BULLETIN DE LA S. M. F.

JEAN-PIERRE SCHREIBER

Approximations diophantiennes et problèmes additifs dans les groupes abéliens localement compacts

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 297-332

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__297_0>

Bull. Soc. math. France,
101, 1973, p. 297-332.

APPROXIMATIONS DIOPHANTIENNES ET PROBLÈMES ADDITIFS DANS LES GROUPES ABÉLIENS LOCALEMENT COMPACTS

PAR

JEAN-PIERRE SCHREIBER

[Orléans]

RÉSUMÉ. — Soient G un groupe abélien localement compact, et Λ une partie discrète de G supposée relativement dense au sens de BOHR. On montre que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1° Il existe une partie finie F de G telle que $\Lambda + \Lambda \subset \Lambda + F$.

2° Tout homomorphisme de G dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ peut être approché, uniformément sur Λ, par des homomorphismes continus.

Les ensembles possédant ces propriétés ont été introduits par Yves MEYER dans les groupes $\mathbf{R}^n$. Ils sont ici étudiés dans les groupes abéliens localement compacts généraux et ensuite, plus particulièrement, dans les corps p-adiques. On donne, en application, des propriétés nouvelles des nombres de Pisot-Chabauty des corps p-adiques.

Introduction

Nous exposons dans cet article les propriétés générales des « modèles » dans les groupes abéliens localement compacts, et plus particulièrement dans les espaces de dimension finie sur les corps locaux. Les « modèles », introduits par Yves MEYER [7] dans le groupe $\mathbf{R}^n$, sont des ensembles possédant des propriétés remarquables relativement à des problèmes d'approximation diophantienne et généralisant, en un sens, les sous-groupes discrets. Cet auteur en a donné de nombreuses applications à la théorie des nombres et à l'analyse de Fourier (*cf.* [8]).

Bien qu'ils ne possèdent pas de sous-groupe discret non trivial, les corps p-adiques contiennent des modèles; leur étude a donné l'idée d'une définition générale applicable aux groupes d'une large classe : ceux qui peuvent être associés à un autre groupe abélien localement compact, au sens de la définition 1 du chapitre I, ci-dessous. Il est bon de souligner que l'étude systématique de ces notions dans le cadre général, outre qu'elle donne les moyens d'étendre les résultats d'Yves MEYER aux corps p-adiques (et notamment ceux relatifs aux nombres de Pisot), permet aussi de définir comme des modèles des ensembles remarquables de nombres entiers.

Le chapitre I donne la définition des modèles à partir de la notion de « groupes associés » qui est étudiée en détail. Le théorème 1 caractérise ces modèles par une propriété d'approximation diophantienne : celle d'être un ensemble harmonieux (*cf.* [7]).

Au chapitre II, on donne une autre caractérisation, additive, des modèles, qui les fait bien apparaître comme des généralisations simples des sous-groupes discrets : les pseudo-sous-groupes.

Dans les chapitres III et IV, on étudie plus particulièrement le cas des espaces vectoriels sur un corps local. La notion d'adèle joue un rôle fondamental dans cette étude qui donne, en particulier, des propriétés nouvelles des nombres de Pisot-Salem des corps p-adiques.

Cet article reprend la première partie d'une thèse de doctorat [11]. Pour les applications à l'analyse de Fourier, données dans la seconde partie de cette thèse, le lecteur est renvoyé à [11] ou à la monographie d'Yves MEYER [8]; dans [10], on trouvera l'étude du modèle le plus typique de Q_p.

CHAPITRE I

Groupes associés, modèles et ensembles harmonieux

Des problèmes d'approximations diophantiennes sur des groupes G abéliens localement compacts généraux conduisent à la notion d'ensemble harmonieux. Ces ensembles, lorsqu'ils ne sont pas trop « rares », peuvent être construits explicitement en « associant » un autre groupe abélien localement compact à G.

1. Définitions

DÉFINITION 1. — *Soient G et G' deux groupes abéliens localement compacts* (a. l. c.), *et soit D un sous-groupe discret de $G \oplus G'$, tel que le quotient $(G \oplus G')/D$ soit compact. Soit π (resp. π') la projection canonique de $G \oplus G'$ sur G (resp. G').*

(*a*) *On dira que G' est D-associé (ou associé par D) à G si*

(i) *$\pi'(D)$ est dense dans G';*

(ii) *$G' \cap D = \{0\}$ dans $G \oplus G'$.*

(*b*) *Si on a, de plus,*

(iii) $G \cap D = \{0\}$;

on dira que G' est proprement D-associé à G.

(*c*) *Si G' est D-associé à G, et G est D-associé à G', on dira simplement que G et G' sont D-associés.*

Enfin, nous dirons, par abus de language, que G et G' sont associés s'il existe un sous-groupe D de $G \oplus G'$ tel que G et G' soient D-associés; cette propriété fait jouer à G et G' deux rôles symétriques.

PROPOSITION 1. — *Soit $D^{\perp}$ l'orthogonal de D* ([13], 2.1.1) *dans le dual $\hat{G} \oplus \hat{G}'$ de $G \oplus G'$.*

(*a*) *Si G' est D-associé à G, $\hat{G}'$ est $D^{\perp}$-associé à $\hat{G}$.*

(*b*) *G et G' sont D-associés si, et seulement si, G' est proprement D-associé à G et $\hat{G}'$ proprement $D^{\perp}$-associé à $\hat{G}$.*

En effet, on remarque d'abord que $D^{\perp}$ est un sous-groupe discret de $\hat{G} \oplus \hat{G}'$ (isomorphe au dual de $G \oplus G'/D$) et que $(\hat{G} \oplus \hat{G}')/D^{\perp}$ est compact. Ensuite, la propriété (i) de la définition 1 (*a*), est équivalente à

(i') $\hat{G}' \cap D^{\perp} = \{0\}$;

parce qu'un isomorphisme continu de groupes a. l. c. est injectif si, et seulement si, l'homomorphisme transposé a une image dense.

Toute la proposition 1 s'en déduit.

Exemples :

(*a*) Soit G un groupe abélien compact, et soit G' un sous-groupe quelconque de G que nous munissons de la topologie discrète. Soit D le sous-groupe de $G \oplus G'$ constitué des couples (g', g'), où $g' \in G'$ (G' et son image canonique dans G étant confondus, par abus de notation). Alors G' est proprement D-associé à G.

Si G' est dense dans G, G et G' sont D-associés.

(*b*) Inversement, si G est un groupe discret, et G' un compactifié de G, on voit que G et G' sont naturellement associés par un groupe isomorphe à G.

(*c*) Soit n un entier positif, et soit dans le groupe $\mathbf{R} \oplus \mathbf{R}^n$ un sous-groupe discret D, isomorphe à $\mathbf{Z}^{n+1}$, c'est-à-dire un réseau de $\mathbf{R}^{n+1}$. Si D se projette de manière injective, et avec des images denses dans $\mathbf{R}$ et dans $\mathbf{R}^n$, les groupes $\mathbf{R}$ et $\mathbf{R}^n$ sont D-associés. Ceci est le premier exemple de groupes associés, introduit et utilisé par Yves MEYER [7], et qui est à l'origine de notre travail.

(*d*) Soit $\mathbf{Q}_p$ l'ensemble des nombres p-adiques muni de sa structure de groupe additif a. l. c. Soit $\mathbf{Z}(p^{-1})$ le groupe des rationnels de la forme a/p^n ($a \in \mathbf{Z}$, $n \geqq 0$) et ses images canoniques dans $\mathbf{Q}_p$ et dans $\mathbf{R}$ que nous noterons encore $\mathbf{Z}(p^{-1})$. Soit alors D le sous-groupe de $\mathbf{R} \oplus \mathbf{Q}_p$, formé par les couples (h, h), où h décrit $\mathbf{Z}(p^{-1})$. Il est facile de voir que $\mathbf{R}$ et $\mathbf{Q}_p$ sont D-associés. Ceci est l'exemple de base qui sera étudié ensuite plus en détail (chapitres III et IV).

DÉFINITION 2. — *Soit G' un groupe D-associé au groupe a. l. c. G. Pour toute partie relativement compacte K de G', posons*

$$\Lambda^K = \pi\{(G\times K)\cap D\} = \{\pi(d);\ d\in D \text{ et } \pi'(d)\in K\},$$

et appelons Λ^K le modèle défini par G sur K.

En général, nous appellerons modèle de G tout ensemble Λ^K du type précédent défini par la donnée de G', D, K.

Dans l'étude des modèles, nous ferons usage de la terminologie suivante :

DÉFINITION 3. — *Nous dirons qu'une partie Λ d'un groupe a. l. c. est relativement dense dans G s'il existe un compact H de G pour lequel $\Lambda + H = G$* [2].

Et, pour plus de commodité, nous appellerons ensemble bien séparé de G ce qui est souvent appelé ensemble uniformément discret.

DÉFINITION 4. — *Soit Λ une partie d'un groupe a. l. c. G. S'il existe un voisinage de l'origine ω tel que, chaque fois que λ et λ' sont deux éléments distincts de Λ, $(\lambda + \omega)\cap(\lambda' + \omega)$ est vide, nous dirons que Λ est bien séparé (par ω).*

Si une famille $(\Lambda_i)_{i\in I}$ de parties de G a tous ses éléments bien séparés par un même ω, nous dirons qu'elle est uniformément bien séparée.

On a alors, avec les notations de la définition 2, l'énoncé suivant.

PROPOSITION 2 :

(*a*) *Lorsque h parcourt G', les modèles Λ^{K+h} définis sur G sont uniformément bien séparés.*

(*b*) *Si K est d'intérieur non vide dans G', Λ^K est relativement dense dans G.*

La démonstration de cette proposition ne présente aucune difficulté et sera laissée au lecteur.

Si le groupe G', D-associé à G, n'est pas proprement D-associé à G, les modèles Λ^K, définis sur G, sont invariants par le sous-groupe discret $G\cap D$ de G. Autrement dit, la topologie de G' ne permet pas de « séparer » les points du modèle Λ^K, ce qui a des inconvénients dans les applications. En fait, comme nous allons le montrer dans le paragraphe suivant, on peut modifier dans ce cas le groupe G' de manière à retrouver le modèle Λ^K comme modèle défini à partir d'un groupe proprement D-associé à G.

2. Extensions de groupes associés

PROPOSITION 3. — *Si G' est proprement D-associé à G, il existe une extension G'' de G' par un groupe discret* [1] $\mathcal{E}$ *telle que G et G'' soient associés par une extension $\mathcal{D}$ de D par $\mathcal{E}$.*

Soit S l'adhérence dans G du sous-groupe relativement dense $\pi(D)$, et soit E un sous-groupe quelconque de G ayant une projection $\mathcal{E}$ dense dans G/S. Notons $\mathcal{D}$ le groupe $E + \pi(D)$ sur lequel nous mettons la topologie discrète. Soit $\tilde{D}$ le sous-groupe du groupe a. l. c. $\mathcal{D} \oplus G'$, constitué par les couples $(\pi(d), -\pi'(d))$, où d décrit D; alors $\tilde{D}$ est fermé, et le groupe $G'' = \mathcal{D} \oplus G'/\tilde{D}$ est localement compact. Le groupe $\mathcal{D}$ s'identifie alors canoniquement à un sous-groupe dense de G'' et donc à un sous-groupe de $G \oplus G''$, noté encore $\mathcal{D}$, discret puisque $G \oplus G'$ est un voisinage ouvert de l'origine $G \oplus G''$ et que $\mathcal{D} \cap (G \oplus G') = D$. Ce sous-groupe est aussi relativement dense, et il en résulte que G et G'' sont $\mathcal{D}$-associés.

Remarquons bien que cette construction dépend du choix, assez arbitraire, du groupe E.

Plus généralement, soit G' un groupe D-associé à G, pas nécessairement proprement, et soit S l'adhérence dans G du groupe $\pi(D)$. Le groupe G' est encore D-associé à S, et $\hat{G}'$ est, lui, proprement D^*-associé à $\hat{S}$, en notant D^* l'orthogonal de D dans $\hat{G}' \oplus \hat{S}$. On peut donc, par la proposition 3, construire une extension $\hat{G}''$ de $\hat{G}'$ et, par dualité, on trouve un groupe G'', extension par G' d'un groupe compact, tel que G'' et S soient associés. Mais alors G'' est proprement associé à S et donc aussi à G. En appliquant à nouveau la proposition 3, on peut construire un groupe G''', extension de G'' par un groupe discret, tel que G et G''' soient associés.

En résumé :

PROPOSITION 4. — *Si G' est D-associé à G, il existe un groupe compact, une extension G'' de ce groupe compact par G' proprement associée à G, et une extension G''' de G'' par un groupe discret telle que G''' et G soient associés.*

En application des propositions 3 et 4 et de leur démonstration, on obtient les résultats suivants.

COROLLAIRE 1. — *Si G' est D-associé à G et si Λ^K est un modèle sur G, défini par une partie K de G', il existe un groupe G''' tel que G''' et G soient associés par un groupe D', et une partie relativement compacte K' de G''' telle que Λ^K soit identique au modèle $\Lambda^{K'}$ défini sur G par K'.*

---

[1] Nous disons qu'un groupe A est extension d'un groupe B par un groupe C si B est isomorphe à un sous-groupe de A, et C isomorphe à A/B.

Démonstration. — En suivant les constructions de la proposition 4, on commence par relever K dans G'' dont G' est le quotient par un groupe compact. On obtient ainsi une partie relativement compacte de G'' qu'on injecte dans G''' dont G'' est un sous-groupe ouvert, ce qui fournit K'.

COROLLAIRE 2. — *Toute partie d'un modèle est un modèle.*

En effet, à partir du moment où G''' et G sont associés, à toute partie Λ du modèle $\Lambda^{K'}$, défini par cette partie relativement compacte K' de G''', correspond une partie L de K' telle que $\Lambda = \Lambda^L$.

Dans le même ordre d'idée, on a la proposition ci-après.

PROPOSITION 5. — *Soit Λ une partie d'un groupe a. l. c. G, et soit Φ un sous-groupe fini de G. Si l'image $\tilde{\Lambda}$ de Λ dans G/Φ est un modèle de G/Φ, Λ est un modèle de G.*

Supposons en effet que G' et G/Φ soient associés par D et soit $\mathcal{D}$ l'image réciproque dans G, par l'application quotient, de la projection de D dans G/Φ. L'application de $\mathcal{D}$ dans G' définie par

$$\mathcal{D} \to \mathcal{D}/\Phi \simeq D \to G'$$

est un homomorphisme (non nécessairement injectif) d'image dense dans G'. Le groupe G' se trouve alors $\mathcal{D}$-associé (non nécessairement proprement) à G. Et si le modèle $\tilde{\Lambda}$ de G/Φ était défini par une partie K de G', le modèle Λ^K défini sur G par le système $(G', \mathcal{D}, K)$ contient Λ. Donc Λ est un modèle d'après le corollaire 2.

