

# BULLETIN DE LA S. M. F.

CLAUDETTE BUTTIN

## **Théorie des opérateurs différentiels gradués sur les formes différentielles**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 102 (1974), p. 49-73

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1974\\_\\_102\\_\\_49\\_0](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1974__102__49_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

## THÉORIE DES OPÉRATEURS DIFFÉRENTIELS GRADUÉS SUR LES FORMES DIFFÉRENTIELLES

PAR

CLAUDETTE BUTTIN

[13. 8. 1935-9. 8-1972]

---

**RÉSUMÉ.** — On introduit une notion de « type » pour les opérateurs différentiels sur le faisceau des formes différentielles d'une variété. On étudie l'espace de ces opérateurs, muni du crochet naturel d'algèbre de Lie graduée associé au degré des opérateurs. On en déduit une interprétation des concomittants différentiels classiques en termes de crochets d'opérateurs. Cette interprétation s'applique en particulier aux concomittants de Schouten. On retrouve également le crochet de Frölicher-Nijenhuis pour les formes à valeurs vectorielles, qui correspond au cas des opérateurs de type 1, c'est-à-dire des dérivations.

**Avant-propos.** — Cet article a été mis au point à partir d'idées de Claudette BUTTIN, idées qu'elle se proposait de développer dans sa Thèse de Doctorat d'État. Gérard BUTTIN m'a fait l'honneur de me confier ce travail de mise au point qui a été pour moi une sorte d'émouvante collaboration scientifique avec Claudette BUTTIN.

Pierre MOLINO

### 1. Introduction

Dans un article classique [3], A. FRÖLICHER et A. NIJENHUIS ont développé la théorie des formes à valeurs vectorielles sur une variété différentiable en partant du point de vue suivant : ces formes peuvent s'interpréter à l'aide de certains opérateurs différentiels (« dérivations ») sur l'anneau des formes différentielles. Si  $X$  est une forme à valeurs vectorielles, on lui associe une dérivation  $d_X$  de telle sorte que, pour le crochet naturel des dérivations  $[d_X, d_Y]$  est la dérivation associée à une nouvelle forme, notée  $[X, Y]$ . On obtient ainsi un « concomittant différentiel » qui généralise le crochet des champs de vecteurs.

D'autres concomittants différentiels sont connus, notamment (voir [7]) les invariants de Schouten pour les champs de tenseurs contravariants. Le but du présent travail est de relier entre eux ces différents concomittants et de les interpréter à l'aide d'une théorie générale des opérateurs différentiels sur l'anneau des formes différentielles.

L'espace  $\mathcal{D}$  de ces opérateurs se décompose en la somme directe  $\bigoplus_{r=-n}^{+n} \mathcal{D}^r$ , où  $n$  est la dimension de la variété et où  $\mathcal{D}^r$  est le sous-espace des « opérateurs différentiels gradués » (ODG) de degré  $r$ .  $\mathcal{D}$  peut être muni, pour la graduation définie par le degré, d'une structure naturelle d'algèbre de Lie graduée (au sens de [5]). De plus,  $\mathcal{D}$  admet une double filtration par l'ordre et par le type. La notion de type, introduite ici, joue un rôle essentiel dans la théorie : l'opérateur de produit extérieur par une forme différentielle est de type 0. Un opérateur sera dit de type  $\leq k$  si, croché successivement avec  $(k+1)$  opérateurs arbitraires de type 0, il donne l'opérateur nul. Si  $\mathcal{D}_k^r$  est l'espace des opérateurs de degré  $r$  et de type  $\leq k$ , on note  $\mathcal{D}^{r,k} = \mathcal{D}_k^r / \mathcal{D}_{k-1}^r$ . En particulier,  $\mathcal{D}^{r,1}$  s'identifie aux dérivations de degré  $r$  de Frölicher-Nijenhuis (§ 3).

Au paragraphe 4, on étudie les symboles des ODG. La filtration par le type permet de préciser la structure de ces symboles. On obtient ainsi (théorème II) la structure algébrique de la graduée associée à la filtration de  $\mathcal{D}$  par l'ordre.

$d$  étant l'opérateur usuel de différentielle extérieure, la correspondance  $D \mapsto [D, d]$  permet de définir, pour tout  $k \geq 0$ , un complexe

$$(C^k) : 0 \rightarrow \mathcal{D}^{-n,k} \rightarrow \mathcal{D}^{1-n,k} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{D}^{n,k} \rightarrow 0,$$

dont on montre au paragraphe 5 (théorème III) qu'il est acyclique pour  $k \geq 1$ . Pour  $k = 0$ , la cohomologie de ce complexe s'identifie à la cohomologie de De Rham. On en déduit une caractérisation des « opérateurs de type  $d_*$  », analogue à celle donnée par Frölicher-Nijenhuis pour les dérivations.

Le dernier paragraphe donne l'interprétation cherchée des concomittants différentiels classiques. En fait, on voit apparaître des concomittants différentiels de deux espèces bien différentes : la première espèce est définie à la façon du crochet de Frölicher-Nijenhuis, en associant à un champ de tenseurs différentiable  $X$  un ODG d'ordre 0,  $i_X$ , et en posant  $d_X = [i_X, d]$ . L'identité  $d_{[X, Y]} = [d_X, d_Y]$  détermine alors le concomittant différentiel considéré. On montre que l'invariant antisymétrique de Schouten, légèrement modifié quant au signe, est, avec le crochet de Frölicher-Nijenhuis,

le seul concomittant tensoriel non trivial qui s'introduise de cette manière. On peut toutefois introduire, dans des cas plus larges, un concomittant différentiel généralisé, à valeurs dans les espaces d'ODG.

Les concomittants de seconde espèce (essentiellement l'invariant symétrique de Schouten) sont obtenus de façon différente : si  $S$  est une section de  $S^l T \otimes \Lambda^r T^*$  (ou de  $S^l T \otimes \Lambda^{k-l} T$ ), on lui associe un ODG  $\hat{S}$ , admettant  $S$  pour « symbole gradué ».  $\hat{S}$  n'est pas défini de manière unique, mais si  $\hat{T}$  est de même un ODG de symbole gradué  $T$ , le symbole de  $[\hat{S}, \hat{T}]$  définit un concomittant différentiel de seconde espèce  $[S, T]$ .

L'étude des ODG est précédée, au paragraphe 2, par une étude algébrique des opérateurs linéaires gradués sur l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel (ou d'un module) : si  $E$  est, par exemple, un espace vectoriel de dimension  $n$ , on munit l'espace  $\text{End}(\Lambda E^*)$  d'un crochet différent du crochet usuel, à savoir le crochet d'algèbre de Lie graduée correspondant à la graduation de  $\text{End}(\Lambda E^*)$  par le degré. Ceci étant, on a une notion naturelle de type d'un opérateur, et on obtient (théorème I) une décomposition canonique de tout opérateur en composantes graduées de type « pur ». On démontre, en particulier, que l'algèbre  $\text{End}(\Lambda E^*)$  (pour le crochet d'algèbre de Lie graduée) est isomorphe à la bigraduée associée à la filtration par le type.

Cette étude préliminaire s'applique aux ODG d'ordre 0 sur une variété. Les opérations introduites généralisent le « hook product » de Frölicher-Nijenhuis et le crochet de composition de Nijenhuis (*voir* [6]).

## 2. Opérateurs linéaires gradués sur l'algèbre extérieure d'un espace vectoriel (ou d'un module)

On raisonnera pour simplifier dans le cas d'un espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n$ .

**2.1.** Soit  $\Lambda E^* = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p E^*$  l'algèbre extérieure de  $E^*$ . Un opérateur linéaire gradué de degré  $r$  sur  $\Lambda E^*$  sera, pour  $-n \leq r \leq n$ , un endomorphisme  $L$  de  $\Lambda E^*$  vérifiant

$$(2.1) \quad L: \Lambda^p E^* \rightarrow \Lambda^{p+r} E^* \quad \text{pour } p = 0, 1, 2, \dots, n.$$

On notera  $\mathcal{A}^r$  l'espace des opérateurs gradués de degré  $r$ ,  $\mathcal{A} = \bigoplus_{r=-n}^{+n} \mathcal{A}^r$  l'espace de tous les endomorphismes de  $\Lambda E^*$ , muni de la structure d'algèbre de Lie graduée, définie par

$$(2.2) \quad [L, M] = L \circ M + (-1)^{rs+1} M \circ L \quad \text{pour } L \in \mathcal{A}^r \text{ et } M \in \mathcal{A}^s,$$

l'identité de Jacobi s'écrivant :

$$(2.3) \quad [[L, M], N] = [L, [M, N]] - (-1)^{rs} [M, [L, N]]$$

pour

$$L \in \mathcal{A}^r, \quad M \in \mathcal{A}^s, \quad N \in \mathcal{A}^t.$$

2.2. Si  $\alpha$  est une  $r$ -forme, on lui associe un opérateur  $i_\alpha$  gradué de degré  $r$  en posant

$$(2.4) \quad i_\alpha(\beta) = \alpha \wedge \beta.$$

Si  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont deux formes extérieures, on a

$$(2.5) \quad [i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}] = 0,$$

et, de plus, si  $L$  est un opérateur gradué de degré  $r$ ,

$$(2.6) \quad [L, i_{\alpha_1 \wedge \alpha_2}] = [L, i_{\alpha_1}] \circ i_{\alpha_2} + (-1)^{r \deg \alpha_1} i_{\alpha_1} \circ [L, i_{\alpha_2}].$$

Un opérateur gradué de degré  $r$  sera dit *de type 0* si son crochet avec tout opérateur de la forme  $i_\alpha$ , est nul. On vérifie immédiatement que les seuls opérateurs de type 0 sont les opérateurs de la forme  $i_\alpha$ ,  $\alpha \in \Lambda E^*$ . En particulier, le degré d'un tel opérateur est  $\geq 0$ .

