dans  $M_\lambda$  induit un homomorphisme  $R_\lambda$  de  $U(\mathfrak{g}) \otimes K$  dans  $\mathcal{A} \otimes K$  et, d'après 5.4, le noyau de  $R_\lambda$  est  $I_\lambda = I_\chi \otimes_{\mathcal{L}} K$ . Grâce au choix de  $\lambda$ , le module de Verma  $M_\lambda$  est irréductible; d'après 10.4,

$R_\lambda$  induit donc un isomorphisme de

$$\text{Fract}((U(\mathfrak{g}) \otimes K)/I_\lambda) = \text{Fract}(((U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L})/I_\chi) \otimes_{\mathcal{L}} K)$$

sur  $\text{Fract}(\mathcal{A} \otimes K)$ .

11.2. On applique 11.1 à la situation suivante : soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $Z$ ; on pose  $\mathcal{L} = Z/\mathfrak{p}$ , et on prend pour  $\chi : Z \rightarrow \mathcal{L}$  la projection canonique. On a alors  $I_\chi \cap U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}$ , d'où

$$U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}/I_\chi = U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}.$$

On a donc montré le théorème suivant.

**THÉORÈME.** — *Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $Z$ . Il existe une extension finie  $K$  de  $\text{Fract}(Z/\mathfrak{p})$  et un plongement de  $(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}) \otimes_{Z/\mathfrak{p}} K$  dans  $\mathcal{A} \otimes K$  tels que*

$$\text{Fract}((U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p}) \otimes_{Z/\mathfrak{p}} K) = \text{Fract}(\mathcal{A} \otimes K).$$

11.3. Considérons le cas où  $\mathfrak{p} = 0$ . Prenons  $\mathcal{L} = U(\mathfrak{h})$ , extension de  $Z = U(\mathfrak{h})^{\text{wa}}$ ,  $K = \text{Fract } U(\mathfrak{h})$ , et soit  $\lambda : U(\mathfrak{h}) \rightarrow K$  le plongement canonique. On retrouve le résultat principal de [10] :

*La représentation  $\rho$  de  $U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{h})$  dans  $U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_+$ , identifié à  $S(\mathfrak{n}) \otimes U(\mathfrak{h})$ , définit un plongement de  $U(\mathfrak{g}) \otimes_Z U(\mathfrak{h})$  dans  $\mathcal{A} \otimes U(\mathfrak{h})$ , tel que  $\text{Fract}(U(\mathfrak{g}) \otimes_Z U(\mathfrak{h})) = \text{Fract}(\mathcal{A} \otimes U(\mathfrak{h}))$ .*

11.4. En général, on ignore si les extensions finies effectuées ci-dessus sont nécessaires, autrement dit si,  $\mathfrak{p}$  étant un idéal premier de  $Z$ , il existe un isomorphisme de  $\text{Fract}(U(\mathfrak{g})/U(\mathfrak{g})\mathfrak{p})$  sur  $\text{Fract}(\mathcal{A} \otimes Z/\mathfrak{p})$ .

Lorsque  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n)$ , un tel isomorphisme est construit dans [9] pour le cas  $\mathfrak{p} = 0$ . On montre ci-dessous que la démonstration de [9] permet d'étendre le résultat à  $\mathfrak{p}$  premier quelconque. (Ceci a également été remarqué par W. BORHO.)

## 12. Cas de $\mathfrak{sl}(n)$

12.1. Soient  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbf{Q})$  l'algèbre des matrices  $n \times n$  de trace nulle, à coefficients dans  $\mathbf{Q}$ , et  $\mathfrak{g}_0$  la sous-algèbre de  $\mathfrak{g}$  formée des matrices telles que les  $(n-1)$  premiers coefficients de la dernière ligne soient nuls. Posons

$$\mathcal{D}_0 = \text{Fract } U(\mathfrak{g}_0) \subset \text{Fract } U(\mathfrak{g}).$$

Comme précédemment, on note  $Z$  le centre de  $U(\mathfrak{g})$ .

THÉORÈME ([9], § 6) :

(i)  $\mathcal{D}_0$  est isomorphe à  $\text{Fract}(\mathcal{A}_{(1/2)n(n-1)}(\mathbf{Q}))$ .

(ii) On a

$$U(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{D}_0 Z \simeq \mathcal{D}_0 \otimes Z.$$

12.2. LEMME. — Soient  $\mathcal{L}$  une  $\mathbf{Q}$ -algèbre commutative, intègre, à unité, et  $\chi$  un  $\mathcal{L}$ -homomorphisme de  $Z \otimes \mathcal{L}$  dans  $\mathcal{L}$ . Soit  $I_\chi$  l'idéal de  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L}$  engendré par le noyau de  $\chi$ .

(i) On a

$$U(\mathfrak{g}_0) \cap I_\chi = 0.$$

(ii) L'homomorphisme composé

$$U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L} \subset \mathcal{D}_0 \otimes Z \otimes \mathcal{L} \xrightarrow{1 \otimes \chi} \mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{L}$$

a pour noyau  $I_\chi$ .

Démonstration. — Soit  $\{k_i\}$  une base de  $U(\mathfrak{g})$  sur  $Z$ . Soit  $u \in U(\mathfrak{g}_0)$ . Soit  $\{d_t\}$  une base de  $\mathcal{D}_0$  sur  $\mathbf{Q}$ , contenant  $u$ . D'après 12.1 (ii), tout élément de  $U(\mathfrak{g})$  s'écrit de manière unique :

$$\sum d_t s_t \quad \text{avec } s_t \in Z.$$

On a

$$\begin{aligned} u &= \sum k_i z_i && \text{avec } z_i \in Z, \\ k_i &= \sum d_t s_{i,t} && \text{avec } s_{i,t} \in Z, \text{ pour tout } i, \end{aligned}$$

d'où

$$u = \sum d_t (\sum_i s_{i,t} z_i).$$

Il existe donc des éléments  $s_i \in Z$  tels que  $1 = \sum s_i z_i$ , d'où l'on déduit  $U(\mathfrak{g}_0) \cap I_\chi = 0$ .

