

BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-LOUIS VERDIER

Caractéristique d'Euler-Poincaré

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 441-445

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__441_0

© Bulletin de la S. M. F., 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

CARACTÉRISTIQUE D'EULER-POINCARÉ

PAR

JEAN-LOUIS VERDIER

RÉSUMÉ. — Soit G un groupe fini opérant sur un espace topologique localement compact X satisfaisant à certaines hypothèses de finitude cohomologique. On note X_s l'ensemble des points de X , dont le stabilisateur appartient à une classe de conjugaison s , et Is la représentation induite par la représentation triviale d'un élément de s . En cohomologie rationnelle à supports compacts, la caractéristique d'Euler-Poincaré de X est un élément du groupe de Grothendieck des $\mathbb{Q}[G]$ -modules de type fini qui s'écrit $\chi(X, G) = \sum \chi(X_s/G) \cdot Is$, où $\chi(X_s/G)$ est la caractéristique d'Euler-Poincaré ordinaire.

1. Conditions de finitude

Soit X un espace localement compact. On suppose que X est de *dimension topologique finie*. Ceci veut dire qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n > n_0$ et tout faisceau abélien F sur X , $H_c^n(X, F) = 0$. C'est une condition locale sur X . Si X est localement isomorphe à un ouvert d'un polyèdre, X est de dimension topologique finie. Si X est de dimension topologique finie, tout sous-espace fermé (resp. ouvert) de X est de dimension topologique finie.

Nous dirons qu'un espace localement compact Y est *cohomologiquement de type fini* si, pour tout entier n , $H_c^n(Y, \mathbf{Z})$ est de type fini. Trois remarques importantes.

1° Soient Y un espace localement compact, et Z un ouvert de Y . Si deux des trois espaces Y , Z , $Y - Z$ sont cohomologiquement de type fini, le troisième l'est aussi.

2° Soit (Y_α) , $\alpha \in A$, une famille finie de sous-espaces ouverts (resp. fermés) d'un espace localement compact Y . Si, pour tout ensemble fini d'indices $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, les espaces $Y_{\alpha_1} \cap Y_{\alpha_2} \dots \cap Y_{\alpha_n}$ sont cohomologiquement de type fini, alors $\bigcup_\alpha Y_\alpha$ est cohomologiquement de type fini.

3° D'après un théorème classique de Wilder [1], une condition suffisante pour la finitude cohomologique d'un espace *compact* Y est la suivante : pour tout $y \in Y$, tout entier n , tout voisinage U de y , il existe un voisinage V de y , $V \subset U$, tel que l'application de restriction $\tilde{H}^n(U, \mathbf{Z}) \rightarrow \tilde{H}^n(V, \mathbf{Z})$ soit nulle. En particulier, si tout point $y \in Y$ possède un système fondamental de voisinages contractiles, Y est cohomologiquement de type fini. Plus particulièrement, si Y est isomorphe localement à des ouverts de polyèdres, Y est cohomologiquement de type fini.

Pour tout espace localement compact Y , de dimension topologique finie et cohomologiquement de type fini, on pose

$$\chi_c(Y) = \sum_n (-1)^n \operatorname{rg}_{\mathbf{Z}} H_c^n(X, \mathbf{Z}).$$

2. Caractéristique d'Euler-Poincaré

Soient X un espace localement compact, de dimension topologique finie et cohomologiquement de type fini, et G un groupe fini opérant sur X . Introduisons quelques notations.

(a) Pour tout sous-groupe H de G , on pose $X^H = \{x \in X \mid Hx = x\}$. Le sous-espace X^H est fermé dans X .

(b) Pour tout sous-groupe H de G , on pose $X_H = \{x \in X \mid \operatorname{Stab}(x) = H\}$. Le sous-espace X_H est ouvert dans X^H .

(c) Notons \mathfrak{S} l'ensemble ordonné des classes de conjugaison des sous-groupes de G . Pour tout $s \in \mathfrak{S}$ on pose

$$\begin{aligned} X^s &= \bigcup_{H \in s} X^H, \\ X_s &= \bigcup_{H \in s} X_H. \end{aligned}$$

Pour tout $s \in \mathfrak{S}$, X^s et X_s sont des G -espaces localement compacts; X^s est fermé dans X , X_s est ouvert dans X .