Plus généralement, on pose la définition suivante :

**DÉFINITION 2.1.** — *Un opérateur linéaire  $L$  sur  $\Lambda E^*$  sera de type  $\leq k$  ( $k$  entier positif), s'il vérifie la condition : en crochétant successivement  $L$  avec  $(k+1)$  opérateurs arbitraires de type 0, on obtient l'opérateur nul.*

Pour des raisons évidentes de degré, tout opérateur  $L$  est de type  $\leq 2n$ . En fait, on verra qu'il est de type  $\leq n$ .

On notera  $\mathcal{A}_k^r$  l'espace des opérateurs gradués de degré  $r$  et de type  $\leq k$ . On posera également  $\mathcal{A}_{-1}^r = \{0\}$ .

La filtration de l'algèbre de Lie graduée  $\mathcal{A}$  par le type est compatible avec le crochet en le sens suivant :

**PROPOSITION 2.1.** — *Si  $L$  est de type  $\leq k$ ,  $M$  de type  $\leq l$ , alors  $[L, M]$  est de type  $\leq k+l-1$ .*

*Preuve par récurrence sur  $k+l$ .* — L'assertion est vraie pour  $k+l=0$ . Si elle est vraie jusqu'à  $k+l-1$ , pour toute forme extérieure  $\alpha$ , on vérifiera, à l'aide de JACOBI et de l'hypothèse de récurrence, que  $[[L, M], i_\alpha]$  est de type  $\leq k+l-2$ , d'où le résultat.

PROPOSITION 2.2. — *Pour qu'un opérateur  $L$  soit de type  $\leq k$ , il faut et il suffit qu'on obtienne 0 en le crochétant successivement avec  $(k+1)$  opérateurs de type 0 et de degré 1.*

*Preuve.* — Il suffit bien entendu de montrer que la condition est suffisante. Elle l'est pour  $k = 0$ . Supposons la démonstration faite jusqu'à  $k-1$ . Pour que  $L$  soit de type  $\leq k$ , il suffit que  $[L, i_\alpha]$  soit de type  $\leq k-1$  pour toute forme extérieure  $\alpha$ . Ou encore (hypothèse de récurrence) que  $[[L, i_\alpha], i_\beta]$  soit de type  $\leq k-2$  pour toute forme  $\alpha$  et toute 1-forme  $\beta$ . Ce qui, d'après JACOBI, peut s'écrire  $[[L, i_\beta], i_\alpha]$  de type  $\leq k-2$ , c'est-à-dire  $[L, i_\beta]$  de type  $\leq k-1$  pour toute 1-forme  $\beta$ . D'où le résultat, en utilisant encore une fois l'hypothèse de récurrence.

COROLLAIRE 2.1. — *Tout opérateur linéaire sur  $\Lambda E^*$  est de type  $\leq n$ .*

*Preuve.* — La correspondance

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}) \mapsto [\dots [L, i_{\alpha_1}], \dots, i_{\alpha_{k+1}}],$$

où  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$  sont des 1-formes, est antisymétrique en ses arguments, d'après JACOBI. Donc elle est nulle pour  $k \geq n$ .

COROLLAIRE 2.2. — *Si  $L$  est un opérateur gradué de degré  $r$  et de type  $\leq k$  non nul, on a  $r \geq -k$ .*

*Preuve par récurrence sur  $k$ .* — C'est vrai pour  $k = 0$ . Si c'est vrai jusqu'à  $k-1$ , pour  $\alpha \in E^*$ ,  $[L, i_\alpha]$  est par récurrence de degré  $\geq 1-k$ , d'où le résultat

2.3. *Opérateurs de type pur.* — Soit  $X \in \Lambda^k E \otimes \Lambda^{k+r} E^*$ . On lui associe l'opérateur gradué  $i_X$  de degré  $r$ , défini par

$$(2.7) \quad i_X \alpha(u_1, \dots, u_{p+r}) = \sum_{G(1) < \dots < G(k+r); G(k+r+1) < \dots < G(p+r)} \text{sgn}(G) \alpha(X(u_{G(1)}, \dots, u_{G(k+r)}), u_{G(k+r+1)}, \dots, u_{G(p+r)}),$$

si  $p = \text{degré}(\alpha) \geq k$ .

Si  $\text{degré}(\alpha) < k$ , on pose  $i_X \alpha = 0$ .

On a alors le lemme suivant :

LEMME 2.1. — *L'opérateur gradué  $i_X$ , défini par la formule (2.7), est de type  $\leq k$ .*

*Preuve.* — Si  $\alpha_1$  est une 1-forme, on a une contraction naturelle.

$$(2.8) \quad (\alpha_1, X) \mapsto \alpha_1 X \in \Lambda^{k-1} E \otimes \Lambda^{k+r} E^*;$$

on établit alors la formule

$$(2.9) \quad [i_X, i_{\alpha_1}] = i_{\alpha_1 X} \quad \text{pour } k \geq 1,$$

dont la vérification donne lieu à des calculs longs, mais sans difficulté, que nous omettrons ici.

La formule (2.9) permet alors d'établir le lemme par récurrence sur  $k$  : si  $k = 1$ , le résultat est connu (c'est le cas des formes à valeurs vectorielles étudié dans [3]). Si le résultat est vrai jusqu'à  $k-1$ ,  $i_{\alpha_1 X}$  est de type  $\leq k-1$  pour toute 1-forme  $\alpha_1$ , d'où le résultat, compte tenu de la proposition 2.2.

On définit maintenant une notion d'opérateur de type « pur ».

**DÉFINITION 2.2.** — *Un opérateur  $L$  est dit de type (pur)  $k$  ( $k$  entier positif) si :*

- (i) *il est de type  $\leq k$ ;*
- (ii) *il s'annule sur les formes de degré  $\leq k-1$ .*

On voit à l'aide du lemme 2.1 que, pour tout  $X \in \Lambda^k E \otimes \Lambda^{k+r} E^*$ , l'opérateur  $i_X$  est de type  $k$ . Réciproquement, on peut énoncer la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.3.** — *Tout opérateur de type  $k$  et de degré  $r$  est de la forme  $i_X$ , où  $X \in \Lambda^k E \otimes \Lambda^{k+r} E^*$ .*

*Preuve.* — Soit  $L$  un tel opérateur. Il s'annule sur les formes de degré  $\leq k-1$ . Sa restriction aux  $k$ -formes définit une application linéaire  $\Lambda^k E^* \rightarrow \Lambda^{k+r} E^*$  et, par suite, un élément  $X$  de  $\Lambda^k E \otimes \Lambda^{k+r} E^*$ . L'opérateur  $L - i_X$  est de type  $k$  et s'annule sur les  $k$ -formes. La proposition résulte alors du lemme suivant :

**LEMME 2.2.** — *Tout opérateur de type  $\leq k$ , qui s'annule sur les formes de degré  $\leq k$ , est identiquement nul.*

*Preuve par récurrence sur  $k$ .* — Le résultat est vrai pour  $k = 0$ . Supposons-le vrai jusqu'à  $k-1$ . Soit  $L$  de type  $\leq k$  et nul sur les formes de degré  $\leq k$ . Pour toute 1-forme  $\alpha$ ,  $[L, i_\alpha]$  sera de type  $\leq k-1$ , et nul sur les formes de degré  $\leq k-1$ . Donc  $[L, i_\alpha] = 0$  pour toute 1-forme  $\alpha$ , d'après l'hypothèse de récurrence. Donc  $L$  est de type 0, d'où le résultat.

**2.4. Décomposition des opérateurs gradués.** — Soit  $\mathcal{A}^{r,k}$  l'espace des opérateurs gradués de degré  $r$  et de type pur  $k$ . D'après la proposition précédente, la correspondance  $X \mapsto i_X$  définit un isomorphisme de

$\Lambda^k E \otimes \Lambda^{k+r} E^*$  sur  $\mathcal{A}^{r,k}$ . En particulier,  $\mathcal{A}^{r,0} = \mathcal{A}_0^r$  sera l'espace des opérateurs de type 0 et degré  $r$ . On remarquera que  $\mathcal{A}^{r,k} = \{0\}$  si  $r \leq -k$ .

**PROPOSITION 2.4.** — *L'espace des opérateurs gradués de degré  $r$  et type  $\leq k$  se décompose en somme directe*

$$(2.10) \quad \mathcal{A}_k^r = \mathcal{A}^{r,0} \oplus \mathcal{A}^{r,1} \oplus \dots \oplus \mathcal{A}^{r,k}$$

*Preuve.* — Soit  $L \in \mathcal{A}_k^r$ . On montre que cet opérateur peut se décomposer de manière unique en une somme  $L_0 + L_1 + \dots + L_k$  avec  $L_i \in \mathcal{A}^{r,i}$ . En effet,  $L$  et  $L_0$  doivent coïncider sur les 0-formes, ce qui détermine de façon unique  $L_0$ . De même,  $L - L_0$  et  $L_1$  doivent coïncider sur les 1-formes, etc. On détermine ainsi de façon unique, de proche en proche, les opérateurs  $L_i$ . Enfin,  $L - L_0 - L_1 - \dots - L_k$  est de type  $\leq k$ , et s'annule sur les formes de degré  $\leq k$ . Donc il est nul d'après le lemme 2.2.