Soit  $I'$  le noyau de  $U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{D}_0 \otimes \mathcal{L}$ . Soit  $v \in I'$ . On a  $v = \sum d_t s_t$  avec  $s_t \in \text{Ker } \chi$ . Soit  $u \in U(\mathfrak{g}_0)$ ,  $u \neq 0$ , tel que  $u d_t \in U(\mathfrak{g}_0)$  si  $s_t \neq 0$ . On a  $uv \in I_\chi$ , donc  $v \in I_\chi$  d'après ce qui précède. L'inclusion  $I_\chi \subset I'$  étant évidente, le lemme est démontré.

12.3. Soit  $k$  un corps de caractéristique 0. Posons  $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{sl}(n, k)$ . Le centre de  $U(\mathfrak{g}_k)$  est  $Z_k = Z \otimes_{\mathbf{Q}} k$ .

THÉORÈME. — Soient  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $Z_k$ , et  $I$  l'idéal de  $U(\mathfrak{g}_k)$  engendré par  $\mathfrak{p}$ .

(i) On a  $U(\mathfrak{g}_0) \cap I = 0$ , donc  $U(\mathfrak{g}_0)$  s'identifie à une sous- $\mathbf{Q}$ -algèbre de  $U(\mathfrak{g}_k)/I$ , et  $\mathcal{D}_0$  à un sous-corps de  $\text{Fract}(U(\mathfrak{g}_k)/I)$ .

(ii) On a  $U(\mathfrak{g}_k)/I \subset \mathcal{D}_0(Z_k/\mathfrak{p})$ .

(iii)  $\text{Fract}(U(\mathfrak{g}_k)/I)$  est isomorphe à  $\text{Fract}(\mathcal{A}_{(1/2)n(n-1)}(Z_k/\mathfrak{p}))$ .

*Démonstration.* — Posons  $\mathcal{L} = Z_k/\mathfrak{p}$ . Pour  $z \in Z \subset Z_k$ , posons  $\chi(z) = z \bmod \mathfrak{p}$ . D'après la définition de  $I_x$ , on a  $I = I_x \cap U(\mathfrak{g}_k)$  d'où (i), et  $U(\mathfrak{g}_k)/I = (U(\mathfrak{g}) \otimes \mathcal{L})/I_x$ . Utilisant la partie (ii) du lemme, et les identifications de (i), on obtient (ii). En passant aux corps des fractions, on déduit (iii) de (ii) et de 12.1 (i).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BEREZIN (F. A.). — Quelques remarques sur les enveloppes associatives des algèbres de Lie [en russe], *Funkt. Analiz i ego Pril.*, t. 1. n° 2, 1967, p. 1-14.
- [2] CONZE (N.). — Sur certaines représentations des algèbres de Lie nilpotentes, *C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 272, série A, 1971, p. 460-461.
- [3] CONZE (N.). — Quotients primitifs des algèbres enveloppantes et algèbres d'opérateurs différentiels, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 277, série A, 1973, p. 1033-1036.
- [4] DIXMIER (J.). — *Algèbres enveloppantes*. — Paris, Gauthier-Villars, 1974 (*Cahiers scientifiques*, 37).
- [5] DIXMIER (J.). — Quotients simples de l'algèbre enveloppante de  $sl_2$ , *J. of Algebra*, t. 24, 1973, p. 551-564.
- [6] DUFLO (M.). — *Construction of primitive ideals in an envelopping algebra* (à paraître).
- [7] FAITH (C.) et UTUMI (Y.). — On noetherian prime rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 114, 1965, p. 53-60.
- [8] GABRIEL (P.) et NOUZÉ (Y.). — Idéaux premiers de l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie nilpotente, *J. of Algebra*, t. 6, 1967, p. 77-99.
- [9] GEL'FAND (I. M.) et KIRILLOV (A. A.). — *Sur les corps liés aux algèbres enveloppantes des algèbres de Lie*. — Paris, Presses universitaires de France, 1966, (*Institut des Hautes Études scientifiques. Publications mathématiques*, 31, p. 5-20).
- [10] GEL'FAND (I. M.) et KIRILLOV (A. A.). — Structure des corps liés aux algèbres de Lie semi-simples déployées [en russe], *Funkt. Analiz i ego Pril.*, t. 3, n° 1, 1969, p. 7-26.
- [11] GOODMAN (R.). — Differential operators of infinite order on a Lie group, II, *Indiana Univ. Math. J.*, t. 21, 1971, p. 383-409.
- [12] KOSTANT (B.). — Lie group representation on polynomial rings, *Amer. J. Math.*, t. 85, 1963, p. 327-404.
- [13] ŠAPOVALOV (N. N.). — Une forme bilinéaire sur l'algèbre enveloppante universelle d'une algèbre de Lie semi-simple complexe [en russe], *Funkt. Analiz i ego Pril.*, t. 6, n° 4, 1972, p. 65-70.
- [14] VERMA (D. N.). — Structure of certain induced representations of complex semi simple Lie algebras, *Ph. D. Dissertation*, Yale University, 1966 (preprint).

(Texte reçu le 4 janvier 1974.)

Nicole CONZE,  
14, rue des Tilleuls,  
35830 Betton.