Bulletin de la S. M. F.

Daniel Lazard

Autour de la platitude

Bulletin de la S. M. F., tome 97 (1969), p. 81-128
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1969__97__81_0>

Bull. Soc. math. France,
97, 1969, p. 81 à 128.
(*Thèse Sc. math.*, Paris, 1968).

AUTOUR DE LA PLATITUDE

PAR

DANIEL LAZARD (*).

Table des matières.

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1968.

INTRODUCTION.

Dans ce travail, nous nous sommes efforcé d'obtenir des résultats d'algèbre commutative portant sur des anneaux non noethériens ou des modules qui ne sont pas de type fini. Nous nous sommes plus spécialement intéressé à des questions en rapport avec la platitude.

Aussi, naturellement, le premier chapitre est consacré à des résultats sur les modules plats. Nous y démontrons d'abord un théorème de structure : *Tout module plat est limite inductive de modules libres de type fini.* Après avoir démontré un résultat voisin du précédent, mais concernant les sous-modules purs, nous étudions les résolutions projectives de modules plats. Cette étude montre qu'un module plat est « presque » de dimension homologique inférieure ou égale à 1. Nous avions déjà démontré et utilisé ces derniers résultats dans un article paru dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* [33], que l'on peut considérer comme un sixième chapitre de ce travail.

Il faut noter que, contrairement à toute la suite de ce travail, les résultats de ce chapitre ne supposent pas les anneaux commutatifs.

Le chapitre II est consacré aux assassins, ou ensembles des idéaux premiers associés à un module. On dit qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ est associé à un module M s'il existe x dans M tel que $\mathfrak{p}$ soit minimal parmi les idéaux premiers contenant l'annulateur de x. Si l'anneau est noethérien, on retrouve ainsi la notion définie par BOURBAKI ([11], chap. IV, § 1). Dans le cas général, un grand nombre des propriétés qui sont vraies dans le cas noethérien se conservent, en particulier les propriétés de localisation. Cette notion est donc un outil efficace en algèbre commutative non noethérienne, et nous sera très utile dans la suite de ce travail.

Dans ce chapitre II, nous nous sommes spécialement intéressé aux assassins des modules plats, à la transformation des assassins par changement de base et aux anneaux « autoassociés », c'est-à-dire aux anneaux locaux dont l'idéal maximal appartient à l'assassin du module libre de rang 1.

Au chapitre III, nous appliquons les résultats des deux chapitres précédents aux algèbres tensorielles, symétriques et extérieures. Le principal problème étudié est le suivant : Étant donné un homomorphisme injectif de modules, $u : M \rightarrow N$, à quelles conditions $U(u)$ est-il une injection, en désignant par U l'un quelconque des trois foncteurs envisagés ? Nous montrons qu'il en est ainsi si u est pur, si M est projectif et N plat, si M est plat et de type fini et N plat. Pour les algèbres tensorielles et extérieures, $U(u)$ est toujours une injection si M et N sont plats. Par contre, si M et N sont plats, pour pouvoir affirmer que $S(u)$ est une injection, nous devons faire des hypothèses supplémentaires, soit sur M, soit sur l'anneau de base. Ceci est d'autant plus irritant que les diverses hypothèses sur A qui permettent d'affirmer que $S(u)$ est une injection n'ont aucun rapport apparent entre elles.

On trouvera au chapitre IV divers résultats sur les épimorphismes plats de la catégorie des anneaux. Nous montrons en particulier que si la source A est fixée, de tels épimorphismes s'identifient aux parties du spectre de A qui, munies du faisceau induit par celui de $\mathrm{Spec}(A)$, sont des schémas affines. Nous montrons également l'existence, pour tout anneau A, d'un plus grand épimorphisme plat et injectif $A \rightarrow \mathrm{M}(A)$, que nous comparons à l'anneau total des fractions $\mathrm{Tot}(A)$.

Signalons, comme application de ces épimorphismes plats, une caractérisation des ouverts affines d'un schéma affine, parmi les ouverts dont l'anneau des sections globales est plat. Nous ne traitons ici que le cas intègre et noethérien. Le cas général fera l'objet d'un travail ultérieur.

Le chapitre V est consacré à deux exemples particulièrement méchants d'épimorphismes qui ne sont pas plats. Signalons également, disséminés dans tout ce travail, un certain nombre de contre-exemples, plus ou moins monstrueux. Tous ces exemples sont construits par générateurs et relations.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. SAMUEL qui m'a initié au métier de chercheur et dont les conseils et les encouragements me furent une aide précieuse.

Qu'il soit également remercié pour l'ambiance de discussions et de franche collaboration qu'il a su développer entre ses élèves. Que ceux-ci trouvent ici mon amicale reconnaissance.

Que mon ami Daniel FERRAND, avec lequel j'ai passé de longues heures à discuter et à mettre au point certains résultats, soit particulièrement remercié.

Je suis reconnaissant à M. CHEVALLEY de l'intérêt qu'il a porté à mon travail en tant que délégué du Département de Mathématiques, et du soin avec lequel il a lu cette thèse.

Je désire remercier également M. MALLIAVIN pour le très intéressant sujet de deuxième thèse qu'il m'a proposé, et de l'aide qu'il m'a apportée pour l'aborder.

J'ai plaisir à remercier le Secrétariat de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Rennes pour la réalisation matérielle de ce travail, et, particulièrement, Mlle CHÉRIAUX pour la diligence et le soin avec lesquels elle l'a dactylographié.

Ces remerciements seraient incomplets si je ne mentionnais pas l'aide morale que m'a apporté *Christiane*, ma femme. Il n'est que justice de lui dédier ce travail.

CHAPITRE I. — **Modules plats.**

Dans ce chapitre, les anneaux ne sont pas nécessairement commutatifs. Par « module » et « idéal », nous entendrons « module à gauche » et « idéal à gauche ».

Il est classique que la notion de module plat est une bonne généralisation de celle de module projectif. La plupart des résultats de ce chapitre contribuent à montrer que ces notions sont assez proches l'une de l'autre. Autrement dit un module plat est presque projectif.

1. Structure des modules plats.

LEMME 1.1. — *Si $u : P \to M$ est un homomorphisme d'un A-module de présentation finie dans un A-module plat, il existe un A-module libre de type fini L et des homomorphismes $v : P \to L$ et $w : L \to M$ tels que $w \circ v = u$.*

Soit $L_1 \xrightarrow{f} L_0 \xrightarrow{g} P \to 0$ une suite exacte de A-modules, avec L_0 et L_1 libres de type fini. Désignons par X^* le dual d'un module X et par ${}^t\varphi$ le transposé d'un homomorphisme φ. Il existe une suite exacte de A-modules à droite $L' \xrightarrow{h} L_0^* \xrightarrow{{}^tf} L_1^*$ avec L' libre. Comme M est plat, on en déduit une suite exacte

$$L' \otimes_A M \xrightarrow{h \otimes M} L_0^* \otimes_A M \xrightarrow{{}^tf \otimes M} L_1^* \otimes_A M.$$

On peut identifier $L_0^* \otimes_A M$ et $L_1^* \otimes_A M$ à $\mathrm{Hom}_A(L_0, M)$ et $\mathrm{Hom}_A(L_1, M)$. Comme $u \circ g \circ f = 0$, on a

$$({}^tf \otimes M)(u \circ g) = 0,$$

et il existe un élément x de $L' \otimes_A M$ tel que $(h \otimes M)(x) = u \circ g$.

Il existe donc un sous-module à droite L^* de L', libre de type fini tel que x soit dans le sous-groupe $L^* \otimes_A M$ de $L' \otimes_A M$. Désignons par L le dual de L^*, par ${}^tk$ le composé de h avec l'injection canonique de L^* dans L' et par $k : L_0 \to L$ son transposé. Comme ${}^tf \circ {}^tk = 0$, on a $k \circ f = 0$, et ceci définit, par passage au quotient, un homomorphisme $v : P \to L$. Comme $L^* \otimes_A M \simeq \mathrm{Hom}_A(L, M)$, x définit un homomorphisme $w : L \to M$. Comme ${}^tk(x) = u \circ g$, on a $w \circ k = u \circ g$ et, par passage au quotient par L_1, $w \circ v = u$.

THÉORÈME 1.2. — *Soit M un A-module. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *M est plat;*

(ii) *pour tout A-module de présentation finie P et tout homomorphisme $u : P \to M$, il existe un A-module libre de type fini L et des homomorphismes $v : P \to L$ et $w : L \to M$ tels que $w \circ v = u$;*

(iii) *il existe un ensemble ordonné filtrant I et un système inductif de modules libres de type fini M_i $(i \in I)$ tels que $M = \varinjlim M_i$.*

Nous venons de montrer que (i) implique (ii), et il est bien connu que (iii) implique (i). Montrons que (ii) implique (iii).

Considérons l'ensemble $E = M \times N$, produit de l'ensemble sous-jacent à M par un ensemble dénombrable, et l'homomorphisme de $A^{(E)}$ dans M, qui envoie tout élément de E sur sa première projection dans M; soit R le noyau de cet homomorphisme. Ordonnons l'ensemble des couples (I, S) formés d'un sous-ensemble fini I de E et d'un sous-module de type fini S de $A^I \cap R$ de la manière suivante : (I, S) sera supérieur à (I', S') si $I \supset I'$ et $S \supset S'$. Cet ensemble est filtrant; si $(I, S) \geqq (I', S')$, il y a un homomorphisme canonique de $A^{I'}/S'$ dans A^I/S; ce système est inductif et a pour limite M (*voir* l'appendice, ou Bourbaki [11], chap. I, § 2, exerc. 10).

Nous allons montrer que l'ensemble des couples (I, S) tels que A^I/S est un module libre est un sous-ensemble *cofinal* de l'ensemble de tous les couples (I, S). Soit donc (I, S) un couple quelconque. Il existe un module libre de type fini L tel que l'homomorphisme canonique de A^I/S dans M se factorise : $A^I/S \xrightarrow{v} L \xrightarrow{w} M$.

Appelons $(e_i)_{i \in I}$ l'image dans A^I/S de la base canonique de A^I, et posons $f_i = v(e_i)$ dans L. Soient B une base de L, et B' un sous-ensemble de E disjoint de I, équipotent à B et ayant même image que B dans M. Posons $C = B' \cup I$. Comme L est de présentation finie, il peut s'écrire $L = A^C/T$, où l'image dans L de la base canonique de A^C est $B \cup (f_i)_{i \in I}$, et où T est un sous-module de type fini de $A^C \cap R$. On a évidemment $(C, T) \geqq (I, S)$, ce qui nous donne le résultat puisque A^C/T est libre.

Corollaire 1.3. — *Soit M un A-module; les conditions suivantes son équivalentes :*

(i) *M est plat;*

(ii) *pour tout homomorphisme surjectif $p : N \to M$ et tout module de présentation finie P, l'homomorphisme*

$$\mathrm{Hom}(P, p) : \mathrm{Hom}(P, N) \to \mathrm{Hom}(P, M)$$

est surjectif.

Si M est plat, soit $u : P \to M$ un élément de $\mathrm{Hom}(P, M)$. D'après le théorème 1.2, u se factorise à travers un libre. Comme tout homomorphisme d'un libre dans M se factorise à travers N, le résultat est immédiat.

Pour la réciproque, il suffit de prendre N libre. En effet, si $u : P \to M$ est un homomorphisme d'un module de présentation finie P dans M, u se factorise à travers N, et l'image de P dans N est contenue dans un sous-module libre de type fini de N, ce qui nous donne la factorisation de la condition (ii) du théorème 1.2.

Corollaire 1.4. — *Tout module plat et de présentation finie est projectif.*

L'identité d'un tel module se factorise à travers un libre par le théorème 1.2 (ii).

COROLLAIRE 1.5. — *Si un foncteur de la catégorie des A-modules dans celle des B-modules commute aux limites inductives filtrantes et transforme modules libres de type fini en modules plats, il transforme modules plats en modules plats.*

REMARQUE. — L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) du théorème 1.2 n'est autre, dans un langage plus agréable, que celle de BOURBAKI ([11], chap. I, § 2, corollaire 1 à la proposition 13).

2. **Sous-modules purs.**

DÉFINITION 2.1. — *Soit* $0 \to M' \xrightarrow{u} M \to M'' \to 0$ *une suite exacte de A-modules. Nous dirons que M' est un sous-module pur de M, ou que u est un homomorphisme pur, ou que la suite est pure, si pour tout A-module à droite N,* $N \otimes_A u$ *est une injection.*

Ainsi un facteur direct est un sous-module pur : un homomorphisme injectif dont le conoyau est plat est pur. Pour qu'une suite exacte

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

avec M plat, soit pure, il faut et il suffit que M'' soit plat.

Le but de ce paragraphe est de généraliser aux suites exactes pures les résultats du paragraphe 1.

LEMME 2.2. — *Pour qu'un homomorphisme injectif* $u : M' \to M$ *soit pur, il faut et il suffit que, pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{array}{ccc} M' & \xrightarrow{u} & M \\ {\scriptstyle i}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j} \\ L' & \xrightarrow{v} & L \end{array}$$

avec L' et L libres de type fini, il existe une flèche $w : L \to M'$ *telle que* $i = w \circ v$.

C'est une traduction de la caractérisation classique des sous-modules purs (*voir*, par exemple, BOURBAKI [11], chap. I, § 2, exerc. 24 *a*, ou COHN [13], théor. 2.4).

THÉORÈME 2.3. — *Soit* $0 \to M' \xrightarrow{u} M \xrightarrow{u'} M'' \to 0$ *une suite exacte de A-modules à gauche. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *la suite* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *est pure;*

(ii) *pour tout module de présentation finie P, l'application* $\mathrm{Hom}(P, u') : \mathrm{Hom}(P, M) \to \mathrm{Hom}(P, M'')$ *est surjective;*

(iii) *la suite* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *est limite inductive suivant un ensemble filtrant de suites exactes scindées*

$$0 \to M' \to M' \oplus P_i \to P_i \to 0,$$

où les P_i *sont des modules de présentation finie.*

REMARQUES :

(a) L'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) de ce théorème redonne l'équivalence (i) $\Leftrightarrow$ (ii) du théorème 1.2, en prenant M libre.

(b) Les décompositions en sommes directes intervenant dans la condition (iii) ne sont en général pas compatibles avec le système inductif.

(c) La condition déduite de (iii), en retirant la condition que les P_i sont de présentation finie, est encore équivalente aux autres, car elle est plus faible que (iii), et une limite inductive filtrante de suites exactes scindées est pure.

(A) On a (iii) $\Rightarrow$ (i), car les limites inductives sont des foncteurs exacts commutant aux produits tensoriels.

(B) Supposons (i) vérifiée, et soit $f : P \to M''$ un homomorphisme dont la source est de présentation finie. Il existe donc un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "u"] & M \arrow[r, "u'"] & M'' \arrow[r] & 0 \\
& L' \arrow[u, "i"] \arrow[r, "v"] & L \arrow[u, "j"] \arrow[r, "v'"] & P \arrow[u, "f"] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Par le lemme 2.2, il existe $w : L \to M'$ tel que $w \circ v = i$. Soit $g' = j - u \circ w$. On a

$$g' \circ v = j \circ v - u \circ w \circ v = j \circ v - u \circ i = 0,$$

et g' définit, par passage au quotient, une flèche $g : P \to M$ telle que $g' = g \circ v'$. On a bien $u' \circ g = f$, car

$$u' \circ g \circ v' = u' \circ g' = u' \circ j - u' \circ u \circ w = f \circ v',$$

et (ii) est vérifiée.

(C) Supposons (ii) vérifiée, et écrivons M'' comme limite inductive de modules de présentation finie P_i (*cf.* Appendice, et BOURBAKI [11], chap. I, § 2, exerc. 10). Soit M_i le produit fibré de P_i et de M au-dessus de M'' (i. e. le sous-module de $M \times P_i$ formé des éléments dont les deux projections ont même image dans M''), et soit Q_i le noyau de la surjection canonique $M_i \to P_i$. On a donc un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \xrightarrow{u} & M & \xrightarrow{u'} & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow{\scriptstyle f'_i} & & \uparrow{\scriptstyle f_i} & & \uparrow{\scriptstyle f''_i} & & \\ 0 & \longrightarrow & Q_i & \xrightarrow{u_i} & M_i & \xrightarrow{u'_i} & P_i & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Par la condition (ii), il existe $g_i : P_i \to M$ tel que $u' \circ g_i = f''_i$. On a donc (propriété universelle du produit fibré) une section de u'_i, et la suite du bas est scindée.

