BULLETIN DE LA S. M. F.

TON-THAT LONG

Contributions à l'étude spectrale des contractions de l'espace de Hilbert

Bulletin de la S. M. F., tome 101 (1973), p. 219-235
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1973__101__219_0>

Bull. soc. math. France,
101, 1973, p. 219-235.

CONTRIBUTIONS A L'ÉTUDE SPECTRALE DES CONTRACTIONS DE L'ESPACE DE HILBERT

PAR

TÔN-THÃT LONG (*)

RÉSUMÉ. — On démontre d'abord que toute contraction dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ admet un, et un seul, prolongement $T_0 \oplus T_i$ de type $C_{0.} \oplus i$ (sur un espace de la forme $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_i$) et vérifiant les conditions de minimalité suivantes :

$$\overline{\mathfrak{P}_{\mathcal{H}_0}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathfrak{P}_{\mathcal{H}_i}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_i.$$

On établit ensuite des correspondances entre les spectres d'une contraction donnée et du prolongement associé, ce qui permet d'améliorer certains résultats de Sz.-NAGY et de C. FOIAŞ sur l'étude des parties résiduelles, de la similitude et des commutants des contractions. On donne aussi des conditions pour que l'existence d'une valeur propre de T^* dans le disque ouvert $D = \{ z : |z| < 1 \}$ implique que tous les autres points de D soient aussi des valeurs propres de T^*. On montre alors l'existence de liaisons entre les vecteurs propres ainsi associés et, en particulier, l'existence de fonctions analytiques $h(z)$ dans D, à valeurs dans $\mathcal{H}$, telles que

$$T^* h(z) = zh(z), \qquad h(z) \neq 0 \quad \text{pour tout } z \in D.$$

Introduction

Nous citons d'abord ici une direction de recherche sur les opérateurs dans l'espace de Hilbert qui a été commencé avec le théorème des dilatations unitaires de Sz.-NAGY (1953), qui affirme que, si T est une contraction dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, il existe un opérateur unitaire U dans un espace de Hilbert H contenant $\mathcal{H}$ comme sous-espace fermé tel que

$$T^n \mathfrak{P}_{\mathcal{H}} = \mathfrak{P}_{\mathcal{H}} U^n \mathfrak{P}_{\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } n \in N.$$

(*) Équipe de recherche nº 1 : « Processus stochastiques et applications », associé au C. N. R. S.

Cet outil, la dilatation unitaire, a été utilisé notamment par Sz.-NAGY et C. FOIAŞ pour résoudre un certain nombre de problèmes sur les contractions.

Ce travail a pour but d'apporter quelques contributions à la suite des résultats obtenus par ces deux auteurs, et est inspiré de leurs études sur les contractions. Nous supposons donc connus, dans la suite, certains de leurs résultats (et surtout ceux des premiers chapitres du livre *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert* [1]).

Nous avons à considérer dans ce travail les deux problèmes principaux suivants :

(*a*) Le premier concerne l'*étude des spectres ponctuels et des parties résiduelles* qui jouent un rôle essentiel dans l'ensemble des travaux de Sz.-NAGY et de C. FOIAŞ et qui interviennent dans presque tous les problèmes étudiés.

En liaison avec le problème de similitude des contractions, Sz.-NAGY et C. FOIAŞ ont donné une condition suffisante pour que T vérifie une relation de la forme

$$\overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{R}_*}(\mathfrak{H})} = \mathcal{R}_*,$$

où, par exemple, $\mathcal{R}_*$ est la partie résiduelle duale de U. Nous complétons ici ce résultat en indiquant que la condition données par Sz.-NAGY et C. FOIAŞ n'est pas nécessaire et en donnant une caractérisation complète de toutes les contractions vérifiant la relation considérée. On étudie aussi certaines propriétés spectrales des contractions qui ne vérifient pas la condition $\overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{R}_*}(\mathfrak{H})} = \mathcal{R}_*$. Les résultats obtenus seront aussi utilisés pour compléter un autre résultat de Sz.-NAGY et C. FOIAŞ sur les commutants des contractions.

(*b*) Nous considérons aussi le problème de l'*étude des prolongements des opérateurs*. Ce problème est important dans la mesure où il est, dans ce travail, l'outil essentiel pour les solutions des problèmes considérés dans (*a*), et aussi parce qu'il peut être utilisé, à la place des dilatations unitaires, pour d'autres problèmes sur les contractions. On va montrer notamment, pour toute contraction, l'existence et l'unicité des prolongements minimaux de type $C_{0.} \oplus i$ (c'est-à-dire somme directe d'une contraction de classe $C_{0.}$ et d'un opérateur isométrique). Ce résultat est aussi comparable avec le théorème de Sz.-NAGY sur les dilatations unitaires, et est ici l'outil essentiel de nos résultats. L'étude approfondie des prolongements de type $C_{0.} \oplus i$ est l'objet du dernier paragraphe.

Pour terminer cette introduction, il me reste à présenter ici mes remerciements à M. le Professeur Béla Sz.-NAGY qui m'a aidé à comprendre les points essentiels de l'étude des opérateurs de l'espace de Hilbert dès le début de notre travail. Ses conseils ainsi que les discussions que nous avons eues au Congrès de Nice (1970) ont abouti à la forme de cette rédaction.

1. Étude des spectres ponctuels des contractions. Résultats principaux

Rappelons d'abord que si U est la dilatation unitaire minimale (unique) de la contraction T, alors $\mathcal{L} = \overline{(U - T)\,\mathcal{H}}$ est un sous-espace ambulant pour U et

$$\mathcal{R}_* = H \ominus (\oplus_{n \in Z}\, U^n\, \mathcal{L})$$

est appelé l'espace résiduel dual de U.

Pour caractériser toutes les contractions, vérifiant une relation de la forme

$$\overline{\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{H})} = \mathcal{R}_*,$$

la restriction T_i de U à l'espace $\mathcal{H}_i = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{H})}$ sera utile dans la suite. On a en effet le théorème suivant :

1.1. Théorème. — *Les cinq conditions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\overline{\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{H})} = \mathcal{R}_*$;

(2) T_i *est unitaire;*

(3) T^* *n'a pas de vecteurs propres non nuls appartenant à la variété* $A_i^{1/2}\,\mathcal{H}$ *et correspondant à des valeurs propres appartenant au disque unité ouvert* $D = \{ z : | z | < 1 \}$. *De façon équivalente, on a*

$\forall\ h \in A_i^{1/2}\mathcal{H}$, $\quad h \neq 0$ *et* $\ \forall\ a \in D$, *on a nécessairement* $T^*\, h \neq ah$;

(4) a' *étant un point fixé du disque* D *alors :*

Pour $h \in A_i^{1/2}\,\mathcal{H}$ *et* $h \neq 0$, *on a nécessairement* $T^*\, h \neq a'\, h$;

(5) T *vérifie la condition :* $\overline{A_i^{1/2}\,\mathcal{H}} = \overline{A_i^{1/2}\, T\, \mathcal{H}}$, A_i *étant la transformation autoadjointe donnée par* $A_i = \lim_{n \to \infty} T^{*n}\, T^n$.