PROPOSITION 6. — *Si Λ est un modèle du groupe a. l. c. G, et F une partie finie de G, $\Lambda + F$ est un modèle.*

Grâce aux corollaires 1 et 2, il suffit de faire la démonstration dans le cas où on a un groupe G' tel que G et G' soient D-associés, où $\Lambda = \Lambda^K$ pour une partie relativement compacte K de G', et où $F = \{0, a\}$, a étant un point quelconque de G.

Considérons le groupe A engendré par a dans G et, faisant jouer à A le rôle du groupe E dans la démonstration de la proposition 3, avec la même démarche construisons un groupe $\mathcal{D}$ isomorphe à $\pi(D) + A$ et un groupe G'' tel que G'' et G soient $\mathcal{D}$-associés, G' étant un sous-groupe ouvert de G''. Le point a de G est alors la projection sur G d'un point de $\mathcal{D}$ qui se projette en a' sur G'. On obtient ainsi, en considérant la partie relativement compacte $K + \{0, a'\}$ de G'' :

$$\Lambda^K + \{0, a\} = \Lambda^{K+\{0,a'\}}.$$

Remarque. — On retrouvera, au chapitre II, de manière moins contructive, le résultat de la proposition 6, avec un peu plus de généralité.

3. Réduction de groupes associés

A l'inverse de ce que nous avons fait au n° 2, nous allons montrer qu'on peut réduire un groupe G' associé à G à être le groupe $\mathbf{R}^n$ (pour $n \geq 0$).

Commençons par un lemme très évident :

LEMME 1. — *Si G' est D-associé (resp. proprement D-associé) au groupe a. l. c. G, si $\mathcal{O}$ est un sous-groupe ouvert, et K un sous-groupe compact de G' :*

(a) $\mathcal{O}$ est associé (resp. proprement associé) à G;

(b) G'/K est associé à G [resp. proprement associé à condition que $K \cap \pi'(D) = \{ 0 \}$].

Cela étant, on sait ([13], th. 2.4.1, p. 40) que tout groupe a. l. c. G' possède un sous-groupe ouvert isomorphe à $\mathbf{R}^n \times K$, où n est supérieur ou égal à 0, et K est un sous-groupe compact de G'. Il résulte alors immédiatement du lemme le résultat suivant.

PROPOSITION 7. — *Si G possède un groupe associé, il existe un entier n, positif ou nul, tel que $\mathbf{R}^n$ soit associé à G ($\mathbf{R}^0 = \{ 0 \}$).*

L'entier n de la proposition 7 n'est évidemment en rien caractéristique de G [*cf.* n° 1, exemple (*c*)]. Remarquons cependant que, si $n = 0$, G est l'extension d'un groupe discret par un groupe compact.

Réciproquement, en complément des exemples du n° 1, on voit que si G est extension d'un groupe discret par un groupe compact, 0 est associable à G, et à l'aide de la proposition 4, on peut construire des groupes G' tels que G et G' soient associés.

COROLLAIRE 3. — *Si G est un groupe de torsion, et si G possède un groupe G'-associé, G est l'extension d'un groupe discret par un groupe compact.*

En effet, si $\mathbf{R}^n$, avec $n > 0$, est D-associé à G, D, qui est isomorphe à un sous-groupe de G, contient d'autre part nécessairement des éléments d'ordre infini.

L'intérêt de ce corollaire est de montrer que l'existence, pour un groupe G donné, d'un groupe associé G', n'est pas automatique.

Toujours dans le sens des réductions de groupes associés, on a la proposition suivante.

PROPOSITION 8. — *Si Λ^K est un modèle du groupe a. l. c. G, et si H est un sous-groupe compact de G, la projection de Λ^K dans G/H est un modèle de G/H.*

Appelant Δ le sous-groupe $D \cap (H \times G')$ de D (avec les notations du n° 1), et H' le sous-groupe discret de G' : $H' = \pi'(\Delta)$, le groupe G'/H' est D/Δ-associé à G/H, et la projection de Λ^K sur G/H est le modèle défini par la projection de K sur G'/H'.

Nous ne connaissons malheureusement pas la structure des groupes a. l. c. associables; on dit que G est associable s'il existe un groupe a. l. c. G' tel que G et G' soient associés.

Le théorème 2 du paragraphe 4 nous donnera cependant une condition nécessaire et suffisante pour que G soit associable.

Un exemple de groupe a. l. c. non associable peut être trouvé dans [13], 2.4.7, en utilisant le corollaire 2 ci-dessus.

4. Modèles et ensembles harmonieux

Rappelons [7] qu'un ensemble Λ d'un groupe a. l. c. G est dit *harmonieux* si tout caractère faible de G (homomorphisme non nécessairement continu à valeurs dans le tore $\mathbf{T}$) est limite uniforme sur Λ de caractères continus.

THÉORÈME 1. — *Un modèle Λ^K d'un groupe a. l. c. G, défini par une partie relativement compacte K d'un groupe G' D-associé à G, est un ensemble harmonieux.*

En effet, avec les notations du n° 1, la restriction à Λ^K d'un caractère faible sur G est déterminée par la donnée d'un caractère sur le groupe discret D, c'est-à-dire par un élément σ du dual $(\hat{G} \oplus \hat{G}')/D^\perp$ de D. Soit $\varepsilon > 0$, et soit V_ε l'ensemble des éléments χ' de G' vérifiant $\sup_{g' \in K} |(\chi', g') - 1| \leq \varepsilon$. Comme K est relativement compact, V_ε est un voisinage de l'origine dans $\hat{G}'$ et donc, en désignant par $\tilde{\pi}'(D^\perp)$ la projection, dense dans $\hat{G}'$, de $D^\perp$, on a $\tilde{\pi}'(D^\perp) + V_\varepsilon = \hat{G}'$. Cela s'écrit encore

$$V_\varepsilon + D^\perp + \hat{G} = \hat{G} \oplus \hat{G}',$$

ce qui signifie, en passant au quotient par $D^\perp$, que tout caractère faible σ sur Λ^K est somme d'un caractère fort $\chi \in \hat{G}$, et d'un caractère faible χ' appartenant à V_ε, et on a

$$\sup_{\lambda \in \Lambda^K} |(\sigma, \lambda) - (\chi, \lambda)| \leq \varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Il résulte aussi de la démonstration que l'ensemble

$$M_\varepsilon = \{\chi \in \hat{G};\ \sup_{\lambda \in \Lambda^K} |(\chi, \lambda) - 1| \leq \varepsilon\}$$

est un modèle de $\hat{G}$ ($M_\varepsilon = \Lambda^{V_\varepsilon}$), à condition que V_ε soit relativement compact dans $\hat{G}'$: c'est le cas si K est d'intérieur non vide.

A partir de cette remarque, nous allons donner une réciproque du théorème 1.

THÉORÈME 2. — *Soit G un groupe a. l. c. métrisable* ([2]), *et soit Λ un ensemble harmonieux, relativement dense, de G. Alors G est un groupe associable, et Λ est un modèle de G.*

Le théorème 2 fournit une condition nécessaire et suffisante pour qu'un groupe a. l. c. métrisable G soit associable : c'est de contenir un ensemble harmonieux relativement dense. Cette dernière condition est la généralisation directe de la propriété : G contient un sous-groupe discret Λ tel que G/Λ soit compact.

Démonstration. — Soient S le plus petit sous-groupe fermé de G contenant Λ, $\hat{S}$ son dual, et $\hat{\tilde{S}}$ le compactifié de Bohr de $\hat{S}$. Soit V_0 l'orthogonal, dans $\hat{\tilde{S}}$, du groupe engendré par Λ, et soit Σ le groupe compact $\hat{\tilde{S}}/V_0$. Dans Σ, soit, pour ε fixé, $0 < \varepsilon < \sqrt{3}$,

$$V_\varepsilon = \{\chi \in \Sigma \; ; \; \sup_{\lambda \in \Lambda} |(\chi, \lambda) - 1| \leqq \varepsilon\},$$

et soit $\mathcal{H}$ le groupe engendré par V_ε.

(*a*) Remarquons d'abord que, puisque Λ est harmonieux, tout élément de Σ est somme d'un élément de V_ε et d'un élément de $\hat{S}$. On a, par conséquent $\mathcal{H} + \hat{S} = \Sigma$.

(*b*) D'autre part, il existe un voisinage de l'origine $\mathcal{U}$ dans $\hat{S}$ tel que, dans Σ, on ait $V_\varepsilon \cap \mathcal{U} = \{0\}$. En effet, si T est un compact de S tel que $\Lambda + T = S$, et si $\mathcal{U}$ est choisi de sorte que

$$\sup_{\lambda \in T, \chi \in \mathcal{U}} |(\chi, \lambda) - 1| < \sqrt{3} - \varepsilon,$$

on aura pour $\chi \in \mathcal{U} \cap V_\varepsilon$:

$$\sup_{x \in S} |(\chi, x) - 1| < \sqrt{3},$$

ce qui entraine $\chi = 0$.

(*c*) Considérons maintenant sur le groupe $\mathcal{H}$ la topologie $\mathcal{T}$ de la convergence uniforme sur Λ. Un système fondamental de voisinages de l'origine pour cette topologie est constitué par les ensembles $\mathcal{V}_n = V$, et la topologie $\mathcal{T}$ est séparée puisque $\bigcap_{n>0} \mathcal{V}_n = \{0\}$, d'après la définition de $\Sigma = \hat{S}/V_0$.

Puisque S est, par hypothèse, métrisable, $\hat{S}$ est dénombrable à l'infini, et on peut, pour tout entier $n > 0$ et tout voisinage compact $\mathcal{U}$ de l'origine dans $\hat{S}$, recouvrir Σ par une suite de translatés de $\mathcal{U} + \mathcal{V}_n$. Il résulte alors du théorème de Baire que $\mathcal{U} + \mathcal{V}_n$ est un voisinage de l'origine dans Σ. La topologie induite sur V_ε par $\mathcal{T}$ est donc moins finie

([2]) On verra au chapitre II que la métrisabilité de G n'est pas nécessaire.

que la topologie induite sur V_ε par la topologie de Σ et donc chaque V_ε qui est compact dans Σ est compact dans $\mathcal{H}$ muni de la topologie $\mathcal{T}$.

$(\mathcal{H}, \mathcal{T})$ est donc un groupe abélien localement compact.

(*d*) Nous allons montrer maintenant que $\mathcal{H}$ est associé à $\hat{S}$. Soit D le groupe $\mathcal{H} \cap \hat{S}$. Dans $\mathcal{H}$, D est dense puisque, pour tout $p > 0$, $\hat{S} + \mathcal{V}_p = \Sigma$, ($\Lambda$ harmonieux).

Soit $\tilde{D}$ le sous-groupe de $\hat{S} \oplus \mathcal{H}$ formé des couples $(d, -d)$, où d parcourt D. Il résulte de (*b*) que $\tilde{D}$ est un sous-groupe discret de $\hat{S} \oplus \mathcal{H}$. Le quotient $(\hat{S} \oplus \mathcal{H})/\tilde{D}$ s'applique bijectivement d'après (*a*), et continûment d'après (*c*), sur le groupe compact Σ, et est donc compact et isomorphe à Σ. Donc $\mathcal{H}$ est $\tilde{D}$-associé à $\hat{S}$.

L'ensemble $M_\varepsilon = V_\varepsilon \cap \hat{S}$ est alors le modèle défini sur $\hat{S}$ par le compact V_ε de $\mathcal{H}$. C'est donc, d'après le théorème 1, un ensemble harmonieux de $\hat{S}$, relativement dense puisque V_ε est par définition de la topologie un voisinage de l'origine dans $\mathcal{H}$.

(*e*) D'après la proposition 1, le groupe $\hat{\mathcal{H}}$ est $\tilde{D}^\perp$-associé au groupe S. Soit W_ε le compact de $\hat{\mathcal{H}}$:

$$W_\varepsilon = \{ y \in \hat{\mathcal{H}};\ \sup_{\chi \in \Lambda_\varepsilon} | (y, \chi) - 1 | \leq \varepsilon \}.$$

Montrons que Λ est contenu dans le modèle défini sur S par W_ε : un élément λ de Λ définit un caractère sur $\tilde{D}$ et donc un homomorphisme sur le sous-groupe dense de $\mathcal{H}$ constitué par $\mathcal{H} \cap \tilde{S}$, à valeur dans le tore. Par définition des ensembles $\mathcal{V}_n = V_{\varepsilon/2^n}$, on a

$$\sup_{\chi \in \mathcal{V}_n \cap \hat{S}} | (\lambda, \chi) - 1 | \leq \frac{\varepsilon}{2^n},$$

ce qui prouve que ce caractère est continu pour la topologie induite sur $\mathcal{H} \cap \hat{S}$ par la topologie de $\mathcal{H}$. Il se prolonge donc par continuité en un caractère continu sur $\mathcal{H}$ qui appartient à W_ε. Autrement dit, dans $S \oplus \hat{\mathcal{H}}$, l'élément λ de S est congru modulo $\tilde{D}^\perp$ à un élément de W_ε.

(*f*) Nous avons obtenu que Λ est contenu dans un modèle défini sur S sous-groupe fermé de G. En appliquant le corollaire 2 et la proposition 4, on déduit qu'on peut trouver un groupe G' tel que G et G' soient associés, et que Λ soit un modèle de G.

Remarque. — Nous avons donné cette démonstration parce qu'elle illustre bien le rôle de la dualité dans la notion de modèle et d'ensemble harmonieux relativement dense. En particulier, on voit que :

COROLLAIRE 4. — *Si* Λ *est un ensemble harmonieux relativement dense d'un groupe a. l. c. G métrisable et séparable* (3), *et si* ε *est un réel,* $0 < \varepsilon < \sqrt{3}$, *l'ensemble*

$$\Lambda_\varepsilon = \{\chi \in \hat{G},\ \sup_{\lambda \in \Lambda} |(\chi, \lambda) - 1| \leqq \varepsilon\}$$

est un ensemble harmonieux et relativement dense de $\hat{G}$.