(d) Notons $M(G, \mathbf{Z})$ [resp. $M(G, \mathbf{Q})$] le groupe des classes d'isomorphismes des $\mathbf{Z}[G]$ (resp. $\mathbf{Q}[G]$) modules de type fini modulo les suites exactes. Pour tout $\mathbf{Z}[G]$ -module P (resp. $\mathbf{Q}[G]$ -module), on note $d(P)$ l'élément correspondant dans $M(G, \mathbf{Z})$ [resp. $M(G, \mathbf{Q})$]. Comme X est cohomologiquement de type fini, pour tout entier n , $H_c^n(X, \mathbf{Z})$ [resp. $H_c^n(X, \mathbf{Q})$] est un $\mathbf{Z}[G]$ (resp. $\mathbf{Q}[G]$) module de type fini. Posons

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbf{Z}}(X, G) &= \sum_n (-1)^n d(H_c^n(X, \mathbf{Z})), \\ \chi_{\mathbf{Q}}(X, G) &= \sum_n (-1)^n d(H_c^n(X, \mathbf{Q})). \end{aligned}$$

Les sommes ont un sens, car X est de dimension topologique finie.

(e) Pour tout $s \in \mathfrak{S}$, on note I_s la classe, dans $M(G, \mathbf{Z})$ [ou $M(G, \mathbf{Q})$], de la représentation induite à G de la représentation triviale d'un élément H de s .

THÉORÈME (On utilise les hypothèses et notations introduites ci-dessus). — Si, pour tout sous-groupe H de G , X^H est cohomologiquement de type fini, alors, pour tout $s \in \mathfrak{S}$, X_s/G est cohomologiquement de type fini, et on a

$$\chi_{\mathbf{Q}}(X, G) = \sum_{s \in \mathfrak{S}} \chi_c(X_s/G) \cdot I_s.$$

On utilise le lemme suivant.

LEMME. — Lorsque G opère librement sur X , X/G est cohomologiquement de type fini, et on a

$$\chi_{\mathbf{Q}}(X, G) = \chi_c(X/G) \cdot \text{Reg}(G).$$

Notons $\pi : X \rightarrow X/G$ l'application canonique. Le faisceau $\pi_*(\mathbf{Z})$ est un $\mathbf{Z}[G]$ faisceau localement libre de rang 1 sur X/G . L'espace X/G est de dimension topologique finie. On a, pour tout n ,

$$H_c^n(X, \mathbf{Z}) \simeq H_c^n(X/G, \pi_*(\mathbf{Z}))$$

(isomorphisme de G -modules). La formule de projection (valable, car X/G est de dimension topologique finie) montre que, pour tout G -module M , on a une suite spectrale

$$E_2^{p,q} = \text{Tor}_{\rho}^{\mathbf{Z}[G]}(H_c^q(X/G, \pi_*(\mathbf{Z})), M)$$

qui converge vers $H_c^{p+q}(X, M \otimes_G \pi_*(\mathbf{Z}))$. En terme de catégories dérivées, ceci se dit encore

$$R\Gamma_c(X/G, \pi_*(\mathbf{Z}) \otimes_G M) \simeq R\Gamma_c(X/G, \pi_*(\mathbf{Z})) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_G M.$$

On en déduit que $R\Gamma_c(X/G, \pi_*(\mathbf{Z}))$ est un complexe d'amplitude plate finie, i. e. quasi-isomorphe à un complexe borné dont les composants sont plats. En utilisant le fait que la cohomologie de ce complexe est de type fini, on montre que $R\Gamma_c(X/G, \pi_*(\mathbf{Z}))$ est un complexe parfait, i. e. quasi-isomorphe à un complexe borné dont les composants sont des projectifs de type fini. Par suite,

$$\chi_{\mathbf{Z}}(X, G) = d(P_1) - d(P_2),$$

où P_1 et P_2 sont des $\mathbf{Z}[G]$ -modules projectifs. Donc

$$\chi_{\mathbf{Q}}(X, G) = d(P_1 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}) - d(P_2 \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}).$$