La flèche f'_i est un isomorphisme; en effet, le noyau de u'_i est l'ensemble des éléments $(x, 0)$ de $M \times P_i$, tels que $x \in M'$.

Enfin M est la limite inductive des M_i, car, en passant à la limite inductive sur i, on obtient un diagramme commutatif dont les lignes sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \uparrow\wr & & \uparrow & & \uparrow\wr & & \\ 0 & \longrightarrow & M' & \longrightarrow & \varinjlim M_i & \longrightarrow & M'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

la flèche $\varinjlim M_i \to M$ est donc bien un isomorphisme.

Corollaire 2.4. — *Une suite exacte pure* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$, *telle que* M'' *soit de présentation finie, est scindée.*

On applique le théorème 2.3 (ii) à l'identité de M''.

Corollaire 2.5. — *Si un foncteur de la catégorie des A-modules dans celle des B-modules commute aux limites inductives filtrantes et aux sommes directes finies, il transforme les suites exactes pures en suites exactes pures.*

3. **Résolutions projectives de modules plats.**

Les résultats de ce paragraphe montrent qu'un module plat est presque de dimension homologique ≤ 1.

Théorème 3.1. — *Soit* $u : M \to L$ *une injection pure de A-modules à gauche telle que L soit libre. Alors tout sous-module de M de type dénombrable est contenu dans un sous-module de M de type dénombrable et pur dans M et L.*

Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de L. Du lemme 2.2, on déduit immédiatement que, pour qu'un sous-module X de L soit pur, il faut et il suffit que toutes les parties finies $\{x_1, \ldots, x_n\}$ d'un système de générateurs de X vérifient la condition suivante : Si J est un ensemble fini contenu dans I

et si $x_j = \sum\limits_{i \in J} a_{j,i} e_i$ pour $1 \leq j \leq n$, alors il existe des éléments y_i $(i \in J)$ de X tels que

$$x_j = \sum_{i \in J} a_{j,i} e_i = \sum_{i \in J} a_{j,i} y_i.$$

Soit maintenant, $u_1, \ldots, u_n, \ldots$ une partie dénombrable de M engendrant un module E. En appliquant la propriété précédente à $x_1 = u_1$, on trouve une famille finie de y, que nous noterons $(v_{1,i})_{i \in J_1}$. Par récurrence, en appliquant la même propriété avec $x_1 = u_k$ et $x_j = v_{k-1, j-1}$ pour $j > 1$, on trouve, pour les y, des éléments $(v_{k,j})_{j \in J_k}$.

Par construction même, le sous-module E' de M engendré par les $v_{k,j}$ pour $k \in \mathbf{N}$ et $j \in J_k$ est un sous-module pur de L. Ceci entraîne que E' est aussi un sous-module pur de M, car, si la composée de deux flèches reste une injection par toute tensorisation, il en est de même de la première.

Le théorème suivant est dû à Jensen. Nous en donnons une démonstration qui nous semble plus naturelle et plus simple que la sienne [28] :

Théorème 3.2. — *Un module plat de présentation dénombrable est de dimension homologique inférieure ou égale à* 1.

Soient M un tel module, (e_i), $i \in I$, un système de générateurs dénombrable de M, et (f_j), $j \in J$, un système de générateurs des relations entre les e_i. Le module M peut s'écrire comme limite inductive filtrante de modules libres de type fini M_k (théor. 1.2). Pour tout i, il existe un $k(i)$ et un $e_{k(i),i}$ de $M_{k(i)}$, tels que l'image de $e_{k(i),i}$ dans M soit e_i. Appelons, pour tout $k \geq k(i)$, $e_{k,i}$ l'image de $e_{k(i),i}$ dans M_k. Pour tout j, si $e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}$ sont les e_i qui apparaissent dans f_j, il existe un $h(j) \geq k(i_1), \ldots, k(i_n)$ tel que $f_j(e_{h(j),i_1}, \ldots, e_{h(j),i_n}) = 0$. L'ensemble des $k(i)$ et des $h(j)$ est dénombrable. Il est donc contenu dans un sous-ensemble H filtrant et dénombrable de l'ensemble des k. De la définition de H, il résulte que $M = \varinjlim\limits_{k \in H} M_k$. Comme H est dénombrable, il contient un sous-ensemble ordonné co-final isomorphe à l'ensemble des nombres naturels $\mathbf{N}$. Donc, finalement, $M = \varinjlim\limits_{\mathbf{N}} M_n$, où les M_n sont libres de type fini. Appelons g_n l'application, non encore explicitée, de M_n dans M_{n+1}. D'après la définition des limites inductives, on a une suite exacte

$$0 \to \bigoplus M_n \xrightarrow{G} \bigoplus M_n \to M \to 0,$$

où G restreint à M_n est $1 - g_n$; il est évident que G est bien injectif, car il conserve les termes de plus bas degré.

C. Q. F. D.

Théorème 3.3. — *Étant donnée une suite exacte* $0 \to M \to L \to P \to 0$ *avec P plat et L libre, les sous-modules projectifs, purs et de type dénombrable de M forment un ensemble filtrant (pour l'inclusion); leur limite inductive est M.*

Comme M est un sous-module pur de L, pour qu'un sous-module de M soit pur, il faut et il suffit que ce soit un sous-module pur de L. Par le théorème 3.1, il suffit de montrer qu'un sous-module N de M, pur et de type dénombrable est projectif. Or il existe un facteur direct libre de type dénombrable L' de L contenant N (il suffit de prendre pour L' le sous-module engendré par les éléments d'une base de L qui interviennent de manière non triviale dans la décomposition, sur cette base, des éléments de N). L'injection de N dans L' est pure; donc L'/N est plat, et, par le théorème 3.2, N est projectif.

4. Contre-exemples.

Exemples 4.1. — Sur un anneau noethérien, tout module est limite inductive de ses sous-modules de présentation finie. Le théorème 1.2 et sa démonstration pourraient donc faire penser que, si A est un anneau noethérien, tout module plat est limite inductive de ses sous-modules projectifs. Il n'en est rien :

Soient k un corps, X et Y des indéterminées et

$$A = k[[X, Y]]/(XY, Y^2).$$

Désignons par x et y les images de X et de Y dans A, et par M le localisé de A en l'idéal premier (y). On a $yM = 0$, car $xy = 0$, et $x \notin (y)$. Donc, comme tout A-module projectif est libre, M est plat et n'a pas de sous-module projectif.

Voici un autre exemple, avec un anneau réduit : prenons pour A un anneau local réduit non intègre, par exemple $A = k[[X, Y]]/(XY)$. Soient $\mathfrak{p}$ un idéal premier minimal, et x un élément non nul du noyau de la localisation $A \to A_{\mathfrak{p}}$. On a évidemment $xA_{\mathfrak{p}} = 0$. Donc $A_{\mathfrak{p}}$ est un A-module plat, qui a un annulateur et ne contient donc pas de sous-modules projectifs (car A est local).

Exemple 4.2. — Désignons par P_n la propriété : « Tout A-module de Tor-dimension inférieure ou égale à n est limite inductive de modules de dimension homologique inférieure ou égale à n ». Le théorème 1.2 exprime que P_0 est vrai. Mais P_1 est faux, même si A est commutatif, noethérien et local.

Soient k un corps, X, Y et Z des indéterminées et

$$A = k[[X, Y, Z]]/(XZ, YZ, Z^2).$$

Désignons par x, y et z les images de X, Y et Z dans A, et par $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ les idéaux premiers (z) et (y, z). Comme $x \notin \mathfrak{q}$ et $xz = 0$, $A_\mathfrak{p}$ et $A_\mathfrak{q}$ s'identifient à $k((X, Y))$ et $k[[X, Y]]_{(Y)}$; donc $A_\mathfrak{p} \supset A_\mathfrak{q}$; posons $M = A_\mathfrak{p}/A_\mathfrak{q}$. C'est un module de Tor-dimension 1, car il n'est pas plat. En effet, comme

$$A_\mathfrak{p} \otimes_A A_\mathfrak{p} \simeq A_\mathfrak{p} \quad \text{et} \quad A_\mathfrak{q} \otimes_A A_\mathfrak{p} \simeq A_\mathfrak{p},$$

on a

$$M \otimes_A A_\mathfrak{p} = 0 \quad \text{et} \quad M \otimes_A A_\mathfrak{q} \neq 0,$$

et l'application canonique $M \otimes_A A_\mathfrak{q} \to M \otimes_A A_\mathfrak{p}$ n'est pas injective.

Il reste à montrer que M n'est pas limite inductive de A-modules de dimension homologique inférieure ou égale à 1. Pour cela, il suffit de montrer que de tels modules sont plats. Ceci va résulter de la proposition 4.5 du chapitre II, puisque A est autoassocié (chap. II, déf. 4.1).

Exemple 4.3. — Pour terminer ce chapitre, donnons un exemple d'anneau n'ayant qu'un seul idéal premier et admettant un idéal plat non trivial. L'intérêt de ceci est que l'on pourrait croire, en raison du lien entre la platitude et la non-torsion, qu'un idéal plat formé d'éléments nilpotents est nul.

Soient k un corps, X_i et Y_i $(i \in \mathbf{N})$ des indéterminées. Posons $A = k[X_i, Y_i]/\mathfrak{b}$, en désignant par $\mathfrak{b}$ l'idéal engendré par les $X_i - Y_i X_{i+1}$ et les Y_i^2. L'anneau A n'a qu'un seul idéal premier; nous allons montrer que l'idéal $\mathfrak{a}$ de A, engendré par les images des X_i est plat.

Désignons par x_i et y_i les images de X_i et de Y_i dans A. Soit M le A-module engendré par des éléments e_i $(i \in \mathbf{N})$ vérifiant les relations $e_i = y_i e_{i+1}$. Il est immédiat que M est plat, comme limite inductive des flèches $f_i : A \to A$ définies par $f_i(1) = y_i$. Soit $g : M \to \mathfrak{a}$ l'homomorphisme surjectif défini par $g(e_i) = x_i$. Il suffit de montrer que $a.x_i = 0$ entraîne $a.e_i = 0$. Pour cela, il suffit de montrer l'assertion suivante qui ne fait plus intervenir M : Si $a.x_i = 0$, il existe un entier $n \geqq i$ tel que $a y_i y_{i+1} \ldots y_n = 0$.

Pour cela, écrivons a comme image d'un polynôme P de $k[X_i, Y_i]$. Ainsi $a.x_i = 0$ signifie

$$PX_i = \sum_j Q_j (X_j - Y_j X_{j+1}) + \sum_h R_h Y_h^2,$$

en désignant par Q_j et R_h des polynômes en les X_i et les Y_i. Soit n le plus grand indice qui apparaît dans l'égalité ci-dessus. En remplaçant partout X_l par $Y_l Y_{l+1} \ldots Y_n X_{n+1}$, on obtient une égalité de la forme

$$P' Y_i Y_{i+1} \ldots Y_n X_{n+1} = \sum_k R'_h Y_h^2,$$

ce qui montre que $P' Y_i Y_{i+1} \dots Y_n$ est dans l'idéal (primaire) engendré par les Y_h^2. Comme a est l'image de P' dans A, on obtient l'égalité cherchée $a y_i y_{i+1} \dots y_n = 0$.

Chapitre II. — **Assassins.**

Dans ce chapitre et les suivants, tous les anneaux sont commutatifs.

1. **Généralités.**

Définition 1.1. — *Soient A un anneau, M un A-module et $\mathfrak{p}$ un idéal premier. On dit que $\mathfrak{p}$ est associé à M, s'il existe $x \in M$ tel que $\mathfrak{p}$ soit minimal parmi les idéaux premiers contenant l'annulateur de x. On appelle « assassin » de M, et on note* $\mathrm{Ass}_A(M)$ *ou* $\mathrm{Ass}(M)$, *l'ensemble des idéaux premiers associés à M.*

Bourbaki (dans [11], chap. IV, § 1, exerc. 17) ajoute le qualificatif « faible » à ces notions. Cela nous semble inutile, car, dans le cas noethérien, elles redonnent les notions classiques, et, dans le cas général, les notions classiques ont très peu d'intérêt.

Voici les principales propriétés de « Ass » telles qu'elles sont données par Bourbaki ([11], chap. IV, § 1, exerc. 17). Pour une démonstration détaillée, voir l'article de Merker [54].

Propriété 1.2. — La relation $M = 0$ équivaut à $\mathrm{Ass}(M) = \emptyset$.

Propriété 1.3. — Pour qu'un élément de A n'annule aucun élément de M, il faut et il suffit qu'il n'appartienne à aucun élément de $\mathrm{Ass}(M)$.

Propriété 1.4. — Soit $a \in A$; pour que tout élément de M soit annulé par une puissance de a, il faut et il suffit que a soit dans l'intersection des éléments de $\mathrm{Ass}(M)$.

Propriété 1.5. — Si N est un sous-module de M, on a

$$\mathrm{Ass}(N) \subset \mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(N) \cup \mathrm{Ass}(M/N).$$

Propriété 1.6. — Soient S une partie multiplicative de A, et Φ l'ensemble des idéaux premiers de A ne rencontrant pas S; l'application $\mathfrak{p} \to S^{-1}\mathfrak{p}$ est une bijection de

$$\mathrm{Ass}_A(M) \cap \Phi \qquad \text{sur} \quad \mathrm{Ass}_{S^{-1}A}(S^{-1}M).$$

Propriété 1.7. — Avec les notations de la propriété 1.6, soit N le noyau de $M \to S^{-1}M$. Alors $\mathrm{Ass}_A(M/N) = \mathrm{Ass}_A(M) \cap \Phi$, et $\mathrm{Ass}(N)$ est le complémentaire de $\mathrm{Ass}(M/N)$ dans $\mathrm{Ass}(M)$.

Propriété 1.8. — Le support de M est le spécialisé de $\operatorname{Ass}(M)$ [ensemble des idéaux premiers contenant au moins un élément de Ass (M)].

Propriété 1.9. — Si A est noethérien, $\operatorname{Ass}(M)$ est l'ensemble des idéaux premiers qui sont annulateurs d'éléments de M.

Propriété 1.10. — Si A est absolument plat (tout A-module est plat), alors $\operatorname{Ass}(A) = \operatorname{Spec}(A)$.

Propriété 1.11. — L'homomorphisme canonique

$$M \to \prod_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}(M)} M_{\mathfrak{p}}$$

est injectif.

Lemme 1.12. — *Soient A un anneau, M un A-module, $\mathfrak{p}$ un élément de $\operatorname{Ass}(M)$, minimal parmi les idéaux premiers contenant l'annulateur de l'élément x de M. Pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ contenu dans $\mathfrak{p}$, il existe un entier n et un élément $c \in A - \mathfrak{p}$ tels que $c\mathfrak{a}^n x = 0$.*

Soit $a_1, \ldots, a_p$ un système générateur de $\mathfrak{a}$. Pour tout i $(1 \leqq i \leqq p)$, il existe un entier n_i et un élément c_i de $A - \mathfrak{p}$ tels que $c_i a_i^{n_i} x = 0$ [car $\mathfrak{p}$ définit un idéal premier minimal de $A/\operatorname{ann}(x)$]. On obtient le résultat en prenant $c = c_1 \ldots c_p$ et $n = n_1 + \ldots + n_p$.

Lemme 1.13. — *Soient A un anneau, M un A-module et $\mathfrak{p}$ un élément de $\operatorname{Ass}(M)$. Pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$, contenu dans $\mathfrak{p}$, on a $(0 : \mathfrak{a})_M \neq 0$ (i. e. $\mathfrak{a}$ annule un élément non nul de M).*

Utilisons les notations du lemme 1.12. Comme $c \notin \mathfrak{p}$, on a $cx \neq 0$. Il existe un entier m_1 tel que $a_1^{m_1} cx \neq 0$ et $a_1^{m_1+1} cx = 0$. Posons $x_1 = a_1^{m_1} cx$. Définissons de même, par récurrence, x_i par les relations

$$x_i = a_i^{m_i} x_{i-1} \neq 0 \qquad \text{et} \qquad a_i^{m_i+1} x_{i-1} = 0.$$

C'est possible, avec $m_i \geqq 0$, car x_{i-1} est un multiple de cx. On a donc $x_p \neq 0$ et $\mathfrak{a} . x_p = 0$.