C. Q. F. D.

On obtient de façon analogue une décomposition canonique de tout opérateur  $L \in \mathcal{A}$  en composantes de type pur.

**THÉORÈME I.** — *Tout opérateur linéaire  $L$ , sur l'algèbre extérieure  $\Lambda E^*$ , s'écrit de façon unique sous la forme*

$$(2.11) \quad L = \sum_{r,k \geq 0} L_{r,k},$$

où  $L_{r,k}$  est un opérateur gradué de degré  $r$  et de type  $k$ .

$L$  sera de type  $\leq k_0$  si, et seulement si, les composantes  $L_{r,k}$  sont nulles pour  $k > k_0$ .

Soient maintenant  $X \in \Lambda^k E \otimes \Lambda^{k+r} E^*$  et  $Y \in \Lambda^l E \otimes \Lambda^{l+1} E^*$ .  $[i_X, i_Y]$  est un opérateur gradué de degré  $r+s$  et de type  $\leq k+l-1$ . Sa composante pure de type  $k+l-1$  définira un vecteur de  $\Lambda^{k+l-1} E \otimes \Lambda^{k+l+r+s-1} E^*$  que nous noterons  $[X, Y]$ . Autrement dit, on pose

$$(2.12) \quad [i_X, i_Y]_{r+s, k+l-1} = i_{[X, Y]}.$$

On a alors la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.5.** —  *$[i_X, i_Y]$  est de type pur  $k+l-1$ , autrement dit,*

$$(2.13) \quad [i_X, i_Y] = i_{[X, Y]}.$$

*Preuve par récurrence sur  $k+l$ .* — La proposition est vraie pour  $k+l = 0$ . Si elle est vraie jusqu'à  $k+l-1$ , posons  $L = [i_X, i_Y] - i_{[X, Y]}$ . Pour toute 1-forme  $\alpha$ , on a, compte tenu du lemme 2.1 [formule (2.9)] :

$$[L, i_\alpha] = [i_X, i_{\alpha Y}] - (-1)^s [i_Y, i_{\alpha X}] - i_{\alpha [X, Y]}$$



qui sera de type pur  $k+l-2$ , d'après l'hypothèse de récurrence. Mais, d'autre part,  $L$  est de type  $\leq k+l-2$ , d'après la définition de  $[X, Y]$ . Donc  $[L, i_\alpha] = 0$  pour toute 1-forme  $\alpha$ , c'est-à-dire  $L$  de type 0, d'où le résultat.

**COROLLAIRE 2.3.** — *La décomposition en somme directe  $\mathcal{A} = \bigoplus_{r,k} \mathcal{A}^{r,k}$  définit un isomorphisme d'algèbre de Lie graduée de  $\mathcal{A}$  sur la bigraduée associée à la filtration par le type.*

En effet, la bigraduée associée à cette filtration s'identifie à  $\bigoplus \mathcal{A}^{r,k}$  munie du crochet  $[\ , \ ]$ . La formule (2.13) donne alors le résultat.

### 3. Opérateurs différentiels gradués sur les formes différentielles

Dans tout ce qui suit, la différentiabilité sera entendue au sens  $C^\infty$ .  $V$  désignera une variété différentiable de dimension  $n$ . Si  $F$  est un fibré vectoriel différentiable de base  $V$ , on notera  $\overline{F}$  le faisceau des germes de sections différentiables de  $F$ , et  $\mathbf{F}$  le module des sections différentiables globales sur l'anneau  $\mathcal{F}$  des fonctions différentiables. En particulier,  $\Lambda \mathbf{T}^* = \bigoplus_{p=0}^n \Lambda^p \mathbf{T}^*$  sera le  $\mathcal{F}$ -module gradué des formes différentielles sur  $V$ .

**3.1.** Un opérateur différentiel gradué (ODG) de degré  $r$  ( $-n \leq r \leq n$ ) sur  $\Lambda \mathbf{T}^*$  sera un opérateur différentiel  $D$  du faisceau  $\overline{\Lambda \mathbf{T}^*}$  dans lui-même, vérifiant

$$(3.1) \quad D : \overline{\Lambda^p \mathbf{T}^*} \rightarrow \overline{\Lambda^{p+r} \mathbf{T}^*} \quad \text{pour } p = 0, 1, \dots, n.$$

On notera  $\mathcal{D}^r$  le  $\mathcal{F}$ -module des ODG de degré  $r$ .  $\mathcal{D} = \bigoplus_{r=-n}^{+n} \mathcal{D}^r$  sera le module de tous les opérateurs différentiels sur  $\overline{\Lambda \mathbf{T}^*}$ . On munit  $\mathcal{D}$  d'une structure d'algèbre de Lie graduée en posant

$$(3.2) \quad [D_1, D_2] = D_1 \circ D_2 + (-1)^{r_1 r_2 + 1} D_2 \circ D_1$$

si  $D_1 \in \mathcal{D}^{r_1}$  et  $D_2 \in \mathcal{D}^{r_2}$ ;

On a une identité de Jacobi analogue à (2.3).

**3.2.** — Les ODG d'ordre 0 sont les opérateurs linéaires gradués sur le  $\mathcal{F}$ -module  $\Lambda \mathbf{T}^*$ . On peut donc les étudier comme au paragraphe précédent. En particulier, pour tout  $X \in \Lambda^k \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k+r} \mathbf{T}^*$ , on peut définir un opérateur (algébrique)  $i_X$  sur  $\Lambda \mathbf{T}^*$  qui sera un ODG de degré  $r$  et d'ordre 0. Le théorème I s'écrira sous la forme ci-après :

PROPOSITION 3.1. — *Tout opérateur différentiel d'ordre 0 sur  $\Lambda \mathbf{T}^*$  s'écrit de façon unique sous la forme*

$$(3.3) \quad D = \sum_{r, k \geq 0} D_{r, k},$$

où  $D_{r, k}$  est de la forme  $i_X$  avec  $X \in \Lambda^k \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k+r} \mathbf{T}^*$ .

Pour un opérateur d'ordre 0, on pourra définir le type comme au paragraphe précédent :  $D$  sera de type  $\leq k_0$  si, et seulement si,  $D_{r, k} = 0$  pour  $k > k_0$ .

REMARQUE 3.1. — Si  $D$  est un ODG de degré  $r$ , ordre 0 et type  $\leq k$ , sa composante  $D_{r, k}$  pourra être obtenue de la façon suivante : si  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{T}^*$ , posons

$$D_{\alpha_1, \dots, \alpha_k} = [\dots [D, i_{\alpha_1}], i_{\alpha_2}, \dots, i_{\alpha_k}].$$

Cet opérateur sera de la forme  $i_\beta$ , où  $\beta \in \Lambda^{k+r} \mathbf{T}^*$ . La correspondance  $(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \mapsto \beta$  définit  $X \in \Lambda^k E \otimes \Lambda^{k+r} E^*$  et on a  $D_{r, k} = i_X$ .

3.3. On peut définir de manière générale une notion de type pour tout opérateur différentiel  $D \in \mathcal{D}$ .

DÉFINITION 3.1. —  $D$  est de type  $\leq k$  ( $k$  entier  $\geq 0$ ) si, en le crochétant successivement avec  $(k+1)$  opérateurs arbitraires de la forme  $i_\alpha$ ,  $\alpha \in \Lambda \mathbf{T}^*$ , on obtient l'opérateur nul.

On notera  $\mathcal{D}_k^r$  l'espace des ODG de degré  $r$  et de type  $\leq k$ . On pose  $\mathcal{D}_{-1}^r = \{0\}$ .

REMARQUE 3.2. — Pour tout opérateur différentiel  $D \in \mathcal{D}$ , on peut trouver un entier  $k$  assez grand pour que  $D$  soit de type  $\leq k$ . Soit, en effet,  $l$  l'ordre de  $D$ , et considérons par exemple l'entier  $k = l + 2n$ . Montrons que  $D$  est de type  $\leq k$  : si on crochète  $D$  avec  $i_\alpha$ ,  $\alpha$  forme différentielle de degré  $> 0$ , cette opération élève le degré d'au moins une unité (et n'augmente pas l'ordre); si on crochète  $D$  avec  $i_f$ ,  $f \in \mathcal{F}$ , cette opération abaisse l'ordre d'une unité (et n'abaisse pas le degré). Si l'on crochète successivement  $D$  avec  $k+1$  opérateurs  $i_{\alpha_1}, \dots, i_{\alpha_{k+1}}$ , parmi les formes  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k+1}$ , il y en aura ou bien plus de  $2n$  de degré  $> 0$ , ou bien plus de  $l$  de degré 0. Dans les deux cas, on obtiendra l'opérateur nul.

On notera également que, si  $D$  est de type  $\leq k$ , alors l'ordre de  $D$  est  $\leq k$ , comme on le voit en crochétant  $D$  avec  $k+1$  opérateurs arbitraires de la forme  $i_f$ .

Comme dans le cas des opérateurs linéaires, la filtration par le type est compatible avec la structure d'algèbre de Lie graduée introduite sur  $\mathcal{D}$ .

**PROPOSITION 3.2.** — Si  $D_1$  est de type  $\leq k_1$ , et  $D_2$  de type  $\leq k_2$ , alors  $[D_1, D_2]$  est de type  $\leq k_1 + k_2 - 1$ .

Démonstration par récurrence analogue à celle de la proposition 2.1.