Il est bon aussi, pour certaines applications, de remarquer que, dans l'énoncé du théorème 2, l'hypothèse que Λ est relativement dense peut être affaiblie : si l'on reprend la démonstration, on voit que cette hypothèse sert uniquement à prouver que l'ensemble V_ε est bien séparé dans $\hat{S}$, ce qui peut être obtenu pour des ensembles pas trop lacunaires (*cf.* plus bas, chapitre III, proposition 1).

Nous énoncerons donc le corollaire ci-après.

COROLLAIRE 5. — *Soient G un groupe a. l. c. métrisable, et* Λ *un ensemble harmonieux de G tel que l'ensemble* M_ε *des caractères* χ *de* $\hat{G}$ *vérifiant* $\sup_{\lambda \in \Lambda} |(\chi, \lambda) - 1| \leqq \varepsilon$ *soit bien séparé dans* $\hat{G}$ *pour un* ε *positif. Alors* **R** *est un modèle de G.*

CHAPITRE II

Modèles et pseudo-sous-groupes

1. Définition

Si G est un groupe abélien, nous appellerons pseudo-sous-groupe de G toute partie Λ *de G telle qu'il existe une partie finie F de G pour laquelle* $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$.

En particulier, un sous-groupe de G est un pseudo-sous-groupe.

L'intérêt, pour nous, de cette notion vient du résultat suivant.

PROPOSITION 1. — *Dans un groupe a. l. c. G, tout ensemble harmonieux relativement dense est un pseudo-sous-groupe de G.*

En effet, si Λ est un ensemble harmonieux de G, les ensembles $\Lambda - \Lambda$ et $\Lambda - \Lambda - \Lambda$ sont harmonieux, par simple application de la définition. En particulier, l'ensemble $\Lambda - \Lambda - \Lambda$ est bien séparé (définition I.4) parce que un ensemble harmonieux est toujours bien séparé comme on le voit sans peine ([7], p. 10).

(3) Ces deux hypothèses sont en fait superflues, comme on le verra au chapitre II.

Si H est un compact de G tel que $\Lambda + H = G$, l'ensemble $(\Lambda - \Lambda - \Lambda) \cap H$ est donc un ensemble fini F de G, et on a donc

$$\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F.$$

Ce chapitre est consacré à une réciproque de cette proposition.

THÉORÈME 1. — *Dans un groupe a. l. c. G, tout pseudo-sous-groupe Λ, localement fini dans G, est un modèle du sous-groupe fermé S qu'il engendre dans G.*

Avant de passer à la démonstration, remarquons que, si le pseudo-sous-groupe Λ est relativement dense dans G, le sous-groupe S sera *a fortiori* relativement dense dans G, et un groupe G' D-associé à S sera *ipso facto* D-associé à G : Λ sera donc, dans ce cas, un modèle de G, et on aura donc en toute généralité un nouveau théorème.

THÉORÈME 2. — *Dans tout groupe abélien localement compact, les trois propriétés :*

(i) *Λ est un ensemble harmonieux relativement dense de G;*

(ii) *Λ est un pseudo-sous-groupe localement fini relativement dense de G;*

(iii) *Λ est un modèle relativement dense;*

sont équivalentes.

Démonstration du théorème 1. — Supposant Λ non vide (sinon le théorème est trivial), on peut se ramener au cas où $0 \in \Lambda$ en effectuant une translation convenable de Λ et en appliquant la proposition I.6. Cela posé, nous allons faire la démonstration dans le cas le plus intéressant où Λ est supposé de plus relativement dense dans G. Ensuite (n° 6), nous verrons comment on peut se débarrasser de cette hypothèse supplémentaire.

Mais d'abord deux lemmes fondamentaux.

2. Lemmes

LEMME 1. — *Soient φ une application continue de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^m$, et B un cube centré à l'origine dans $\mathbf{R}^m$, de côté b, tels que*

$$\forall\, x, y \in \mathbf{R}^p, \quad \varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x-y) \in B.$$

Il existe alors une application linéaire continue l, unique, de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^m$ telle que $\varphi - l$ soit bornée; et on a de plus

$$\forall\, x \in \mathbf{R}^p, \quad \varphi(x) - l(x) \in B.$$

Ce lemme, dont la démonstration est très élémentaire, se trouve sous une forme voisine dans [12].

De la même façon, on montre un deuxième lemme.

LEMME 2. — *Si* φ *est une fonction de* $\mathbf{Z}^p$ *dans* $\mathbf{R}^m$, *et* B *un cube centré à l'origine dans* $\mathbf{R}^m$ *tels que, pour tout* x *et* y *de* $\mathbf{Z}^p$, *on ait*

$$\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x-y) \in B,$$

il existe un homomorphisme unique l *de* $\mathbf{Z}^p$ *dans* $\mathbf{R}^m$ *tel que* $\varphi(x) - l(x)$ *soit borné. Et on a de plus* $\varphi(x) - l(x) \in B$.

Remarque. — Au chapitre suivant, on utilisera des lemmes analogues dans les corps p-adiques.

3. Pseudo-sous-groupes relativement denses et localement finis de $\mathbf{R}^p$

Soit A un cube de $\mathbf{R}^p$, $A = [-a, a]^p$, dont tout translaté rencontre au moins un point du pseudo-sous-groupe Λ. En recouvrant $\mathbf{R}^p$ avec les cubes $2A + (k_1 a, k_2 a, \ldots, k_p a)$, où $(k_1, k_2, \ldots, k_p)$ décrit le réseau $\mathbf{Z}^p$, on voit de proche en proche, en partant de l'origine, que tout point de Λ appartient au sous-groupe de $\mathbf{R}^p$ engendré par $(\Lambda - \Lambda) \cap 2A$. Comme $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$, $\Lambda - \Lambda$ est localement fini, et donc le groupe L, engendré par Λ, est de type fini.

Soit donc $\omega_1, \ldots, \omega_m$ $(m \geq p)$, des générateurs $\mathbf{Z}$-linéairement indépendants de ce groupe, appartenant à $2A$.

Identifiant $\omega_1, \ldots, \omega_m$ à une base de $\mathbf{R}^m$, on définit donc une projection π de $\mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^p$ qui met en bijection $\mathbf{Z}^m$ et L. Inversement, on définit une application ψ de Λ dans $\mathbf{Z}^m$ en posant, pour

$$\lambda = \textstyle\sum_{i=1}^m \rho_i(\lambda)\, \omega_i \qquad [\rho_i(\lambda) \in \mathbf{Z}],$$
$$\psi(\lambda) = \{\rho_1(\lambda), \ldots, \rho_m(\lambda)\}.$$

D'autre part, on peut paver $\mathbf{R}^p$ avec des $(p+1)$-simplexes choisis de manière que les sommets de ces simplexes soient tous les points de Λ, et que, si λ_1 et λ_2 sont des sommets d'un même simplexe, $\lambda_1 - \lambda_2$ appartienne à $2A$. La fonction ψ définie sur Λ se prolonge alors en une fonction φ continue de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^m$ et affine sur chaque simplexe du pavage ainsi défini.

Mais, comme l'ensemble $(\Lambda - \Lambda - \Lambda) \cap 6A$ est fini, l'ensemble des points de $\mathbf{R}^m$ de la forme $\psi(\lambda_1) - \psi(\lambda_2) - \psi(\lambda_3)$, où $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ appartiennent à Λ, et où $\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3$ appartient à $6A$, est fini et donc contenu dans un cube B centré à l'origine dans $\mathbf{R}^m$. En associant au point x de $\mathbf{R}^p$ (resp. aux points y et $x - y$) un sommet λ_x (resp. λ_y, λ_{x-y}) d'un simplexe dans lequel il se trouve, on obtient

$$\lambda_x - x \in 2A \qquad [\text{resp. } \lambda_y - y \in 2A \text{ et } \lambda_{x-y} - (x-y) \in 2A],$$

et donc

$$\lambda_x - \lambda_y - \lambda_{x-y} \in 6A.$$

Comme, d'autre part, $\varphi(x) - \psi(\lambda_x) \in B$ [resp. $\varphi(y) - \psi(\lambda_y) \in B$ et $\varphi(x-y) - \psi(\lambda_{x-y}) \in B$], on obtient finalement

$$\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi(x-y) \in 4B, \quad \text{pour tout } x \text{ et tout } y \text{ de } \mathbf{R}^p.$$

On peut déduire du lemme 1 que φ est la somme d'une application linéaire continue l de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^m$ et d'une fonction bornée. La variété linéaire $l(\mathbf{R}^p)$ est de rang p puisque sa projection par π sur $\mathbf{R}^p$ est relativement dense et donc surjective.

Soit alors π' une projection de $\mathbf{R}^m$ sur $\mathbf{R}^{m-p}$ parallèlement à $l(\mathbf{R}^p)$, et soit G' l'adhérence dans $\mathbf{R}^{m-p}$ du groupe $\pi'(\mathbf{Z}^m)$. Le groupe G' ainsi obtenu, isomorphe à $\mathbf{R}^{m-p-q} \times \mathbf{Z}^q$ $(0 \leq q \leq m-p)$, est alors $\mathbf{Z}^m$-associé à $\mathbf{R}^p$ par les deux projections π sur $\mathbf{R}^p$ et π' sur G'. Et, par le choix même de π', on voit que la projection sur G' des points de $\mathbf{Z}^m$, se projetant en des points de $\mathbf{R}^p$, appartenant à Λ [c'est-à-dire la projection $\pi'(\psi(\Lambda))$], est bornée. Λ est donc un modèle de $\mathbf{R}^p$ défini par cette partie bornée de G'.

4. Cas ou $G = \mathbf{R}^p \times K$, avec K groupe compact

Le raisonnement est tout à fait analogue au précédent. On considère un « cube » A de $\mathbf{R}^p \times K$, $A = [-a, a]^p \times K$, dont tous les translatés rencontrent au moins un point de Λ, et à l'aide des mêmes translations, on montre que Λ est contenu dans le groupe L de type fini engendré par $(\Lambda - \Lambda) \cap 2A$. Cette fois, L est isomorphe à $\mathbf{Z}^m \times \Phi$, où Φ est un groupe fini. Plus précisément, on peut dire que $L \cap K$ est isomorphe à $\mathbf{Z}^q \times \Phi$, et que la projection de L sur $\mathbf{R}^p$ parallèlement à K est isomorphe à $\mathbf{Z}^{m-q}$ (avec $m - q \geq p$ et $q \geq 0$).

(*a*) Commençons par étudier le cas où $\Phi = \{0\}$, c'est-à-dire où L est sans torsion.

Soit Λ_1 la projection de Λ sur $\mathbf{R}^p$. Du fait que $(\Lambda - \Lambda) \cap K$ est fini, le nombre de points de Λ se projetant sur un même point λ de Λ_1 est majoré uniformément par rapport à λ.

Soient aussi $\omega_1, \ldots, \omega_m$ des générateurs indépendants de L ordonnés de manière que $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_q$ appartiennent à K, les autres se projetant en $\omega^*_{q+1}, \ldots, \omega^*_m$ sur $\mathbf{R}^p$. Comme au n° 3, on identifie $\omega_1, \ldots, \omega_m$ à une base de $\mathbf{R}^m$, mais cette fois on définit une application *multivoque* Ψ de Λ_1 dans $\mathbf{Z}^m$ en faisant correspondre au point

$$\lambda = \rho_{q+1}(\lambda)\,\omega^*_{q+1} + \ldots + \rho_m(\lambda)\,\omega^*_m$$

de Λ_1 l'ensemble $\Psi(\lambda)$ de tous les m-uples d'entiers de la forme $\{\rho_1, \ldots, \rho_q, \rho_{q+1}(\lambda), \ldots, \rho_m(\lambda)\}$ et tels que

$$\rho_1\,\omega_1 + \ldots + \rho_q\,\omega_q + \rho_{q+1}(\lambda)\,\omega_{q+1} + \ldots + \rho_m(\lambda)\,\omega_m \in \Lambda.$$

Comme on l'a vu plus haut, pour chaque λ de Λ_1, $\Psi(\lambda)$ est un ensemble fini. Mieux encore, comme $(\Lambda - \Lambda - \Lambda) \cap 6A$ est fini

$$(6A = [-6a, 6a]^p \times K),$$

on a :

($\bigstar$) L'ensemble

$$\{\bigcup(\Psi(\lambda_1) - \Psi(\lambda_2) - \Psi(\lambda_3));\ \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda_1,\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \in [-6a, 6a]^p\}$$

est fini et contenu dans un cube B centré à l'origine dans $\mathbf{R}^m$.

Soit alors ψ une sélection quelconque de Ψ, c'est-à-dire une fonction (univoque) de Λ_1 dans $\mathbf{R}^m$ telle que, pour tout λ de Λ_1, $\psi(\lambda) \in \Psi(\lambda)$. Comme au nº 3, on peut alors prolonger ψ à $\mathbf{R}^p$ tout entier et montrer que ψ est somme de la restriction à Λ_1 d'une application linéaire continue l_ψ et d'une fonction prenant ses valeurs dans $4B$.

Mais il en résulte de la propriété ($\bigstar$) ci-dessus et de l'unicité de l'application l_ψ, donnée par le lemme 1, que si ψ_1 et ψ_2 sont deux sélections de Ψ, $l_{\psi_1} = l_{\psi_2}$. (A partir de ψ_1 et ψ_2, on construit une sélection « mélangée » ψ_3, coïncidant avec chacune des sélections ψ_1 et ψ_2 sur des ensembles relativement denses de $\mathbf{R}^p$: on voit alors que $l_{\psi_1} = l_{\psi_3}$ et $l_{\psi_2} = l_{\psi_3}$.)

Par conséquent, il existe une application linéaire continue l de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^m$ et un cube $4B$ de $\mathbf{R}^m$ tels que Ψ soit la somme de la restriction à Λ_1 de l et d'une application multivoque à valeurs dans $4B$.

Une projection π' de $\mathbf{R}^m$ dans $\mathbf{R}^{m-p}$, parallèlement à la variété linéaire $l(\mathbf{R}^p)$ envoie donc tous les points de $\mathbf{Z}^m$ correspondant à des points de Λ dans un ensemble borné de $\mathbf{R}^{m-p}$. Appelant alors G' la fermeture dans $\mathbf{R}^{m-p}$ de $\pi'(\mathbf{Z}^m)$, le groupe $\mathbf{Z}^m$ se trouve être discret et relativement dense dans $\mathbf{R}^p \times G'$ et donc dans $(\mathbf{R}^p \times K) G'$.