Corollaire 1.14. — *Soient A un anneau, M un A-module et $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini. Pour que $(0 : \mathfrak{a})_M \neq 0$, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}$ soit contenu dans un élément de $\operatorname{Ass}(M)$.*

La condition nécessaire résulte immédiatement des définitions, et la condition suffisante est le lemme 1.13.

2. Assassins et platitude.

Lemme 2.1. — *Soient M un A-module plat et $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini; si $(0 : \mathfrak{a})_M \neq 0$, on a $(0 : \mathfrak{a})_A \neq 0$.*

Soit $x \in M$ tel que $\mathfrak{a}x = 0$. Écrivons M comme limite inductive de modules libres de type fini M_k (chap. I, théor. 1.2). Il existe un indice k et un élément x_k de M_k, dont l'image dans M est x, et qui vérifie $\mathfrak{a}x_k = 0$ (puisque $\mathfrak{a}$ est de type fini). Si $x \neq 0$, on a $x_k \neq 0$ et, sur une base de M_k, x_k a un coefficient non nul a tel que $\mathfrak{a}.a = 0$.

Proposition 2.2. — *Soient M un A-module plat et $\mathfrak{p}$ un élément de* $\mathrm{Ass}(M)$. *Alors $\mathfrak{p}$ est réunion d'idéaux premiers de* $\mathrm{Ass}(A)$.

D'après la propriété 1.6, on peut supposer que A est local, d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. D'après le lemme 2.1 et le corollaire 1.14, tout élément de $\mathfrak{p}$ appartient à un élément de $\mathrm{Ass}(A)$; donc $\mathfrak{p}$ est contenu dans la réunion des éléments de $\mathrm{Ass}(A)$, et il y a égalité, car $\mathfrak{p}$ est l'idéal maximal d'un anneau local.

Corollaire 2.3. — *Si M est un A-module plat, et si* $\mathrm{Ass}(A)$ *est fini,* $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(A)$.

Corollaire 2.4. — *Si M est un A-module plat, et si A est intègre ou noethérien,* $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(A)$.

Proposition 2.5. — *Si M est un A-module plat, et si* $\mathrm{Ass}(A)$ *est quasi-compact* [*pour la topologie induite par celle de* $\mathrm{Spec}(A)$], *on a* $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(A)_{\text{gén}}$, *en désignant par* $\mathrm{Ass}(A)_{\text{gén}}$ *l'ensemble des idéaux premiers contenus dans un élément de* $\mathrm{Ass}(A)$.

Soit, *ab absurdo*, $\mathfrak{p}$ un élément de $\mathrm{Ass}(M)$ qui n'est pas dans $\mathrm{Ass}(A)_{\text{gén}}$. On a donc $\mathrm{Ass}(A) \subset \bigcup_{f \in \mathfrak{p}} D(f)$, en désignant par $D(f)$ l'ensemble des idéaux premiers ne contenant pas f. Par quasi-compacité, il existe donc un nombre fini d'éléments $f_1, \ldots, f_p$ de $\mathfrak{p}$ qui engendrent un idéal $\mathfrak{a}$ qui n'est contenu dans aucun élément de $\mathrm{Ass}(A)$. Mais comme $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$, on a

$$(0 : \mathfrak{a})_M \neq 0 \quad \text{(par le lemme 1.13)}$$

et

$$(0 : \mathfrak{a})_A \neq 0 \quad \text{(par le lemme 2.1)},$$

ce qui entraîne (corollaire 1.14) que $\mathfrak{a}$ est contenu dans un élément de $\mathrm{Ass}(A)$.

Corollaire 2.6. — *Si M est un A-module plat, et si* $\mathrm{Ass}(A)$, *muni de la topologie induite, est un espace noethérien, on a* $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(A)$.

Si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(M)$, on peut supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$, et la proposition précédente montre immédiatement que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$.

Corollaire 2.7. — *Soient A un anneau réduit, de spectre minimal compact et M un A-module plat. Alors* $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(A)$.

Cela résulte immédiatement du lemme classique suivant :

LEMME 2.8. — *Soient A un anneau réduit, et* $\mathrm{Min}(A)$ *le spectre minimal de A, i. e. l'ensemble des idéaux premiers minimaux de A muni de la topologie induite par celle de* $\mathrm{Spec}(A)$. *Alors* $\mathrm{Min}(A)$ *est un espace topologique séparé et* $\mathrm{Min}(A) = \mathrm{Ass}_A(A)$.

Soient $\mathfrak{p}$ et $\mathfrak{q}$ deux éléments distincts de $\mathrm{Min}(A)$, et f un élément qui appartient à $\mathfrak{p}$ et non à $\mathfrak{q}$. Comme $\mathfrak{p}$ est minimal, il existe un entier n et un élément $g \notin \mathfrak{p}$, tels que $gf^n = 0$. Ceci montre que

$$\mathfrak{p} \in D(g), \qquad \mathfrak{q} \in D(f) \qquad \text{et} \qquad D(f) \cap D(g) = \emptyset,$$

c'est-à-dire que $\mathrm{Min}(A)$ est séparé.

On a toujours $\mathrm{Min}(A) \subset \mathrm{Ass}_A(A)$, car $(0) = \mathrm{ann}(1)$. Démontrons l'inclusion réciproque : supposons A réduit, et soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$. Par la propriété 1.6, on peut supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$; ainsi il existe un $x \in A$ non nul, tel que tout élément de $\mathfrak{p}$ a une puissance qui annule x. Si $x \in \mathfrak{p}$, x est donc nilpotent. Comme A est réduit, x est donc inversible, et $\mathfrak{p} = (0)$.

COROLLAIRE 2.9. — *Soient A un anneau cohérent réduit et M un A-module plat. On a* $\mathrm{Ass}(M) \subset \mathrm{Ass}(A)$.

En effet, $\mathrm{Min}(A)$ est compact (*cf.* chap. V, 3.10 et OLIVIER [45]).

3. Changements d'anneau de base.

Dans ce paragraphe, $f : A \to B$ désigne un homomorphisme d'anneaux, et ${}^a f : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$, l'application continue associée. Si $B = S^{-1}A$, on a déjà comparé, dans la propriété 1.6, les ensembles $\mathrm{Ass}_A(.)$ et $\mathrm{Ass}_B(.)$. Voyons ce qui peut être dit dans le cas général.

PROPOSITION 3.1. — *Si M est un B-module, on a* $\mathrm{Ass}_A(M) \subset {}^a f(\mathrm{Ass}_B(M))$.

Soit $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$. En utilisant la propriété 1.6, et en tensorisant par $A_{\mathfrak{p}}$, on peut supposer A local d'idéal maximal $\mathfrak{p}$. Il existe donc un x de M tel que $\mathfrak{p} = \mathrm{rac}(\mathrm{ann}_A(x))$, en désignant par $\mathrm{rac}(\mathfrak{a})$ la racine de l'idéal $\mathfrak{a}$. Donc $\mathfrak{p}B \subset \mathrm{rac}(\mathrm{ann}_B(x))$; par conséquent, si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B, minimal parmi ceux qui contiennent $\mathrm{ann}_B(x)$, on a $\mathfrak{p} = {}^a f(\mathfrak{q})$.

PROPOSITION 3.2. — *Soit M un B-module. Si f est plat, on a* $\mathrm{Ass}_A(M) = {}^a f(\mathrm{Ass}_B(M))$.

L'application canonique $\mathrm{id}(M) \otimes_A f : M \to M \otimes_A B$ est injective, car elle admet la rétraction définie par $x \otimes b \mapsto bx$. En utilisant le corollaire 2 de la proposition 12 de BOURBAKI ([11], chap. I, § 2, n° 11), on voit que, pour tout x de M, on a

$$B . \mathrm{ann}_A(x) = \mathrm{ann}_B(x \otimes 1) = \mathrm{ann}_B(x).$$

Posons $A' = A/\mathrm{ann}_A(x)$ et $B' = B/\mathrm{ann}_B(x)$. Ce qui précède montre que $B' = B \otimes_A A'$, et donc que le morphisme $f' = f \otimes_A A' : A' \to B'$ est plat. Soient $\mathfrak{q}'$ un idéal premier minimal de B', et $\mathfrak{p}' = f'^{-1}(\mathfrak{q}')$. Le morphisme canonique de $A'_{\mathfrak{p}'}$ dans $B'_{\mathfrak{q}'}$ est plat et local, donc injectif Comme $\mathfrak{q}' B'_{\mathfrak{q}'}$ est un nilidéal, il en est de même de son image réciproque $\mathfrak{p}' A'_{\mathfrak{p}'}$. Ceci montre que $\mathfrak{p}'$ est un idéal premier minimal de A', et donc que ${}^a f(\mathrm{Ass}_B(M)) \subset \mathrm{Ass}_A(M)$. L'inclusion inverse est la proposition 3.1.

PROPOSITION 3.3. — *Soit M un A-module. Supposons f plat. Pour que l'application canonique $M \otimes_A f : M \to M \otimes_A B$ soit injective, il faut et il suffit que* $\mathrm{Ass}_A(M) \subset {}^a f(\mathrm{Spec}(B))$ [*on peut remplacer ce dernier ensemble par* $\mathrm{Ass}_A(M \otimes_A B) = {}^a f(\mathrm{Ass}_B(M \otimes_A B))$].

Si $M \subset M \otimes_A B$, on a, sans hypothèse de platitude,

$$\mathrm{Ass}_A(M) \subset \mathrm{Ass}_A(M \otimes_A B) \subset {}^a f(\mathrm{Ass}_B(M \otimes_A B)),$$

d'après la proposition 3.1 et la propriété 1.5.

Réciproquement, si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)$, on a $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$, avec $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$. Le morphisme $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ est fidèlement plat, et on a donc BOURBAKI [11], chap. I, § 3, n° 5, prop. 8)

$$M \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \subset M \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}} = M \otimes_A B_{\mathfrak{q}}.$$

On obtient donc (prop. 1.11) le diagramme commutatif suivant qui nous donne le résultat :

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r] \arrow[d, "\cap"] & M \otimes_A B \arrow[d] \\
\prod\limits_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(M)} M \otimes_A A_{\mathfrak{p}} \arrow[r, "\subset"] & \prod\limits_{\mathrm{Ass}_A(M)} M \otimes_A B_{\mathfrak{q}}
\end{tikzcd}$$

REMARQUES 3.4.

(i) Si l'on fait $M = A$ dans la proposition 3.3, on trouve un résultat qui permet de généraliser aux préschémas la notion de morphisme plat et injectif d'anneaux sans passer par les faisceaux d'algèbres (en effet, l'assassin, qui est une notion locale, se généralise bien aux préschémas).

(ii) Quand f est plat, on aimerait avoir l'inclusion

$$\mathrm{Ass}_A(M) \supset \mathrm{Ass}_A(M \otimes_A B),$$

inverse de celle envisagée dans la proposition 3.3. Elle est fausse même si $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ (on trouve un contre-exemple dans [55]). On possède cependant tous les résultats du paragraphe 2, ainsi que le suivant :

PROPOSITION 3.5. — *Soit $f : A \to B$ un homomorphisme plat d'anneaux tel que B soit réduit. Alors on a*

$$\mathrm{Ass}_A(B) = {}^a f(\mathrm{Ass}_B(B)) \subset \mathrm{Ass}_A(A).$$

Tout élément $\mathfrak{q}$ de $\mathrm{Ass}_B(B)$ est un idéal premier minimal (lemme 2.8). Si $\mathfrak{q}$ est un tel idéal, posons $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$. Le morphisme $A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}$ est plat et local. Comme $\mathfrak{q}$ est minimal, $B_{\mathfrak{q}}$ est un corps, et donc aussi $A_{\mathfrak{p}}$, ce qui montre que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$.

4. Anneaux autoassociés.

DÉFINITION 4.1. — *Un anneau est dit autoassocié s'il est local et si son idéal maximal est dans* $\mathrm{Ass}_A(A)$.

Nous avons vu (corollaire 1.14) qu'un anneau autoassocié possède la propriété (P) :

(P) *Tout idéal propre de type fini admet un annulateur non nul.*

Nous avons vu également (lemme 2.1), qu'un anneau local, dont l'idéal maximal est dans l'assassin d'un module plat, possède la propriété (P).
Aussi, pour plus de généralité, nous allons étudier dans ce paragraphe les anneaux locaux possédant la propriété (P).

LEMME 4.2. — *Soient A un anneau local possédant la propriété* (P) *et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Si L est un module libre de type fini, $\mathfrak{m}L$ est exactement l'ensemble des éléments de L qui ne sont pas libres.*

Soit $\mathcal{B}$ une base de L. Si $x \in \mathfrak{m}L$, l'idéal engendré par les coefficients de x sur $\mathcal{B}$ est contenu dans $\mathfrak{m}$. Il admet donc un annulateur non nul qui annule x. Ainsi x n'est pas libre. Inversement, si $x \in L - \mathfrak{m}L$, un des coefficients de x est inversible, et x est libre.

PROPOSITION 4.3. — *Soient A un anneau local possédant la propriété* (P) *et $\mathfrak{m}$ son idéal maximal. Pour tout module plat M, l'ensemble des éléments de M, qui ne sont pas libres, est $\mathfrak{m}M$.*

Si $x \in \mathfrak{m}M$, on a $x = \sum m_i x_i$, avec $m_i \in \mathfrak{m}$. L'idéal engendré par les m_i admet un annulateur qui annule x. Réciproquement, on peut écrire M comme limite inductive de modules libres de type fini M_i. Si $x \in M$ n'est pas libre, il existe $a \in A$ non nul tel que $ax = 0$. On peut donc trouver un indice i et un $x_i \in M_i$ dont l'image dans M est x et qui vérifie $ax_i = 0$. Le lemme 4.2 nous dit que $x_i \in \mathfrak{m}M_i$, et donc que $x \in \mathfrak{m}M$.
Rappelons que, pour un anneau local A, $fPD(A) = 0$ signifie que le quotient d'un module libre de type fini par un sous-module libre de type fini est toujours libre (*cf.* BASS [5]).

PROPOSITION 4.4. — *Pour qu'un anneau local A possède la propriété* (P), *il faut et il suffit que $fPD(A) = 0$.*

Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini de A engendré par $a_1, \ldots, a_n$, on peut définir une application linéaire $f : A \to A^n$ par $f(1) = (a_1, \ldots, a_n)$. Le noyau de f est ann $(\mathfrak{a})$. Si ann $(\mathfrak{a}) = 0$, et si $\mathfrak{a}$ est contenu dans l'idéal maximal de A, le conoyau de f n'est pas libre. En effet, en tensorisant f par le corps résiduel de A, on obtient une application nulle, et donc non injective, ce qui montre que Coker (f) n'est pas plat. La condition est donc suffisante.

Réciproquement, supposons que A possède la propriété (P). Soit $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Si $f : M \to N$ est un homomorphisme injectif de modules libres de type fini, on a, grâce au lemme 4.2, $\mathfrak{m}M = \mathfrak{m}N \cap M$. Ceci montre que $\mathrm{Tor}_1^A(N/M, A/\mathfrak{m}) = 0$, et donc que N/M est libre (Bourbaki [11], chap. II, § 3, n° 2, corollaire 2 de la proposition 5).

Proposition 4.5. — *Pour qu'un anneau local possède la propriété* (P), *il faut et il suffit que le quotient d'un module plat par un sous-module libre soit toujours plat.*

Il suffit de montrer que la condition est nécessaire. Soit, donc, L un sous-module libre d'un module plat M. On peut écrire L comme limite inductive filtrante de ses sous-modules libres de type fini L_i. Comme $M/L = \varinjlim (M/L_i)$, on est ramené au cas où L est de type fini. On peut écrire M comme limite inductive filtrante de modules libres de type fini M_j. Pour j assez grand, l'injection de L dans M se factorise à travers M_j. Ainsi $M/L = \varinjlim_{j' \geqq j} (M_{j'}/L)$. On est donc ramené au cas où L et M sont libres de type fini, et on a vu (prop. 4.4) que M/L est alors libre.