Le théorème suivant améliore un récent résultat de Sz.-Nagy et C. Foiaş sur l'étude des commutants des opérateurs.

1.2. Théorème. — *On suppose que* T *vérifie les trois conditions suivantes :*

(1) T *est une contraction de classe* $C_{1.}$;

(2) *Les conditions du théorème* 1.1 *sont vérifiées;*

(3) T *a un vecteur cyclique;*

alors T^* *a aussi un vecteur cyclique et le commutant de* T^* *est commutatif.*

Si de plus h *est un vecteur cyclique pour* T, *alors*

$$h' = \lim_{n \to \infty} T^{*n}\, T^n\, h = A_i\, h$$

sera un vecteur cyclique pour T^*.

On note que ce résultat a été obtenu par SZ.-NAGY et C. FOIAŞ dans le cas particulier où la condition (2) est remplacée par la condition suivante :

(2′) *Il existe un point du disque D qui n'est pas une valeur propre de T^*.*

Le cas opposé des contractions vérifiant les conditions du théorème 1.1 mérite des attentions. C'est l'objet du théorème suivant :

1.3. THÉORÈME. — *Si l'une des conditions citées dans le théorème* 1.1 *n'est pas vérifiée, alors tout point du disque D est une valeur propre de T^*, et il existe des fonctions analytiques $h(z)$ dans D à valeurs dans $\mathcal{H}$ (ou même dans la variété $A_i^{1/2}\mathcal{H}$) telles que*

$$T^* h(z) = zh(z) \qquad et \qquad h(z) \neq 0 \quad pour\ tout\ z \in D.$$

La démonstration de ce théorème, comme nous allons le voir dans le troisième paragraphe, donne encore d'autres relations de dépendance entre les vecteurs propres ainsi associés.

La clef de ces résultats est le théorème suivant, qui établit une certaine propriété de réciprocité entre le spectre ponctuel de T* et celui de T_i^*.

1.4. THÉORÈME. — *Si a est une valeur propre de T_i^*, alors a est une valeur propre de T^*. De plus, à chaque vecteur propre h_i* de *T_i^*, on peut associer un vecteur propre h' de T^* correspondant à la même valeur propre de telle sorte que la correspondance $h_i \mapsto h'$ soit linéaire, et*

$$\| h' \| \leq \| h_i \|, \qquad h' \in A_i^{1/2}\mathcal{H} \qquad et \qquad h' \neq 0 \quad si\ h_i \neq 0.$$

Réciproquement, si a est une valeur propre de T^* et si, pour cette valeur propre, T^* admet des vecteurs propres non nuls, h' appartenant à la variété $A_i^{1/2}\mathcal{H}$, alors a est aussi une valeur propre de T_i^* et, à un tel vecteur propre h' de T^*, on peut associer un vecteur propre h_i de T_i^* correspondant à la même valeur propre de telle sorte que la correspondance $h' \mapsto h_i$ soit linéaire, $\| h' \| \leq \| h_i \|$ et, par suite, $h_i \neq 0$.

Pour terminer le paragraphe, comme $A_i^{1/2}$ est une transformation autoadjointe, on note que $A_i^{1/2}\mathcal{H} = A_i^{1/2}(\overline{A_i^{1/2}\mathcal{H}})$, et c'est cette nouvelle forme $A_i^{1/2}(\overline{A_i^{1/2}\mathcal{H}})$ de la variété $A_i^{1/2}\mathcal{H}$ qui sera utilisée dans la suite pour la démonstration de ces résultats.

2. Quelques résultats préliminaires

Cette partie est consacrée à la démonstration de certaines propositions additionnelles qui servent à démontrer les résultats du paragraphe précédent.

Le but principal est de démontrer que l'espace résiduel dual $\mathcal{R}_*$ de U est égale à l'espace sur lequel la dilatation unitaire minimale de T_i est définie. Pour cela, nous allons introduire dans la proposition 2.2 un certain prolongement de la contraction T.

Notons d'abord que, pour tout $h \in \mathcal{H}$, la suite $(U^{-n} T^n h)_{n \in N}$ converge dans H, et on a

$$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}(h) = \lim_{n \to \infty} U^{-n} T^n h \quad \text{([1], proposition II.3.1).}$$

Pour $h \in \mathcal{H}$, posons maintenant

$$h_i = \lim_{n \to \infty} U^{-n} T^n h = \mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}(h)$$

et

$$h_0 = h - h_i = h - \lim_{n \to \infty} U^{-n} T^n h,$$

et soit $\mathcal{H}_0$ le sous-espace fermé engendré par les éléments $h_0 = h - h_i$, où $h \in \mathcal{H}$.

On note d'abord que $T_i h_i = (T h)_i$ ou même $T_i^n h_i = (T^n h)_i$ pour tout $h \in \mathcal{H}$ et tout $n \in N$. En effet

$$\begin{aligned} T_i^n h_i = U^n h_i &= U^n (\lim_{p \to \infty} U^{-p} T^p h) \\ &= \lim_{p \to \infty} U^{-p+n} T^p h = \lim_{p \to \infty} U^{-p} T^p (T^n h) = (T^n h)_i. \end{aligned}$$

2.1 Lemme. — *$H_0 = \bigvee_{n \in Z} U^n \mathcal{H}_0$ et $H_i = \bigvee_{n \in Z} U^n \mathcal{H}_i$ sont deux sous-espaces orthogonaux de H (la notation $\bigvee$ désigne le « sous-espace fermé engendré par »...).*

En particulier, $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_i$ sont orthogonaux dans H.

Démonstration. — Il suffit de démontrer que

$$\langle U^n h_0, U^m k_i \rangle = 0 \quad \text{pour tout } h_0 \in \mathcal{H}_0,\ k_i \in \mathcal{H}_i \text{ et } m, n \in Z,$$

ou seulement

$$\langle U^n h_0, k_i \rangle = 0 \quad \text{pour tout } h, k \in \mathcal{H} \text{ et tout } n \in Z.$$

Or si $n \geqq 0$, on a

$$\begin{aligned} \langle U^n h_0, k_i \rangle &= \langle U^n (h - \lim_{p \to \infty} U^{-p} T^p h), \lim_{p \to \infty} U^{-p} T^p k \rangle \\ &= \lim_{p \to \infty} (\langle U^{n+p} h, T^p k \rangle - \langle U^n T^p h, T^p k \rangle) \\ &= \lim_{p \to \infty} (\langle T^{n+p} h, T^p k \rangle - \langle T^n T^p h, T^p k \rangle) = 0. \end{aligned}$$