Par conséquent, G' et $\mathbf{Z}^m$, associé à $\mathbf{R}^p \times K$ et Λ, est un modèle.

(b) Si Φ n'est pas réduit à $\{0\}$, on commence par faire le quotient de G par Φ. Dans G/Φ, l'image $\tilde{\Lambda}$ de Λ est un pseudo-sous-groupe localement fini, relativement dense et sans torsion; d'après (a), c'est un modèle et, d'après la proposition I.5, $\Lambda + \Phi$ est un modèle et donc aussi Λ.

5. Cas ou G est un groupe a. l. c. quelconque

Soit W un voisinage compact de l'origine, contenant F et tel que $\Lambda + W = G$, et soit $\mathcal{O}$ le sous-groupe ouvert de G engendré par K. Alors ([13], chap. II, (9.8)) $\mathcal{O}$ est isomorphe à $\mathbf{R}^r \times \mathbf{Z}^s \times K$, où K est un groupe compact, et l'ensemble $\Lambda_{\mathcal{O}} = \Lambda \cap \mathcal{O}$ est un pseudo-sous-groupe localement fini et relativement dense de $\mathcal{O}$. En plongeant $\Lambda_{\mathcal{O}}$ dans $\mathbf{R}^r \times \mathbf{R}^s \times K$, les résultats du n° 4 donnent :

1° $\Lambda_{\mathcal{O}}$ engendre un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}^m \times \Phi$, où Φ est un sous-groupe fini de $\mathcal{O}$.

2° On peut plonger $\mathbf{Z}^m$ dans $\mathbf{R}^{m-(r+s)}$ de manière que l'image de $\Lambda_{\mathcal{O}}$ (considéré comme partie de $\mathbf{R}^m \times \Phi$) dans $\mathbf{R}^{m-(r+s)}$ soit bornée.

En fait, comme au n° 4, on peut se débarasser du groupe fini Φ en faisant le quotient de G par Φ et en ne remontant à G qu'à la toute dernière fin de la démonstration. Nous supposerons donc désormais que $\Phi = \{0\}$.

(*a*) Soient L le groupe engendré par Λ, H le groupe engendré par $\Lambda_{\mathcal{O}}$ (donc isomorphe à $\mathbf{Z}^m$), H' le groupe $\mathbf{R}^{m-(r+s)}$ dans lequel nous savons plonger H (2°, ci-dessus).

Munis de la topologie induite par celle de G, H est un sous-groupe ouvert du groupe topologique (non localement compact) L, et donc L/H est discret. L'idée de la suite est de construire une topologie sur L induisant sur H la topologie induite par H' et telle que cette fois L/H soit compact.

Pour faire cela, il serait évidemment commode de pouvoir factoriser H dans L. D'où la suite du raisonnement.

(*b*) Soit L' le groupe (sans topologie) $(H' \oplus L)/H^*$, où H^* est le sous-groupe de $H' \oplus L$ constitué par les couples $(h, -h)$, où $h \in H$. On a alors

$$0 \to H' \to L' \to L'/H' \simeq L/H \to 0.$$

Mais H' étant divisible, on peut le factoriser et écrire $L' \simeq H' \oplus L/H$. Le choix de cette factorisation devra être précisé [point (*e*)], mais on peut d'ores et déjà construire le groupe associé à G :

(*c*) Topologies : soit $\tilde{D}$ un compactifié du groupe L/H. Le groupe L se plonge alors injectivement dans $\mathbf{R}^{m-(s+r)} \times \tilde{D}$ par l'intermédiaire de L'. Soit G' l'adhérence de L dans $\mathbf{R}^{m-(r+s)} \times \tilde{D}$.

(*d*) G' est L-associé à G : L se plonge injectivement dans G, injectivement et avec une image dense dans G', il reste à voir qu'il est relativement dense et discret dans $G \oplus G'$.

(i) Si $l \in L$ est petit dans G, il appartient à $\mathcal{O}$; s'il est petit dans $\mathcal{O}$ et dans $\mathbf{R}^{m-(r+s)}$, il est nul parce que $\mathbf{R}^{m-(r+s)}$ est $(L \cap \mathcal{O})$-associé à $\mathcal{O}$, par construction.

(ii) Si C_1 est un compact de $\mathbf{R}^{m-(r+s)}$, et C_2 un compact de $\mathcal{O}$ tels que $(C_1 \times C_2) + H = \mathbf{R}^{m-(r+s)} \times \mathcal{O}$, on voit que $\{(C_1 \times \tilde{D}) \times C_2\} + L = G \oplus G'$.

(*e*) Il reste à bien choisir la factorisation de H' dans L' de manière à obtenir que l'image de Λ dans G' soit relativement compacte. Pour le faire, il faut définir une projection σ de L' dans H'. Comme $L + H' = L'$, il suffit de définir l'homomorphisme σ sur Λ, qui engendre L. On est donc conduit à définir $\sigma(\lambda)$ successivement pour tous les éléments de Λ, en surveillant par récurrence transfinie que $\sigma(\lambda)$ tombe bien dans un compact fixe.

(A) Soit donc $\lambda \in \Lambda$, $\lambda \notin H$. On va définir un homomorphisme σ du groupe Gpe $[H, \lambda]$, engendré par H et λ, dans H', prolongeant l'injection canonique de H dans H', et appliquant tous les éléments μ de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}[G, \lambda]$ dans le cube B centré à l'origine de H' ($H' \simeq \mathbf{R}^{m-(r+s)}$), contenant l'image canonique de $\Lambda_{\mathcal{O}} + F + F$ dans H'.

1er *cas :* Il existe un plus petit entier $N > 0$ tel que $N\lambda \in H$. Il en résulte que, pour tout λ_j de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}[H, \lambda]$, $N\lambda_j \in H$. Comme

$$-N\lambda_j \in \Lambda - \underbrace{\Lambda - \ldots - \Lambda}_{N \text{ fois}} \subset \Lambda + \underbrace{F + \ldots + F}_{N \text{ fois}} \subset NB,$$

il suffit de choisir pour $\sigma(\lambda)$ le divisé par N de $N\lambda$ dans H' pour obtenir un prolongement σ vérifiant, pour chaque λ_j, $\sigma(\lambda_j) \in B$.

2e *cas :* $j\lambda \in H$ entraîne $j = 0$.

Puisque Λ est relativement dense dans G et que $\mathcal{O}$ est ouvert, pour chaque j de $\mathbf{Z}$, on peut trouver un λ_j de Λ tel que $\lambda_j - j\lambda \in H$. Ces λ_j vérifient

$$\lambda_i - \lambda_j - \lambda_{i-j} - [i - j - (i - j)]\lambda \in H,$$

donc

$$\lambda_i - \lambda_j - \lambda_{i-j} \in H.$$

Comme, d'autre part $\lambda_i - \lambda_j - \lambda_{i-j} \in \Lambda - \Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F + F$, et que $F \subset H$, il en résulte que

$$\lambda_i - \lambda_j - \lambda_{i-j} \in B.$$

L'application φ de $\mathbf{Z}$ dans H', définie par $j \mapsto \lambda_j - j\lambda$, est donc, d'après le lemme 2, somme d'un homomorphisme l et d'une fonction à valeurs dans B. En posant $\sigma(\lambda) = l(1)$, on a

$$\sigma(\lambda_j) = \sigma(j\lambda) + \varphi(j) \in B.$$

Et comme le choix des λ_j était quelconque dans Gpe $[H, \lambda] \cap \Lambda$, il en résulte grâce à l'unicité de l'homomorphisme l donné par le lemme 2, que, pour tout μ de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}[H, \lambda]$, on aura $\sigma(\mu) \in B$.

(B) On va maintenant appliquer le lemme de Zorn. Pour cela, soit V un sous-groupe de L contenant H, et σ un homomorphisme de V dans H' vérifiant, pour tout μ de V, $\sigma(\mu) \in B$. Soit λ un élément de Λ n'appartenant pas à V. Montrons qu'on peut étendre σ au groupe Gpe $[V, \lambda]$ de façon que, pour tout μ de Gpe $[V, \lambda]$, on ait encore $\sigma(\mu) \in B$.

1^er^ *cas :* Il existe un plus petit entier $N > 0$ tel que $N\lambda$ appartienne à V. Il en résulte que, pour tout λ de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}\,[V, \lambda]$, $N\lambda_j$ appartient à V. Soit μ_N dans Λ tel que $\mu_N - N\lambda$ appartienne à H. Puisque

$$\Lambda - \underbrace{\Lambda - \ldots - \Lambda}_{N \text{ fois}} \subset \Lambda + \underbrace{F + \ldots + F}_{N \text{ fois}},$$

il en résulte

$$\mu_N - N\lambda \in (N-1)B.$$

En choisissant pour $\sigma(\lambda)$ le divisé par N dans H' de $N\lambda - \sigma(\mu_N)$, on obtient que

$$N\sigma(\lambda) \in (N-1)B + B, \qquad \text{soit} \quad \sigma(\lambda) \in B.$$

De même, pour tout λ_j de $\mathrm{Gpe}\,[V, \lambda]$, puisque, dès que pour un μ_{N_j} de Λ on a $\mu_{M_j} - N\lambda_j \in H$, on a nécessairement $\mu_{N_j} - N\lambda_j \in (N-1)B$, donc

$$\sigma(\mu_{N_j}) - N(\sigma(\lambda_j)) \in (N-1)B, \qquad \text{soit} \quad \sigma(\lambda_j) \in B.$$

2^e^ *cas :* Si $j \in \mathbf{Z}$ et $j\lambda \in V$, alors $j = 0$.

A ce λ, on peut associer, comme en (A), 2^me^ cas, un homomorphisme de $\mathrm{Gpe}\,[H, \lambda]$ dans H' tel que $\sigma(\lambda_j) \in B$ pour tout λ_j de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}\,[H, \lambda]$. Il en résulte, par addition, un homomorphisme du groupe $\mathrm{Gpe}\,[V, \lambda]$ dans H'. Mais si maintenant on considère un élément $\lambda_{i,j}$ quelconque de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}\,[V, \lambda]$, on peut trouver i dans $\mathbf{Z}$ et μ_j dans $\Lambda \cap V$ tels que

$$\begin{cases} \lambda_{i,j} - \lambda_i - \mu_j \in H, \\ \lambda_i \in \Lambda \quad \text{et} \quad \lambda_i - i\lambda \in H. \end{cases}$$

Comme d'autre part

$$\lambda_{i,j} - \lambda_i - \mu_i \in \Lambda - \Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F + F,$$

il en résulte

$$\lambda_{i,j} - \lambda_i - \mu_j \in B.$$

Cela fournit une majoration *a priori* de $\sigma(\lambda_{i,j})$: $\sigma(\lambda_{i,j}) \in B$. Mais alors, en raisonnant sur un élément μ quelconque de $\Lambda \cap \mathrm{Gpe}\,[V, \lambda]$ comme on l'a fait sur λ, c'est-à-dire comme en (A), 2^me^ cas, on déduit de l'unicité de l'homomorphisme l du lemme 2 que l'homomorphisme qu'on trouverait serait égal à σ et que, par conséquent, $\sigma(\mu) \in B$.

(*c*) On termine en prenant un couple (V, σ) maximal.

6. Fin de la démonstration du théorème 1

Il faut maintenant voir que l'hypothèse que le pseudo-sous-groupe Λ est relativement dense peut être supprimée.

Dans $\mathbf{R}^n$, nous appellerons « *cylindre de rang p* », pour $0 \leqq p \leqq n$, la somme d'une sous-variété linéaire de dimension p et d'une partie bornée de $\mathbf{R}^n$. Nous utiliserons alors la proposition ci-après.

Proposition 2. — *Tout pseudo-sous-groupe de* $\mathbf{R}^n$ *est contenu dans un cylindre dans lequel il est relativement dense.*

La démonstration de cette proposition est élémentaire [11]; montrons comment elle s'applique au théorème 1. Reprenant le début de la démonstration (n° 5), supposant que Λ est localement fini dans G et que $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + F$, on considère un sous-groupe ouvert $\mathcal{O}$ de l'origine, engendré par un voisinage compact contenant F, avec donc $\mathcal{O} \simeq \mathbf{R}^r \times \mathbf{Z}^s \times K$. L'ensemble $\Lambda_{\mathcal{O}} = \Lambda \cap \mathcal{O}$ se projette sur $\mathbf{R}^r \times \mathbf{Z}^s$ en un pseudo-sous-groupe localement fini de $\mathbf{R}^r \times \mathbf{Z}^s$. D'après la proposition 2, on peut donc trouver un sous-groupe discret Δ de $\mathbf{R}^r \times \mathbf{Z}^s$, isomorphe à un certain $\mathbf{Z}^\alpha$, qui soit « transverse » à $\Lambda_{\mathcal{O}}$, et donc tel que $\Lambda_{\mathcal{O}} + \Delta$ soit un pseudo-sous-groupe localement fini et cette fois relativement dense dans $\mathcal{O}$.

Il s'ensuit que $\Lambda + \Delta$ est un pseudo-sous-groupe localement fini, puisque localement fini dans $\mathcal{O}$, qui contient F, et relativement dense dans l'ensemble des classes modulo $\mathcal{O}$ de G qui rencontrent Λ. Comme $\Lambda - \Lambda \subset \Lambda + \mathcal{O}$, ces classes sont les seules qui rencontrent le sous-groupe fermé de G engendré par Λ. La démonstration du n° 5 montre alors que $\Lambda + \Delta$ est un modèle dans ce sous-groupe, et donc que Λ est un modèle de ce sous-groupe.

CHAPITRE III

Modèles dans les corps localement compacts

Nous allons caractériser (théorèmes 2 et 2′ ci-dessous) les modèles des espaces vectoriels de dimension finie sur un corps local.

1. Adèles et groupes associés

Commençons par un appel de définitions et propriétés classiques ([14], chap. IV).

Soit k un corps de nombres algébriques (extension finie de $\mathbf{Q}$). Pour une place ν sur k, soient k_ν le complété de k pour ν, et r_ν la boule unité fermée de k_ν : si ν est une place finie, r_ν est le sous-anneau compact maximal de k_ν.

Pour un ensemble fini P de places de k, contenant toutes les places infinies, on pose

$$k_A(P) = \prod_{i \in P} k_i \times \prod_{i \notin P} r_i,$$

et pour un élément ν de P,

$$k'_A(P, \nu) = \prod_{i \in P, i \neq \nu} k_i \times \prod_{i \notin P} r_i.$$

Lorsque P varie, les $k_A(P)$ forment un système inductif d'anneaux localement compacts dont la limite inductive k_A est, par définition, l'*anneaux des adèles de k*.