Remarque 4.6. — Si A possède la propriété (P), il est faux que le quotient d'un module plat par un sous-module plat est toujours plat. On en trouve un exemple sur un anneau noethérien autoassocié dans l'exemple 4.2 du chapitre I. On a cependant le résultat suivant :

Proposition 4.7. — *Soit A un anneau local d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et possédant la propriété* (P). *Si M est le quotient d'un module plat P par un sous-module plat P', on a* $\mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}^n, M) = 0$ *pour tout* $n \geqq 1$.

Pour $n = 1$, cela résulte immédiatement de l'égalité $\mathfrak{m}P' = \mathfrak{m}P \cap P'$, qui est une conséquence triviale de la proposition 4.3.

On en déduit que, pour tout n, on a $\mathrm{Tor}_1^A(\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}, M) = 0$, puisque $\mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1}$ est somme directe de modules isomorphes à $A/\mathfrak{m}$. De la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{m}^n/\mathfrak{m}^{n+1} \to A/\mathfrak{m}^{n+1} \to A/\mathfrak{m}^n \to 0$$

on déduit donc la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}^{n+1}, M) \to \mathrm{Tor}_1^A(A/\mathfrak{m}^n, M).$$

Ceci nous donne le résultat, par récurrence sur n.

CHAPITRE III. — Algèbres universelles.

1. Rappels.

Par « algèbre universelle », nous entendons l'un des trois foncteurs « algèbre tensorielle » (noté T), « algèbre extérieure » (noté Λ) et « algèbre symétrique » (noté S) ([1]). Ces trois foncteurs sont les adjoints des foncteurs d'oubli à valeur dans la catégorie des modules et ayant respectivement pour source la catégorie des algèbres associatives, des algèbres alternées, des algèbres commutatives.

La plupart des propriétés classiques des trois foncteurs considérés se déduisent aisément de cette propriété d'adjonction. Par exemple, en désignant par U un des trois foncteurs universels, on a :

1.1. *Additivité.* — Les trois foncteurs considérés commutent avec les sommes directes. Ainsi on a

$$\Lambda(M \oplus N) = \Lambda(M) \otimes \Lambda(N) \qquad \text{et} \qquad S(M \oplus N) = S(M) \otimes S(N).$$

Nous utiliserons aussi le signe $\otimes$ pour la somme directe de deux algèbres associatives, et écrirons donc quelquefois $T(M \oplus N) = T(M) \otimes T(N)$, bien que le module sous-jacent à $T(M \oplus N)$ ne soit pas le produit tensoriel des modules sous-jacents à $T(M)$ et à $T(N)$.

1.2. *Exactitude à droite.* — Si $0 \to M \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} P \to 0$ est une suite exacte de modules, $U(v)$ est surjectif, et son noyau est l'idéal bilatère de $U(N)$ engendré par les images des éléments dont la composante de degré 0 est nulle. Ceci peut s'exprimer en disant que la suite $U(M) \to U(N) \to U(P) \to U(0)$ est exacte dans la catégorie des algèbres graduées, et c'est ce qui motive le nom donné à cette propriété ([2]).

1.3. *Compatibilité avec les limites inductives.* — On a toujours $U(\varinjlim M_i) \simeq \varinjlim U(M_i)$, au sens des limites inductives dans les catégories. Si les limites inductives sont filtrantes, l'égalité est vraie ensemblistement.

1.4. *Changement de base.* — Si $A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, on a toujours

$$B \otimes_A U_A(M) \simeq U_B(B \otimes_A M).$$

1.5. *Symétrisation et antisymétrisation.* — Terminons ces rappels par des notions moins directement liées aux propriétés d'adjonction, à savoir la symétrisation et l'antisymétrisation.

([1]) Bien entendu nous faisons ici un abus de langage, un foncteur n'étant pas une algèbre. Aussi mettons-nous toujours des guillemets pour désigner ces foncteurs.

([2]) *Attention*, cette suite n'est pas exacte dans la catégorie des modules.

Soit, pour tout A-module M,

$$p: \quad T_A(M) \to S_A(M) \quad [\text{resp. } q: \quad T_A(M) \to \Lambda_A(M)]$$

l'homomorphisme canonique, adjoint de l'oubli de la commutativité (resp. alternance). Les homomorphismes p et q, restreints à l'ensemble des éléments homogènes de degré n sont définis par

$$p_n(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_1 \ldots x_n \qquad \text{et} \qquad q_n(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n.$$

Les opérateurs de symétrisation et d'antisymétrisation sont presque les inverses de p et de q. Ce sont les homomorphismes *de modules* $s_n : S^n(M) \to T^n(M)$ et $t_n : \Lambda^n(M) \to T^n(M)$ définis respectivement par

$$s_n(x_1 \ldots x_n) = \sum x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}$$

et

$$t_n(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \sum \operatorname{sg}(\sigma)\, x_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\sigma(n)}.$$

les deux sommes étant prises sur l'ensemble des permutations σ de $\{1, \ldots, n\}$ et $\operatorname{sg}(\sigma)$ désignant la signature de la permutation σ.

1.6. On a immédiatement

$$p_n \circ s_n = n! \qquad \text{et} \qquad q_n \circ t_n = n!$$

Le but de ce chapitre est d'étudier le problème suivant : soit $0 \to M \xrightarrow{u} N \to P \to 0$ une suite exacte de modules. A quelles conditions de platitude, $U(u)$ est-il une injection ? Nous verrons que la solution est satisfaisante pour T et Λ, mais non pour S.

2. **Applications du chapitre I.**

LEMME 2.1. — *Si $u : M \to N$ est un homomorphisme de A-modules faisant de M un facteur direct de N, les morphismes $T(u)$, $S(u)$ et $\Lambda(u)$ sont injectifs, et admettent des rétractions.*

En effet, u admet une rétraction v telle que $v \circ u = \mathrm{id}$. Donc, U désignant un des trois foncteurs T, S, Λ, on a

$$U(v) \circ U(u) = \mathrm{id},$$

et $U(u)$ est injectif.

PROPOSITION 2.2. — *Si $u : M \to N$ est une injection pure de A-modules, $T(u)$, $S(u)$ et $\Lambda(u)$ sont des injections.*

Par le théorème 2.3 du chapitre I, la suite

$$0 \to M \to N \to N/M \to 0$$

est limite inductive de suites exactes scindées. Il suffit donc d'appliquer 1.3 et le lemme 2.1.

PROPOSITION 2.3. — *Si M est un A-module plat, $T(M)$, $S(M)$ et $\Lambda(M)$ sont des A-modules plats.*

Si M est un module libre, $T(M)$, $S(M)$ et $\Lambda(M)$ sont des modules libres. Le résultat est donc une conséquence immédiate du théorème 1.2 du chapitre I et de 1.3.

COROLLAIRE 2.4. — *Si A est un anneau intègre et M un A-module plat, $S(M)$ est un anneau intègre, et $T(M)$ un anneau sans diviseurs de* o.

Soit U un de ces deux foncteurs. Par la proposition 2.3, $U_A(M)$ est sans torsion et donc contenu dans $U_A(M)\otimes_A K$, en désignant par K le corps des fractions de A. Mais, par 1.4,

$$U_A(M)\otimes_A K \simeq U_K(M\otimes_A K).$$

On obtient le résultat, car $U_K(L)$ est sans diviseurs de zéro quel que soit le K-espace vectoriel L. En effet, si $U=S$, $S_K(L)$ est une algèbre de polynômes, et si $U=T$, $T_K(L)$ est une algèbre de mots.

LEMME 2.5. — *Si M est un A-module plat, $t_n : \Lambda^n(M)\to T^n(M)$ est une injection.*

Grâce au caractère fonctoriel de t_n, à 1.3 et au théorème 1.2 du chapitre I, il suffit de démontrer ce lemme quand M est libre de type fini. Soit, donc, $e_1, \ldots, e_p$ une base de M. Les $e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_n}$ $(1\leq i_1<\ldots<i_n\leq p)$ forment une base de $\Lambda^n(M)$, et les $e_{i_1}\otimes\ldots\otimes e_{i_n}$ $(1\leq i_1\leq p, \ldots, 1\leq i_n\leq p)$ une base de $T^n(M)$. Les lignes de la matrice de t_n sur ces bases ont au plus un élément non nul, qui est alors égal à 1. Ceci démontre que t_n est bien une injection.

PROPOSITION 2.6. — *Si M et N sont deux A-modules plats et $u : M\to N$ un homomorphisme injectif, alors $T(u)$ et $\Lambda(u)$ sont des injections.*

Par la proposition 2.3, $T^n(M)$ et $T^n(N)$ sont plats pour tout n. On en déduit que les applications

$$u_i = T^{i-1}(M)\otimes u\otimes T^{n-i}(N) : T^i(M)\otimes T^{n-i}(N)\to T^{i-1}(M)\otimes T^{n-i+1}(N)$$

sont injectives. Il en est donc de même de

$$T^n(u) = u_1\circ\ldots\circ u_n.$$

L'assertion relative à Λ s'en déduit grâce au diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Lambda^n(M) & \xrightarrow{\Lambda^n(u)} & \Lambda^n(N) \\ {\scriptstyle t_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_n} \\ T^n(M) & \xrightarrow{T^n(u)} & T^n(N) \end{array}$$

En effet, la flèche de gauche est injective par le lemme 2.5.

LEMME 2.7. — *Si A est un anneau sans* **Z**-*torsion* (**Z**-*plat*) *et M un A-module plat,* $s_n : S^n(M) \to T^n(M)$ *est une injection.*

En effet, M est un **Z**-module plat. La multiplication par $n!$ est donc injective dans M. Le résultat provient alors de l'égalité $p_n \circ s_n = n!$ (1.6).

PROPOSITION 2.8. — *Soient A un anneau sans* **Z**-*torsion, M et N des A-modules plats et $u : M \to N$ un morphisme injectif. Alors $S(u)$ est une injection.*

La démonstration est identique à celle faite pour Λ dans la proposition 2.6.

3. Applications du chapitre II.

Le but de ce paragraphe est d'essayer de supprimer l'hypothèse sur A dans l'énoncé de la proposition 2.8. Nous n'y arriverons d'ailleurs pas complètement. La méthode que nous utiliserons sera d'appliquer la propriété 1.11 du chapitre II pour se ramener au cas où A est autoassocié (chap. II, définition 4.1).

DÉFINITION 3.1. — *Un A-module M est dit ponctuellement libre, si pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de A, le localisé $M_{\mathfrak{p}}$ est libre. L'expression localement libre signifie, contrairement à l'usage habituel, que le faisceau de* Spec (A)-*modules $\tilde{M}$ est localement libre.*

Rappelons qu'un module projectif est ponctuellement, mais non nécessairement, localement libre (KAPLANSKI [30]). Il en est de même d'un module plat et de type fini (BOURBAKI [11], chap. II, § 3, exerc. 3 *e*).

LEMME 3.2. — *Soient A un anneau autoassocié, M un module libre, N un module plat et $u : M \to N$ un homomorphisme injectif; alors $S(u)$ est une injection.*

En effet, u est pur par la proposition 4.5 du chapitre II; donc $S(u)$ est injectif par la proposition 2.2.

PROPOSITION 3.3. — *Soient M un module ponctuellement libre, N un module plat et $u : M \to N$, un homomorphisme injectif; alors $S(u)$ est une injection.*

Soit K le noyau de $S(u)$. On a $\mathrm{Ass}(K) \subset \mathrm{Ass}(S(M))$. On a également $\mathrm{Ass}(S(M)) \subset \mathrm{Ass}(A)$. En effet, comme M est ponctuellement libre, il en est de même pour $S(M)$. Donc, si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}\, S(M)$, $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ appartient à l'assassin d'un $A_{\mathfrak{p}}$ module libre, c'est-à-dire $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \in \mathrm{Ass}_{A_{\mathfrak{p}}}(A_{\mathfrak{p}})$, ce qui signifie que $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(A)$. Ainsi $\mathrm{Ass}(K) \subset \mathrm{Ass}(A)$.

D'autre part, si $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, on a la suite exacte (1.4)

$$0 \to K_{\mathfrak{p}} \to S_{A_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) \to S_{A_{\mathfrak{p}}}(N_{\mathfrak{p}}).$$

On en déduit, par le lemme 3.2, que, si $\mathfrak{p}\in \mathrm{Ass}(A)$, on a $K_{\mathfrak{p}}=0$. Ceci entraîne $K=0$ (chap. II, prop. 1.11).

Examinons maintenant le cas des anneaux noethériens. En fait, nous obtiendrons des résultats pour une classe d'anneaux beaucoup plus importante. Pour simplifier les énoncés, nous supposerons, dans tous les lemmes suivants, que A est un anneau noethérien local, autoassocié, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, que M et N sont des A-modules plats, et que $u: M\to N$ est un homomorphisme injectif.

LEMME 3.4. — *Si A est artinien, $S(u)$ est injectif et admet une rétraction.*

En effet, tout A-module plat est libre (BOURBAKI [11], chap. II, § 3, n° 2, corollaire 2 de la proposition 5); or N/M est plat (chap. II, prop. 4.5); il est donc libre, et on peut appliquer le lemme 2.1.

LEMME 3.5. — *Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal formé des $x\in A$ tels que la racine de* $\mathrm{ann}(x)$ *contienne $\mathfrak{m}$. Il existe un entier d tel que* $\mathfrak{a}=\mathrm{ann}(\mathfrak{m}^d)=\mathrm{ann}(\mathfrak{m}^{d+k})$ *pour tout entier k.*

Comme A est noethérien, la suite d'idéaux $\mathrm{ann}(\mathfrak{m})\subset \mathrm{ann}(\mathfrak{m}^2)\subset\dots$ est stationnaire. Il existe donc un entier d tel que, pour tout $i\geq d$,

$$\mathrm{ann}(\mathfrak{m}^d)=\mathrm{ann}(\mathfrak{m}^i).$$

On a $\mathrm{ann}(\mathfrak{m}^d)\subset\mathfrak{a}$, par définition de $\mathfrak{a}$. D'autre part, si $x\in\mathfrak{a}$, tout élément de $\mathfrak{m}$ a une puissance qui annule x. Comme $\mathfrak{m}$ est de type fini, on en déduit qu'il existe un $i\geq d$ tel que $\mathfrak{m}^i x=0$. Donc

$$\mathfrak{a}\subset \mathrm{ann}(\mathfrak{m}^i)=\mathrm{ann}(\mathfrak{m}^d).$$

LEMME 3.6. — *Posons, avec les notations du lemme* 3.5, $B=A/\mathfrak{a}$. *L'anneau B n'est pas autoassocié.*

Il suffit évidemment de montrer que $\mathfrak{m}\notin \mathrm{Ass}_A(B)$. Mais si $\mathfrak{m}$ appartenait à $\mathrm{Ass}_A(B)$, il existerait un $x\in A-\mathfrak{a}$, tel $\mathfrak{m}x\subset\mathfrak{a}$ (chap. II, prop. 1.9). On aurait donc $\mathfrak{m}^{d+1}x=0$, c'est-à-dire $x\in\mathfrak{a}$, ce qui est absurde.

LEMME 3.7. — *Avec les notations des lemmes* 3.5 *et* 3.6,

$$u\otimes_A B: M\otimes_A B\to N\otimes_A B$$

est une injection.

Soit x un élément de M tel que $u(x)\in\mathfrak{a}N$. Il s'agit de démontrer que $x\in\mathfrak{a}M$. Mais $\mathfrak{m}^d u(x)=0$ (lemme 3.5); donc $\mathfrak{m}^d x=0$. Si x n'appartenait pas à $\mathfrak{a}M$, on aurait $\mathfrak{m}\in \mathrm{Ass}_A(M/\mathfrak{a}M)$, et donc $\mathfrak{m}/\mathfrak{a}\mathfrak{m}\in \mathrm{Ass}_B(M/\mathfrak{a}M)$. Comme M est plat et B est noethérien, cela ne peut être, par le corollaire 2.4 du chapitre II et le lemme 3.6.

LEMME 3.8. — *Avec les notations du lemme* 3.5,

$$S_A(u) \otimes_A \mathfrak{a} : S_A(M) \otimes_A \mathfrak{a} \to S_A(N) \otimes_A \mathfrak{a}$$

est une injection.