Enfin, on peut adapter la proposition 2.2, en faisant intervenir les crochets successifs d'un opérateur  $D$  avec des opérateurs de la forme  $i_f$ ,  $f \in \mathcal{F}$  (ce qui met en évidence l'ordre de  $D$ ) de manière à obtenir une caractérisation des opérateurs de type  $\leq k$ .

**PROPOSITION 3.3.** — Pour qu'un opérateur  $D \in \mathcal{D}$  soit de type  $\leq k$ , il faut et il suffit qu'en le crochétant successivement avec  $k+1$  opérateurs arbitraires, de type 0 et de degré 0 ou 1, on obtienne l'opérateur nul.

Démonstration par récurrence analogue à celle de la proposition 2.2.

**3.4. Opérateurs de type  $\leq 1$ .** — Si  $D \in \mathcal{D}$  est de type 0, il est d'ordre 0, donc  $\mathcal{F}$ -linéaire, et par suite de la forme  $i_\alpha$  où  $\alpha \in \Lambda \mathbf{T}^*$ .

Si  $D$  est de type  $\leq 1$ , supposons-le, pour simplifier, gradué de degré  $r$  (sinon on raisonnera sur chaque composante graduée de  $D$ ). Soit  $\alpha \in \Lambda^p \mathbf{T}^*$ .

$[D, i_\alpha]$  est de type 0, donc de la forme  $i_A$ , où  $A \in \Lambda^{p+r} \mathbf{T}^*$  ne dépend que de  $\alpha$ . Pour toute forme différentielle  $\beta$ , on aura donc

$$D(\alpha \wedge \beta) = A \wedge \beta + (-1)^{pr} \alpha \wedge D\beta,$$

en particulier, pour  $\beta = 1$ , il vient

$$A = D\alpha - D1 \wedge \alpha,$$

d'où

$$(D - i_{D1})(\alpha \wedge \beta) = (D - i_{D1})(\alpha) \wedge \beta + (-1)^{pr} \alpha \wedge (D - i_{D1})(\beta).$$

En posant

$$(3.4) \quad D = i_{D1} + D',$$

on voit donc que  $D'$  est une dérivation de degré  $r$  au sens de Frölicher-Nijenhuis. On vérifie d'ailleurs immédiatement que la décomposition (3.4) de  $D$ , en un ODG de type 0 et une dérivation, est unique, d'où le résultat ci-dessous :

**PROPOSITION 3.4.** — Tout ODG  $D \in \mathcal{D}_1^r$  se décompose de manière unique en somme d'un ODG de type 0 et de degré  $r$  et d'une dérivation de degré  $r$ .

Si  $\mathcal{D}_1^r$  désigne l'espace des dérivations de degré  $r$ , on a donc

$$(3.5) \quad \mathcal{D}_1^r = \mathcal{D}_0^r \oplus \mathcal{D}_1^r.$$

On peut encore remarquer que, si l'on pose :

$$(3.6) \quad \mathcal{D}^{r,k} = \mathcal{D}_k^r / \mathcal{D}_{k-1}^r,$$

la décomposition (3.5) définit un isomorphisme de  $\mathcal{D}^{r,1}$  avec l'espace des dérivations de degré  $r$ , qui permet d'identifier ces deux espaces.

Si maintenant on tient compte de la forme générale d'une dérivation (voir A. FRÖLICHER-A. NIJENHUIS, [3], prop. 4.7), on voit que tout ODG de degré  $r$  et de type  $\leq 1$  s'écrit de manière unique sous la forme :

$$(3.7) \quad D = i_{D_1} + i_X + [i_Y, d] \quad \text{avec } X \in \mathbf{T} \otimes \Lambda^{r+1} \mathbf{T}^* \quad \text{et } Y \in \mathbf{T} \otimes \Lambda^r \mathbf{T}^*$$

REMARQUE 3.3. — Plus généralement, si  $\mathcal{D}'$  est le sous-espace de  $\mathcal{D}$ , formé des opérateurs qui s'annulent sur les constantes, on pose

$$(3.8) \quad \mathcal{D}_k^{\prime r} = \mathcal{D}' \cap \mathcal{D}_k^r.$$

Il vient alors

$$(3.9) \quad \mathcal{D}_k^r = \mathcal{D}_0^r \oplus \mathcal{D}_k^{\prime r},$$

la décomposition étant définie par la formule (3.4).

#### 4. Structure algébrique de la graduée associée à la filtration de $\mathcal{D}$ par l'ordre

4.1. On notera  ${}_l \mathcal{D} = \bigoplus_{r=-n}^{+n} {}_l \mathcal{D}^r$  l'espace des opérateurs différentiels  $D \in \mathcal{D}$  dont l'ordre est  $\leq l$ .  ${}_l \mathcal{D}_k^r$  sera l'espace des ODG de degré  $r$ , type  $\leq k$  et ordre  $\leq l$ .

Etant donné  $D \in {}_l \mathcal{D}$ , rappelons la construction du symbole d'ordre  $l$ ,  ${}_l \sigma(D)$  (voir [8]) :  $D$  définit un morphisme fibré  ${}_l \Phi(D) : J^l(\Lambda \mathbf{T}^*) \rightarrow \Lambda \mathbf{T}^*$ . En composant  ${}_l \Phi(D)$  avec l'injection naturelle

$$\varepsilon : \mathbf{S}^l \mathbf{T}^* \otimes \Lambda \mathbf{T}^* \rightarrow J^l(\Lambda \mathbf{T}^*),$$

on obtient un morphisme fibré

$${}_l \sigma(D) : \mathbf{S}^l \mathbf{T}^* \otimes \Lambda \mathbf{T}^* \rightarrow \Lambda \mathbf{T}^*,$$

c'est-à-dire une section, notée encore  ${}_l \sigma(D)$ , du fibré  $\mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \mathbf{End}(\Lambda \mathbf{T}^*)$ .

La décomposition (3.3) de  $\mathbf{End}(\Lambda \mathbf{T}^*)$ , définie par la bigraduation en degré et type, permet de décomposer le symbole d'ordre  $l$  suivant la formule

$$(4.1) \quad {}_l \sigma(D) = \sum_{r,m} {}_l \sigma_m^r(D), \quad \text{ou } {}_l \sigma_m^r(D) \in \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \Lambda^{m-l} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{m-l+r} \mathbf{T}^*.$$

DÉFINITION 4.1. —  ${}_l\sigma_m^r(D)$  est le symbole gradué de degré  $r$ , type  $m$  et ordre  $l$ , de  $D$ .

On peut donner de ces symboles gradués une construction explicite en termes de crochets d'opérateurs différentiels : si  $D \in {}_l\mathcal{D}$ , soient  $f_1, \dots, f_l$  des fonctions différentiables arbitraires. On pose

$$(4.2) \quad D_{f_1 \dots f_l} = [\dots [D, i_{f_1}], \dots, i_{f_l}].$$

L'opérateur obtenu est d'ordre 0. Il ne dépend que des différentielles  $df_1, \dots, df_l$ , et il est (d'après l'identité de Jacobi) symétrique en ces arguments. On définit ainsi une application  $\mathcal{F}$ -linéaire de  $\mathbf{S}^l \mathbf{T}^*$  dans l'espace  $\mathbf{End}(\Lambda \mathbf{T}^*)$  des opérateurs d'ordre 0. Cette application est le symbole d'ordre  $l$ , et le symbole gradué  ${}_l\sigma_m^r(D)$  correspond à la composante pure de degré  $r$  et type  $m$  de l'opérateur  $D_{f_1 \dots f_l}$ .

Remarquons que si  $D \in {}_l\mathcal{D}_k^r$ ,  ${}_l\sigma_m^r(D) = 0$  pour  $m > k$ . En effet, l'opérateur  $D_{f_1 \dots f_l}$  est alors de type  $\leq k-l$ .

REMARQUE 4.1. — Si  $D \in {}_l\mathcal{D}_k^r$ , son symbole gradué  ${}_l\sigma_k^r(D)$  de type maximum peut, d'après la remarque 3.1, être défini de la façon suivante : si  $f_1, \dots, f_l \in \mathcal{F}$  et  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-l} \in \mathbf{T}^*$ , posons

$$(4.3) \quad [\dots [D, i_{f_1}], \dots, i_{\alpha_{k-l}}] = i_{X(f_1, \dots, f_l, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-l})}$$

$X(f_1, \dots, f_l, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-l}) \in \Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^*$  dépend de façon symétrique des différentielles  $df_1, \dots, df_l$  et de façon antisymétrique de  $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-l}$  (d'après Jacobi).  $X$  définit donc une application  $\mathcal{F}$ -linéaire de  $\mathbf{S}^l \mathbf{T}^* \otimes \Lambda^{k-l} \mathbf{T}^*$  dans  $\Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^*$  c'est-à-dire une section de

$$\mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^*$$

qui est le symbole  ${}_l\sigma_k^r(D)$ .

4.2. Pour un ordre donné  $l$ , on peut définir comme dans le cas linéaire une notion d'opérateur de type « pur ».

DÉFINITION 4.2. — Un opérateur  $D \in {}_l\mathcal{D}$  sera dit de type (pur)  $k$ , à l'ordre  $l$ , si :

- (i) il est de type  $\leq k$ ;
- (ii) il s'annule sur les formes différentielles de degré  $\leq k-l-1$ .

Pour  $l = 0$ , on retrouve la définition 2.2 des opérateurs linéaires de type (pur)  $k$ .