Si $n < 0$ et si p est assez grand (pour que $p + n \geqq 0$), on a

$$\begin{aligned} &\langle U^n h_0, k_i \rangle \\ &= \lim_{p \to \infty} \langle U^n (h - \lim_{p \to \infty} U^{-p} T^p h), U^{-p} T^p k \rangle \\ &= \lim_{p \to \infty} (\langle U^{n+p} h, T^p k \rangle - \langle U^n T^p h, T^p k \rangle) \\ &= \lim_{p \to \infty} (\langle U^{n+p} h, T^p k \rangle - \langle T^p h, U^{-n} T^p k \rangle) \\ &= \lim_{p \to \infty} \langle U^{n+p} h, T^p k \rangle - \lim_{p \to \infty} \langle T^p h, U^{-n} T^p k \rangle \\ &= \lim_{p \to \infty} \langle U^{n+p} h, T^p k \rangle - \lim_{p \to \infty, p+n > 0} \langle T^{p+n} h, U^{-n} T^{p+n} k \rangle \\ &= \lim_{p \to \infty, p+n > 0} (\langle T^{p+n} h, T^p k \rangle - \langle T^{p+n} h, T^{-n} T^{p+n} k \rangle) \\ &= \lim_{p \to \infty, p+n > 0} (\langle T^{p+n} h, T^p k \rangle - \langle T^{p+n} h, T^{-n+p+n} k \rangle) = 0. \end{aligned}$$

2.2. Proposition. — *La correspondance* $h_0 \mapsto (T\,h)_0$ *(définie pour tout* $h \in \mathcal{H}$*) se prolonge de façon unique en une contraction* T_0 *de classe* $C_{0.}$ *dans* $\mathcal{H}_0$ *et* $T_0 \oplus T_i$ *est un prolongement de type* $C_{0.} \oplus i$ *de* T *vérifiant la condition de minimalité suivante :*

$$\overline{\mathfrak{P}_{\mathcal{H}_0}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_0 \qquad et \qquad \overline{\mathfrak{P}_{\mathcal{H}_i}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_i.$$

Démonstration. — Soit $h \in \mathcal{H}$, et posons $T_0\,h_0 = (T\,h)_0$, on a d'abord :

$$\begin{aligned}\|T_0\,h_0\|^2 &= \|T\,h\|^2 - \|(T\,h)_i\|^2 \\ &= \|T\,h\|^2 - \|T_i\,h_i\|^2 \leq \|h\|^2 - \|h_i\|^2 = \|h_0\|^2,\end{aligned}$$

et comme l'ensemble des éléments $h_0 = h - \lim_{p\to\infty} U^{-p}\,T^p\,h$ est dense dans $\mathcal{H}_0$, l'opérateur T_0 se prolonge alors de façon unique en une contraction dans $\mathcal{H}_0$.

D'autre part, pour $h \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|T_0^n\,h_0\|^2 &= \lim_{n\to\infty}(\|T^n\,h\|^2 - \|T_i^n\,h_i\|^2) \\ &= \lim_{n\to\infty}(\|T^n\,h\|^2 - \|h_i\|^2) \\ &= \lim_{n\to\infty}\|U^{-n}\,T^n\,h\|^2 - \|h_i\|^2 \\ &= \|\lim_{n\to\infty} U^{-n}\,T^n\,h\|^2 - \|h_i\|^2 = \|h_i\|^2 - \|h_i\|^2 = 0\end{aligned}$$

et comme les éléments de la forme

$$h_0 = h - \lim_{p\to\infty} U^{-p}\,T^p\,h,$$

où $h \in \mathcal{H}$ sont denses dans $\mathcal{H}_0$, la contraction T_0 est aussi de classe $C_{0.}$.

D'après la définition de $\mathcal{H}_i$ et de $\mathcal{H}_0$, et d'après le lemme 2.1, l'espace initial $\mathcal{H}$ est bien un sous-espace de $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_i$, et les définitions de T_0 et de T_i nous donnent enfin :

$$(T_0 \oplus T_i)\,h = (T_0 \oplus T_i)\,(h_0 \oplus h_i) = T_0\,h_0 \oplus T_i\,h_i = (T\,h)_0 \oplus (T\,h)_i = T\,h.$$

La condition de minimalité du prolongement $T_0 \oplus T_i$ ainsi obtenu de T résulte de la construction même de $\mathcal{H}_0$ et de $\mathcal{H}_i$. La proposition est donc démontrée.

2.3. Lemme. — *On a* $H = H_0 \oplus H_i$*, et* U *est aussi la dilatation unitaire minimale de l'opérateur* $T_0 \oplus T_i$.

Démonstration. — Il est clair que la restriction U_i de U à H_i est la dilatation unitaire minimale de T_i. Montrons maintenant que U est une dilatation unitaire de T_0. Soient alors $h, k \in \mathcal{H}$ et $n \in N$, on a

$$\begin{aligned}&\langle \mathfrak{P}_{\mathcal{H}_0}(U^n\,h_0 - T_0^n\,h_0), k_0 \rangle \\ &\quad = \langle U^n\,h_0 - T_0^n\,h_0, k_0 \rangle = \langle U^n\,h - T^n\,h, k - \lim_{p\to\infty} U^{-p}\,T^p\,k \rangle \\ &\quad = \langle U^n\,h, k \rangle - \langle T^n\,h, k \rangle \\ &\qquad - \lim_{p\to\infty}(\langle U^{n+p}\,h, T^p\,k \rangle - \langle U^p\,T^n\,h, T^p\,k \rangle) \\ &\quad = \langle T^n\,h, k \rangle - \langle T^n\,h, k \rangle \\ &\qquad\qquad - \lim_{p\to\infty}(\langle T^{n+p}\,h, T^p\,k \rangle - \langle T^p\,T^n\,h, T^p\,k \rangle) = 0.\end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\mathcal{P}_{\mathcal{H}_0}(U^n h_0 - T_0^n h_0) = 0$$

ou

$$T_0^n h_0 = \mathcal{P}_{\mathcal{H}_0} U^n h_0 \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{H} \text{ et } n \in N.$$

Par prolongement, cette dernière relation est encore valable pour tout $h_0 \in \mathcal{H}_0$, et U est une dilatation unitaire de T_0. La restriction U_0 de U à H_0 sera alors la dilatation unitaire minimale de T_0, et le lemme 2.1 prouve maintenant que U est une dilatation unitaire de $T_0 \oplus T_i$.

Montrons aussi que $U_0 \oplus U_i$ est une dilatation unitaire de T. En effet, pour tout $h \in \mathcal{H}$ et $n \in N$, on a

$$\begin{aligned} T^n h &= \mathcal{P}_{\mathcal{H}} U^n h = \mathcal{P}_{\mathcal{H}} U^n (h_0 \oplus h_i) = \mathcal{P}_{\mathcal{H}} (U^n h_0 \oplus U^n h_i) \\ &= \mathcal{P}_{\mathcal{H}} (U_0^n h_0 \oplus U_i^n h_i) = \mathcal{P}_{\mathcal{H}} (U_0 \oplus U_i)^n (h_0 \oplus h_i) = \mathcal{P}_{\mathcal{H}} (U_0 \oplus U_i)^n h. \end{aligned}$$

L'inclusion $U_0 \oplus U_i \subseteq U$ est évidente, et la condition de minimalité de la dilatation U de T montre alors que $U = U_0 \oplus U_i$. Le lemme est donc démontré.