Si, pour ν fixée, on note par $k'_A(\nu)$ la limite inductive des anneaux $k'_A(P, \nu)$, on a l'isomorphisme

$$k_A \simeq k'_A(\nu) \times k_\nu.$$

Notons π_ν (resp. π'_ν), la projection canonique de k_A sur k_ν [resp. sur $k'_A(\nu)$] définie par cet isomorphisme.

Le corps k se plonge canoniquement dans k_A, et son image $\varphi(k)$ est un sous-anneau dont nous rappelons quelques propriétés :

(a) $\varphi(k)$ est discret et relativement dense dans k_A.

(b) Pour chaque place ν, la restriction de π_ν à $\varphi(k)$ est injective (évident), et l'image de $\varphi(k)$ par π'_ν est dense dans $k'_A(\nu)$.

(c) Il existe un homomorphisme continu, H, du groupe additif k_A dans le groupe $R/\mathbf{Z}$ tel que l'application qui à chaque élément a de k_A fait correspondre le caractère sur k_A, défini par

$$x \mapsto \exp 2 i \pi H(ax),$$

soit un isomorphisme du groupe k_A sur son dual, et tel que $H(a) = 0$ si, et seulement si, $a \in \varphi(k)$.

On notera H_ν la restriction de H à k_ν, considéré comme un sous-groupe fermé de k_A.

De la propriété (b) résulte immédiatement que la restriction de π'_ν à $\varphi(k)$ est injective et que l'image de $\varphi(k)$ par π_ν est dense. Par conséquent, d'après la définition 1 du chapitre I, on peut énoncer la propriété suivante.

PROPOSITION 1. — *Les groupes a. l. c. k_ν et $k'_A(\nu)$ sont $\varphi(k)$-associés.*

Cette proposition fondamentale se généralise facilement à d'autres cas :

1° On peut se donner un ensemble fini $(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_j)$ de places de k et considérer le groupe $k_{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_j} = k_{\nu_1} \times k_{\nu_2} \times \ldots \times k_{\nu_j}$. Construisant de manière évidente un groupe $k'_A(\nu_1, \ldots, \nu_j)$, tel que

$$k_A \simeq k'_A(\nu_1, \ldots, \nu_j) \times k_{\nu_1, \ldots, \nu_j},$$

on déduit encore des propriétés (a) et (b) que $k_{\nu_1,\ldots,\nu_j}$ et $k'_A(\nu_1, \ldots, \nu_j)$ sont $\varphi(k)$-associés.

2° Si E est un espace vectoriel de dimension finie sur k, en posant

$$E_A = E \otimes_k k_A, \qquad E_\nu = E \otimes_k k_\nu, \qquad E'_A(\nu) = E \otimes_k k'_A(\nu),$$

et en désignant par $\varphi(E)$ l'image canonique $(\varphi(E) = E \otimes_k 1_{k_A})$ de E dans E_A, on obtient que les groupes a. l. c. E_ν et $E'_A(\nu)$ sont $\varphi(E)$-associés.

3° Reprenant la proposition 1, on peut définir un modèle Λ^K sur k_ν à l'aide d'une partie relativement compacte K de $k'_A(\nu)$. Mais, de par la définition même de la topologie de $k'_A(\nu)$, il existe un ensemble fini P de places de k (contenant toutes les places infinies), tel que l'ensemble relativement compact K soit contenu dans

$$k'_A(P, \nu) = \textstyle\prod_{i \in P, i \neq \nu} k_i \times \prod_{i \notin P} r_i.$$

Soit $\mathfrak{a}_P$ l'anneau des éléments x de k tels que $x \in r_i$ pour tout i n'appartenant pas à P, et $\varphi(\mathfrak{a}_p)$ son image canonique dans

$$k_A(P) = k'_A(P, \nu) \times k_\nu.$$

Des propriétés (a) et (b) ci-dessus, il est facile de déduire que k_ν et $k'_A(P, \nu)$ sont $\mathfrak{a}_P$-associés.

En fait, on peut encore passer au quotient par $\prod_{i \notin P} r_i$ (*cf.* chap. I, lemme 1), et on obtient que $\prod_{i \in P, i \neq \nu} k_i$ et k_ν sont associés par un groupe isomorphe à $\mathfrak{a}_P$.

Le modèle Λ^K dont on était parti peut être ainsi défini à partir de groupes bien plus petits que $k'_A(\nu)$ et k.

On peut encore aller plus loin : Soit I l'ensemble des places infinies de k; un compact de $\prod_{i \in P, i \neq \nu} k_i$ est contenu dans un sous-groupe ouvert de la forme

$$\textstyle\prod_{i \in I, i \notin \nu} k_i \times \prod_{i \in P, i \notin I, i \neq \nu} b_i,$$

où b_i désigne un sous-groupe ouvert compact de k_i. On peut se restreindre à ce sous-groupe ouvert, puis passer au quotient par $\prod b_i$ (*cf.* chap. I, lemme 1). Finalement, on arrive à associer k_ν et $\prod_{i \in I, i \neq \nu} k_i$ par un groupe isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{a}_P$, et à définir le modèle Λ^K de départ à partir d'un ensemble borné de $\prod_{i \in I, i \neq \nu} k_i$. Comme $\prod_{i \in I, i \neq \nu} k_i$ est un groupe isomorphe à $\mathbf{R}^m$ (avec $m = [k : \mathbf{Q}]$ si $\nu \notin I$, ou $m = [k : \mathbf{Q}] - [k_\nu : \mathbf{R}]$ si $\nu \in I$), on retrouve dans ce cas particulier le résultat du chapitre I, proposition 7. En fait, la complication qu'il y a à définir précisément le sous-groupe de $\mathfrak{a}_P$ qui intervient, enlève, en pratique, de l'intérêt à cette dernière construction.

Remarque. — La notion d'adèle et les résultats précédents peuvent se formuler de même pour les corps k de fractions rationnelles sur un corps fini ([14], chap. IV). Or, tout corps commutatif localement compact est isomorphe au complété soit d'un corps de nombres algébriques, s'il est de caractéristique zéro, soit au complété d'un corps de fractions rationnelles sur un corps fini s'il est de caractéristique non nulle.

On peut donc énoncer un nouveau théorème.

THÉORÈME 1. — *Le groupe additif de tout corps commutatif localement compact possède des groupes associés.*

Cependant, comme dans un groupe a. l. c. d'ordre borné les seuls ensembles harmonieux sont les parties des sous-groupes discrets (chap. I, cor. 3), l'étude des modèles dans les corps de caractéristique finie perd beaucoup d'intérêt : nous nous contenterons donc d'étudier les corps de nombres.

Exemple et notations. — Si $k = \mathbf{Q}$, corps des nombres rationnels, à chaque nombre premier p correspond une place (notée encore p) et un complété $\mathbf{Q}_p$; pour un élément x de $\mathbf{Q}_p$, on notera $|x|_p$ la valeur absolue p-adique de x, normalisée par $|p|_p = 1/p$. On notera ∞ la place archimédienne : $\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R}$.

On notera $\mathbf{Z}_p$ (pour p premier) la boule unité fermée de $\mathbf{Q}_p$, ensemble des entiers p-adiques. Un élément a de l'anneau des adèles $\mathbf{Q}_A$ de $\mathbf{Q}$ est alors une suite $\mathbf{a} = (a_\infty, a_{p_1}, a_{p_2}, \ldots)$, où $p_1, p_2, \ldots$ décrivent l'ensemble des nombres premiers, où $a_i \in \mathbf{Q}_i$ pour chaque i premier ou infini, et où les a_p appartiennent presque tous à $\mathbf{Z}_p$.

D'autre part, pour un ensemble $\{p_1, p_2, \ldots\}$ de nombres premiers, on notera par $\mathbf{Z}(p_1^{-1}, p_2^{-1}, \ldots)$ l'anneau des rationnels appartenant à tous les $\mathbf{Z}_q$, pour q premier n'appartenant pas à $\{p_1, p_2, \ldots\}$. En particulier $\mathbf{Z}(p^{-1})$ désigne l'anneau des rationnels représentables par une fraction ne comportant que des puissances de p au dénominateur.

Pour p premier, tout élément x de $\mathbf{Q}_p$ se décompose de manière unique ([1], p. 10) sous la forme

$$x = H_p(x) + \varepsilon_p(x)$$

avec $\varepsilon_p(x) \in \mathbf{Z}_p$ et $H_p(x) \in \mathbf{Z}(p^{-1}) \cap [0, 1[$. Si l'on convient de noter pour un nombre réel x de partie entière $[x]$:

$$H_\infty(x) = [x] - x \qquad [H_\infty(x) \in]-1, 0]],$$

on peut expliciter l'homomorphisme H de l'anneau des adèles $\mathbf{Q}_A$ dans $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, cités au (c) ci-dessus, par

$$a \in \mathbf{Q}_A^1, \qquad H(a) = H_\infty(a_\infty) + \Sigma_{p\,\text{premier}} H_p(a_p) \quad (\text{modulo } 1).$$

Enfin, d'après ce qui précède, on peut définir des modèles sur le groupe $\mathbf{Q}_p$ en lui associant le groupe $\mathbf{Q}'_A(p)$ par $\mathbf{Q}$, ou simplement en lui associant un groupe $\mathbf{R}\times\prod_{i=1}^{m}\mathbf{Q}_{p_i}$ (où les p_i sont premiers et différents de p) par un groupe ismorphe au groupe $\mathbf{Z}\,(p^{-1}, p_1^{-1}, p_2^{-1}, \ldots, p_m^{-1})$ défini ci-dessus.

2. Modèles dans le groupe $\mathbf{Q}_p^n$

Nous venons de montrer comment on peut obtenir des groupes associés à $\mathbf{Q}_p$ (ou à un espace vectoriel sur $\mathbf{Q}_p$), et donc définir des modèles sur ce groupe. Nous allons maintenant donner une construction qui permet d'obtenir tous les modèles de $\mathbf{Q}_p$ ou d'un produit $\mathbf{Q}_p^n$, et donc aussi de tout espace vectoriel de dimension finie sur un corps p-adique.

L'entier n étant fixé, soit M un $\mathbf{Z}\,(p^{-1})$ module libre de dimension m, dense dans $\mathbf{Q}_p^n$, et appelons L_p l'injection canonique, considérée comme application $\mathbf{Z}\,(p^{-1})$-linéaire, de M dans $\mathbf{Q}_p^n$.

Soit d'autre part L'_p une application $\mathbf{Z}\,(p^{-1})$-linéaire de M dans $\mathbf{Q}_p^{m-n}$, telle que l'application $L_p \otimes L'_p$ de M dans $\mathbf{Q}_p^n\times\mathbf{Q}_p^{m-n}$ soit de rang m sur $\mathbf{Q}_p$, c'est-à-dire que l'image d'une base du $\mathbf{Z}\,(p^{-1})$ module M soit une base du $\mathbf{Q}_p$ espace vectoriel $\mathbf{Q}_p^m$.

Soit de plus L_∞ une application $\mathbf{Z}\,(p^{-1})$-linéaire de M dans $\mathbf{R}^m$ qui soit de rang m sur $\mathbf{R}$.

LEMME 1. — *L'image D de M dans $(\mathbf{Q}_p^n\times\mathbf{Q}_p^{m-n})\times\mathbf{R}^m$ par l'application $(L_p\otimes L'_p)\otimes L_\infty$ est un sous-groupe discret relativement dense de $(\mathbf{Q}_p^n\times\mathbf{Q}_p^{m-n})\times\mathbf{R}^m$.*

Démonstration. — En prenant comme nouvelle base de $\mathbf{Q}_p^m$ (resp. de $\mathbf{R}^m$), l'image par $L_p\otimes L'_p$ (resp. par L_∞) d'une base du $\mathbf{Z}\,(p^{-1})$-module M, D devient le sous-groupe $\mathfrak{Z}^m\,(p^{-1})$ de $(\mathbf{Q}_p\times\mathbf{R})^m$, où $\mathfrak{Z}\,(p^{-1})$ désigne le sous-groupe discret relativement dense de $\mathbf{Q}_p\times\mathbf{R}$, isomorphe à $\mathbf{Z}\,(p^{-1})$, formé des couples (r, r), $r\in\mathbf{Z}\,(p^{-1})$.

Considérons maintenant D comme sous-groupe discret relativement dense de $\mathbf{Q}_p^n\times(\mathbf{Q}_p^{m-n}\times\mathbf{R}^m)$, et soient π et π' les projections de $\mathbf{Q}_p^n\times(\mathbf{Q}_p^{m-n}\times\mathbf{R}^m)$ sur $\mathbf{Q}_p^n$ et $(\mathbf{Q}_p^{m-n}\times\mathbf{R}^m)$ respectivement. Il est clair que $\pi\,(D) = M$ et est donc dense dans $\mathbf{Q}_p^n$, l'application π étant de plus injective sur D.

L'application π', restreinte à D, est aussi injective parce que l'application L_∞ est supposée de rang m sur $\mathbf{R}$ et est donc injective. En effet, la restriction de π' à D, si l'on identifie D et M, n'est autre que $L'_p\otimes L_\infty$.

LEMME 2. — *L'adhérence dans $\mathbf{Q}_p^{m-n}\times\mathbf{R}^m$ de $\pi'\,(D)$ est un groupe isomorphe à $\mathbf{Q}_p^{m-n-k}\times\mathbf{R}^{m-k}\times\mathbf{Z}\,(p^{-1})^k$, pour un entier k compris entre* 0 *et $m-n$* [4].

---

[4] Le groupe $\mathbf{Z}\,(p^{-1})$ est muni de la topologie discrète.

Soit $\omega_1, \ldots, \omega_m$, une base du $\mathbf{Z}(p^{-1})$-module D, identifié à M. Soit k le plus grand entier tel qu'il existe k éléments : $\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}$, tel que $L'_p(\omega_{i_1}), \ldots, L'_p(\omega_{i_k})$ soient $\mathbf{Q}_p$-linéairement indépendants en engendre un $\mathbf{Q}_p$-sous-espace vectoriel de $\mathbf{Q}_p^{m-n}$ linéairement disjoint du $\mathbf{Q}_p$-sous-espace engendré par les autres $L'_p(\omega_j)$ $(j \neq i_1, \ldots, i_k)$.