D'après un théorème de Swan [3], les représentations du type $P \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{Q}$, où P est un $\mathbf{Z}[G]$ -module projectif, sont des multiples de la représentation régulière. Par suite, on a $\chi_{\mathbf{Q}}(X, G) = m \text{Reg}(G)$, et il faut maintenant répondre à la question : Combien de fois mon enfant ? Pour le

savoir, il suffit de savoir combien de fois est contenue la représentation triviale. Donc il faut calculer

$$\chi (R \Gamma_c (X/G, \pi_* (\mathbf{Q})) \overset{\mathbf{L}}{\otimes}_G \mathbf{Q}),$$

qui d'après la formule de projection n'est autre que

$$\chi (R \Gamma_c (X/G, \pi_* (\mathbf{Q}) \otimes_G \mathbf{Q}).$$

Comme $\pi_* (\mathbf{Q}) \otimes_G \mathbf{Q} \simeq \mathbf{Q}$, on a $m = \chi_c (X/G)$. On a démontré en route que X/G est cohomologiquement de type fini.

C. Q. F. D.

Démonstration du théorème. — Il faut tout d'abord se convaincre que, pour tout $s \in \mathfrak{S}$, X_s est cohomologiquement de type fini et qu'on a

$$\chi_{\mathbf{Q}} (X, G) = \sum_{s \in \mathfrak{S}} \chi_{\mathbf{Q}} (X_s, G).$$

Ceci fait, on remarque que X_s est la réunion disjointe des X_H , $H \in s$, et que par suite $\chi_{\mathbf{Q}} (X_s, G)$ s'obtient par induction à G de la classe $\chi_{\mathbf{Q}} (X_H, N(H))$ où H est un élément quelconque de s et $N(H)$ son normalisateur. D'après le lemme,

$$\chi_{\mathbf{Q}} (X_H, N(H)) = \chi_c (X_H/N(H)) \cdot \text{Reg} (N(H)/H).$$

Mais $X_H/N(H) = X_s/G$ et, de plus, la représentation de G induite par la représentation régulière de $N(H)/H$ est la représentation de G induite par la représentation triviale de H . On a donc

$$\chi_{\mathbf{Q}} (X_s, G) = \chi_c (X_s/G) \cdot I_s.$$

C. Q. F. D.

Le théorème précédent donne des informations complètes lorsque les I_s , $s \in \mathfrak{S}$ sont linéairement indépendants dans $M(\mathbf{Q}, G)$ ce qui implique que G est cyclique [2]. Supposons donc G cyclique; soient σ un générateur de G , et n l'ordre de G . Pour tout diviseur k de n , posons

$$X_k = \{ x \in X \mid \sigma^k x = x \text{ et } \sigma^l x = x \Rightarrow l \equiv 0 (k) \}.$$

Notons de même I_k , la représentation de G déduite de la représentation régulière de $G/\{ \sigma^k, \sigma^{2k}, \dots \}$ par l'application de passage au quotient.

On a

$$\chi_{\mathbf{Q}} (X, G) = \sum_{k \mid n} \chi_c (X_k) \cdot I_k.$$

En particulier, lorsque X est la sphère S^p on obtient :

(a) Si σ préserve l'orientation, $\chi_c (X_k) = 0$ pour tout $k \mid n$ si p est impair, et $\chi_c (X_1) = 2$, $\chi_c (X_k) = 0$ pour tout $k \mid n$, $k \neq 1$, si p est pair.

(b) Si σ ne préserve pas l'orientation, $\chi_c (X_2) = 1$, $\chi_c (X_k) = 0$ pour tout $k \mid n$, $k \neq 2$, si p est pair, et $\chi_c (X_2) = -1$, $\chi_c (X_1) = 2$, $\chi_c (X_k) = 0$ pour tout $k \mid n$, $k \neq 1, 2$, si p est impair.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOREL (Armand) and *al.* — *Seminar on transformation groups.* — Princeton, Princeton University Press, 1960 (*Annals of Mathematics Studies*, 46).
- [2] SERRE (J.-P.). — *Représentations linéaires des groupes finis.* — Paris, Hermann, 1967 (*Collection Méthodes*).
- [3] SWAN (R. G.). — The Grothendieck ring of a finite group, *Topology*, t. 2, 1963, p. 85-110.

(Texte reçu le 13 septembre 1973.)

Jean-Louis VERDIER,
104, rue d'Assas,
75006 Paris.