2.4. Proposition. — *L'espace résiduel dual $\mathcal{R}_*$ de U coincide avec l'espace H_i sur lequel la dilatation unitaire minimale U_i de T_i est définie.*

Démonstration. — D'après le lemme précédent, on a $H_i = H \ominus H_0$. Comme $\mathcal{R}_* = H \ominus (\oplus_{n \in Z} U^n \mathcal{L})$, il nous reste à montrer que $H_0 = \oplus_{n \in Z} U^n \mathcal{L}$. Or T_0 est une contraction de classe $C_{0.}$, on a aussi

$$H_0 = \oplus_{n \in Z} U_0^n \mathcal{L}_0 = \oplus_{n \in Z} U^n \mathcal{L}_0 \qquad \text{où} \quad \mathcal{L}_0 = \overline{(U_0 - T_0)\mathcal{H}_0},$$

et il suffit de démontrer que $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0$. Pour cela, on note que, pour tout $h \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} (U - T) h &= (U_0 \oplus U_i - T_0 \oplus T_i)(h_0 \oplus h_i) \\ &= (U_0 - T_0) h_0 + (U_i - T_i) h_i = (U_0 - T_0) h_0, \end{aligned}$$

et comme les éléments de la forme $h_0 = h - \lim_{n \to \infty} U^{-n} T^n h$, où $h \in \mathcal{H}$ sont denses dans $\mathcal{H}_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 &= \{ \overline{(U_0 - T_0) h_0 : h_0 \in \mathcal{H}_0} \} \\ &= \{ \overline{(U_0 - T_0) h_0 : h_0 = h - \lim_{n \to \infty} U^{-n} T^n h \text{ et } h \in \mathcal{H}} \} \\ &= \{ \overline{(U - T) h : h \in \mathcal{H}} \} = \mathcal{L}. \end{aligned}$$

La proposition est donc démontrée.

La proposition suivante donne une propriété des valeurs propres de T situées sur le cercle unité.

2.5. Proposition. — Si *a est une valeur propre de module* 1 *de T, alors a est une valeur propre de T_i. Réciproquement, toutes les valeurs propres de T_i sont des valeurs propres de T.*

Démonstration. — En effet, si $T h = ah$, $|a| = 1$ et $h \neq 0$, alors :

$$\| \mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}(h) \| = \lim_{n \to \infty} \| T^n h \| = \| h \|,$$

donc $h_i = \mathcal{P}_{\mathcal{R}_*}(h) = h$ (puisque, si une projection orthogonale ne diminue pas la norme de h, elle laisse h invariant), et par suite :

$$T_i h = T_i h_i = (T h)_i = ah_i = ah.$$

Réciproquement, si $T_i h_i = ah_i$ avec $h_i \neq 0$, alors $U h_i = ah_i$, donc $|a| = 1$, $h_i \in \mathcal{H}$ et $T h_i = \mathcal{P}_{\mathcal{H}} U h_i = ah_i$ (*voir* [1], proposition II.6.1).

Pour terminer le paragraphe, on note que l'isométrie T_i contient la partie unitaire de T.

3. Démonstration des résultats du premier paragraphe

3.1. Commençons par la démonstration du théorème 1.4. Soit σ la transformation canonique de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_i$ (c'est-à-dire

$$\sigma h = \lim_{n \to \infty} U^{-n} T^n h = h_i),$$

on a $\sigma T h = \lim_{n \to \infty} U^{-n} T^n (T h)$

$$= U (\lim_{n \to \infty} U^{-n} T^n h) = U h_i = T_i h_i = T_i \sigma h \qquad \text{pour} \quad h \in \mathcal{H}.$$

En passant au conjugué, cette relation donne : $T^* \sigma^* = \sigma^* T_i^*$.

Comme σ est une contraction de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}_i$, et à valeurs denses dans $\mathcal{H}_i$, l'opérateur σ^* sera une contraction inversible au sens large.

Cela étant, si h_i est un vecteur propre de T_i^* correspondant à une valeur propre a, la relation $T^* \sigma^* = \sigma^* T_i^*$ donne

$$T^* h' = T^* (\sigma^* h_i) = \sigma^* T_i^* h_i = a \sigma^* h_i = ah', \qquad \text{où} \quad h' = \sigma^* h_i.$$

Ainsi h' est un vecteur propre de T^* tel que $\| h' \| = \| \sigma^* h_i \| \leq \| h_i \|$ (car σ^* est une contraction), $h' \neq 0$ si $h_i \neq 0$ (car σ^* est inversible au sens large), et $h' = \sigma^* h_i \in \sigma^* \mathcal{H}_i$.

Réciproquement, si a est une valeur propre de T^*, et si, pour cette valeur propre, T^* admet des vecteurs propres non nuls h' appartenant à la variété $\sigma^* \mathcal{H}_i$, alors $h' = \sigma^* h_i$ pour certain élément h_i de $\mathcal{H}_i$ et évidemment $h_i \neq 0$ (car $h \neq 0$) et $\| h' \| \leq \| h_i \|$. La relation $T^* \sigma^* = \sigma^* T_i^*$ donne de nouveau

$$T_i^* h_i = \sigma^{*-1} (T^* \sigma^*) h_i = \sigma^{*-1} T^* \sigma^* h_i = \sigma^{*-1} T^* h' = a \sigma^{*-1} h' = ah_i,$$

et a est une valeur propre de T_i^*, h_i un vecteur propre correspondant.

Pour terminer la démonstration du théorème 1.4 il nous reste à montrer l'identité des deux variétés $\sigma^* \mathcal{H}_i$ et $A_i^{1/2} (\overline{A_i^{1/2} \mathcal{H}})$. Or si $h' = \sigma^* h_i$ avec $h_i \in \mathcal{H}_i$, la définition de $\mathcal{H}_i$ assure l'existence d'une suite $(h_n)_{n \in N}$ dans $\mathcal{H}$ telle que $h_i = \lim_{n \to \infty} (h_n)_i$. La relation $\| A_i^{1/2} h_n \| = \| (h_n)_i \|$

montre alors la convergence dans $\mathcal{H}$ de la suite $(A_i^{1/2} h_n)_{n\in N}$, et on obtient :

$$\begin{aligned}\langle \sigma^* h_i, k\rangle &= \langle h_i, \sigma k\rangle = \langle \lim_{n\to\infty}(h_n)_i, k_i\rangle \\ &= \lim_{n\to\infty}\langle (h_n)_i, k_i\rangle = \lim_{n\to\infty}\langle A_i^{1/2} h_n, A_i^{1/2} k\rangle \\ &= \langle A_i^{1/2}(\lim_{n\to\infty} A_i^{1/2} h_n), k\rangle \quad \text{pour tout } k\in\mathcal{H}.\end{aligned}$$

Donc

$$\sigma^* h_i = A_i^{1/2}(\lim_{n\to\infty} A_i^{1/2} h_n)\in A_i^{1/2}\left(\overline{A_i^{1/2}\mathcal{H}}\right).$$

Réciproquement, si $h'\in A_i^{1/2}\left(\overline{A_i^{1/2}\mathcal{H}}\right)$, il existe une suite $(h_n)_{n\in N}$ de $\mathcal{H}$ telle que $(A_i^{1/2} h_n)_{n\in N}$ converge dans $\mathcal{H}$ vers un h'' tel que $h' = A_i^{1/2} h''$. La relation $\| (h_n)_i \| = \| A_i^{1/2} h_n \|$ montre alors la convergence de la suite $((h_n)_i)_{n\in N}$ vers une certaine limite h_i dans $\mathcal{H}_i$, et on montre aussi $h' = \sigma^* h_i$. Le théorème est donc démontré.