En prenant $L_\infty(\omega_1), \ldots, L_\infty(\omega_m)$ comme base sur $\mathbf{R}$ de $\mathbf{R}^m$, et en utilisant le fait que le groupe $\mathfrak{Z}(p^{-1})$ est discret dans $\mathbf{Q}_p \times \mathbf{R}$, on obtient le lemme 2.

Finalement, des lemmes 1 et 2 résulte que les groupes $\mathbf{Q}_p^n$ et $\mathbf{Q}_p^{m-n-k} \times \mathbf{R}^{m-k} \times \mathbf{Z}(p^{-1})^k$ sont D-associés, et on peut donc définir dans $\mathbf{Q}_p^n$ des modèles (contenus dans M) à partir de parties bornées de $\mathbf{Q}_p^{m-n-k} \times \mathbf{R}^{m-k} \times \mathbf{Z}(p^{-1})^k$.

L'intérêt de cette construction est dans la réciproque.

THÉORÈME 2. — *Tout modèle de $\mathbf{Q}_p^n$ peut être défini en associant, pour un certain entier m supérieur ou égal à n, et un entier k, $0 \leq k \leq m-n$ $\mathbf{Q}_p^{m-n-k} \times \mathbf{R}^{m-k} \times \mathbf{Z}(p^{-1})^k$ et $\mathbf{Q}_p^n$ par un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}(p^{-1})^m$.*

Soit, en effet, Λ un modèle défini sur $\mathbf{Q}_p^n$ par une partie relativement compacte K d'un groupe G' D-associé à $\mathbf{Q}_p^n$. On remarque d'abord :

LEMME 3. — *Si G' est un groupe D-associé à $\mathbf{Q}_p^n$, G' et $\mathbf{Q}_p^n$ sont D-associés.*

Comme $\mathbf{Q}_p^n$ ne possède pas d'autre sous-groupe discret que $\{0\}$, G' est en effet nécessairement proprement D-associé à $\mathbf{Q}_p^n$ (*cf.* chap. I, § 1). Et comme d'autre part $\mathbf{Q}_p^n$ n'a pas d'autre sous-groupe fermé relativement dense que lui-même, la projection de D sur $\mathbf{Q}_p^n$ est nécessairement dense, et G' et $\mathbf{Q}_p^n$ sont D-associés.

On peut alors aisément trouver un entier relatif r et une partie relativement compacte K' de G' contenant K tels que le modèle Λ' défini sur $\mathbf{Q}_p^n$ par K' :

(*a*) contienne le point 0;

(*b*) possède un point, et un seul, dans toute la boule ouverte de rayon p^r de $\mathbf{Q}_p^n$.

Nous sommes ainsi ramenés à étudier la structure de Λ' qui est un pseudo-sous-groupe de $\mathbf{Q}_p^n$, puisque c'est un modèle relativement dense. Reprenons, en les précisant dans ce cas particulier, les méthodes du chapitre II.

Il existe un ensemble fini F, contenu dans la boule de rayon p^r, centrée à l'origine, tel que $\Lambda' - \Lambda' \subset \Lambda' + F$. Il résulte de cette relation que $p\,\Lambda' \subset \Lambda' + F'$, où F est un ensemble fini. En appelant B une boule centrée à l'origine et contenant F', le $\mathbf{Z}(p^{-1})$-module M engendré par Λ' se trouve donc contenu dans le $\mathbf{Z}(p^{-1})$-module engendré par $F' \cup (B \cap \Lambda')$.

Tout point λ de Λ' peut par conséquent s'écrire de manière unique :

$$\lambda = \rho_1(\lambda)\,\omega_1 + \ldots + \rho_m(\lambda)\,\omega_m, \qquad \text{avec} \quad \rho_i(\lambda) \in \mathbf{Z}(p^{-1}).$$

Soit, pour ξ dans $\mathbf{Q}_p^n$, λ_ξ le point unique de Λ' vérifiant $|\xi - \lambda_\xi| < p^r$. Identifiant $\mathbf{Z}(p^{-1})$ avec le sous-groupe discret $\mathfrak{Z}(p^{-1})$ de $\mathbf{Q}_p \times \mathbf{R}$, on définit une application continue de $\mathbf{Q}_p^n$ dans $(\mathbf{Q}_p \times \mathbf{R}^m)$, en posant, pour tout point ξ de $\mathbf{Q}_p^n$,

$$\varphi(\xi) = \{ \rho_1(\lambda_\xi), \ldots, \rho_m(\lambda_\xi) \}.$$

Pour s et t dans $\mathbf{Q}_p^n$, il vient

$$\varphi(s) - \varphi(t) = \varphi(\lambda_s) - \varphi(\lambda_t);$$

et comme $\lambda_s - \lambda_t$ appartient à $\Lambda' + F$, il existe un point $\lambda_{s,t}$, et un seul, de Λ', et un f de F, tels que

$$\lambda_s - \lambda_t = \lambda_{s-t} + f.$$

D'où

$$\varphi(\lambda_s) - \varphi(\lambda_t) = \varphi(\lambda_s - \lambda_t) + \varphi_{s,t},$$

où $\psi_{s,t}$ appartient à un certain ensemble fini fixe de $(\mathbf{Q}_p \times \mathbf{R})^m$. Finalement,

$$\varphi(s) - \varphi(t) = \varphi(s - t) + \psi_{s,t}.$$

On utilise alors les deux lemmes suivants (*cf.* chap. II, lemmes 1 et 2) :

LEMME 4. — *Si g est une fonction continue de Q_p dans $\mathbf{Q}_p$, et A une constante telles que $|g(x+y) - g(x) - g(y)|_p \leq A$ pour tout x et y de $\mathbf{Q}_p$, alors g est somme d'une fonction linéaire continue de $\mathbf{Q}_p$ dans lui-même et d'une fonction bornée.*

Démonstration. — Pour tout $x \in \mathbf{Q}_p$ et k entier positif, on a

$$|g(kx) - kg(x)|_p \leq A,$$

et en posant $y = kx$, si $y \neq 0$,

$$\left| \frac{g(y)}{y} - \frac{g(x)}{x} \right|_p \leq \frac{A}{|y|_p}.$$

Mais, si y est fixé différent de zéro, l'ensemble des y/k, où k décrit l'ensemble des entiers positifs, est dense dans l'ensemble

$$\{ x \in \mathbf{Q}_p ; |x|_p \geq |y|_p \}.$$

D'où il résulte :

$\forall y \in \mathbf{Q}_p$, $\forall x$ tel que $|x|_p \geq |y|_p$, on a $|[g(y)/y] - [g(x)/x]|_p \leq A / |y|_p$.

Finalement $g(x)/x$ tend vers une limite l quand x tend vers l'infini. Si on pose alors $b(x) = g(x) - lx$, on a

$$| b(x+y) - b(x) - b(y) |_p \leqq A,$$

donc $\forall\, n \geqq 0$, $| b(x) - p^n b(x/p^n) |_p \leqq A$.

En faisant tendre n vers l'infini, $(p^n/x)\, b(x/p^n)$ tend vers zéro si $x \neq 0$, et donc

$$\forall\, x \neq 0, \quad | b(x) |_p \leqq A.$$

La décomposition cherchée est $g(x) = lx + b(x)$.

LEMME 5. — *Si f est une fonction continue de $\mathbf{Q}_p$ dans $\mathbf{R}$, et A une constante, telles que $| f(x+y) - f(x) - f(y) | \leqq A$, f est bornée.*

Démonstration. — On obtient, pour tout y de $\mathbf{Q}_p$ et tout entier positif n,

$$\left| f(y) - nf\left(\frac{y}{n}\right) \right| \leqq (n-1)\, A,$$

soit

$$\left| \frac{f(y)}{n} - f\left(\frac{y}{n}\right) \right| \leqq A.$$

En posant $B_\varepsilon = \sup_{|y|_p \leqq \varepsilon} | f(y) |$, et en remarquant que l'ensemble $\{ y/n ; | y |_p \leqq \varepsilon$ et n entier positif $\}$ est dense dans $\mathbf{Q}_p$, on a

$$\forall\, \varepsilon > 0, \quad \forall\, x \in \mathbf{Q}_p, \quad | f(x) | \leqq A + B_\varepsilon,$$

soit finalement

$$\forall\, x \in \mathbf{Q}_p, \quad | f(x) | \leqq A + | f(0) |.$$

On décompose alors la fonction φ, à valeurs dans $(\mathbf{Q}_p \times \mathbf{R})^m$ en sa partie réelle φ_∞ à valeurs dans $\mathbf{R}^m$ et sa partie p-adique φ_p, à valeurs dans $\mathbf{Q}_p^m$.

(a) Soit L_∞ l'application $\mathbf{Z}^{-1}(p)$-linéaire de M dans $\mathbf{R}^m$ qui coïncide avec φ_∞ sur Λ'. D'après le lemme 5, φ_∞ est bornée, et donc L_∞ est bornée sur Λ'. D'autre part, L_∞ est de rang m, par construction, puisqu'elle applique la base $(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ de M sur la base canonique de $\mathbf{R}^m$.

(b) D'après le lemme 4, $\varphi_p = l_p + b_p$, où l_p est une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire continue de $\mathbf{Q}_p^n$ dans $\mathbf{Q}_p^m$, et b_p une fonction bornée.

Montrons d'abord que la variété $\mathbf{Q}_p$-linéaire $l_p(\mathbf{Q}_p^n)$ est de dimension n : soit ρ l'application $\mathbf{Q}_p$-linéaire, continue de $\mathbf{Q}_p^m$ dans $\mathbf{Q}_p^n$, qui à $(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in \mathbf{Q}_p^m$ associe $\sum \xi_i\, \omega_i$ ($\{ \omega_i \}_{i=1}^m$ est la base de M). Par définition même de φ, on a, pour tout $\lambda \in \Lambda'$, $\rho(\varphi_p(\lambda)) = \lambda$ et, comme $\varphi_p(\lambda) - l_p(\lambda)$ reste borné dans $\mathbf{Q}_p^m$ lorsque λ décrit Λ', $\rho(l_p(\Lambda'))$ est relativement dense dans $\mathbf{Q}_p^n$; donc $\rho(l_p(\mathbf{Q}_p^n))$ est $\mathbf{Q}_p^n$ tout entier, et $l_p(\mathbf{Q}_p^n)$ est de dimension n sur $\mathbf{Q}_p$.

Soit alors σ la projection de $\mathbf{Q}_p^m$ sur le quotient $\mathbf{Q}_p^m/l_p(\mathbf{Q}_p^n)$ qui est isomorphe à (et identifié dans la suite avec) $\mathbf{Q}_p^{m-n}$. D'après ce qui précède, le noyau de σ ne rencontre le noyau de ρ qu'en 0.

Soit enfin L'_p l'application $\mathbf{Z}(p^{-1})$-linéaire de M dans $\mathbf{Q}_p^{m-n}$ qui coïncide sur Λ' avec $\sigma \circ \varphi_p$, et soit L_p l'injection canonique de M dans $\mathbf{Q}_p^n$ qui coïncide donc avec $\rho \circ \varphi_p$ sur Λ'.

L'application $L_p \otimes L'_p$ [qui coïncide sur Λ' avec $(\rho \circ \sigma) \circ \varphi_p$] est une application de rang m, $\mathbf{Z}(p^{-1})$-linéaire, du module M dans $\mathbf{Q}_p^n \times \mathbf{Q}_p^{m-n}$. De plus, L'_p est bornée sur Λ', puisque, sur Λ', $\sigma \circ \varphi_p = \sigma \circ b_p$.

(*c*) Il résulte alors de l'étude directe faite plus haut qu'il existe un sous-groupe de $\mathbf{R}^m \times \mathbf{Q}^{m-n}$, isomorphe à $\mathbf{R}^{m-k} \times \mathbf{Q}^{m-n-k} \times \mathbf{Z}(p^{-1})^k$ associé à $\mathbf{Q}_p^n$, et que Λ' est défini comme modèle à partir d'une partie relativement compacte de ce groupe.

Une autre façon d'énoncer le théorème 2 est la suivante :

PROPOSITION 2. — *Si Λ est un modèle de $\mathbf{Q}_p^n$, alors :*

1° *Λ est contenu dans un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension m finie E.*

2° *Pour tout nombre premier q différent de p et pour $q = \infty$, on peut trouver m formes $\mathbf{Q}$-linéaires, $\mathbf{Q}_q$-indépendantes de E dans $\mathbf{Q}_q$, bornées sur Λ.*

3° *On peut trouver $m - n$ applications $\mathbf{Q}$-linéaires de E dans $\mathbf{Q}_p$, bornées sur Λ, et formant avec les restrictions à E des n projections canoniques de $\mathbf{Q}_p^n$ sur $\mathbf{Q}_p$ un système de m applications $\mathbf{Q}_p$-indépendantes.*

Cette proposition, qui n'exprime qu'une condition nécessaire pour que Λ soit un modèle, se déduit aisément du théorème 2, l'appartenance à un $\mathbf{Z}(p^{-1})$-module de dimension m entraînant les conditions portant sur les valuations q-adiques ($q \neq p$).

3. Conclusion

Les méthodes du paragraphe 2 s'appliquent exactement de la même manière à la recherche des modèles du groupe $\mathbf{R}^n$, le groupe $\mathbf{Z}(p^{-1})$ étant simplement remplacé par $\mathbf{Z}$, les lemmes 4 et 5 par le lemme 1 du chapitre II. On obtient ainsi les énoncés suivants de résultats obtenus antérieurement par Yves MEYER. [8].

THÉORÈME 2'. — *Tout modèle de $\mathbf{R}^n$ peut être défini en associant pour un certain entier m supérieur ou égal à n et un entier k, $0 \leq k \leq m - n$, $\mathbf{R}^{m-n-k} \times \mathbf{Z}^k$ et $\mathbf{R}^n$ par un groupe isomorphe à $\mathbf{Z}^n$.*

PROPOSITION 2'. — *Si Λ est un modèle de $\mathbf{R}^n$, alors :*

1° *Λ est contenu dans un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel de dimension m finie E.*

2° *Pour tout nombre premier p, on peut trouver m formes $\mathbf{Q}$-linéaires, $\mathbf{Q}_p$-indépendantes de E dans $\mathbf{Q}_p$, bornées sur Λ.*

3° *On peut trouver $m - n$ applications* **Q**-*linéaires de* E *dans* **R**, *bornées sur* Λ, *et formant avec les restrictions à* E *des* n *projections canoniques de* $\mathbf{R}^n$ *sur* **R** *un système de* m *applications* **R**-*indépendantes.*

En joignant à ces résultats la remarque déjà faite que les modèles dans les corps locaux de caractéristique finie sont contenus dans un sous-groupe discret de ce corps, on obtient bien, finalement, la caractérisation des modèles dans tout espace vectoriel de dimension finie sur un corps local.