Soit  $\mathcal{D}^{r(k)}$  l'espace des ODG de degré  $r$  et de type (pur)  $k$  à l'ordre  $l$ . On a

$$(4.4) \quad \mathcal{D}^{r(k)} \cap {}_l\mathcal{D}_{k-1}^r = {}_{l-1}\mathcal{D}^{r(k-1)}.$$

On ne peut donc espérer que les opérateurs de type « pur » fournissent une décomposition en somme directe de  $\mathcal{D}$  analogue à (3.3). On aura seulement une décomposition du symbole, c'est-à-dire de la graduée associée à la filtration de  $\mathcal{D}$  par l'ordre.

**4.3. THÉORÈME DE STRUCTURE.** — *On considère la graduée associée à la filtration de  $\mathcal{D}$  par l'ordre*

$$(4.5) \quad \text{Gr } \mathcal{D} = \bigoplus_{l \geq 0} {}^l\mathcal{D}, \quad \text{où } {}^l\mathcal{D} = {}_l\mathcal{D}/{}_{l-1}\mathcal{D}.$$

L'application  ${}^l\sigma : {}^l\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \mathbf{End}(\Lambda \mathbf{T}^*)$  se factorise en une application

$$(4.6) \quad {}^l\sigma : {}^l\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \mathbf{End}(\Lambda \mathbf{T}^*).$$

**PROPOSITION 4.1.** —  *${}^l\sigma$  est un isomorphisme. En particulier,  ${}^l\sigma$  induit un isomorphisme  ${}^l\sigma^{r,k}$  de*

$${}^l\mathcal{D}^{r,k} = {}_l\mathcal{D}^{r(k)}/{}_{l-1}\mathcal{D}^{r(k-1)}$$

sur  $\mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^*$ .

**PREUVE.** — Le fait que  ${}^l\sigma$  soit injectif est bien connu : si le symbole d'ordre  $l$  de  $D$  est nul,  $D$  est d'ordre  $\leq l-1$ . Ceci étant, pour démontrer la proposition, il suffit de prouver que

$${}^l\sigma^{r,k} : {}^l\mathcal{D}^{r,k} \rightarrow \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^*$$

est surjectif.

Soit donc  $t \in \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^*$ . Il faut montrer que  $t$  est le symbole d'un ODG de degré  $l$  et de type  $k$  à l'ordre  $l$ . On peut se ramener au cas où  $t$  est à support contenu dans un ouvert  $U$  muni de coordonnées locales  $(x^1, \dots, x^n)$ , car tout champ différentiable de tenseurs peut, à l'aide d'une partition différentiable de l'unité, être présenté comme somme localement finie de tenseurs à support dans un tel ouvert. Ceci étant,  $t$  s'écrira

$$t = \sum_{i_1 < \dots < i_{k-l}, j_1 < \dots < j_{k-l+r}} t_{j_1 \dots j_{k-l+r}}^{i_1 \dots i_{k-l}} \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_{k-l}}} \otimes dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_{k-l+r}} \quad \text{où } t_{j_1 \dots j_{k-l+r}}^{i_1 \dots i_{k-l}}$$

sera une section différentiable de  $\mathbf{S}^l \mathbf{T}$  à support dans  $U$ .

On écrira en abrégé

$$(4.7) \quad t = \sum_{I,J} t_J^I \otimes L_I^J,$$

où  $t_J^I$  peut être considéré comme un opérateur différentiel d'ordre  $I$  sur les fonctions différentiables,  $L_I^J$  comme un opérateur linéaire gradué de degré  $r$  et de type pur  $k-l$  sur l'algèbre des formes à coefficients constants dans  $U$ .

Si  $\alpha = \sum_{a_1 < \dots < a_p} \alpha_{a_1 \dots a_p} dx^{a_1} \wedge \dots \wedge dx^{a_p}$  est une  $p$ -forme différentielle globale, exprimée localement en fonction des coordonnées, on notera en abrégé

$$(4.8) \quad \alpha = \sum_A \alpha_A dx^A,$$

et on posera

$$(4.9) \quad D_t \alpha = \sum_{A,I,J} t_J^I(\alpha_A) L_I^J(dx^A),$$

( $p+r$ )-forme qui sera prolongée par 0 en dehors de  $U$ .

Il est clair que l'opérateur  $D_t$  ainsi défini est un ODG de degré  $r$  et d'ordre  $l$ . On vérifie également que  $D_t$  est de type (pur)  $k$  à l'ordre  $l$ , d'où le résultat.

C. Q. F. D.

On a donc défini un isomorphisme.

$$(4.10) \quad \sigma = \bigoplus_{l \geq 0} {}^l \sigma : \text{Gr } \mathcal{D} \rightarrow \bigoplus_{r,k,l} \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \wedge^{k-l} \mathbf{T} \otimes \wedge^{k-l+r} \mathbf{T}^*$$

qui envoie  ${}^l \mathcal{D}^{r,k}$  sur  $\mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \wedge^{k-l} \mathbf{T} \otimes \wedge^{k-l+r} \mathbf{T}^*$ .

Sur l'espace  $\mathbf{End}(\wedge \mathbf{T}^*) \simeq {}_0 \mathcal{D}$ , on peut définir, comme au paragraphe 2.4, un crochet algébrique  $[, ]$  qui fait de cet espace une algèbre de Lie graduée isomorphe à  ${}_0 \mathcal{D}$ . Ce crochet est défini par la relation

$$(4.11) \quad [i_X, i_Y] = i_{[X, Y]} \quad \text{pour } X, Y \in \mathbf{End}(\wedge \mathbf{T}^*).$$

Ceci étant, considérons  $\mathbf{ST} \otimes \mathbf{End}(\wedge \mathbf{T}^*)$  comme un  $\mathbf{ST}$ -module. On peut étendre le crochet algébrique  $[, ]$  à ce module par  $\mathbf{ST}$ -bilinearité. Il vient alors le théorème suivant :

**THÉORÈME II.** — *L'application  $\sigma = \bigoplus_{l \geq 0} {}^l \sigma$  définit un isomorphisme d'algèbres de Lie graduées de  $\text{Gr } \mathcal{D}$  sur  $\mathbf{ST} \otimes \mathbf{End}(\wedge \mathbf{T}^*)$ , muni du crochet  $\mathbf{ST}$ -bilinéaire  $[, ]$ .*

*Preuve.* — Soient  $S \in \mathbf{S}^l \mathbf{T}$  et  $[D] \in {}^m \mathcal{D}$ . On considère un ODG de degré 0,  $\hat{S} \in {}_l \mathcal{D}_1^0$ , tel que  ${}_l \sigma(\hat{S}) = S$ , et un représentant  $D$  de  $[D]$  dans  ${}_m \mathcal{D}$ .

L'opérateur différentiel  $\hat{S} \circ D$  est d'ordre  $\leq l+m$ . On note  $[\hat{S} \circ D]$  sa classe dans  ${}^{l+m}\mathcal{D}$ , et on pose

$$(4.12) \quad S.[D] = [\hat{S} \circ D].$$

On définit ainsi sur  $\text{Gr } \mathcal{D}$  une structure de **ST**-module compatible avec le crochet, ce dernier point résultant de Jacobi. Donc le crochet sur  $\text{Gr } \mathcal{D}$  est **ST**-bilinéaire. Il est clair que  $\sigma$  est alors un morphisme de **ST**-modules. Si on remarque, de plus, que

$${}^0\sigma : {}^0\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{End}(\wedge \mathbf{T}^*)$$

est compatible avec les structures d'algèbres de Lie graduées des deux espaces, on en déduit que  $\sigma$  est un morphisme d'algèbres de Lie graduées.

C. Q. F. D.

REMARQUE 4.2. — Si  $[D] \in {}^l\mathcal{D}^{r,k}$  et  $[D'] \in {}^{l'}\mathcal{D}^{r',k'}$ ,

$$[[D], [D']] \in {}^{l+l'}\mathcal{D}^{r+r', k+k'-1}.$$

Donc, si  $k = l$  et  $k' = l'$ , ce crochet est nul. En d'autres termes, pour le crochet  $[, ]$ , on a

$$(4.13) \quad [t, t'] = 0 \quad \text{si } t \in \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \wedge^r \mathbf{T}^* \quad \text{et } t' \in \mathbf{S}^{l'} \mathbf{T} \otimes \wedge^{r'} \mathbf{T}^*.$$

Remarquons qu'on a aussi

$$(4.14) \quad [t, t'] = 0 \quad \text{si } t \in \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \wedge^{k-l} \mathbf{T} \quad \text{et } t' \in \mathbf{S}^{l'} \mathbf{T} \otimes \wedge^{k'-l'} \mathbf{T}.$$

En effet,  ${}^l\mathcal{D}^{r,k} = \{0\}$  si  $k < l-r$ , comme il résulte du corollaire 2.2.

### 5. Opérateurs de type $d_*$ et $\delta_d$ -cohomologie

5.1. — L'opérateur de différentielle extérieure  $d$  est un ODG de degré 1, type  $\leq 1$  et ordre 1. Comme il est nul sur les constantes, il appartient à  ${}_1\mathcal{D}_1^1$  avec les notations de la remarque 3.3.

Si  $D \in \mathcal{D}$  est un opérateur arbitraire, on note

$$(5.1) \quad \Delta_d(D) = [D, d].$$

L'application  $R$ -linéaire ainsi définie,  $\Delta_d : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  a des propriétés immédiates suivantes (avec  $D_2 \in \mathcal{D}^{r_2}$ ) :

$$(5.2) \quad \Delta_d \circ \Delta_d = 0,$$

$$(5.3) \quad \Delta_d([D_1, D_2]) = [D_1, \Delta_d(D_2)] + (-1)^{r_2} [\Delta_d(D_1), D_2],$$

qui résultent toutes les deux de l'identité de Jacobi.