Le reste de ce paragraphe est destiné à tirer des conséquences du théorème 1.4.

3.2. Examinons maintenant le théorème 1.1. Si la condition

$$\overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{H})} = \mathcal{R}_*$$

est vérifiée, alors $H_i = \mathcal{R}_* = \mathcal{H}_i$ d'après la proposition 2.4 et la définition même de $\mathcal{H}_i$. L'isométrie T_i coïncide donc avec sa dilatation unitaire minimale, elle est par suite unitaire.

Réciproquement, si T_i est unitaire, on a $H_i = \mathcal{H}_i$, et la proposition 2.4 donne de nouveau $\overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{R}_*}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_i = H_i = \mathcal{R}_*$. Les deux conditions (1) et (2) du théorème 1.1 sont donc équivalentes.

Si T_i est unitaire, son conjugué T_i^* l'est aussi, le spectre de T_i^* est sur le cercle unité, et aucun point du disque D n'est valeur propre de T_i^*. D'après le théorème 1.4, cela veut dire que T^* n'a aucun vecteur propre non nul appartenant à la variété $A_i^{1/2}\mathcal{H}$ et correspondant à des valeurs propres dans le disque D. La condition (2) entraîne donc la condition (3) qui, à son tour, entraîne évidemment la condition (4).

Montrons que la condition (4) implique la condition (2). En effet, si T_i n'est pas unitaire l'espace $\mathcal{D}_i = \mathcal{H}_i \ominus T_i\mathcal{H}_i$ est non nul. Si donc $a_i\in\mathcal{D}$, $a_i\neq 0$, et si on pose

$$h_i = \Sigma_{n=0}^{\infty} a'^n T_i^n a_i,$$

alors $h_i\neq 0$ et

$$\begin{aligned}T_i^* h_i &= T_i^*(\Sigma_{n=0}^{\infty} a'^n T_i^n a_i) = T_i^* a_i + \Sigma_{n=1} a'^n T_i^* T_i^n a_i \\ &= \Sigma_{n=0} a'^{n+1}(T_i^* T_i) T_i^n a_i = \Sigma_{n=0} a'^{n+1} T_i^n a_i = a' h_i,\end{aligned}$$

car $T_i^* a_i = 0$ d'une part, et $T_i^* T_i = I_i$ d'autre part (I_i étant l'application identique sur $\mathcal{H}_i$).

D'après le théorème 1.4, le vecteur $h' = \sigma^* h_i$ sera un vecteur propre non nul de T^* appartenant à la variété $A_i^{1/2} \mathcal{H}$ et correspondant à la valeur propre $a' \in D$, ce qui est contraire à la condition (4). Les quatre premières conditions sont donc équivalentes.

Supposons maintenant que $\overline{A_i^{1/2} \mathcal{H}} = \overline{A_i^{1/2} T \mathcal{H}}$, alors T_i est unitaire. En effet, si T_i n'est pas unitaire et si $a_i \in \mathcal{D}_i = \mathcal{H}_i \ominus T_i \mathcal{H}_i$, $a_i \neq 0$, on a $T_i^* a_i = 0$. D'après le théorème 1.4, $h'' = \sigma^* a_i$ sera un vecteur propre non nul de T^* correspondant à la valeur propre $a = 0$ et appartenant à la variété $A_i^{1/2} (\overline{A_i^{1/2} \mathcal{H}})$. Il existe donc $h \in \overline{A_i^{1/2} \mathcal{H}}$, $h \neq 0$ tel que $h'' = A_i^{1/2} h$. La relation $T^* h'' = 0$ donne alors :

$$0 = \langle T^* h'', k \rangle = \langle h'', T k \rangle = \langle A_i^{1/2} h, T k \rangle = \langle h, A_i^{1/2} T k \rangle$$
$$\text{pour tout } k \in \mathcal{H}.$$

Ainsi h est perpendiculaire à la variété $\overline{A_i^{1/2} T \mathcal{H}}$. Comme

$$0 \neq h \in \overline{A_i^{1/2} \mathcal{H}} \supseteq \overline{A_i^{1/2} T \mathcal{H}},$$

cela veut dire que $\overline{A_i^{1/2} \mathcal{H}}$ contient strictement $\overline{A_i^{1/2} T \mathcal{H}}$, ce qui est contraire à la condition (5). Enfin la condition (5) est vérifiée si T_i est unitaire, et cela par un raisonnement analogue, mais dans l'ordre inverse. Le théorème 1.1 est donc démontré.

3.3 Corollaire. — *Si au moins un point à l'intérieur du cercle unité n'est pas une valeur propre de T^*, alors* $\overline{\mathcal{R}_{\mathcal{R}_*} (\mathcal{H})} = \mathcal{R}_*$ (Sz.-Nagy et C. Foiaş, *voir* [1], proposition II.3.2). *Cette conclusion est aussi valable si T vérifie la propriété :*

$$\lim_{n \to \infty} T^{*n} h = 0 \qquad \textit{implique} \quad h = 0.$$

Démonstration. — Dans la première hypothèse, la condition (4) du théorème 1.1 est vérifiée, et le corollaire en résulte. Si T vérifie la condition de la deuxième partie du corollaire, alors aucun point de D n'est valeur propre de T^*. En effet, si $T^* h = ah$ avec $a \in D$, on a

$$\lim_{n \to \infty} T^{*n} h = \lim_{n \to \infty} (a^n h) = 0.h = 0, \quad \text{et par suite } h = 0.$$

La deuxième partie du corollaire est alors une conséquence de la première partie.

3.4. Le théorème 1.1 étant démontré on peut examiner le théorème 1.2.

La condition (1) de ce théorème implique que T_i^* est une transformée quasi-affine de T^*, et les conditions citées dans le théorème 1.1 ont pour but d'affirmer que T_i^* est unitaire et égale à la restriction de U^*

à $\mathcal{R}_*$, c'est-à-dire à la partie unitaire de la dilatation isométrique minimale de T^* (*voir* [1], théorème II.2.1).

Le reste de la démonstration du théorème 1.2 est alors analogue à celle du cas envisagé par Sz.-Nagy et C. Foiaş.

3.5. Passons à la démonstration du théorème 1.3. La première partie de ce théorème est une conséquence du théorème 1.1. Le théorème 1.1 affirme encore que, pour tout $a \in D$, l'ensemble $\mathcal{H}^a$ des vecteurs propres de T^*, appartenant à la variété $A_i^{1/2}\mathcal{H}$ et correspondant à la valeur propre a, contient des vecteurs non nuls.

Si $a, z \in D$, montrons d'abord qu'il existe une transformation linéaire inversible $\tau_{a,z}$ de $\mathcal{H}^a$ sur $\mathcal{H}^z$. Cela est évident si $z = a$ (on prend $\tau_{a,a}$ comme la transformation identique dans $\mathcal{H}^a$).