Posons $C = A/\mathfrak{m}^d$. Comme $\mathfrak{m}^d.\mathfrak{a} = o$, on obtient la suite d'isomorphismes canoniques de foncteurs :

$$S_A(.) \otimes_A \mathfrak{a} \simeq S_A(.) \otimes_A (C \otimes_A \mathfrak{a}) \simeq S_C(. \otimes_A C) \otimes_A \mathfrak{a}.$$

Comme C est artinien, $S_C(u \otimes_A C)$ admet une rétraction (lemme 3.4). Ceci entraîne que $S_C(u \otimes_A C) \otimes_A \mathfrak{a}$ est une injection, ce qui démontre le résultat.

Nous avons maintenant assez de matériel pour démontrer le résultat essentiel de ce paragraphe.

PROPOSITION 3.9. — *Soient A un anneau M et N deux modules plats et $u : M \to N$ un homomorphisme injectif. Si* $\mathrm{Ass}_A(A)$ *est quasi compact, et si, pour tout* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$, $A_\mathfrak{p}$ *est noethérien, alors $S_A(u)$ est une injection.*

Démontrons d'abord que, si P est un module plat, $\mathrm{Ass}_A(P) \subset \mathrm{Ass}_A(A)$. Si $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A(P)$, il existe $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$ tel que $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{p}$ (chap. II, prop. 2.5). Comme $A_\mathfrak{p}$ est noethérien, et comme $\mathfrak{q} A_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(P_\mathfrak{p})$, on a

$$\mathfrak{q} A_\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_{A_\mathfrak{p}}(A_\mathfrak{p}) \quad \text{(chap. II, cor. 2.4).}$$

On en déduit immédiatement (chap. II, prop. 1.6) que $\mathfrak{q} \in \mathrm{Ass}_A(A)$.

Ramenons-nous maintenant au cas où A est noethérien autoassocié; soit K le noyau de $S(u)$. Par la propriété 1.11 du chapitre II, il suffit de montrer que $K_\mathfrak{p} = o$ pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$. En effet,

$$\mathrm{Ass}_A(K) \subset \mathrm{Ass}_A(S_A(M)) \subset \mathrm{Ass}_A(A),$$

et K est contenu dans le produit des $K_\mathfrak{p}$ pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$. Comme $K_\mathfrak{p}$ est le noyau de $S_{A_\mathfrak{p}}(u \otimes_A A_\mathfrak{p})$, on s'est bien ramené au cas noethérien autoassocié (*cf.* la démonstration de la proposition 3.3).

Supposons donc A noethérien autoassocié. Nous allons terminer la démonstration par récurrence sur la dimension de A, en utilisant les notations et résultats des lemmes 3.4 à 3.8.

Comme $S_A(M)$ est plat, on déduit de la suite exacte

$$o \to \mathfrak{a} \to A \to B \to o$$

le diagramme commutatif suivant dont les lignes sont exactes :

$$\begin{array}{ccccccccc}
o & \longrightarrow & S_A(M) \otimes_A \mathfrak{a} & \longrightarrow & S_A(M) & \longrightarrow & S_B(M \otimes_A B) & \longrightarrow & o \\
 & & \Big\downarrow{\scriptstyle S_A(u) \otimes_A \mathfrak{a}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle S_A(u)} & & \Big\downarrow{\scriptstyle S_B(u \otimes_A B)} & & \\
o & \longrightarrow & S_A(N) \otimes_A \mathfrak{a} & \longrightarrow & S_A(N) & \longrightarrow & S_B(N \otimes_A B) & \longrightarrow & o
\end{array}$$

Pour démontrer que $S_A(u)$ est une injection, il suffit de démontrer que $S_A(u) \otimes_A \mathfrak{a}$ et $S_B(u \otimes_A B)$ sont des injections. Pour la première application, cela a été fait dans le lemme 3.8. Pour la deuxième, cela résulte de l'hypothèse de récurrence, car les anneaux autoassociés, localisés de B, sont de dimension strictement inférieure à celle de A (lemme 3.6).

COROLLAIRE 3.10. — *Si A est réduit, l'hypothèse de platitude sur N est inutile dans l'énoncé de la proposition* 3.9.

En effet, si A est réduit, pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_A(A)$, l'anneau $A_\mathfrak{p}$ est un corps et $N_\mathfrak{p}$ est un $A_\mathfrak{p}$ module plat. Or nous n'avons pas utilisé la platitude de N pour se ramener au cas autoassocié.

COROLLAIRE 3.11. — *Soient A un anneau noethérien, M et N deux modules plats, et $u : M \to N$ un homomorphisme injectif. Alors $S_A(u)$ est une injection.*

COROLLAIRE 3.12. — *Soient A un anneau, M un module plat, N un module, $u : M \to N$ un homomorphisme injectif. Alors $S_A(u)$ est une injection dans chacun des cas suivants :*

(i) *A est réduit, de spectre minimal compact;*
(ii) *A est absolument plat;*
(iii) *A est intègre* (3);
(iv) *A est cohérent et réduit.*

Pour (i), cela résulte du corollaire 3.10 et du lemme 2.8 du chapitre II. Les assertions (ii) et (iii) découlent de (i). Pour (iv), *voir* OLIVIER [45].

4. Une analogie : Anneaux locaux complets de dimension zéro.

Soient M et N deux A-modules plats et $u : M \to N$ un homomorphisme injectif. Nous avons trouvé deux types de conditions sur A qui permettent d'affirmer que $S(u)$ est une injection : la première est une condition de caractéristique : A sans $\mathbf{Z}$-torsion (prop. 2.8); les secondes sont des conditions de finitude : A noethérien, A intègre, etc. (cor. 3.11 et 3.12). *A priori* ces conditions n'ont aucun rapport entre elles, et cela peut suggérer que $S(u)$ est une injection.

Cependant, en examinant d'autres problèmes, voisins de ceux étudiés au chapitre V, nous avons rencontré l'assertion suivante, vraie dans tous les cas envisagés ci-dessus, mais fausse en général. Ceci laisse à

---

(3) Dans un papier secret, D. FERRAND vient de montrer le résultat plus précis suivant :

Soit A un anneau dont l'anneau total des fractions K est noethérien. Pour que toute injection de A-modules $M' \to M$, avec M' plat, se prolonge en une injection des algèbres symétriques, il faut et il suffit que K soit de Gorenstein.

penser que la conjecture précédente est fausse. Il faut cependant souligner que le seul rapport que nous connaissons entre ce qui va suivre et les algèbres symétriques est l'analogie que nous venons de mentionner. Voici l'assertion annoncée :

Proposition 4.1. — *Soit A un anneau local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$, séparé pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, et dont le complété est de dimension* 0 *(à la Krull). Alors A est discret pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, s'il est noethérien ou de caractéristique* 0 *(s'il contient $\mathbf{Z}$, il contient $\mathbf{Q}$) mais cela est faux en général).*

Cette proposition demande quelques préliminaires et ne sera démontrée qu'à la fin de ce paragraphe.

Définition 4.2. — *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal. Nous dirons que $\mathfrak{a}$ est quasi-nilpotent s'il existe un entier n tel que l'on ait $x^n = 0$ pour tout x de $\mathfrak{a}$. Le plus petit de ces entiers n sera appelé l'exposant de $\mathfrak{a}$.*

Proposition 4.3. — *Si A est un anneau sans $\mathbf{Z}$-torsion, ou si A est un anneau noethérien, tout idéal quasi-nilpotent est nilpotent.*

La deuxième assertion est évidente, car un idéal quasi-nilpotent est un nilidéal.

Pour démontrer la première assertion, il suffit de montrer que si $\mathfrak{a}$ est un idéal quasi-nilpotent d'exposant inférieur ou égal à n, et si $x_1, \ldots, x_n$ sont n éléments de $\mathfrak{a}$, on a $x_1 \ldots x_n = 0$. Or on a déjà $(x_1 + \ldots + x_n)^n = 0$. En développant $(x_1 + \ldots + x_n)^n$, on voit que les termes x_i^n sont nuls. De même, la somme S des termes ne contenant que les lettres $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ est nulle, car $S = (x_{i_1} + \ldots + x_{i_k})^n$. Par récurrence sur k, on en déduit immédiatement que la somme des termes contenant toutes les lettres $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$, mais aucune autre, est nulle. En faisant $k = n$, il vient $n!\, x_1 \ldots x_n = 0$ et donc $x_1 \ldots x_n = 0$.

Proposition 4.4. — *La conclusion de la proposition* 4.3 *est fausse sans hypothèse sur A.*

Soient k un corps de caractéristique 2, $(X_i)_{i \in \mathbf{N}}$ des indéterminées, et A le quotient de $k[X_i]_{i \in \mathbf{N}}$ par l'idéal engendré par les X_i^2. Désignons par x_i l'image de X_i dans A. Comme $\left(\sum \lambda_i x_i\right)^2 = \sum \lambda_i^2 x_i^2$, l'idéal maximal de A est quasi-nilpotent d'exposant 2. Mais il n'est pas nilpotent, car, pour tout n, on a $x_1 \ldots x_n \neq 0$.

Lemme 4.5. — *Soient $\mathfrak{a}$ un idéal et n un entier; pour que $\mathfrak{a}$ soit quasi-nilpotent, il faut et il suffit que $\mathfrak{a}^n$ le soit.*

C'est immédiat.

Lemme 4.6. — *Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de A non quasi-nilpotent, x un élément non nul de $\mathfrak{a}$, et i et j deux entiers tels que $x^j = 0$, $x^{j-1} \in \mathfrak{a}^i$ et $x^{j-1} \notin \mathfrak{a}^{i+1}$. Alors il existe un élément $y \in \mathfrak{a}$, tel que $y \equiv x \pmod{\mathfrak{a}^{i+1}}$ et que $y^j \neq 0$.*

D'après le lemme 4.5, il existe un élément $z \in \mathfrak{a}^{i+1}$ tel que $z^{2j-1} \neq 0$. Il suffit de prendre $y = x + z$. En effet, si $y^j = 0$, on aurait $z^{2j-1} = (y - x)^{2j-1} = 0$.

PROPOSITION 4.7. — *Soient A un anneau et $\mathfrak{a}$ un nilidéal. Si A est séparé et complet pour la topologie $\mathfrak{a}$-adique, $\mathfrak{a}$ est quasi-nilpotent.*

Supposons que $\mathfrak{a}$ ne soit pas quasi-nilpotent. Le lemme 4.6 et la séparation de A nous permettent de construire une suite (x_n) d'éléments de $\mathfrak{a}$, et deux suites d'entiers strictement croissantes (i_n) et (j_n) telles que

$$x_n^{j_n} = 0, \qquad x_n^{j_n - 1} \in \mathfrak{a}^{i_n}, \qquad x_n^{j_n - 1} \notin \mathfrak{a}^{i_n + 1}, \qquad x_n \equiv x_{n+1} \quad (\operatorname{mod} \mathfrak{a}^{i_n + 1}).$$

La suite (x_n) est une suite de Cauchy; soit y sa limite. Comme $\mathfrak{a}$ est un nilidéal, il existe un entier k tel que $y^k = 0$. Mais il existe n tel que $j_n > k$; pour $m \geqq n$, on a

$$x_m^{j_n - 1} \equiv x_n^{j_n - 1} \qquad (\operatorname{mod} \mathfrak{a}^{i_n + 1}).$$

Donc, pour $m \geqq n$, on a $x_m^{j_n - 1} \notin \mathfrak{a}^{i_n + 1}$. Donc $y^{j_n - 1} \notin \mathfrak{a}^{i_n + 1}$, ce qui est absurde car $y^k = 0$.

COROLLAIRE 4.8. — *Soient A un anneau local de dimension* 0 *et de caractéristique* 0, $\mathfrak{m}$ *son idéal maximal. Si A est complet pour la topologie* $\mathfrak{m}$*-adique, il existe un entier n tel que* $\mathfrak{m}^n = \mathfrak{m}^{n+1}$.

COROLLAIRE 4.9. — *Soit A un anneau local de dimension* 0 *et d'idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *tel que A soit séparé pour la topologie* $\mathfrak{m}$*-adique; pour que $\hat{A}$ soit de dimension* 0, *il faut et il suffit que* $\mathfrak{m}$ *soit quasi-nilpotent.*

Si A *est de caractéristique* 0, on a :

$$(\hat{A} \text{ de dimension } 0) \Leftrightarrow (\mathfrak{m}\hat{A} \text{ nilpotent}) \Leftrightarrow (\mathfrak{m} \text{ nilpotent}).$$

Si A n'est pas de caractéristique 0, on a $A \supset \mathbf{Z}/q\mathbf{Z}$, q étant une puissance d'un nombre premier. On a donc la suite d'équivalences :

($\hat{A}$ est de dimension 0) $\Leftrightarrow$ (Il existe un entier s, tel que $\mathfrak{m}\hat{A}$ soitquasi-nilpotent d'exposant inférieur ou égal à q^s) $\Leftrightarrow$ (Il existe un entier s tel que $\mathfrak{m}\hat{A}$ soit engendré par des éléments de puissance q^s-ième nulle) $\Leftrightarrow$ (Il existe s, tel que $\mathfrak{m}$ soit engendré par des éléments de puissance q^s-ième nulle) $\Leftrightarrow$ (Il existe s tel que $\mathfrak{m}$ soit quasi-nilpotent d'exposant inférieur ou égal à q^s) $\Leftrightarrow$ ($\mathfrak{m}$ est quasi-nilpotent).

La proposition 4.1 se déduit immédiatement des corollaires 4.8 et 4.9, appliqués à l'anneau construit dans la démonstration de la proposition 4.4.

CHAPITRE IV. — Épimorphismes plats.

1. Préliminaires.

Le but de ce chapitre est d'étudier les épimorphismes de la catégorie des anneaux, et plus spécialement ceux qui sont des morphismes plats. Il est immédiat que les homomorphismes surjectifs sont des épimorphismes. Il en est de même des flèches $A \to S^{-1}A$, où S est une partie multiplicative de A. Mais il y a bien d'autres épimorphismes. Nous en donnerons des exemples dans le n° 1.6, au début du paragraphe 2, et au chapitre V. Même si l'on impose à l'épimorphisme d'être plat, il n'est pas nécessairement de la forme $A \to S^{-1}A$ comme le montre 4.6 et AKIBA [1].

Dans tout ce qui suit, $A \xrightarrow{f} B$ est un morphisme d'anneaux;

$$i_1 : \quad B \to B \otimes_A B \quad (\text{resp. } i_2 : B \to B \otimes_A B)$$

est l'homomorphisme défini par

$$i_1(x) = x \otimes 1 \quad (\text{resp. } i_2(x) = 1 \otimes x);$$

$p : B \otimes_A B \to B$ est l'homomorphisme défini par $p(x \otimes y) = xy$, et $\mathcal{I}$ est le noyau de p.

LEMME 1.0. — *Il y a équivalence entre les propositions suivantes :*

(i) *f est un épimorphisme;*

(ii) $i_1 = i_2$;

(iii$_1$) *i_1 est un isomorphisme;*

(iii$_2$) *i_2 est un isomorphisme;*

(iv) *p est un isomorphisme.*

C'est une conséquence de ce que le produit tensoriel est la somme dans la catégorie des anneaux, et a été exposé en détails dans l'exposé de ROBY [50].

LEMME 1.0′.

(i) *Le composé de deux épimorphismes est un épimorphisme;*

(ii) *Si $g \circ f$ est un épimorphisme, il en est de même de g;*

(iii) *Si $f : A \to B$ est un épimorphisme et $g : A \to A'$ une flèche, alors $f' : A' \to A' \otimes_A B$ est un épimorphisme;*

(iv) *Une limite inductive d'épimorphismes est un épimorphisme.*

Ce sont des propriétés bien connues des épimorphismes et des sommes dans les catégories.

La troisième assertion de 1.0′ admet une réciproque partielle dans la catégorie des anneaux.

LEMME 1.1. — *Il y a équivalence entre les propositions suivantes :*

(i) *f est un épimorphisme;*

(ii) *Pour tout* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $A_\mathfrak{p} \to B \otimes_A A_\mathfrak{p}$ *est un épimorphisme.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 1.0 (iv) et de l'isomorphisme canonique

$$B \otimes_A B \otimes_A A_\mathfrak{p} \simeq (B \otimes_A A_\mathfrak{p}) \otimes_{A_\mathfrak{p}} (B \otimes_A A_\mathfrak{p}).$$

En effet, pour que p soit un isomorphisme, il faut et il suffit que $p \otimes_A A_\mathfrak{p}$ le soit pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$.