DÉFINITION 5.1. —  $D \in \mathcal{D}$  est de type  $d_*$  si :

- (i) il est nul sur les constantes;
- (ii) il est de la forme  $D = \Delta_d(D_1)$ .

En particulier, les ODG de type  $\leq 1$  et de type  $d_*$  sont les *dérivations de type  $d_*$*  de Frölicher-Nijenhuis.

5.2. L'image par  $\Delta_d$  de  ${}_l\mathcal{D}_k^r$  est contenue dans  ${}_{l+1}\mathcal{D}_k^{r+1}$ . En faisant seulement apparaître degré et type, il vient

$$\Delta_d : \mathcal{D}_k^r \rightarrow \mathcal{D}_k^{r+1},$$

ce qui permet, pour tout entier  $k \geq 0$ , de définir un complexe

$$(C_k) : 0 \rightarrow \mathcal{D}_k^{-n} \xrightarrow{\Delta_d} \mathcal{D}_k^{1-n} \xrightarrow{\Delta_d} \dots \xrightarrow{\Delta_d} \mathcal{D}_k^n \rightarrow 0;$$

$\Delta_d$  se factorise en une application

$$\delta_d : \mathcal{D}^{r,k} \rightarrow \mathcal{D}^{r+1,k},$$

et on a le diagramme commutatif

$$(5.4)_k \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{D}_{k-1}^{-n} & \xrightarrow{\Delta_d} & \mathcal{D}_{k-1}^{1-n} & \xrightarrow{\Delta_d} & \dots \xrightarrow{\Delta_d} \mathcal{D}_{k-1}^n \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{D}_k^{-n} & \xrightarrow{\Delta_d} & \mathcal{D}_k^{1-n} & \xrightarrow{\Delta_d} & \dots \xrightarrow{\Delta_d} \mathcal{D}_k^n \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & \mathcal{D}^{-n,k} & \xrightarrow{\delta_d} & \mathcal{D}^{1-n,k} & \xrightarrow{\delta_d} & \dots \xrightarrow{\delta_d} \mathcal{D}^{n,k} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

dont la dernière ligne forme un complexe, noté  $(C^k)$ .

Remarque 5.1. — L'image par  $\Delta_d$  d'un opérateur de  $\mathcal{D}'$  (nul sur les constantes) appartient à  $\mathcal{D}'$ . On peut donc définir, pour  $k \geq 0$ , un complexe  $(C'_k)$  obtenu en remplaçant dans  $(C_k)$  les  $\mathcal{D}'_k$  par les  $\mathcal{D}'^r_k$ . Le diagramme  $(5.4)'_k$  obtenu en remplaçant dans  $(5.4)_k$  les deux premières lignes par  $(C'_{k-1})$  et  $(C'_k)$  est encore commutatif.

5.3. On se propose d'étudier la «  $\delta_d$ -cohomologie », c'est-à-dire la cohomologie des complexes  $(C^k)$ . On va établir le théorème suivant :

THÉORÈME III. — Pour  $k = 0$ , la cohomologie du complexe  $(C^k)$  s'identifie à la cohomologie de DE RHAM. Pour  $k > 0$ , le complexe  $(C^k)$  est acyclique.

Preuve. — Pour  $k = 0$ , le diagramme (5.4)<sub>0</sub> établit un isomorphisme entre  $(C_0)$  et  $(C^0)$ . D'autre part, si  $\alpha \in \Lambda^r \mathbf{T}^*$ , on a

$$(5.5) \quad \Delta_d(i_\alpha) = i_{(-1)^{r+1} d\alpha},$$

d'où le résultat dans ce cas.

Pour  $k > 0$ , on notera  ${}_l \mathcal{D}^{r,k} = {}_l \mathcal{D}_k^r / {}_l \mathcal{D}_{k-1}^r$ .

On remarque que

$${}^l \mathcal{D}^{r,k} = {}_l \mathcal{D}^{r,k} / {}_{l-1} \mathcal{D}^{r,k},$$

où  ${}^l \mathcal{D}^{r,k}$  est l'espace introduit au paragraphe 4.3.

Ceci étant, on considère le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & {}_{l-1} \mathcal{D}^{-n,k} & \xrightarrow{\delta_d} & {}_l \mathcal{D}^{1-n,k} & \xrightarrow{\delta_d} \dots \xrightarrow{\delta_d} & {}_{l+2n-1} \mathcal{D}^{n,k} & \rightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & {}_l \mathcal{D}^{-n,k} & \xrightarrow{\delta_d} & {}_{l+1} \mathcal{D}^{1-n,k} & \xrightarrow{\delta_d} \dots \xrightarrow{\delta_d} & {}_{l+2n} \mathcal{D}^{n,k} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \longrightarrow & {}^l \mathcal{D}^{-n,k} & \xrightarrow{* \delta_d} & {}^{l+1} \mathcal{D}^{1-n,k} & \xrightarrow{* \delta_d} \dots \xrightarrow{* \delta_d} & {}^{l+2n} \mathcal{D}^{n,k} & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

où les flèches  $*\delta_d$  sont définies par factorisation de  $\delta_d$ .

La dernière ligne de ce diagramme sera par définition le complexe  $(C^{k,l})$ . On a alors le lemme suivant :

LEMME 5.1. — Le complexe  $(C^{k,l})$  est acyclique pour  $k \geq 1$  et  $l$  arbitraire.

Preuve du lemme. — En utilisant l'isomorphisme

$$G : Gr \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{ST} \otimes \mathbf{End}(\Lambda \mathbf{T}^*),$$

défini au paragraphe 4.3, on remplace le complexe  $(C^{k,l})$  par le complexe

$$\begin{aligned} (\tilde{C}^{k,l}) : & 0 \rightarrow \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^* \\ & \xrightarrow{\tilde{*} \delta_d} \mathbf{S}^{l+1} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l-1} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^* \xrightarrow{\tilde{*} \delta_d} \dots \rightarrow 0, \end{aligned}$$

où les  ${}^*\tilde{\delta}_d$  sont définis par transport à partir des  ${}^*\delta_d$ . On peut calculer explicitement  ${}^*\tilde{\delta}_d$  en coordonnées locales. Si  $t \in \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^*$  et  $\alpha \in \Lambda^p \mathbf{T}^*$ , utilisons les notations abrégées (4.7) et (4.8). D'après (4.9), on peut représenter (localement)  $t$  par l'opérateur  $D_t$  défini par

$$D_t \alpha = \sum_{A, I, J} t_J^I(\alpha_A) L_I^J(dx^A).$$

Si alors on calcule  $[D_t, d]$ , et si on conserve seulement le symbole de cet opérateur, il vient

$$(5.7) \quad {}^*\tilde{\delta}_d t = \sum_{I, J} \left( \sum_{i=1}^n t_J^I \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes [L_I^J, i_{dx^i}] \right).$$

Par ailleurs, il est clair que  ${}^*\tilde{\delta}_d$  est  $\mathcal{F}$ -linéaire. Tenant compte de la formule (2.9) qui permet de calculer  $[L_I^J, i_{dx^i}]$ , on peut alors préciser l'expression de  ${}^*\tilde{\delta}_d t$  pour un tenseur  $t$  de la forme

$$(5.8) \quad t = u^1 u^2 \dots u^l \otimes v^1 \wedge v^2 \wedge \dots \wedge v^{k-l} \otimes \beta,$$

où  $u^1, \dots, u^l, v^1, \dots, v^{k-l} \in \mathbf{T}$  et  $\beta \in \Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^*$ . On aura :

$$(5.9) \quad {}^*\tilde{\delta}_d t = \sum_{j=1}^{k-l} (-1)^{j-1} u^1 \dots u^l v^j \otimes v^1 \wedge \dots \wedge \hat{v}^j \wedge \dots \wedge v^{k-l} \otimes \beta$$

pour  $k-l \geq 1$  et  ${}^*\tilde{\delta}_d t = 0$  si  $k-l = 0$ .

Considérons alors l'opérateur  $h$ , défini par

$$(5.10) \quad ht = \left( + \frac{1}{2} \right) \sum_{i=1}^n u^1 \dots \hat{u}^i \dots u^l \otimes u^i \wedge v^1 \wedge \dots \wedge v^{k-l} \otimes \beta,$$

pour  $l \geq 1$  et  $ht = 0$  si  $l = 0$ .

Il vient

$$(5.11) \quad h {}^*\tilde{\delta}_d + {}^*\tilde{\delta}_d h = \text{identité} \quad \text{si } k \geq 1,$$

d'où le résultat.

*Preuve du théorème.* — Le lemme entraîne, dans le diagramme (5.6)<sub>k,l</sub>, l'égalité des cohomologies des deux premières lignes. Or

$$\begin{aligned} {}_l \mathcal{D}^{r,k} &= \mathcal{D}^{r,k} && \text{pour } l \geq k, \\ {}_l \mathcal{D}^{r,k} &= 0 && \text{si } l < 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat.

C. Q. F. D.

5.4. Utilisons maintenant, pour  $k \geq 1$ , les diagrammes  $(5.4)'_k$ , définis à la remarque 5.1. L'exactitude de la ligne inférieure prouve la stabilité de la cohomologie du complexe  $(C'_k)$  pour  $k \geq 1$ . D'autre part, pour  $k = 0$ ,  $\mathcal{D}'_k = 0$ , donc la première ligne du diagramme  $(5.4)'_1$  est triviale. D'où le résultat suivant :

PROPOSITION 5.1. — *Tout opérateur  $D \in \mathcal{D}'$ , dont le crochet avec  $d$  est nul, est de type  $d_*$ .*

Ce résultat généralise la proposition 4.5 de [3] qui correspond au cas particulier des dérivations ( $k = 1$ ).