Dans le cas général, on pose d'abord $\tau_{a,z}(O) = 0$. Si $h^a \in \mathcal{H}^a$, $h^a \neq 0$, le théorème 1.4 montre que a est une valeur propre de T_i^*, et $h_i^a = \sigma^{*-1}(h^a)$ est un vecteur propre non nul de T_i^* correspondant à la valeur propre a. Comme T_i est isométrique, il est facile de vérifier que

$$h_i^z = (I_i - z\,T_i)^{-1}(I_i - a\,T_i)\,h_i^a$$

est un vecteur propre non nul de T_i^* correspondant à la valeur propre z.

Le théorème 1.4 montre de nouveau que $h^z = \sigma^* h_i^z$ est aussi un vecteur propre non nul de T^*, et que $h^z \in \mathcal{H}^z$. On n'a qu'à poser maintenant

$$\tau_{a,z} = \sigma^*(I_i - z\,T_i)^{-1}(I_i - a\,T_i)\,\sigma^{*-1}$$

pour obtenir une transformation linéaire inversible de $\mathcal{H}^a$ sur $\mathcal{H}^z$. L'inverse de $\tau_{a,z}$ est donné par

$$(\tau_{a,z})^{-1} = \tau_{z,a} = \sigma^*(I_i - a\,T_i)^{-1}(I_i - z\,T_i)\,\sigma^{*-1}.$$

Pour le reste du théorème, on n'a qu'à fixer un élément non nul h^a de $\mathcal{H}^a$, et poser

$$h(z) = h^z = \tau_{a,z}(h^a) = \sigma^*(I_i - z\,T_i)^{-1}(I_i - a\,T_i)\,\sigma^{*-1}(h^a) \quad \text{pour tout } z \in D.$$

L'analycité de la fonction $z \mapsto h(z)$ résulte même de sa définition, et la propriété $h(z) \neq 0$ pour tout $z \in D$ est une conséquence de l'inversibilité de $\tau_{a,z}$.

Pour terminer ce paragraphe, on note encore que, lorsque a, a' varient dans le disque D, la famille $\tau_{a,a'}$ (de transformations entre les vecteurs propres de T^* comme nous avons vu dans la démonstration du théorème 1.3) forme un groupoïde avec la loi de composition des transformations. On a, en particulier :

$$\tau_{a',a''}.\tau_{a,a'} = \tau_{a,a''} \quad \text{pour tout } a, a', a'' \in D.$$

4. Prolongements de type $C_{0.} \oplus i$ des contractions

Pour résoudre les résultats des paragraphes précédents, nous avons utilisé essentiellement l'existence des prolongements minimaux de type $C_{0.} \oplus i$ de la contraction T.

Ce paragraphe a pour but d'approfondir encore l'étude des prolongements des opérateurs de l'espace de Hilbert. On indique aussi que les prolongements de type $C_{0.} \oplus i$ peuvent être utilisés, sans faire appel à l'étude des dilatations unitaires, pour résoudre certains autres problèmes sur les contractions, par exemple les problèmes du calcul fonctionnel et des semi-groupes de contractions.

Notons d'abord que les résultats des paragraphes précédents donnent plus précisément des propriétés spectrales de T et de T^* provenant du terme isométrique T_i dans le prolongement $T_0 \oplus T_i$ de T. On note aussi que le théorème 1.4 est encore valable si on remplace T_i par T_0, et l'opérateur $A_i = \lim_{n \to \infty} T^{*n} T^n$ par $A_0 = I - A_i$. Les résultats spectraux de T et de T^* provenant du terme T_0 seront obtenus par une analyse plus approfondie d'autres types de prolongements des opérateurs.

On va compléter maintenant la proposition 2.2 par le théorème suivant (et par sa démonstration) :

4.1. Théorème. — *Toute contraction admet un, et un seul (à une équivalence unitaire près), prolongement minimal de type $C_{0.} \oplus i$.*

Démonstration. — Considérons d'abord le problème de l'unicité des prolongements de type $C_{0.} \oplus i$ des contractions. Pour cela, soit $T'_0 \oplus T'_i$ (défini sur un espace de la forme $\mathcal{H}'_0 \oplus \mathcal{H}'_i$) un autre prolongement minimal de type $C_{0.} \oplus i$ de T.

Si $h \in \mathcal{H}$, soient $h = h_0 \oplus h_i$ et $h = h'_0 \oplus h'_i$, les décompositions de h dans les espaces $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_i$ et $\mathcal{H}'_0 \oplus \mathcal{H}'_i$ respectivement; on a

$$\begin{aligned} \| h_i \|^2 &= \| T_i^n h_i \|^2 = \| T^n h \|^2 - \| T_0^n h_0 \|^2 \\ &= \lim_{n \to \infty} (\| T^n h \|^2 - \| T_0^n h_0 \|^2) = \lim_{n \to \infty} \| T^n h \|^2 \\ &= \lim_{n \to \infty} (\| T^n h \|^2 - \| T_0'^n h'_0 \|^2) = \lim_{n \to \infty} \| T_i'^n h'_i \|^2 = \| h'_i \|^2. \end{aligned}$$

L'application $\tau_i : h_i \mapsto h'_i$ est donc une isométrie de $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_i}(\mathcal{H})$ sur $\mathfrak{L}_{\mathcal{H}'_i}(\mathcal{H})$ qui se prolonge par conséquent de façon unique en un opérateur unitaire, noté encore τ_i, de $\mathcal{H}_i = \overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_i}(\mathcal{H})}$ sur $\mathcal{H}'_i = \overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{H}'_i}(\mathcal{H})}$. D'autre part, on a aussi

$$\tau_i T_i h_i = \tau_i (T h)_i = (T h)'_i = T'_i h'_i = T'_i \tau_i h_i \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}.$$

Par prolongement, on a alors $\tau_i T_i = T'_i \tau_i$, et T'_i est unitairement équivalente à T_i.

Cela étant, la relation

$$\| h_0 \|^2 = \| h \|^2 - \| h_i \|^2 = \| h \|^2 - \| h'_i \|^2 =: \| h'_0 \|^2 \text{ pour tout } h \in \mathcal{H}$$

montre aussi que la correspondance $\tau_0 : h_0 \mapsto h'_0$ de $\mathcal{P}_{\mathcal{H}_0}(\mathcal{H})$ sur $\mathcal{P}_{\mathcal{H}'_0}(\mathcal{H})$ se prolonge de façon unique en un opérateur unitaire, noté aussi τ_0, de $\mathcal{H}_0$ sur $\mathcal{H}'_0$ tel que $\tau_0 T'_0 = T'_0 \tau_0$. La contraction T'_0 est donc unitairement équivalente à T_0 et l'unicité des prolongements de type $C_{0.} \oplus i$ est démontrée.