CHAPITRE IV

Modèles standards et ensembles harmonieux stables par multiplication

Soit K un corps p-adique, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Pour un corps de nombres algébriques k qui se plonge de manière dense dans K, soit ν la place définie par k dans K : K s'identifie alors à k_ν et on peut, d'après le paragraphe 1 du chapitre III, définir un groupe $k'_A(\nu)$ associé à K par un groupe isomorphe à k. Soit U le compact de $k'_A(\nu)$, égal au produit des boules unités fermées de chacun des k_i, pour toutes les places i sur k différentes de ν.

DÉFINITION 1. — *On appellera modèle standard défini par* k *dans* K, *le modèle* Λ^U *défini par* U.

Autrement dit, Λ^U est la partie de K constituée des λ de k vérifiant $|\lambda|_v \leq 1$ pour toute valeur absolue v sur k distincte de celle définie par K.

Un modèle standard, comme tout modèle, est un ensemble harmonieux; il possède d'autre part la propriété d'être stable par multiplication ($\lambda \in \Lambda^U$ et $\lambda' \in \Lambda^U$ entraîne $\lambda\lambda' \in \Lambda^U$). Le but de ce paragraphe est la démonstration du résultat inverse (théorème 2) : les modèles standards de K sont exactement les ensembles harmonieux stables par multiplition et maximaux pour l'inclusion.

La notion de modèle standard est liée à celle de nombres de Pisot-Salem-Chabauty de K, dont nous rappelons la définition ([4] et [1]) :

DÉFINITION 2. — *Soit* K *un corps p-adique. L'ensemble* $S_p(K)$ *des nombres de Pisot-Salem-Chabauty est l'ensemble des nombres algébriques* θ *de* K *tels que :*

(i) *Pour la place induite sur* $\mathbf{Q}(\theta)$ *par* K, θ *est de valeur absolue strictement supérieure à* 1.

(ii) *Pour toute autre place sur* $\mathbf{Q}(\theta)$, *la valeur absolue de* θ *est inférieure ou égale à* 1.

Une autre façon d'exprimer les conditions (i) et (ii) consiste à introduire les isomorphismes $\sigma_1^q, \ldots, \sigma_n^q$ de $\mathbf{Q}(\theta)$ dans une clôture algébrique Ω_q de $\mathbf{Q}_q$ (q premier ou ∞). Si $\sigma_1^p, \ldots, \sigma_r^p$ sont les isomorphismes conjugués sur $\mathbf{Q}_p$, équivalents à l'injection canonique de $\mathbf{Q}(\theta)$ dans K, alors $\theta \in S_p(K)$ si, et seulement si,

(i) $|\sigma_1^p(\theta)|_p = |\sigma_2^p(\theta)|_p = \ldots = |\sigma_r^p(\theta)|_p < 1$;

(ii) $|\sigma_{r+1}^p(\theta)|_p \leq 1, \ldots, |\sigma_n^p(\theta)|_p \leq 1$;

(iii) $|\sigma_1^q(\theta)|_p \leq 1, \ldots, |\sigma_n^q(\theta)|_p \leq 1$, pour tout q différent de p.

On sait qu'on peut remplacer les conditions portant sur les places finies q-adiques (avec $q \neq p$) par la condition que θ est zéro d'un polynôme irréductible de la forme

$$p^\alpha x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n, \quad \text{où les } a_i \text{ appartiennent à } \mathbf{Z}.$$

Définition 3. — *Soit K un corps p-adique. L'ensemble $S_p^0(K)$ des nombres de Pisot-Chabauty de K est l'ensemble des éléments θ de $S_p(K)$ qui sont de valeur absolue strictement inférieure à* 1 *pour tout place infinie sur K.*

Soit K une extension algébrique finie de $\mathbf{Q}_p$, et soit S un ensemble harmonieux de K, stable par multiplication qui engendre K $\mathbf{Q}_p$-linéairement.

Proposition 1. — *L'ensemble S est contenu dans un modèle de K.*

Un ensemble harmonieux est bien séparé ([7], § 2, cor. 1), et ne peut donc comporter qu'un nombre fini d'éléments de valeur absolue inférieure ou égale à 1. S'il est stable par multiplication ces éléments sont donc nécessairement, soit zéro, soit racine de l'unité dans K.

Donc, de deux choses l'une : ou bien S est fini, et la proposition 1 est évidente dans ce cas; ou bien S est infini, et contient au moins un élément θ de valeur absolue strictement supérieure à 1.

Soit, dans ce dernier cas, $x_1, \ldots, x_r$, une base de l'espace vectoriel K sur le corps $\mathbf{Q}_p(\theta)$, dont les éléments sont choisis dans S. Tout élément ω de K s'écrit donc $\omega = \sum_{i=1}^r \omega_i x_i$, avec ω_i dans $\mathbf{Q}_p(\theta)$. Supposant que θ est de degré l sur $\mathbf{Q}_p$ et zéro du polynôme irréductible primitif

$$P(x) = \sum_{j=0}^l b_j x^j \qquad (b_l = 1),$$

tout élément α de $\mathbf{Q}_p(\theta)$ peut s'écrire pour un entier n assez grand :

$$\alpha = \sum_{j=0}^{l-1} \alpha_j \theta^{j+n}, \qquad \text{avec} \quad \alpha_j \in \mathbf{Z}_p.$$

Donc nous pouvons écrire tout élément ω de K sous la forme

$$\omega = \sum_{i=1}^r \sum_{j=0}^{l-1} \omega_{i,j} x_i \theta^{j+n}, \qquad \text{avec} \quad \omega_{i,j} \in \mathbf{Z}_p.$$

Cela posé, nous voulons appliquer le corollaire 5, chapitre I, et nous allons donc montrer que, pour ε positif assez petit, l'ensemble V_ε des caractères χ sur le groupe K, vérifiant

$$\forall\, s \in S, \quad |(\chi, s) - 1| < \varepsilon,$$

est bien séparé dans le dual $\hat{K}$ de K. Notant $\| y \|$ la distance du réel y à l'entier le plus proche, et identifiant K à son dual (*cf.* chap. III, § 1), il suffit de montrer que, pour ε assez petit l'ensemble des z de K, vérifiant

$$\forall\, s \in S, \quad \| H_p \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(zs) \| < \varepsilon,$$

est bien séparé dans K. Ou encore de montrer que, pour ε assez petit, il existe un η positif assez petit pour que

$$(|z|_p < \eta \text{ et } \| H_p \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(zs) \| < 2\varepsilon \text{ pour tout } s \text{ de } S) \quad \text{entraîne } (z = 0).$$

Mais, ε positif étant donné, il existe $\eta > 0$ tel que

$$(|z|_p < \eta) \quad \text{entraîne } (|\operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(zx_i\,\theta^j)|_p \leq 1 \text{ pour tout } 1 \leq i \leq r \text{ et } 0 \leq j \leq l-1).$$

Montrons que, pour $z \neq 0$, il existe un plus grand entier N tel que

$$\forall\, n < N, \quad \forall\, 1 \leq i \leq r, \quad |\operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(zx_i\,\theta^n)|_p \leq 1.$$

S'il n'existait pas de tel N, on aurait, pour tout ω de K,

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(z\,\omega)|_p &= |\operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p} z \textstyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{l-1} \omega_{i,j}\, x_i\, \theta^{n_i}|_p \\ &= |\textstyle\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=0}^{l-1} \omega_{i,j} \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p} zx_i\,\theta^{n_i}|_p \leq 1, \end{aligned}$$

ce qui est impossible pour $z \neq 0$.

Mais alors, comme

$$\theta^N = -\textstyle\sum_{j=0}^{l-1} b_j\, \theta^{N+j-l},$$

on a, si $0 < |z|_p < \eta$, pour un certain indice i_0,

$$1 < |\operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(zx_{i_0}\,\theta^N)|_p \leq \max_{0 \leq j < l} |b_j|_p = c.$$

Cela est incompatible avec $\| H_p \operatorname{tr}_{\mathbf{Q}_p}(zx_{i_0}\,\theta^N) \| < 2\varepsilon$ dès que 2ε est inférieur à p^{-c} (Rappelons que $x_{i_0}\,\theta^N \in S$ puisque S est stable par multiplication.)

L'ensemble V_ε étant donc bien séparé, l'application du corollaire 5, chapitre I, achève la démonstration de la proposition.

De la proposition 1 et de la caractérisation des modèles de K donnée par le théorème 2, chapitre III, paragraphe 2, il résulte que l'ensemble S est contenu dans un $\mathbf{Z}(p^{-1})$-module libre de type fini, D, de dimension m. Il s'ensuit que le corps $\mathbf{Q}(s)$, engendré par S au-dessus de $\mathbf{Q}$, est une extension algébrique finie de $\mathbf{Q}$, de degré ν inférieur ou égal à m, d'après le lemme ci-après.

LEMME 1. — *Si X est une partie stable par multiplication d'une extension K d'un corps commutatif k, et si X est contenu dans un k-espace vectoriel E de dimension finie m, le corps $k(X)$ est contenu dans E.*

Soit donc k le corps $\mathbf{Q}(S)$. Le résultat principal s'énonce alors comme suit.

THÉORÈME 1. — *L'ensemble S est contenu dans le modèle standard défini par k dans K.*

Démonstration. — Soient $\sigma_1^p, \sigma_2^p, \ldots, \sigma_\nu^p$ les $\mathbf{Q}$-isomorphismes du corps k dans une clôture algébrique Ω_p de $\mathbf{Q}_p$. On suppose que $\sigma_1^p, \ldots, \sigma_n^p$ sont ceux qui se prolongent en $\mathbf{Q}_p$-isomorphismes de K dans Ω_p, autrement dit ceux qui définissent sur k la même place que celle induite par K.

Pour tout p' premier différent de p, et $p' = \infty$, soient $\sigma_1^{p'}, \ldots, \sigma_\nu^{p'}$ les $\mathbf{Q}$-isomorphismes de k dans une clôture algébrique $\Omega_{p'}$, $(\Omega_\infty = \mathbf{C})$, de $\mathbf{Q}_{p'}$ $(\mathbf{Q}_\infty = \mathbf{R})$.

Il nous faut alors montrer que

$$\forall \lambda \in S, \quad |\sigma_{n+1}^p(\lambda)|_p \leqq 1, \ldots, |\sigma_\nu^p(\lambda)|_p \leqq 1$$

et

$$\forall \lambda \in S, \quad \forall p' \neq p, \quad \forall i, 1 \leqq i \leqq \nu, \quad |\sigma_i^{p'}(\lambda)|_{p'} \leqq 1.$$

Mais pour tout p' (égal à p ou différent de p), les applications $\sigma_1^{p'}, \ldots, \sigma_\nu^{p'}$, qui sont $\mathbf{Q}$-linéaires sur k, sont indépendantes sur le corps $\Omega_{p'}$ et par conséquent, toute application $\mathbf{Q}$-linéaire de k dans $\Omega_{p'}$ est combinaison linéaire à coefficients dans $\Omega_{p'}$ des $\sigma_1^{p'}, \ldots, \sigma_\nu^{p'}$.

Nous nous appuierons alors sur le lemme suivant, dont nous réservons la démonstrations :

LEMME 2. — *Soit L une application $\mathbf{Q}$-linéaire de k dans $\Omega_{p'}$:*

$$L = a_1 \sigma_1^{p'} + \ldots + a_\nu \sigma_\nu^{p'},$$

bornée sur S. Si pour j, $1 \leqq j \leqq \nu$, on a $\sup_{y \in S} |\sigma_j^{p'}(y)|_{p'} > 1$, le coefficient a_j est nécessairement nul.

Terminons alors la démonstration du théorème 1. Dans le cas où S est fini, puisqu'il n'est constitué que de racines de l'unité (et de zéro éventuellement), il appartient certainement à l'ensemble standard défini par k dans K.

Reste le cas où S est infini et où il existe donc au moins un élément θ de S tel que, pour les isomorphismes $\sigma_1^p, \ldots, \sigma_n^p$, on ait

$$| \theta |_p = | \sigma_1^p (\theta) |_p = \ldots = | \sigma_n^p (\theta) |_p > 1.$$

D'après la proposition 1, S est contenu dans un modèle de K, donc dans un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel E de dimension $m \, (m \geqq \nu = [k : \mathbf{Q}])$, et on peut trouver :

(α) $m - n$ applications $\mathbf{Q}$-linéaires $L_1^p, \ldots, L_{m-n}^p$ de E dans $\mathbf{Q}_p$, bornées sur S, et n applications $\mathbf{Q}$-linéaires $L_{m-n+1}^p, \ldots, L_m^p$ de E dans $\mathbf{Q}_p$ pouvant se prolonger en applications $\mathbf{Q}_p$-linéaires de K dans $\mathbf{Q}_p$; les applications $L_1^p, \ldots, L_m^p$ étant indépendantes de K dans $\mathbf{Q}_p$. Les applications $L_1^p, \ldots, L_{m-n}^p$ induisent donc sur k des applications $\mathbf{Q}$-linéaires à valeurs dans $\mathbf{Q}_p$, formant un système de rang $\nu - n$.

(β) Pour tout p' différent de p, m applications $\mathbf{Q}$-linéaires de E dans $\mathbf{Q}_{p'}$, bornées sur S, et $\mathbf{C}$-indépendantes. Ces applications induisent sur k des applications $\mathbf{Q}$-linéaires à valeurs dans $\mathbf{Q}_{p'}$ formant un système de rang ν.

D'après le lemme 2, les applications $L_1^p, \ldots, L_{m-n}^p$ (qu'on peut considérer comme à valeurs dans Ω_p en plongeant $\mathbf{Q}_p$ dans Ω_p) s'expriment comme combinaison linéaire à coefficients dans Ω_p de ceux des isomorphismes $\sigma_{n+1}^p, \ldots, \sigma_\nu^p$ qui sont bornés par 1 sur S. (Les isomorphismes $\sigma_1^p, \ldots, \sigma_n^p$ n'interviennent pas puisqu'on sait déjà qu'ils ne sont pas bornés par 1 sur S.) Comme le rang du système $L_1^p, \ldots, L_{m-n}^p$ est $\nu - n$, cela entraîne que $\nu - n$ des isomorphismes $\sigma_{n+1}^p, \ldots, \sigma_\nu^p$, c'est-à-dire tous, sont bornés par 1 sur S.