On a en fait un résultat un peu plus précis :

PROPOSITION 5.2. — *Tout opérateur  $D \in {}_l\mathcal{D}'^r_k$ , dont le crochet avec  $d$  est nul, s'écrit sous la forme  $[D_1, d]$ , où  $D_1 \in {}_{l-1}\mathcal{D}'^{r-1}_k$ .*

Preuve. — On a le diagramme commutatif.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & 0 & \\
 & & \downarrow & & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & {}_{l-r-n}\mathcal{D}'^{-n}_{k-1} & \xrightarrow{\Delta_d} & \dots & \xrightarrow{\Delta_d} & {}_l\mathcal{D}'^r_{k-1} \xrightarrow{\Delta_d} \dots \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & \downarrow & \\
 (5.12)'_{k,l} & & 0 \rightarrow & {}_{l-r-n}\mathcal{D}'^{-n}_k & \xrightarrow{\Delta_d} & \dots & \xrightarrow{\Delta_d} & {}_l\mathcal{D}'^r_k \xrightarrow{\Delta_d} \dots \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & \downarrow & \\
 0 & \rightarrow & {}_{l-r-n}\mathcal{D}^{-n,k} & \xrightarrow{\delta_d} & \dots & \xrightarrow{\delta_d} & {}_l\mathcal{D}^{r,k} \xrightarrow{\delta_d} \dots \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & \downarrow & \\
 & & 0 & & & 0 & 
 \end{array}$$

où la dernière ligne est exacte d'après la démonstration du théorème III. Si  $(C'_{k,l})$  est la deuxième ligne de ce diagramme, la cohomologie de ce complexe est donc stable en fonction de  $k$ . Elle est nulle pour  $k = 0$ , d'où le résultat.

### 6. Opérateurs différentiels gradués et concomittants différentiels

Rappelons que, sur le **ST**-module  $\mathbf{ST} \otimes \mathbf{End}(\wedge \mathbf{T}^*)$ , on a défini, au paragraphe 4.3, un crochet  $[ , ]$  **ST**-bilinéaire qui munit cet espace d'une structure d'algèbre de Lie graduée. On peut encore considérer ce crochet comme un concomittant « algébrique », c'est-à-dire un concomittant différentiel d'ordre 0.

Les concomittants différentiels qu'on va étudier maintenant sont d'ordre 1, leur expression explicite faisant intervenir les jets d'ordre 1 des champs de tenseurs différentiables considérés.

6.1. *Concomittants différentiels de première espèce.* — Si

$$t \in \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^*,$$

on ne peut en général lui associer un ODG unique, mais seulement une classe d'équivalence d'opérateurs dans  ${}_1\mathcal{D}_k^r$  pour la relation d'équivalence définie par le symbole gradué  ${}_1\sigma_k^r$ .

Le seul cas où un ODG associé soit défini de manière unique est  $l = 0$ . Dans ce cas, si  $X \in \Lambda^k \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k+r} \mathbf{T}^*$ , on notera, suivant les conventions antérieures,  $i_X$  l'ODG d'ordre 0 associé. Posons alors

$$(6.1) \quad d_X = [i_X, d] \in {}_1\mathcal{D}_k^{r+1}.$$

De même, si  $Y \in \Lambda^{k'} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k'+r'} \mathbf{T}^*$ ,  $d_Y = [i_Y, d]$  sera un ODG dans  ${}_1\mathcal{D}_{k'}^{r'+1}$ .

Les concomittants différentiels de *première espèce* seront définis par une identité de la forme (on supposera  $k+k' \neq 1$ ) :

$$(6.2) \quad d_{[X, Y]} = [d_X, d_Y]$$

dans les cas où il existe  $[X, Y] \in \mathbf{End}(\Lambda \mathbf{T}^*)$  tel que (6.2) soit vérifiée.

Or, l'identité (6.2) suppose que  $[d_X, d_Y]$  soit, comme le premier membre, un ODG d'ordre 1. En fait, *a priori*,  $[d_X, d_Y]$  appartient en général à  ${}_2\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+2}$ . Toutefois, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 6.1. — *L'identité (6.2) définit un concomittant différentiel de première espèce  $[X, Y] \in \Lambda^{k+k'-1} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k+k'+r+r'} \mathbf{T}^*$  dans les deux cas suivants :*

- (i)  $k+k' \leq 2$ ;
- (ii)  $k+k'+r+r' \leq 0$ .

*Preuve.* — Le symbole gradué  ${}_2\sigma_{k+k'-1}^{r+r'+2}([d_X, d_Y])$  appartient à  $\mathbf{S}^2 \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k+k'-3} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k+k'+r+r'-1} \mathbf{T}^*$ , espace qui est réduit à  $\{0\}$  dans les cas (i) et (ii), et dans ces cas seulement. On en déduit que, dans ces deux cas, on a

$${}_2\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+2} = {}_1\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+2},$$

donc  $[d_X, d_Y] \in {}_1\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+2}$ .

D'autre part, la proposition 5.2 entraîne l'exactitude de la suite

$$(6.3) \quad 0 \rightarrow {}_0\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+1} \xrightarrow{\Delta_d} {}_1\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+2} \xrightarrow{\Delta_d} \dots$$

$[d_X, d_Y]$  appartient, dans les cas (i) et (ii), à  ${}_1\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+2}$ . L'identité de Jacobi, appliquée à  $[[d_X, d_Y], d]$ , montre que  $[d_X, d_Y]$  est un  $\Delta_d$ -cocycle. Donc il existe  $D$  unique dans  ${}_0\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+1}$  tel que

$$[D, d] = [d_X, d_Y].$$

Mais dans les cas (i) et (ii), tout opérateur  $D \in {}_0\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+1}$  s'écrit de façon unique sous la forme  $i_{[X, Y]}$ , avec  $[X, Y] \in \Lambda^{k+k'-1} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k+k'+r+r'} \mathbf{T}^*$ .

C. Q. F. D.

Le cas (i) se décompose en deux :

$$(i)_a \quad k = 0, \quad k' = 2,$$

qui est essentiellement trivial. En effet, si  $\alpha \in \Lambda^r \mathbf{T}^*$ ,  $d_\alpha = i_{(-1)^{r+1} d_X}$ . Donc l'identité  $d_{[\alpha, Y]} = [d_\alpha, d_Y]$  s'écrit

$$[i_{[\alpha, Y]}, d] = [i_{(-1)^{r+1} d_\alpha}, [i_Y, d]] = [[i_{(-1)^{r+1} d_\alpha}, i_Y], d],$$

d'où  $i_{[\alpha, Y]} = [i_{(-1)^{r+1} d_\alpha}, i_Y]$ , c'est-à-dire :

$$(6.4) \quad [\alpha, Y] = (-1)^{r+1} [d_\alpha, Y]$$

$$(i)_b \quad k = k' = 1,$$

qui est le cas du crochet de Frölicher-Nijenhuis pour les formes à valeurs vectorielles.

En ce qui concerne le cas (ii)  $k+r$  et  $k'+r'$  devant tous les deux être  $\geq 0$ , ceci s'écrit :

$$(ii) \quad r = -k, \quad r' = -k'.$$

Donc  $X \in \Lambda^k \mathbf{T}$ ,  $Y \in \Lambda^{k'} \mathbf{T}$ , et (6.2) définit un crochet  $[X, Y] \in \Lambda^{k+k'-1} \mathbf{T}$ .

Comparons ce crochet avec l'invariant antisymétrique de Schouten, noté ici  $[X, Y]_S$ . D'après [4], formule (2.14), si  $\beta$  est une  $(k+k'-2)$ -forme différentielle arbitraire (on supposera  $k+k' \geq 2$ ), on a

$$(6.5)_S \quad d\beta([X, Y]_S) = (i_X \circ d \circ i_Y \circ d + (-1)^{kk'} i_Y \circ d \circ i_X \circ d)(\beta).$$

En ce qui concerne le crochet introduit ici, on a une formule analogue

$$(6.5) \quad d\beta([X, Y]) = (i_X \circ d \circ i_Y \circ d + (-1)^{kk'+k+k'} i_Y \circ d \circ i_X \circ d)(\beta),$$

en effet, le degré de  $\beta$  étant  $k+k'-2$ ,  $i_{[X, Y]}(\beta) = 0$ , et par suite

$$d\beta([X, Y]) = (i_{[X, Y]} \circ d)(\beta) = [i_{[X, Y]}, d](\beta) = [d_X, d_Y](\beta).$$

Compte tenu du degré de  $\beta$ , dans le développement du dernier membre ne subsistent que les termes

$$i_X \circ d \circ i_Y \circ d + (-1)^{kk'+k+k'} i_Y \circ d \circ i_X \circ d,$$

d'où la formule.

Remarquons que les identités (6.5)<sub>S</sub> et (6.5) déterminent parfaitement les deux crochets  $[X, Y]_S$  et  $[X, Y]$ . On voit que ceux-ci ne diffèrent que légèrement. En particulier,

$$(6.6) \quad [X, Y]_S = [X, Y] \quad \text{si } k \text{ et } k' \text{ ont même parité.}$$

Notons aussi que les formules de commutation diffèrent pour les deux crochets :

$$(6.7) \quad \begin{cases} [Y, X]_S = (-1)^{kk'} [X, Y]_S \\ [Y, X] = (-1)^{kk'+k+k'} [X, Y]. \end{cases}$$

**6.2. Un concomitant différentiel de première espèce généralisé. —**  
Revenons au cas général

$$X \in \Lambda^k \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k+r} \mathbf{T}^* \quad \text{et} \quad Y \in \Lambda^{k'} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k'+r'} \mathbf{T}^*.$$

On suppose encore  $k+k' \neq 1$ .