Pour avoir une idée sur la méthode que nous proposons pour l'étude des contractions (et cela sans utiliser l'étude des dilatations unitaires), nous allons indiquer ici une démonstration directe de l'existence des prolongements de type $C_{0.} \oplus i$. Pour cela, on considère les relations R_0 et R_i définies sur l'espace $\mathcal{H}$ par

$h R_0 h'$ si, et seulement si, $\| h - h' \| = \lim_{n \to \infty} \| T^n (h - h') \|$,

$h R_i h'$ si, et seulement si, $\lim_{n \to \infty} T^n (h - h') = 0$.

On montre alors que R_0 et R_i sont des relations d'équivalence sur $\mathcal{H}$, et les espaces quotients $\mathcal{H}/R_0$, $\mathcal{H}/R_i$ sont des espaces pré-hilbertiens pour les opérations et pour les normes données par

$$\lambda h_0 = (\lambda h)_0, \quad h_0 + k_0 = (h + k)_0, \quad \| h_0 \| = (\| h \|^2 - \lim_{n \to \infty} \| T^n h \|^2)^{1/2},$$
$$\lambda h_i = (\lambda h)_i, \quad h_i + k_i = (h + k)_i, \quad \| h_i \| = \lim_{n \to \infty} \| T^n h \|$$

pour tout h, $k \in \mathcal{H}$ et λ scalaire; h_0 et h_i étant respectivement les classes, pour les relations R_0 et R_i, associées à $h \in \mathcal{H}$. Les espaces $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_i$ seront alors les complétés de ces espaces quotients avec les normes considérées. On démontre aussi que les opérateurs T_0 et T_i, définis par

$$T_0 h_0 = (T h)_0 \quad \text{et} \quad T_i h_i = (T h)_i \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{H},$$

se prolongent de façon unique en une contraction de classe $C_{0.}$ et une isométrie dans $\mathcal{H}_0$ et dans $\mathcal{H}_i$ respectivement.

Si on identifie $\mathcal{H}$ à un sous-espace de la somme directe $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_i$ (cela est possible car $\| h \|^2 = \| h_0 \|^2 + \| h_i \|^2$ d'après les définitions des espaces $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_i$; h_0 et h_i étant les classes d'équivalence associées à $h \in \mathcal{H}$), on vérifie que $T_0 \oplus T_i$ est le prolongement minimal de type $C_{.0} \oplus i$ de T.

La proposition suivante donne d'autres propriétés des prolongements de type $C_{0.} \oplus i$.

4.2. PROPOSITION. — *Soit $T_0 \oplus T_i$ le prolongement minimal de type $C_{0.} \oplus i$ de la contraction T. Alors :*

(1) *Tout prolongement de type $C_{0.} \oplus i$ de T contient $T_0 \oplus T_i$.*

(2) *La condition de minimalité*

$$\overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_0}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_0 \qquad et \qquad \overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_i}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_i$$

du prolongement $T_0 \oplus T_i$ *est équivalente à la condition suivante :*

$$\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_i = \bigvee_{n=0}^{\infty} (T_0 \oplus T_i)^{*n} \mathcal{H}.$$

Démonstration. — Soit $T'_0 \oplus T'_i$ (défini sur un espace de la forme $\mathcal{H}'_0 \oplus \mathcal{H}'_i$) un prolongement de type $C_{0.} \oplus i$ de la contraction T. Pour la première partie de la proposition, il suffit de remarquer que la restriction de $T'_0 \oplus T'_i$ à l'espace $\overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{H}'_0}(\mathcal{H})} \oplus \overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{H}'_i}(\mathcal{H})}$ est unitairement équivalente à $T_0 \oplus T_i$. Nous laissons la démonstration de ce point.

Il est clair que $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_i \supseteq \bigvee_{n=0}^{\infty} (T_0 \oplus T_i)^{*n} \mathcal{H}$ même si le prolongement $T_0 \oplus T_i$ de T n'est pas minimal. Il nous reste donc à démontrer l'inégalité inverse. Pour cela, il suffit de montrer que, pour tout $h = h_0 \oplus h_i \in \mathcal{H}$, les éléments h_0 et h_i appartiennent à l'espace $\bigvee_{n=0}^{\infty} (T_0 \oplus T_i)^{*n} \mathcal{H}$. Pour l'élément h_i, cela résulte de l'égalité

$$\lim_{n \to \infty} (T_0 \oplus T_i)^{*n} T^n h = \lim_{n \to \infty} (T_0^{*n} T_0^n h_0 \oplus T_i^{*n} T_i^n h_i) = 0 \oplus h_i = h_i.$$

La même conclusion est valable pour h_0, car $h_0 = h - h_i$ est la différence de deux éléments de $\bigvee_{n=0}^{\infty} (T_0 \oplus T_i)^{*n} \mathcal{H}$.

La méthode des prolongements de type $C_{0.} \oplus i$ donne aussi un moyen d'étude des semi-groupes de contractions. Notamment, on montre que tout semi-groupe de contractions admet un, et un seul, prolongement minimal de type $C_{0.} \oplus i$.

Dans le cas des semi-groupes continus, on obtient le résultat suivant :

4.3. PROPOSITION. — *Soient* T_0, T_i *les cogénérateurs des deux semi-groupes continus de contractions* $T_0(s)$ *et* $T_i(s)$, $s > 0$, *alors* $T_0(s) \oplus T_i(s)$, $s > 0$, *est le prolongement minimal de type* $C_{0.} \oplus i$ *du semi-groupe continu* $T(s)$, $s > 0$, *si, et seulement si,* $T_0 \oplus T_i$ *est le prolongement minimal de type* $C_{0.} \oplus i$ *du cogénérateur* T *du semi-groupe* $T(s)$, $s > 0$.

Démonstration. — En effet, on sait (*voir* SZ.-NAGY et C. FOIAŞ [1], propositions III.9.1 et III.9.2) qu'un semi-groupe continu de contractions est de classe $C_{0.}$ ou isométrique si, et seulement si, son cogénérateur est une contraction de même type (on peut aussi obtenir ce résultat directement par le théorème 4.1). La somme $T_0 \oplus T_i$ est donc un prolongement de type $C_{0.} \oplus i$ de T si, et seulement si, $T_0(s) \oplus T_i(s)$, $s > 0$, est un prolongement de même type du semi-groupe $T(s)$, $s > 0$.

Si le prolongement correspondant de T est minimal, on a

$$\overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_0}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_i}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_i,$$

et ces mêmes relations expriment aussi la condition de minimalité du prolongement correspondant du semi-groupe $T(s)$, $s > 0$.

Comme conséquence de cette proposition, on note que (*voir* aussi [1], proposition III.9.1) :

$$\lim_{n\to\infty} \| T^n h \| = \lim_{s\to\infty} \| T(s) h \| = \| h_i \|,$$
$$\lim_{n\to\infty} \| T^{*n} h \| = \lim_{s\to\infty} \| T(s)^* h \| \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}.$$

La proposition suivante donne un autre exemple de construction des prolongements de type $C_{0.} \oplus i$ des contractions.