LEMME 1.2. — *Un épimorphisme fidèlement plat est un isomorphisme.*

Soient f un tel épimorphisme, $K = \mathrm{Ker}\, f$, $L = \mathrm{Coker}\, f$ (dans la catégorie des A-modules).

Comme $A \otimes_A B \to B \otimes_A B$ est un isomorphisme [lemme 1.0 (iii$_2$)], on a

$$K \otimes_A B = L \otimes_A B = 0,$$

donc $K = L = 0$.

COROLLAIRE 1.3.

(i) *Si A est un corps et f un épimorphisme, f est surjectif;*

(ii) *Si f est un épimorphisme plat et local d'anneaux locaux, c'est un isomorphisme.*

PROPOSITION 1.4. — *Si f est un épimorphisme, l'application* $f : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ *est injective.*

Pour tout $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $B \otimes_A (A_\mathfrak{p}/\mathfrak{p} A_\mathfrak{p})$ est, soit un corps, soit l'anneau nul [*cf.* corollaire 1.3 (i) et lemme 1.0′ (iii)]. Comme le spectre de ce produit tensoriel s'identifie à $({}^a f)^{-1}(\mathfrak{p})$, cet ensemble a, au plus, un élément, et ${}^a f$ est une injection.

La proposition suivante est essentielle, car elle caractérise les épimorphismes en termes de géométrie algébrique :

PROPOSITION 1.5 (FERRAND). — *Pour que f soit un épimorphisme, il faut et il suffit que :*

(i) *${}^a f$ soit injectif;*

(ii) *les extensions résiduelles soient triviales;*

(iii) *$\mathfrak{J}$ soit de type fini en tant que $(B \otimes B)$-module (rappelons que c'est vrai si B est un localisé d'une A-algèbre de type fini);*

(iv) $\Omega_A(B) = \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2$ *soit nul.*

Si f est un épimorphisme, (i) est vérifié, d'après la proposition 1.4; comme $\mathfrak{I} = (0)$ [1.0 (iv)], les conditions (iii) et (iv) sont vérifiées. Enfin si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B et $\mathfrak{p} = f^{-1}(\mathfrak{q})$; le morphisme $A \to B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$ est un épimorphisme par le lemme 1.0′ (i). En appliquant le lemme 1.0′ (ii), on voit que $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}} \to B_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}B_{\mathfrak{q}}$ est un épimorphisme, et donc, par le corollaire 1.3 (i), un isomorphisme, ce qui n'est autre que la condition (ii).

Réciproquement, soient g et h deux flèches de B dans un anneau *réduit* C telles que $g \circ f = h \circ f$. Il est immédiat, par la condition (i), que ${}^a g = {}^a h$. Soient $Z = \operatorname{Spec} C$, $Y = {}^a g(Z) = {}^a h(Z)$ et $X = {}^a f(Y)$.

On peut écrire le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[d, "b"] & C \arrow[d, "c"] \\ \prod\limits_{\mathfrak{p} \in X} K(\mathfrak{p}) \arrow[r, "f'"] & \prod\limits_{\mathfrak{q} \in Y} K(\mathfrak{q}) \arrow[r, shift left, "g'"] \arrow[r, shift right, "h'"'] & \prod\limits_{\mathfrak{m} \in Z} K(\mathfrak{m}) \end{tikzcd}$$

en désignant par $K(x)$ le corps résiduel de x.

On a $g' \circ f' = h' \circ f'$. Par les conditions (i) et (ii), f' est un isomorphisme. Donc $g' = h'$. Donc $c \circ g = c \circ h$. Comme C est réduit, c est injectif, et $g = h$.

Soit $\varphi : (B \otimes B) \to (B \otimes B)_{\text{réd}}$. Ce qui précède montre que $\varphi \circ i_1 = \varphi \circ i_2$. Donc si $x \in B$, $1 \otimes x - x \otimes 1$ est dans $\operatorname{Ker}\varphi$. Mais $\mathfrak{I}$ est engendré par les éléments de la forme $1 \otimes x - x \otimes 1$ $\Big[$en effet, si $y = \sum a_i \otimes b_i$ et $p(y) = 0$, on a

$$\sum a_i b_i = 0 \qquad \text{et} \qquad y = \sum a_i(1 \otimes b - b \otimes 1)\Big].$$

Donc $\mathfrak{I} \subset \operatorname{Ker}\varphi$ est un nilidéal, qui est nul. En effet, il est de type fini (iii), et donc nilpotent. Grâce à la condition (iv), on obtient

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^2 = \ldots = \mathfrak{I}^n = 0,$$

et le résultat se déduit du lemme 1.0 (iv).

Exemple 1.6. — Si A est l'anneau local d'un point double à tangentes distinctes d'une courbe, et B le localisé en un de ses idéaux maximaux de la fermeture intégrale de A, $A \xrightarrow{f} B$ est un épimorphisme injectif et local d'anneaux locaux intègres à spectres homéomorphes; mais h n'est pas un isomorphisme. Comme exemple explicite, on peut prendre pour A le localisé à l'origine de $k[X, Y]/(X^3 + X^2 - Y^2)$, pour B le localisé à l'origine de $k[T]$, et pour f :

$$f(X) = T^2 - 2T, \qquad f(Y) = (T^2 - 2T)(T - 1).$$

PROPOSITION 1.7. — *Un épimorphisme fini est surjectif.*

D'après le lemme 1.1, il suffit de supposer A local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Mais si $\varphi : M \to N$ est un morphisme de modules de type fini tel que $\varphi \otimes A/\mathfrak{m}$ est surjectif, alors φ est surjectif. En appliquant ceci à p, on est ramené au cas connu (corollaire 1.3) des corps grâce à l'isomorphisme canonique

$$B \otimes_A B \otimes_A A/\mathfrak{m} \simeq (B \otimes_A A/\mathfrak{m}) \otimes_{A/\mathfrak{m}} (B \otimes_A A/\mathfrak{m}).$$

Une autre démonstration, due à G. SABBAG, a été donnée en annexe à l'exposé de ROBY [50].

2. Épimorphismes plats.

L'exemple de l'épimorphisme $A \to A_a \times A/aA$ (*voir* séminaire Samuel [51], introduction et exposé 2) montre qu'un épimorphisme $f : A \to B$ n'induit pas nécessairement un homéomorphisme de Spec(B) sur son image. Nous allons voir que si l'on suppose f plat, la situation est bien meilleure.

PROPOSITION 2.1. — *Si $f : A \to B$ est un épimorphisme plat, et $\mathfrak{b}$ un idéal de B, alors $\mathfrak{b} = B.f^{-1}(\mathfrak{b})$.*

Soit $\mathfrak{a} = f^{-1}(\mathfrak{b})$. On a $B/\mathfrak{b} \simeq B/\mathfrak{b} \otimes_A B$, par exemple parce que

$$B/\mathfrak{b} \simeq B/\mathfrak{b} \otimes_B B \simeq B/\mathfrak{b} \otimes_B B \otimes_A B \simeq B/\mathfrak{b} \otimes_A B.$$

En tensoriant par B l'injection $A/\mathfrak{a} \to B/\mathfrak{b}$, on obtient donc l'injection $B/\mathfrak{a}B \to B/\mathfrak{b}$. Comme c'est évidemment une surjection, on en déduit le résultat.

COROLLAIRE 2.2. — *Si $f : A \to B$ est un épimorphisme plat, ${}^af$ est un homéomorphisme de* Spec(B) *sur son image.*

En effet, la proposition 2.1 montre que si $V(\mathfrak{b})$ est un fermé de Spec(B), son image par ${}^af$ vérifie

$${}^af(V(\mathfrak{b})) = {}^af(V(B.\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}) \cap {}^af(\text{Spec}(B))$$

et est donc fermée dans ${}^af(\text{Spec}(B))$.

COROLLAIRE 2.3. — *Si $f : A \to B$ est un épimorphisme plat et si A est noethérien, B l'est aussi.*

En effet, toute suite croissante d'idéaux de B définit par restriction à A une suite stationnaire. Par extension à B, on retrouve la suite initiale qui est donc stationnaire.

PROPOSITION 2.4. — *Si $f : A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est un épimorphisme plat;*

(ii) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{m}$ *de* A, $f \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$ *est un épimorphisme plat;*

(iii) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{n}$ *de* B, $f \otimes_A A_{f^{-1}(\mathfrak{n})}$ *est un isomorphisme;*

(iv) *Pour tout idéal premier* $\mathfrak{m}$ *de* A, *ou bien on a* $B = \mathfrak{m}B$, *ou bien* $f \otimes A_{\mathfrak{m}}$ *est un isomorphisme.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) est trivial.

(ii) $\Rightarrow$ (iv), car, si $B \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$ est un $A_{\mathfrak{m}}$-module fidèlement plat, $f \otimes_A A_{\mathfrak{m}}$ est un isomorphisme par le lemme 1.2. S'il n'y a pas fidèle platitude, en désignant par $\mathrm{K}(\mathfrak{m})$ le corps $A_{\mathfrak{m}}/\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}}$, on a $B \otimes_A \mathrm{K}(\mathfrak{m}) = 0$, et donc $B = \mathfrak{m}B$, car la platitude de B et l'inclusion $A/\mathfrak{m} \subset \mathrm{K}(\mathfrak{m})$ entraînent

$$B/\mathfrak{m}B = B \otimes_A A/\mathfrak{m} \subset B \otimes_A \mathrm{K}(\mathfrak{m}) = 0.$$

(iv) $\Rightarrow$ (iii) est trivial.

(iii) $\Rightarrow$ (i) : Par le lemme 1.0 (iii), il suffit de montrer que, pour tout idéal premier $\mathfrak{n}$ de B, l'application $B_{\mathfrak{n}} \otimes_B i_1 : B_{\mathfrak{n}} \to B_{\mathfrak{n}} \otimes_A B$ est un isomorphisme. Il en est ainsi, car $B_{\mathfrak{n}} \to B_{\mathfrak{n}} \otimes_A B$ est le composé des isomorphismes canoniques :

$$B_{\mathfrak{n}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{n}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}} \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{n}} \otimes_{A_{\mathfrak{m}}} A_{\mathfrak{m}} \otimes_A B \xrightarrow{\sim} B_{\mathfrak{n}} \otimes_A B,$$

en posant $\mathfrak{m} = f^{-1}(\mathfrak{n})$.

Proposition 2.5. — *Si* A *est un anneau, il y a bijection entre les classes à isomorphisme près d'épimorphismes plats, et les parties de* Spec(A) *qui, munies du faisceau induit, sont des schémas affines. Ces parties sont stables par générisation.*

Par le corollaire 2.2, si $A \to B$ est un épimorphisme plat, Spec(B) s'identifie à une partie de Spec(A). La propriété 2.4 (iii) montre que cette partie est stable par générisation et que le faisceau structural de B est le faisceau induit sur Spec(A) par le faisceau structural de A.

Réciproquement, si X est une partie de Spec(A) qui, munie du faisceau induit, est un schéma affine, le morphisme $A \to \Gamma(X)$ est un épimorphisme plat par la proposition 2.4 (iii).

Remarque. — Les résultats qui précèdent se généralisent aisément aux préschémas. On voit facilement que la notion d'épimorphisme d'anneaux est identique à celle de monomorphisme de schémas affines. Les assertions 2.2 et 2.5 deviennent particulièrement frappantes dans ce langage. Il faut cependant des hyopthèses de séparation (*cf.* Raynaud [47]).

3. **Épimorphismes plats injectifs.**

Proposition 3.1. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif d'anneaux, tel que f soit plat, que h soit injectif, et que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "i_1"] & \\ C \arrow[ur, "h"] \arrow[dr, "h"'] & & B \otimes_A B \\ & B \arrow[ur, "i_2"'] & \end{tikzcd}$$

commute. Alors :

1° *L'application canonique $B \otimes_A C \to B \otimes_C C$ définit un isomorphisme*

$$B \otimes_A C \xrightarrow{\sim} B;$$

2° *h est plat;*

3° *Si g est plat, g est un épimorphisme;*

4° *Si f est fidèlement plat, g est un isomorphisme.*

Le 1° résulte du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A C \arrow[r] \arrow[d, "B \otimes_A h"'] & B \otimes_C C \arrow[d, "B \otimes_C h"] \\ B \otimes_A B \arrow[r, "\sim"] & B \otimes_C B \end{tikzcd}$$

En effet, la flèche du bas est bijective par hypothèse, et celle de gauche est injective car f est plat. Donc la flèche du haut, que l'on sait surjective, est aussi injective.

Le 2° résulte du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\wr"] \\ C \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f \otimes C"'] & B \otimes_A C \end{tikzcd}$$

et de la platitude de f, qui entraîne la platitude de $f \otimes C$.

Le 3° provient de l'injectivité de $C \otimes_A C \to C$ [lemme 1.0 (iv)] que l'on déduit du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} C \otimes_A C \arrow[r] \arrow[d, "h \otimes C"'] & C \arrow[d, "h"] \\ B \otimes_A C \arrow[r, "\sim"] & B \end{tikzcd}$$

car, comme g est plat et h injectif, $h \otimes C$ est injectif.

4° De l'isomorphisme $A \otimes_A B \to C \otimes_A B$ démontré au paragraphe 1, on déduit aussitôt l'isomorphisme $A \to C$.

Corollaire 3.2. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif d'anneaux tel que f soit un épimorphisme plat et h une injection. Alors :

(i) *h est un épimorphisme plat;*

(ii) *Si g est plat, c'est un épimorphisme;*

(iii) *Si f est fidèlement plat, g est un isomorphisme.*

Proposition 3.3. — *Pour tout anneau A, il existe un épimorphisme plat injectif $A \rightarrow \mathrm{M}(A)$, que nous appellerons épimorphisme plat maximal, tel que les classes à isomorphisme près d'épimorphismes plats injectifs s'identifient aux sous-anneaux de $\mathrm{M}(A)$ qui sont plats sur A.*

La proposition 2.5 montre que les classes d'épimorphismes plats injectifs forment un ensemble, qui est filtrant, car le produit tensoriel des buts de deux tels épimorphismes en est encore un. On peut donc considérer la limite inductive de ces épimorphismes, qui est un épimorphisme plat et injectif, dont le but est $\mathrm{M}(A)$.

Si B est un sous-anneau de $\mathrm{M}(A)$ plat sur A, l'injection $A \rightarrow B$ est un épimorphisme (coroll. 3.2). D'autre part, si $A \rightarrow B$ est un épimorphisme, plat injectif, la définition de $\mathrm{M}(A)$ nous donne un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{M}(A) \\ & B \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

et la flèche $B \rightarrow \mathrm{M}(A)$ est une injection d'après ce qui suit.

Lemme 3.4. — *Soit*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\ & C \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif d'anneaux tel que f soit injectif et g un épimorphisme plat; alors h est injectif.

Comme g est un épimorphisme, on a le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} B \otimes_A A \arrow[rr, "B \otimes g"] \arrow[d, "\wr"] & & B \otimes_A C \arrow[d, "\wr"] \\ B \simeq B \otimes_C C & \simeq & B \otimes_C C \otimes_A C \end{tikzcd}$$

et $B \otimes_A g$ est un isomorphisme. On en déduit que h est injectif grâce au diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "\wr"] \\ C \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f \otimes_A C"'] & B \otimes_A C \end{tikzcd}$$

Proposition 3.5. — *Si $f : A \to B$ est un homomorphisme plat d'anneaux, il existe un homomorphisme et un seul,* $\mathrm{M}(f) : \mathrm{M}(A) \to \mathrm{M}(B)$ *rendant commutatif le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \mathrm{M}(A) \arrow[r, "\mathrm{M}(f)"'] & \mathrm{M}(B) \end{tikzcd}$$

De plus, $\mathrm{M}(f)$ *est plat.*

Si f est injectif, il en est de même de $\mathrm{M}(f)$.

Si f est un épimorphisme plat et injectif, $\mathrm{M}(f)$ *est un isomorphisme.*

Il y a unicité, car $A \to \mathrm{M}(A)$ est un épimorphisme.