Considérons le diagramme commutatif exact

$$(6.8) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & 0 & \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & \longrightarrow & {}_0\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+1} & \xrightarrow{\Delta_d} & {}_1\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+2} & \xrightarrow{\Delta_d} & \dots \\ & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & {}_0\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'} & \xrightarrow{\Delta_d} & {}_1\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+1} & \xrightarrow{\Delta_d} & {}_2\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+2} & \xrightarrow{\Delta_d} & \dots \\ & & \downarrow \pi_0 & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow \pi_2 & & \\ 0 & \longrightarrow & {}_0\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'} & \xrightarrow{* \delta_d} & {}_1\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+1} & \xrightarrow{* \delta_d} & {}_2\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'+2} & \xrightarrow{* \delta_d} & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

où  ${}^l\mathcal{D}_k^{r'} = {}_l\mathcal{D}_k^{r'}/{}_{l-1}\mathcal{D}_k^{r'}$  et où  $*\delta_d$  est défini par factorisation. En particulier,  $*\delta_d$  coïncide avec l'opérateur défini antérieurement sur les composantes de type pur.

On a vu qu'en général  $[d_X, d_Y] \in {}_2\mathcal{D}'_{k+k'-1}{}^{r+r'+2}$  est un  $\Delta_d$ -cocycle.

Soit  ${}^2\sigma([d_X, d_Y])$  son symbole d'ordre 2. C'est un  ${}^*\tilde{\delta}_d$ -cocycle, au sens de la cohomologie des symboles gradués. On peut donc lui appliquer l'opérateur d'homotopie standard  $h$ , introduit au paragraphe 5.3, et considérer dans  ${}^1\mathcal{D}'_{k+k'}{}^{r+r'+1}$  l'élément dont le symbole  ${}^1\sigma$  coïncide avec  $h{}^2\sigma([d_X, d_Y])$ . Soit  $\delta_{X,Y}$  cet élément. On aura alors

$$(6.9) \quad {}^*\delta_d(\delta_{X,Y}) = \pi_2([d_X, d_Y]).$$

Ceci étant, l'exactitude du diagramme (6.8) prouve qu'il existe un élément unique  $\{X, Y\} \in {}_1\mathcal{D}'_{k+k'-1}{}^{r+r'+1}$  vérifiant les propriétés

$$(6.10) \quad \begin{cases} \Delta_d(\{X, Y\}) = [d_X, d_Y], \\ \pi_1(\{X, Y\}) = \delta_{X,Y}. \end{cases}$$

On posera alors la définition suivante :

**DÉFINITION 6.1.** —  $(X, Y) \mapsto \{X, Y\}$  est le *concomittant différentiel généralisé de première espèce*.

On voit que ce concomittant différentiel généralisé n'est pas à valeurs tensorielles, mais à valeurs dans l'espace  ${}_1\mathcal{D}'_{k+k'-1}{}^{r+r'+1}$ .

**PROPOSITION 6.2.** — Dans les cas (i) et (ii) de la proposition 6.1, on a

$$(6.11) \quad \{X, Y\} = i_{[X, Y]}.$$

*Preuve.* — Sous ces hypothèses, on a, en effet,  ${}^2\sigma([d_X, d_Y]) = 0$ , donc  $\delta_{X,Y} = 0$ , d'où

$$\{Y, Y\} \in {}_0\mathcal{D}'_{k+k'-1}{}^{r+r'+1} \quad \text{et} \quad [\{X, Y\}, d] = [d_X, d_Y],$$

d'où le résultat.

**6.3. Concomittants différentiels de deuxième espèce.** — Reprenons les notations de 6.1. Si

$$t \in \mathbf{S}^l \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k-l+r} \mathbf{T}^* \quad \text{et} \quad t' \in \mathbf{S}^{l'} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k'-l'} \mathbf{T} \otimes \Lambda^{k'-l'+r'} \mathbf{T}^*,$$

associons à ces champs de tenseurs des ODG,  $D_t$  et  $D_{t'}$ , tels que

$${}_t\sigma'_k(D_t) = t \quad \text{et} \quad {}_{t'}\sigma'_{k'}(D_{t'}) = t',$$

$[D_t, D_{t'}]$  a pour symbole gradué  ${}_{t+t'}\sigma'_{k+k'-1}{}^{r+r'+1}([D_t, D_{t'}])$  le crochet algébrique  $[t, t']$  qui est **ST**-bilinéaire.



Notons que ce crochet est nul dans les deux cas suivants :

- (i)'  $k = l$  et  $k' = l'$ ,
- (ii)'  $k - l + r = 0$  et  $k' - l' + r' = 0$ .

PROPOSITION 6.3. — *Dans les cas (i)' et (ii)' ci-dessus, le crochet  $[D_t, D_{t'}]$  appartient à  ${}_{l+l'-1}\mathcal{D}_{k+k'-1}^{r+r'}$  et son symbole gradué  ${}_{l+l'-1}\sigma_{k+k'-1}^{r+r'}([D_t, D_{t'}])$  ne dépend que de  $t$  et  $t'$ . On le notera :*

$$(6.12) \quad {}_{l+l'-1}\sigma_{k+k'-1}^{r+r'}([D_t, D_{t'}]) = [t, t'].$$

*Preuve.* — Sous les hypothèses faites, le crochet  $[D_t, D_{t'}]$  est d'ordre  $\leq l+l'-1$ . D'autre part, la correspondance

$$(D_t, D_{t'}) \mapsto {}_{l+l'-1}\sigma_{k+k'-1}^{r+r'}([D_t, D_{t'}])$$

se factorise en une correspondance

$$(t, t') \mapsto {}_{l+l'-1}\sigma_{k+k'-1}^{r+r'}([D_t, D_{t'}]),$$

car en ajoutant, par exemple, à  $D_t$  un élément de  ${}_{l}\mathcal{D}_{k-1}^r$  ou de  ${}_{l-1}\mathcal{D}_k^r$ , on ne change pas le résultat.

En fait, si on utilise des représentants locaux  $D_t$  et  $D_{t'}$ , de la forme (4.9), et si on calcule directement le crochet, on voit que le covariant différentiel de seconde espèce, défini par la proposition 6.3, se ramène essentiellement à l'invariant symétrique de Schouten : si, avec les notations de (4.7),

$$(6.13) \quad t = t_j^I \otimes L_I^J \quad \text{et} \quad t' = t_j^{I'} \otimes L_{I'}^{J'}$$

où  $L_I^J$  et  $L_{I'}^{J'}$  sont des tenseurs antisymétriques covariants dans le cas (i)', et contravariants dans le cas (ii)',  $t_j^I$  et  $t_j^{I'}$  peuvent être regardés comme symboles d'opérateurs différentiels sur les fonctions. On sait (cf. [2]) que le symbole du crochet de deux tels opérateurs ne dépend que de  $t_j^I$  et  $t_j^{I'}$  et que l'on peut ainsi définir le crochet de Schouten de  $t_j^I$  et  $t_j^{I'}$ , soit  $[t_j^I, t_j^{I'}]_S$ . Ceci étant, on a

$$(6.14) \quad [t, t'] = [t_j^I, t_j^{I'}]_S \otimes L_I^J \wedge L_{I'}^{J'}.$$

Autrement dit :

PROPOSITION 6.4. — *Le concomitant différentiel de seconde espèce défini par (6.12) coïncide avec l'invariant symétrique de Schouten, prolongé*

*par  $\Lambda T^*$  linéarité à  $ST \otimes \Lambda T^*$  dans le cas (i)',*

*par  $\Lambda T$  linéarité à  $ST \otimes \Lambda T$  dans le cas (ii)'.*

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BUTTIN (C.). — Les dérivations des champs de tenseurs et l'invariant différentiel de Schouten, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, série A, 1969, p. 87-89.
- [2] BUTTIN (C.). — Invariant de Schouten et groupes de Lie, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, 1969, série A, p. 1208-1210.
- [3] FRÖLICHER (A.) et NIJENHUIS (A.). — Theory of vector-valued differential forms, I et II, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. Amsterdam*, t. 59, série A, 1956, p. 338-359.
- [4] NIJENHUIS (A.). — Jacobi-type identities for bilinear differential concomitants of certain tensor fields, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. Amsterdam*, t. 58, série A, 1955, p. 390-404.
- [5] NIJENHUIS (A.). — The graded Lie algebras of an algebra, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. Amsterdam*, t. 70, série A, 1967, p. 475-486.
- [6] NIJENHUIS (A.). — Composition systems and deformations of subalgebras, *Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet.*, Amsterdam, t. 71, série A, 1968, p. 119-136.
- [7] SCHOUTEN (J. A.). — On the differential operators of first order in tensor calculus, *Convegno internazionale di geometria differenziale*, 1953, p. 1-7. — Roma, Cremonese, 1954.
- [8] SPENCER (D. C.). — Overdetermined systems of linear partial differential equations, *Bull. Amer. math. Soc.*, t. 75, 1969, p. 179-239.

(Texte reçu le 3 décembre 1973.)

Pierre MOLINO,  
Département de Mathématiques,  
USTL, Place Bataillon,  
34000 Montpellier.

---