4.4. Proposition. — *Pour tout scalaire $a \in D$, et toute contraction T, posons*

$$T_a = (T - a I)(I - \bar{a} T)^{-1}.$$

Alors $T_0 \oplus T_i$ est le prolongement minimal de type $C_{0.} \oplus i$ de T si, et seulement si, $(T_0)_a \oplus (T_i)_a = (T_0 \oplus T_i)_a$ est le prolongement minimal de même type de T_a. En particulier, on obtient :

$$\lim_{n\to\infty} \| T^n h \| = \lim_{n\to\infty} \| (T_a)^n h \|$$

et

$$\lim_{n\to\infty} \| T^{*n} h \| = \lim_{n\to\infty} \| (T_a)^{*n} h \| \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}$$

et T est une contraction de classe $C_{\alpha\beta}$ si, et seulement si, T_a est une contraction de même classe.

Démonstration. — On sait que (Sz.-Nagy et C. Foiaş [1], chapitre I, paragraphe 4) la contration T est isométrique ou unitaire si, et seulement si, T_a est une contraction de même nature. Cette conclusion est donc encore valable si T est unilatérale (d'après la décomposition de Wold des isométries) ou même si T est de classe $C_{\bullet .}$ (car T est alors une restriction du conjugué d'une translation unilatérale). Ainsi si $T_0 \oplus T_i$ est un prolongement de type $C_{0.} \oplus i$ de T, la relation

$$T_a \mathfrak{L}_{\mathcal{H}} = (T \mathfrak{L}_{\mathcal{H}})_a = ((T_0 \oplus T_i) \mathfrak{L}_{\mathcal{H}})_a = ((T_0)_a \oplus (T_i)_a) \mathfrak{L}_{\mathcal{H}}$$

montre que $(T_0)_a \oplus (T_i)_a$ est un prolongement de même type de T_a, et réciproquement.

Si le prolongement correspondant de T est minimal, on a

$$\overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_0}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_0 \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathfrak{L}_{\mathcal{H}_i}(\mathcal{H})} = \mathcal{H}_i,$$

et ces même relations donnent la condition de minimalité du prolongement correspondant de T_a.

Cela étant démontré, on obtient maintenant :

$$\lim_{n\to\infty} \| T_a^n h \| = \lim_{n\to\infty} \| ((T_0)_a)^n h_0 \oplus ((T_i)_a)^n h_i \|$$
$$= \| h_i \| = \lim_{n\to\infty} \| T^n h \| \qquad \text{pour} \quad h \in \mathcal{H}.$$

L'autre relation de la proposition se démontre de façon analogue, et le reste de cette proposition résulte de ces dernières relations et des définitions des contractions de classe $C_{\alpha\beta}$.

Toujours à propos des prolongements des opérateurs, on note que, si T' est un prolongement de T, l'opérateur T'^* sera une dilatation de T^*. La réciproque de cette propriété n'est pas exacte : Si T'^* est une dilatation de T^*, alors $T' = (T'^*)^*$ n'est pas nécessairement un prolongement de T. On a cependant le résultat suivant :

4.5. PROPOSITION. — *Si T' est une dilatation continue (non nécessairement unitaire) d'un opérateur linéaire T (non nécessairement une contraction), alors T'^* est une dilatation de T^* et cette dilatation T'^* contient (c'est-à-dire il existe une restriction de T'^* qui est en même temps) une dilatation T''^* de T^* telle que $T'' = (T''^*)^*$ soit un prolongement de T.*

Démonstration. — Soient $\mathcal{H}'$ l'espace sur lequel T' est défini et $\mathcal{H}$ celui de T. Si on désigne par $\mathcal{H}''$ le sous-espace de $\mathcal{H}'$ engendré par les variétés $T'^{*n} \mathcal{H}$, où $n \in N$, on voit que $\mathcal{H}''$ est un sous-espace contenant $\mathcal{H}$, invariant pour T'^*, et si T''^* est la restriction de T'^* à $\mathcal{H}''$, l'opérateur $T'' = (T''^*)^*$ sera un prolongement de T qui répond bien à la proposition.

Pour terminer, indiquons encore quelques remarques. D'abord la démonstration du théorème 4.1 dit aussi que l'opérateur unitaire $\tau_0 \oplus \tau_i$ qui donne l'équivalence entre deux prolongements minimaux de type $C_{0.} \oplus i$ de T laisse invariant chaque élément de l'espace initial $\mathcal{H}$. On note aussi que les relations d'équivalence R_0 et R_i sont, algébriquement, identiques aux relations d'équivalence définies par les espaces fermés O_0 et O_i donnés par

$$O_0 = \{ h : \| h \| = \lim_{n \to \infty} \| T^n h \| \} \quad \text{et} \quad O_i = \{ h : \lim_{n \to \infty} T^n h = 0 \}.$$

Il est naturel, pour cette raison, de parler des normes quotients définies par ces sous-espaces. Ces normes quotients sont données par

$$\| h_0 \|_0 = \inf \{ \| k \| : k \in h_0 \}$$

et

$$\| h_i \|_i = \inf \{ \| k \| : k \in h_i \} \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{H}.$$

Il est cependant intéressant de noter que, en général, la norme sur $\mathcal{H}/R_i$ (par exemple) dans l'espace $\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_i$ n'est pas identique ou même n'est pas équivalente à la norme quotient correspondante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] NAGY (Bela Sz.-) et FOIAŞ (C.). — *Analyse harmonique des opérateurs de l'espace de Hilbert.* — Paris, Masson; Budapest, Akadémiai Kiadó, 1967.

[2] NAGY (Bela Sz.-) et FOIAŞ (C.). — The lifting theorem for intertwining operators and some new applications, *Indiana Univ. math. J.*, t. 20, 1971, p. 901-904.

[3] NAGY (Bela Sz.-). — Sur les contractions de l'espace de Hilbert, *Acta Scient. Math., Szeged*, t. 15, 1953, p. 87-92.

[4] NAGY (Bela Sz.-). — *Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de cet espace.* Appendice du Livre « Leçons d'Analyse fonctionnelle » de F. RIESZ et B. SZ.-NAGY [5].

[5] RIESZ (F.) et NAGY (Bela Sz.-). — *Leçons d'analyse fonctionnelle.* — Paris, Masson; Budapest, Akademiai Kiadó, 3e édition, 1955; 4e édition 1965.

[6] TÔN-THẤT LONG. — Sur les modèles de prolongements des contractions et quelques applications, *Proceedings of the Functional Analysis week*, March 3 rd - 7 th 1969, p. 37-45. — Aarhus University, Matematisk Institut, 1969 (Various publications Series, 8).

[7] TÔN-THẤT LONG. — Prolongements des contractions dans l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, série A, 1970 p. 1371-1374.

[8] TÔN-THẤT LONG. — Études spectrales des contractions et de leurs décompositions pseudo-directes, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 270, série A, 1970, p. 1427-1429.

[9] TÔN-THẤT LONG. — Utilisation des nombres ordinaux dans l'étude spectrale des opérateurs linéaires bornés dans l'espace de Hilbert, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 272, série A, 1971, p. 1304-1307.

(Texte définitif reçu le 18 janvier 1973.)

TÔN-THẤT LONG,
Laboratoire de Calcul de Probabilités,
Université de Paris VI, Tour 56,
4, place Jussieu,
75230 Paris-Cedex 05.