Comme B est plat, $B \to \mathrm{M}(A) \otimes_A B$ est un épimorphisme plat et injectif, et l'on en déduit, par la proposition 3.3, un homomorphisme $\mathrm{M}(A) \otimes_A B \to \mathrm{M}(B)$ qui est un épimorphisme plat injectif [corollaire 3.2 (i)]. En le composant avec l'homomorphisme plat $\mathrm{M}(A) \otimes f$, on trouve $\mathrm{M}(f)$.

Si f est injectif, il en est de même de $\mathrm{M}(A) \otimes f$, donc aussi de $\mathrm{M}(f)$. La dernière assertion résulte de la maximalité de $\mathrm{M}(A)$.

Proposition 3.6. — *Pour que $f : A \to B$ soit un épimorphisme plat, il faut et il suffit que f soit plat et que $B \subset \mathrm{M}(f(A))$.*

La condition nécessaire résulte du corollaire 3.2 (i), qui démontre que $f(A) \to B$ est un épimorphisme plat et injectif. Si f est plat et $B \subset \mathrm{M}(f(A))$, considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \arrow[r, "i"] & \mathrm{M}(f(A)) \\ & f(A) \arrow[u, "h"'] & \end{tikzcd}$$

Comme $i \circ h$ est un épimorphisme plat, il en est de même de i [corollaire 3.2 (i)]. Donc $i \circ f = (i \circ h) \circ g$ est un épimorphisme, et $i \circ f$ est plat, car i et f le sont. Donc, comme f est plat et i injectif, f est un épimorphisme [corollaire 3.2 (ii)].

4. **Comparaison de** M (A) **et de** Tot (A).

Akiba a défini des anneaux de fractions généralisés à l'aide de la condition de la proposition 3.6, dans laquelle il utilise $\mathrm{Tot}(f(A))$ au lieu de $\mathrm{M}(f(A))$ [par $\mathrm{Tot}(A)$, nous désignerons l'anneau total des fractions de A]. Ceci amène à poser la question : A-t-on $\mathrm{M}(A)=\mathrm{Tot}(A)$? Quentel [54] a montré que non. Cependant :

Proposition 4.1. — *Si* $\mathrm{Spec}(\mathrm{Tot}(A))$ *est le générisé de* $\mathrm{Ass}(A)$, *on a* $\mathrm{M}(A)=\mathrm{Tot}(A)$.

En effet, la proposition 3.3 du chapitre II montre que

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{M}(A))\supset \mathrm{Ass}(A)$$

et la proposition 3.3 du présent chapitre montre que

$$\mathrm{Spec}(\mathrm{M}(A))\subset \mathrm{Spec}(\mathrm{Tot}(A)).$$

On obtient donc l'égalité cherchée, grâce à la proposition 2.5, sachant que $\mathrm{Spec}(\mathrm{M}(A))$ est stable par généralisation (prop. 2.5).

Pour montrer que $\mathrm{M}(A)=\mathrm{Tot}(A)$, il suffit donc de montrer que $\mathrm{Ass}(A)=\mathrm{Spec}(\mathrm{Tot}(A))$.

Corollaire 4.2. — *Si* $\mathrm{Ass}(A)$ *est fini (en particulier si* A *est noethérien ou intègre), on a* $\mathrm{M}(A)=\mathrm{Tot}(A)$.

En effet, un idéal premier de $\mathrm{Tot}(A)$ est contenu dans la réunion des idéaux premiers de $\mathrm{Ass}(A)$, et est donc contenu dans l'un d'eux.

Proposition 4.3. — *Si A est réduit et* $\mathrm{Ass}(A)$ *dénombrable et compact pour la topologie induite par celle de* $\mathrm{Spec}(A)$, *on a* $\mathrm{Ass}(A)=\mathrm{Spec}(\mathrm{Tot}(A))$, *et donc* $\mathrm{Tot}(A)=\mathrm{M}(A)$. *Cet anneau est absolument plat.*

Seule la première assertion nécessite une démonstration, car il est bien connu qu'un anneau réduit, tel que tout idéal premier soit maximal, est absolument plat.

Rappelons que, quand A est réduit, $\mathrm{Ass}(A)$ est toujours séparé (chap. II, lemme 2.8).

Nous pouvons supposer $A=\mathrm{Tot}(A)$, car $\mathrm{Ass}(\mathrm{Tot}(A))\simeq\mathrm{Ass}(A)$ Appelons $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$, ... les idéaux premiers minimaux de A, qui ne sont autres que les éléments de $\mathrm{Ass}(A)$. Grâce au corollaire 4.2, nous pouvons les supposer en nombre infini, car, sinon, la proposition est déjà démontrée.

Soit, *ab absurdo*, $\mathfrak{m}$ un idéal premier de A, non minimal. Comme $A=\mathrm{Tot}(A)$, tout élément de $\mathfrak{m}$ divise 0 et appartient donc à un idéal premier de $\mathrm{Ass}(A)$. Posons $n_1=1$. Comme $\mathfrak{m}\not\subset\mathfrak{p}_1$, il existe un élément x_1 de $\mathfrak{m}$ qui n'est pas dans $\mathfrak{p}_1$.

Montrons, par récurrence, qu'il existe des suites (x_i) et (n_i) telles que

(a) $n_i = \inf\{n;\ x_1 + \ldots + x_{i-1} \in \mathfrak{p}_n\} < \infty$, et $n_i > n_{i-1}$;

(b) $x_i \in \operatorname{ann}(x_1 + \ldots + x_{i-1}) \cap \mathfrak{m} \cap \bigcap_{j < n_i} \mathfrak{p}_j$;

(c) $x_i + \ldots + x_i \notin \mathfrak{p}_{n_i}$.

On a bien $n_i < \infty$, car $x_1 + \ldots + x_{i-1} \in \mathfrak{m}$ et est donc contenu dans au moins un idéal premier minimal. Si n est un entier inférieur ou égal à n_{i-1}, il existe un j tel que $n_j \leqq n < n_{j+1}$, c'est-à-dire que $x_1 + \ldots + x_j \notin \mathfrak{p}_n$. Comme $x_{j+1}, \ldots, x_{i-1}$ appartiennent à $\mathfrak{p}_n$, on en déduit $x_1 + \ldots + x_{i-1} \notin \mathfrak{p}_n$, autrement dit $n_i > n_{i-1}$.

Comme $\mathfrak{p}_{n_i}$ est premier et ne contient aucun des termes de l'intersection intervenant dans (b), il ne contient pas cette intersection; il existe donc un $x_i \notin \mathfrak{p}_{n_i}$, qui vérifie (b). Comme $x_1 + \ldots + x_{i-1} \in \mathfrak{p}_{n_i}$, l'assertion (c) est également vérifiée.

Montrons que si $i < j$, on a $x_i x_j = 0$. Supposons ceci vrai pour tout $j < k$, et montrons que, si $i < k$, on a $x_i x_k = 0$. En effet, on a $x_k(x_1 + \ldots + x_{k-1}) = 0$, et donc, en développant,

$$0 = x_i x_k (x_1 + \ldots + x_{k-1}) = x_k x_i^2.$$

On en déduit immédiatement $x_i x_k = 0$ pour $i < k$, car A est réduit.

On a donc construit une suite d'éléments de $\mathfrak{m}$ telle que $x_i x_j = 0$ pour $i \neq j$ et qu'aucun idéal premier minimal ne contienne tous les x_i. Soit $D(x_i)$ l'ensemble des éléments de $\operatorname{Ass}(A)$ qui ne contiennent pas x_i. Les $D(x_i)$ forment un recouvrement ouvert de $\operatorname{Ass}(A)$ dont on peut extraire un recouvrement fini. Ainsi $\operatorname{Ass}(A) \subset D(x_1) \cup \ldots \cup D(x_k)$. Mais ceci est absurde. En effet, $x_{k+1} \notin \mathfrak{p}_{n_{k+1}}$; puisque, pour $i \leqq k$, on a $x_i . x_{k+1} = 0$, on en déduit $x_i \in \mathfrak{p}_{n_{k+1}}$ et donc $\mathfrak{p}_{n_{k+1}} \notin D(x_1) \cup \ldots \cup D(x_k)$.

REMARQUES.

1° Ce résultat répond partiellement à une question de BKOUCHE ([45], p. 10); QUENTEL [56] a montré qu'on ne pouvait supprimer l'hypothèse de dénombrabilité.

2° L'hypothèse de quasi-compacité est nécessaire, car $\operatorname{Spec}(\operatorname{Tot}(A))$ est quasi-compact. L'hypothèse de réduction, ou au moins celle de séparation de $\operatorname{Ass}(A)$, est aussi indispensable comme le montre l'exemple suivant qui nous a été aimablement communiqué par I. KAPLANSKI.

Soit A_0 un anneau local factoriel de dimension 2, par exemple $k[[X, Y]]$. Soit M le A_0-module somme directe des $A_0/\rho A_0$, ρ parcourant tous les éléments irréductibles de A_0.

Prenons $A = A_0 \oplus M$, avec le produit

$$(\alpha, m)(\beta, n) = (\alpha\beta, \alpha n + \beta m).$$

Comme M est un nilidéal de A, on a $\mathrm{Spec}(A) = \mathrm{Spec}(A_0)$, ce qui montre que $\mathrm{Spec}(A)$ est noethérien. On voit très facilement que $\mathrm{Ass}(A)$, qui est quasi-compact d'après ce qui précède, ne contient pas l'idéal maximal de A, bien que l'on ait $A = \mathrm{Tot}(A)$.

COROLLAIRE 4.4. — *Si A est réduit et cohérent, et si l'ensemble de ses idéaux premiers minimaux est dénombrable, les conclusions de la proposition 4.3 sont vraies.*

En effet, $\mathrm{Ass}(A)$ est compact (OLIVIER [45], prop. 7, $(4^\circ) \Rightarrow (1^\circ)$).

Terminons ce paragraphe en donnant des conditions pour que tout épimorphisme plat soit une localisation.

PROPOSITION 4.5. — *Si A est un anneau de Krull dont le groupe des classes de diviseurs $C(A)$ est de torsion, tout épimorphisme plat $f : A \to B$ identifie B à un anneau de fractions $S^{-1}A$.*

Éliminons le cas trivial $B = 0$. Par la proposition 3.3 du chapitre II, f est injectif, et par le corollaire 4.2, $\mathrm{M}(A)$ est le corps des fractions K de A. Donc B s'identifie à un sous-anneau de K plat sur A.

Soit S l'ensemble des éléments $s \in A$ tels que $1/s \in B$. Il s'agit de montrer que $B = S^{-1}A$.

Soit $x \in B$; on a $\mathrm{div}(x) = D - D'$, avec D et D' diviseurs positifs étrangers. L'hypothèse sur $C(A)$ montre qu'il existe un entier n tel que nD et nD' soient principaux, et donc que $x^n = p/q$, avec p et q dans A et étrangers, i. e. $Ap \cap Aq = Apq$.

On a $qx^n = p.1$. D'après le lemme 1.1 du chapitre I ou BOURBAKI ([11], chap. I, § 2, n° 11, corollaire 1 de la proposition 1.3), il existe des e_i dans B, des λ_i et des μ_i dans A tels que

$$x^n = \sum_i \lambda_i e_i, \qquad 1 = \sum_i \mu_i e_i \qquad \text{et } q\lambda_i - p\mu_i = 0 \quad \text{pour tout } i.$$

Comme $Ap \cap Aq = Apq$, pour tout i, on a $\mu_i/q \in A$. Donc

$$\frac{1}{q} = \sum_i \left(\frac{\mu_i}{q}\right) e_i \in B, \qquad \text{et} \qquad q \in S.$$

On obtient finalement $x^n \in S^{-1}A$. Comme $S^{-1}A$ est intégralement clos, on a $x \in S^{-1}A$, et $B = S^{-1}A$.

Il y a une réciproque partielle.

PROPOSITION 4.6. — *Soit A un anneau de Dedekind; pour que les épimorphismes plats de source A s'identifient aux anneaux de fractions de A, il faut et il suffit que le groupe des classes soit de torsion.*

Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal dont l'image soit sans torsion dans le groupe des classes. Prenons $B = A[\mathfrak{m}^{-1}]$. Comme B est plat, $A \to B$ est un épimorphisme plat [corollaire 3.2 (ii)].

Mais si $s \in A$ est inversible dans B, il l'est aussi dans A; en effet, si $1/s \in B$, il existe un entier n tel que $1/s \in \mathfrak{m}^{-n}$. Donc $\mathfrak{m}^n \subset As$ et As est une puissance de $\mathfrak{m}$. Ceci n'est possible que si $n = 0$, i. e. $1/s \in A$.

5. Ouverts affines dans les spectres des anneaux intègres noethériens.

5.1. — Dans tout ce qui suit, A est un anneau intègre noethérien de corps des fractions K. Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, on note $D(\mathfrak{a})$ l'ouvert Spec A — $V(\mathfrak{a})$,

$$\mathfrak{a}^{-1} = (A : \mathfrak{a}) \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{a}^{-n} = (\mathfrak{a}^n)^{-1}.$$

On a immédiatement :

5.1.1. Si $D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{b})$, $D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{a}\mathfrak{b})$.

5.1.2. $D(\mathfrak{a}) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$.

5.1.3. $\mathfrak{a}^{-1}$ est un A-module de type fini.

5.1.4. Si $\mathfrak{a} \supset \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}^{-1} \subset \mathfrak{b}^{-1}$.

5.1.5. $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{b}^{-1} \subset (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^{-1}$.

5.1.6. $\bigcup_{n \geq 0} \mathfrak{a}^{-n} = A(\mathfrak{a})$ est un anneau contenant A.

5.1.7. Si $a \in \mathfrak{a}$ $(a \neq 0)$, $\mathfrak{a}^{-1} = \{ b/a,\ b \in A,\ b\mathfrak{a} \subset Aa \}$.

5.1.8. Si $f^n \in \mathfrak{a}$, $A(\mathfrak{a}) \subset A_f$.

(C'est un corollaire de 5.1.7.) On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 5.2. — *$A(\mathfrak{a})$ est l'anneau $\Gamma(D(\mathfrak{a}))$ des sections sur $D(\mathfrak{a})$.*

On sait que $\Gamma(D(\mathfrak{a})) = \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} A_f$. Donc $A(\mathfrak{a}) \subset \Gamma(D(\mathfrak{a}))$ par 5.1.8. Réciproquement, si $x \in \Gamma(D(\mathfrak{a}))$, on a $x \in A_f$ pour tout $f \in \mathfrak{a}$, i. e. il existe n tel que $f^n x \in A$. Comme $\mathfrak{a}$ est de type fini, il existe donc un entier n tel que $\mathfrak{a}^n x \in A$, i. e. $x \in \mathfrak{a}^{-n}$.

PROPOSITION 5.3.

(i) *Si $D(\mathfrak{a})$ est affine, $A(\mathfrak{a})$ est plat sur A;*

(ii) *Les assertions suivantes sont équivalentes, si $A(\mathfrak{a})$ est plat sur A :*

  (*a*) *$D(\mathfrak{a})$ est affine;*

  (*b*) *Il existe un idéal divisoriel $\mathfrak{b}$ tel que $D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{b})$;*

  (*c*) *$D(\mathfrak{a}) = D((A : (A : \mathfrak{a})))$;*

  (*d*) *La racine de $\mathfrak{a}$ est divisorielle.*

L'assertion (i) est triviale, ainsi que les implications $(c) \Rightarrow (b)$ et $(d) \Rightarrow (b)$. Si $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$, on a $(a) \Rightarrow (d)$:

Si $D(\mathfrak{a})$ est affine, il en est de même de $D(\mathrm{rac}(\mathfrak{a}))$. Donc, si $\mathfrak{b} = \mathrm{rac}(\mathfrak{a})$, $D(\mathfrak{b}) = D((A : (A : \mathfrak{b})))$. Comme $(A : (A : \mathfrak{b})) \supset \mathfrak{b}$, on en déduit donc

$$(A : (A : \mathfrak{b})) = \mathfrak{b}.$$

Il reste donc à montrer $(a) \Rightarrow (c)$ et $(b) \Rightarrow (a)$. Cela va résulter de la proposition suivante :

PROPOSITION 5.4. — *Si* $A(\mathfrak{a})$ *est plat*, $\mathrm{Spec}(A(\mathfrak{a})) = D((A : (A : \mathfrak{a})))$.