De même, les applications $L_1^{p'}, \ldots, L_m^{p'}$ s'expriment comme une combinaison linéaire à coefficients dans $\Omega_{p'}$ de ceux des isomorphismes $\sigma_1^{p'}, \ldots, \sigma_\nu^{p'}$ qui sont bornés par 1 sur S, c'est-à-dire de tous, puisque le système $L_1^{p'}, \ldots, L_n^{p'}$ est de rang ν. Et cela pour tout $p' \neq p$.

Cela achève la démonstration du théorème, modulo la démonstration du lemme 2 que nous donnons maintenant :

La démonstration du lemme 2 *se fait en deux parties :*

(a) Soit L bornée sur S à valeurs dans $\Omega_{p'}$ et soit $y \in S$. Montrons que, pour tout indice j_0 tel que $| \sigma_{j_0}^{p'} (y) |_p > 1$, la somme $\sum_{j \in J_0} a_j$ des coefficients de L, étendue à l'ensemble J_0 des indices tels que $\sigma_j^{p'} (y) = \sigma_{j_0}^{p'} (y)$, est nulle.

Regroupant les conjugués $\sigma_j^{p'} (y)$ égaux entre eux, on écrit, pour tout exposant α entier,

$$L (y^\alpha) = \left(\Sigma_{\sigma_j^{p'}(y) = \sigma_{j_1}^{p'}(y)} a_j\right) (\sigma_{j_1}^{p'} (y))^\alpha + \ldots + \left(\Sigma_{\sigma_j^{p'}(y) = \sigma_{j_s}^{p'}(y)} a_j\right) (\sigma_{j_s}^{p'} (y))^\alpha.$$

Soit, en simplifiant l'écriture ($\sigma_{j_1}^{p'}(y) = \rho_1$, etc.),

$$L(y^\alpha) = b_1 \rho_1^\alpha + \ldots + b_s \rho_s^\alpha.$$

On peut aussi supposer que $|\rho_1|_{p'} \geqq |\rho_2|_{p'} \geqq \ldots \geqq |\rho_s|_{p'}$. Il faut alors montrer que, si $|\rho_1|_{p'} > 1$, alors b_1 est nul, et ainsi de suite pour $\rho_2, \ldots$, jusqu'à épuisement, sinon du lecteur, du moins des ρ_i supérieurs à 1 en valeur absolue p'-adique.

Si $|\rho_1|_{p'} > 1$, il vient, en divisant par ρ_1^α,

$$b_1 + b_2 \frac{\rho_2^\alpha}{\rho_1^\alpha} + \ldots + b_s \frac{\rho_s^\alpha}{\rho_1^\alpha} \xrightarrow[\alpha \to \infty]{} 0 \quad \text{dans } \Omega_{p'}.$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc dès que α est assez grand :

$$b_1 + b_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\alpha + \ldots + b_s \left(\frac{\rho_s}{\rho_1}\right)^\alpha = \varepsilon_1, \qquad |\varepsilon_1|_p < \varepsilon,$$

$$b_1 + b_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\alpha \frac{\rho_2}{\rho_1} + \ldots + b_s \left(\frac{\rho_s}{\rho_1}\right)^\alpha \frac{\rho_s}{\rho_1} = \varepsilon_2, \qquad |\varepsilon_2|_{p'} < \varepsilon,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$b_1 + b_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^\alpha \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{s-1} + \ldots + b_s \left(\frac{\rho_s}{\rho_1}\right)^\alpha \left(\frac{\rho_s}{\rho_1}\right)^{s-1} = \varepsilon_s, \qquad |\varepsilon_s|_{p'} < \varepsilon.$$

En résolvant le système linéaire en b_1, $b_2 (\rho_2/\rho_1)^\alpha, \ldots, b_s (\rho_s/\rho_1)^\alpha$, on obtient $|b_1|_{p'} \leqq C\varepsilon$, où C ne dépend que de $\rho_1, \ldots, \rho_s$.

Donc $b_1 = 0$, et ainsi de suite pour tous les b_j associés à des ρ_j vérifiant $|\rho_j|_{p'} > 1$.

(*b*) Reprenant les hypothèses du lemme, supposons que, pour $x \in S$, $|\sigma_j(x)|_{p'} > 1$. Alors, pour tout y dans S, on peut appliquer le résultat de la partie (*a*) de la démonstration à l'application $\mathbf{Q}$-linéaire de k dans Ω_p, définie par

$$x \mapsto L_y(x) = L(xy) = \sum a_i \sigma_i^{p'}(y) \sigma_i^{p'}(x).$$

Pour l'ensemble $j_1, \ldots, j_s$ d'indices pour lesquels

$$\sigma_{j_i}^{p'}(x) = \ldots = \sigma_{j_s}^{p'}(x) = \sigma_j^{p'}(x),$$

on a

$$\sum_{i=1}^s a_{j_i} \sigma_{j_i}^{p'}(y) = 0, \quad \text{pour tout } y \text{ de } S.$$

Mais alors l'application $\mathbf{Q}$-linéaire de k dans $\Omega_{p'}$ définie par

$$y \mapsto \sum_{i=1}^s a_{j_i} \sigma_{j_i}^{p'}(y)$$

est nulle sur S, donc nulle sur k qui est $\mathbf{Q}$-linéairement engendré par S. Les applications $\sigma_{j_i}^{p'}$ étant indépendantes, il s'ensuit que $a_{j_i} = 0$ pour tout i, $1 \leqq i \leqq s$, ce qui achève bien la démonstration du lemme 2.

Remarque. — Supposons que S soit une partie harmonieuse stable par multiplication de l'extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, qui n'engendre pas nécessairement K $\mathbf{Q}_p$-linéairement. Soit K' le plus petit sous-corps fermé de K contenant S; K' est, lui, engendré $\mathbf{Q}_p$-linéairement par S d'après le lemme 1. Donc le théorème 1 s'applique à S et K'.

COROLLAIRE 1. — *Tout ensemble harmonieux stable par multiplication d'une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$ est contenu dans un modèle standard défini dans un sous-corps fermé de K.*

2. Application aux nombres de Pisot-Salem-Chabauty de K

Supposons que l'ensemble S considéré au paragraphe 1 soit de la forme particulière $S = \{ \theta^n \}_{n \geq 0}$, où $\theta \in K$. Le corollaire nous permet d'affirmer que S est harmonieux si, et seulement si, θ appartient à un modèle standard d'un sous-corps fermé de K. Par définition même, cela signifie que si $| \theta |_p > 1$, θ est un nombre de Pisot-Salem-Chabauty de K, ce qui nous permet d'énoncer (cf. [9] pour une autre démonstration de ce résultat) un nouveau corollaire.

COROLLAIRE 2. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $\{ \theta^n \}_{n \geq 0}$ soit harmonieux dans l'extension finie K de $\mathbf{Q}_p$ est que θ soit, ou bien* 0, *ou bien une racine de l'unité, ou bien un nombre de Pisot-Salem-Chabauty de K.*

Plus loin, nous aurons à nous intéresser à des ensembles du type $T = \{ \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k \}$, où les ε_k forment une suite finie de 0 ou de 1. Bien que T ne soit plus stable par multiplication, les méthodes du n° 1 permettent de dire, pour quelles valeurs de θ, T est un ensemble harmonieux de K.

COROLLAIRE 3. — *Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $T = \{ \sum_{k \geq 0} \varepsilon_k \theta^k \}$ de K ($\varepsilon_k = 0$ ou 1 en nombre fini) soit harmonieux est que θ soit nul, ou soit un nombre de Pisot-Chabauty de K.*

Rappelons que θ est un nombre de Pisot-Chabauty de K si c'est un nombre de Pisot-Salem-Chabauty et si, pour les isomorphismes σ_j^∞ du corps $\mathbf{Q}(\theta)$ dans $\mathbf{C}$, on a $| \sigma_j^\infty (\theta) |_\infty < 1$.

Condition nécessaire. — Puisque $\{ \theta^n \}_{n \geq 0} \subset T$, il est déjà nécessaire que θ soit un nombre de Pisot-Salem-Chabauty d'après le corollaire 2 précédent. D'autre part, si on reprend la démonstration du théorème 1 avec ses notations, on voit que T est contenu dans un modèle (d'après le corollaire 5, chapitre I), et donc qu'il existe m applications $\mathbf{C}$-linéaires à valeurs $\mathbf{R}$, définies sur un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel contenant T, P-indépendantes, et bornées sur T : $L_1^\infty, \ldots, L_m^\infty$. On a aussi que le degré ν de θ sur $\mathbf{Q}$ est inférieur ou égal à m. On peut donc exprimer chacun des $\mathbf{Q}$-isomorphismes de $\mathbf{Q}(\theta)$ dans $\mathbf{C}$, $\sigma_1^\infty, \ldots, \sigma_\nu^\infty$ comme combinaison linéaire à coefficients complexes dans L_i^∞ :

$$\text{pour } 1 \leqq j \leqq \nu : \quad \sigma_j^\infty = \Sigma_{i=1}^m a_{ij} L_i^\infty.$$

Il en résulte que les σ_j^∞ doivent être bornés sur T, et comme

$$\sigma_j^\infty (\Sigma_{k \geqq 0} \varepsilon_k \theta^k) = \Sigma_{k \geqq 0} \varepsilon_k (\sigma_j^\infty (\theta))^k,$$

on a nécessairement $|\sigma_j^\infty (\theta)|_\infty < 1$.

Condition suffisante. — Si θ est un nombre de Pisot-Chabauty, l'ensemble T est contenu dans le modèle standard défini par le corps $\mathbf{Q}(\theta)$ dans le sous-corps fermé $\mathbf{Q}_p(\theta)$ de K. Donc T est harmonieux.

3. Ensembles harmonieux stables par multiplication, maximaux pour l'inclusion

Soit K un corps p-adique. Nous allons montrer le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Les ensembles harmonieux stables par multiplication de K, maximaux pour l'inclusion, sont les modèles standards de K.*

A la lumière des résultats du paragraphe 1, il y a deux choses à montrer :

(*a*) *Si K_1 est un sous-corps strict, fermé, de K, un modèle standard de K_1 est contenu dans un modèle standard de K.*

En effet, soit S_1 un modèle standard de K_1, et soit $k_1 = \mathbf{Q}(S_1)$ qui est donc un sous-corps dense de K_1. Par hypothèse, K est une extension de degré supérieur à 1 du corps K_1 : soit $x \in K$ un élément primitif de cette extension, et soit $k = k_1(x)$.

On a

$$[k : k_1] = [K : K_1].$$

Le corps k est dense dans K. Soit S le modèle standard défini par k dans K : montrons que $S_1 \subset S$. Il suffit pour cela de voir que si ν est une place de k qui coïncide sur k_1 avec la place définie par K, elle coïncide sur k avec la place définie par K : cela résulte de ce qu'il n'y a qu'une seule place sur $K_1(x)$ prolongeant la place donnée sur K_1, puisque K_1 est complet pour cette place.

(*b*) *Si S_1 est un modèle standard de K, et S un modèle standard de K contenant S_1, alors $S = S_1$.*

Soient $k = \mathbf{Q}(S)$, $k_1 = \mathbf{Q}(S_1)$, et supposons que K est plongé dans une clôture algébrique Ω_p de $\mathbf{Q}_p$. Si k était strictement plus grand que k_1, il existerait un isomorphisme de k dans Ω_p différent de l'identidé, et laissant k_1 invariant. Un tel isomorphisme définit sur k une place v' qui coïncide sur k_1 avec la place définie par K, mais qui ne coïncide pas avec cette place sur k (sinon ce serait une isométrie qui laisserait k_1 invariant, et donc aussi K puisque k_1 est dense dans K).

Pour un élément θ de S_1, appartenant à la classe $S_p(K)$, on aurait $|\theta|_{v'} \leq 1$, et θ ne peut pas appartenir au modèle standard S défini par k, ce qui est contradictoire avec $S_1 \subset S$.

Cela détermine donc la démonstration du théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] Bertrandias (Fr.). — Ensembles remarquables d'adèles algébriques, *Bull. Soc. math. France*, Mémoire n° 4, 1965 (*Thèse Sc. math. Paris*, 1965).

[2] Bohr (H.). — *Almost periodic functions.* — New York, Chelsea publ. Comp., 1951.

[3] Bruhat (F.). — Distributions sur un groupe localement compact..., *Bull. Soc. math. France*, t. 89, 1961, p. 43-75.

[4] Chabauty (C.). — Sur la répartition modulo 1 de certaines suites p-adiques, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 231, 1950, p. 465-466.

[5] Decomps-Guilloux (A.). — *Généralisation des nombres de Salem aux adèles, Thèse Sc. math. Paris*, 1967.

[6] Hewitt (E.) et Ross (K.). — *Abstract harmonic analysis*, vol. 1. — Berlin, Springer-Verlag, 1963 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 115).

[7] Meyer (Y.). — *Nombres de Pisot, nombres de Salem et analyse harmonique.* Cours Peccot, 1969. — Berlin, Springer-Verlag, 1970 (*Lectures Notes in Mathematics*, 117).

[8] Meyer (Y.). — *Algebraic numbers and harmonic analysis.* — Amsterdam, North-Holland publ. Co., 1972.

[9] Schreiber (J.-P.). — Sur les nombres de Pisot-Salem-Chabauty des extensions algébriques de Q_p, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 269, série A, 1969, p. 71-73.

[10] Schreiber (J.-P.). — Un ensemble remarquable du point de vue de l'analyse de Fourier sur Q_p, *Colloquium Math.*, Warszawa, t. 23, 1971, p. 125-132.

[11] Schreiber (J.-P.). — *Approximations diophantiennes et problèmes additifs dans les groupes abéliens localement compacts, Thèse Sc. math. Orsay*, 1972 (Publ. math. Fac. Sc. Orsay, n° 5).

[12] Manin (Ju.). — The Tate height of points on abelian variety, *Amer. math. Soc. Transl.*, series 2, t. 59, 1966, p. 82-110.

[13] Rudin (W.). — *Fourier analysis on groups.* — New York, Intersciences publ. comp., 1962 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 12).

[14] Weil (A.). — *Basic numbers theory.* — Berlin, Springer-Verlag, 1967 (*Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 144).

(Texte reçu le 25 mars 1973.)

Jean-Pierre Schreiber,
U. E. R. Sciences fondamentales
et appliquées,
Département de mathématiques,
Université d'Orléans,
45045 Orléans-Cedex.