Posons $\mathfrak{b} = (A : (A : \mathfrak{a}))$, et soient $\mathfrak{n} \in \mathrm{Spec}(A(\mathfrak{a}))$ et $\mathfrak{m} = A \cap \mathfrak{n}$. Comme $A_{\mathfrak{m}} = (A(\mathfrak{a}))_{\mathfrak{n}}$ [car $A \to A(\mathfrak{a})$ est un épimorphisme plat], $A_{\mathfrak{m}} \supset A(\mathfrak{a})$, et, pour tout $x \in \mathfrak{a}^{-1}$, il existe $s \in A - \mathfrak{m}$ tel que $sx \in A$. Comme $\mathfrak{a}^{-1}$ est de type fini, il existe $t \in A - \mathfrak{m}$ tel que $t\mathfrak{a}^{-1} \subset A$, i. e. $t \in \mathfrak{b}$. Donc $\mathfrak{m} \not\supset \mathfrak{b}$ et $\mathrm{Spec}(A(\mathfrak{a})) \subset D(\mathfrak{b})$.

Réciproquement, si $\mathfrak{m} \in D(\mathfrak{b})$, soit $a \in \mathfrak{b} - \mathfrak{m}$. D'après 5.1.7 et 5.1.4, on a $A(\mathfrak{a}) \subset A(\mathfrak{b}) \subset A[1/a]$. Comme $a \notin \mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{m}} \supset A[1/a] \supset A(\mathfrak{a})$. On voit donc que $\mathfrak{m}A_{\mathfrak{m}} \cap A(\mathfrak{a})$ est un idéal premier de $A(\mathfrak{a})$ au-dessus de $\mathfrak{m}$, et $\mathrm{Spec}(A(\mathfrak{a})) = D(\mathfrak{b})$.

Terminons la démonstration de la proposition 5.3 :

$(a) \Rightarrow (c)$: Si $D(\mathfrak{a})$ est affine, $\mathrm{Spec}(A(\mathfrak{a})) = D(\mathfrak{a})$; donc

$$D(\mathfrak{a}) = D((A : (A : \mathfrak{a})));$$

$(b) \Rightarrow (a)$: Si $\mathfrak{b}$ est divisoriel, $D(\mathfrak{b}) = \mathrm{Spec}(A(\mathfrak{b}))$ par la proposition 5.4. Donc $D(\mathfrak{b})$ est affine par la proposition 2.5 puisque $A(\mathfrak{b}) = A(\mathfrak{a})$ est plat.

COROLLAIRE 5.5. — *Si* $A(\mathfrak{a})$ *est plat et* $\mathfrak{a}$ *divisoriel, la racine de* $\mathfrak{a}$ *est divisorielle.*

COROLLAIRE 5.6. — *Les* $D(f)$ *sont affines* (!).

COROLLAIRE 5.7. — *Si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal inversible,* $D(\mathfrak{a})$ *est affine.*

COROLLAIRE 5.8. — *Tout ouvert d'un anneau de Dedekind est affine.*

COROLLAIRE 5.9. — *Si un anneau intégralement clos a un groupe de classes de torsion, tout ouvert affine est un* $D(f)$ (*cf.* prop. 4.5).

Car si $\mathfrak{a}$ est divisoriel, il existe n tel que $\mathfrak{a}^n$ soit principal.

Les hypothèses faites dans ce paragraphe sont très restrictives; nous avons supposé A intègre *et* noethérien. Il est probable que l'on puisse obtenir des résultats presqu'aussi précis en considérant un ouvert U d'un schéma affine $\mathrm{Spec}(A)$ et en supposant, soit U quasi-compact, soit A réduit. Des hypothèses plus fortes sont peut-être nécessaires. Voici, sans démonstration, deux résultats dans cette voie, comparables aux propositions 5.2 et 5.4.

Proposition 5.10. — *Soit U un ouvert d'un schéma affine* Spec(A), *tel que tout idéal $\mathfrak{a}$ de A vérifiant $D(\mathfrak{a}) = U$ ait un annulateur nul. Supposons, de plus, que l'une des conditions suivantes soit vérifiée :*

(*a*) *U est quasi-compact;*

(*b*) *A est réduit.*

Alors $\Gamma(U) \simeq \varinjlim_{D(\mathfrak{a}) = U} \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}, A)$.

Corollaire 5.11. — *Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini et sans annulateur d'un anneau A, alors* $\Gamma(U) \simeq \varinjlim_{n \in \mathbf{N}} \mathrm{Hom}(\mathfrak{a}^n, A)$ *en posant* $U = D(\mathfrak{a})$.

Ce n'est qu'un énoncé plus simple de la proposition 5.10 (*b*).

Proposition 5.12 (Ferrand). — *Soit U un ouvert d'un schéma affine noethérien* Spec(A). *Si $\Gamma(U)$ est un A-module plat, alors* Spec$(\Gamma(U))$ *s'identifie à un ouvert affine de* Spec(A) *contenant U.*

Chapitre V. — **Deux méchants épimorphismes.**

Le but de ce chapitre est de donner, comme l'indique le titre, deux contre-exemples : Ferrand a démontré [18] que, si $f : A \to B$ est un épimorphisme, avec A noethérien, alors f est composé d'un morphisme entier et d'un épimorphisme plat. Nous allons voir que c'est faux si A n'est pas noethérien, même si A et B sont locaux intègres intégralement clos de même corps des fractions et si f est local. De même, si $f : C \to D$ est un épimorphisme local d'anneaux locaux de dimension o (à la Krull), et si C est noethérien, ou même si le radical de C est nilpotent, f est surjectif. Mais cela n'est pas vrai en général.

Le point commun entre ces deux exemples est, outre leur construction voisine, que ce ne sont pas des limites inductives d'épimorphismes de type fini, contrairement à tous les épimorphismes déjà rencontrés.

1. **Définitions et notations.**

Soient :

k un corps;

X_i et Y_i ($i \in \mathbf{N}$) des indéterminées;

S (resp. S_n) le localisé, en l'idéal maximal engendré par les X_i et les Y_i, de l'anneau $k[X_i, Y_i]_{(i \in \mathbf{N})}$ (resp. $k[X_0, \ldots, X_n;\ Y_0, \ldots, Y_n]$);

$\mathcal{J}$ (resp. $\mathcal{J}_n$) l'idéal de S (resp. S_n) engendré par les $Y_i - X_{i+1} Y_{i+1}^2$ pour $i \in \mathbf{N}$ (resp. $i = 0, \ldots, n-1$);

$B = S/\mathcal{J}$, et $B_n = S_n/\mathcal{J}_n$;

x_i et y_i (resp. $x_{i,n}$ et $y_{i,n}$) : les images de X_i et Y_i dans B (resp. B_n);

$\mathfrak{m}$ (resp. $\mathfrak{m}_n$) l'idéal maximal de B (resp. B_n);

A (resp. A_n) le localisé de $k[x_i, x_iy_i]_{(i\in\mathbf{N})}$ (resp. $k[x_{i,n}, x_{i,n}y_{i,n}]_{(i=0,\ldots,n)}$) en l'idéal premier $\mathfrak{m}\cap k[x_i, x_iy_i]_{(i\in\mathbf{N})}$ (resp. $\mathfrak{m}_n\cap k[x_{i,n}, x_{i,n}y_{i,n}]_{(i=0,\ldots,n)}$);

$p(i)$, $i\in\mathbf{N}$, une suite d'entiers tels que $p(i) > 2^{i-1}$;

$\mathfrak{I}$ (resp. $\mathfrak{I}_n$) l'idéal de B (resp. B_n) engendré par les $x_i^{p(i)}$ (resp. $x_{i,n}^{p(i)}$);

$D = B/\mathfrak{I}$, $D_n = B_n/\mathfrak{I}_n$;

$C = A/(A\cap\mathfrak{I})$, $C_n = A_n/(A_n\cap\mathfrak{I}_n)$;

x'_i (resp. y'_i, $x'_{i,n}$, $y'_{i,n}$) les images des x_i (resp. y_i, $x_{i,n}$, $y_{i,n}$) dans D (resp. D_n).

Nous allons voir que les injections $A\to B$ et $C\to D$ sont les exemples annoncés au début.

2. **Premiers résultats.**

Lemme 2.1. — *Les injections $A\to B$ et $C\to D$ sont des épimorphismes.*

En effet (*cf.* Mazet [38] et Roby [50]),

$$1\otimes y_{i-1} = 1\otimes x_iy_i^2 = x_iy_i\otimes y_i = y_i\otimes x_iy_i = x_iy_i^2\otimes 1 = y_{i-1}\otimes 1$$

démontre que $A\to B$ est un épimorphisme. Le même raisonnement vaut pour $C\to D$.

Lemme 2.2. — *On a des isomorphismes canoniques*

$$A\simeq\varinjlim A_n,\qquad B\simeq\varinjlim B_n,\qquad C\simeq\varinjlim C_n,\qquad D\simeq\varinjlim D_n.$$

Cela est immédiat.

Lemme 2.3. — *L'homomorphisme canonique dans B_n du localisé de $k[X_0, \ldots, X_n, Y_n]$ en l'idéal premier $(X_0, \ldots, X_n, Y_n)$ est un isomorphisme.*

La flèche, définie par

$$y_{i,n}\mapsto X_{i+1}X_{i+2}^2\ldots X_n^{2^{n-i-1}}Y_n^{2^{n-i}},$$

est un morphisme de B_n dans le localisé considéré de $k[X_0, \ldots, X_n, Y_n]$, car

$$X_{i+1,n}X_{i+2,n}^2\ldots X_{n,n}^{2^{n-i-1}}Y_{n,n}^{2^{n-i}} = X_{i+1,n}(X_{i+2,n}\ldots X_{n,n}^{2^{n-i-2}}Y_{n,n}^{2^{n-i-1}})^2.$$

Cette flèche est évidemment réciproque du morphisme considéré dans l'énoncé du lemme.

Corollaire 2.4. — *Les anneaux A, A_n, B, B_n sont intègres. Les flèches $A_n\to A_{n+1}$ et $B_n\to B_{n+1}$ sont injectives. Les anneaux B_n et B sont intégralement clos. Si les anneaux A_n sont intégralement clos, il en est de même de A. Les anneaux A et B ont même corps des fractions.*

La première assertion résulte de la seconde. La seconde est vraie car, $X_0, \ldots, X_n, X_n Y_n^2$ sont algébriquement indépendants dans $k[X_0, \ldots, X_n, Y_n]$.

La suite en résulte immédiatement par passage à la limite inductive. La dernière assertion résulte de l'égalité $y_n = x_n y_n / x_n$.

LEMME 2.5. — *Si $A \to B$ n'est pas surjectif, B n'est pas un A-module plat.*

C'est le résultat du corollaire 1.3 (ii) du chapitre IV.

LEMME 2.6. — *Si $C \to D$ n'est pas surjectif, il en est de même de $A \to B$.*

Cela résulte du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

3. Les résultats principaux.

PROPOSITION 3.1. — *Les anneaux A et B sont locaux intègres, intégralement clos, de même corps des fractions. Le morphisme $A \to B$ est un épimorphisme local, injectif, non surjectif. Il n'existe pas de diagramme commutatif d'anneaux*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & E \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

tel que $A \to E$ soit entier et $E \to B$ plat.

PROPOSITION 3.2. — *Le morphisme $C \to D$ est un épimorphisme non surjectif d'anneaux locaux de dimension* o.

S'il existait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \\ & E \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

avec $A \to E$ entier et $E \to B$ plat, alors B serait plat sur l'image F de E dans B [chap. IV, coroll. 3.2 (i)], et F serait entier sur A. Si l'on montre que A est intégralement fermé dans B, alors on aura $A = F$, et donc $A = B$ (par le lemme 2.5).

Il reste à montrer les deux lemmes suivants :

LEMME 3.3. — *Pour tout n, on a $y'_{n,n} \notin C_n$.*

LEMME 3.4. — *A_n est intégralement clos.*

Le lemme 3.4 est une conséquence du lemme suivant :

LEMME 3.5.

$$A'_n = k[X_i,\ X_n,\ X_i X_{i+1} X_{i+2}^2 \ldots X_n^{2^{n-i-1}} Y_n^{2^{n-i}},\ X_n Y_n]_{(i=1,\ \ldots,\ n-1)}$$

est intégralement fermé dans $B'_n = k[X_1, \ldots, X_n, Y_n]$.

En effet, le lemme 3.5 implique que A'_n est intégralement clos. Il en est donc de même de son localisé A_n.

Pour démontrer les lemmes 3.3 et 3.5, explicitons des bases de A'_n, B'_n, C_n et D_n sur k :

Base de B'_n : les monômes en les X_i et en Y_n;

Base de D_n : les monômes en les $x'_{i,n}$ et en $y'_{n,n}$ de degré en $x'_{i,n}$ strictement inférieur à $p(i)$;

Bases de A'_n et C_n : les éléments des bases ci-dessus qui sont dans A'_n et C_n.

LEMME 3.6. — *Pour qu'un monôme de la base considérée de B'_n (resp. D_n) soit dans A'_n (resp. C_n), il faut et il suffit que, si q_i et r désignent ses degrés en X_i et Y_n (resp. $x'_{i,n}$ et $y'_{n,n}$), on ait les inégalités*

$$(3.6.1) \qquad r-\sum_{i=0}^{n} q_i \leqq 0 \qquad \textit{et} \qquad r-2q_j-\sum_{j+1}^{n} q_i \leqq 0 \qquad \textit{pour} \quad 1 \leqq j \leqq n$$

$$\left[\textit{resp.} \right.$$

$$(3.6.2) \qquad \left\{\begin{array}{l} r-\displaystyle\sum_{i=0}^{n} q_i \leqq 0, \qquad r-2q_j-\sum_{j+1}^{r} q_i \leqq 0 \qquad \textit{pour} \quad 1 \leqq j \leqq n, \\ \qquad\qquad \textit{et} \qquad q_i < p(i) \quad \textit{pour tout } i \end{array}\right.\left.\right].$$

Comme $y'_{0,n} = x'_{1,n} x'^{2}_{2,n} \ldots x'^{2^{n-1}}_{n,n} y'^{2^n}_{n,n}$, il est immédiat que le lemme 3.6 implique le lemme 3.3.

Démontrons 3.6. Les monômes X_i, $X_i X_{i+1} X^2_{i+2} \ldots X^{2^{n-i-1}}_n Y^{2^{n-i}}_n$ et $X_n Y_n$ vérifient les inégalités (3.6.1). Il en est de même de produits de tels monômes, ce qui montre la nécessité des inégalités (3.6.1).

Réciproquement, si $P = X_0^{q_0} \ldots X_n^{q_n} Y_n^r$ vérifie (3.6.1), nous allons montrer que $P \in A'_n$. Si $q_n \geqq r$,

$$P = X_0^{q_0} \ldots X_n^{q_n - r} (X_n Y_n)^r \in A'_n.$$

Si $q_n < r$, on a

$$P = X_0^{q_0} \ldots X_{n-1}^{q_{n-1}} (X_n Y_n)^{2q_n - r} (X_n Y_n^2)^{r - q_n},$$

et donc $P = (X_n Y_n)^{2q_n - r}. P''$, où P'' est l'image dans B'_n du monôme

$$P' = X_0^{q_0} \ldots X_{n-1}^{q_{n-1}} Y_{n-1}^{r'} \quad \text{de } B'_{n-1} \qquad (\text{avec } r' = r - q_n).$$

On voit immédiatement que P' vérifie (3.6.1), et que si $P' \in A'_{n-1}$, $P \in A'_n$. On peut donc effectuer une récurrence descendante sur n, ce qui termine la démonstration, le cas $n = 0$ étant évident.

L'autre partie du lemme 3.6 se démontre de la même manière, en remplaçant X_i par $x'_{i,n}$ et Y_n par $y'_{n,n}$.

Il reste à démontrer le lemme 3.4. Pour cela, introduisons la « mesure en i » d'un élément a de B'_n [notée $\mu_i(a)$] : si a est un monôme $X_0'^{q_0} \ldots X_n'^{q_n} Y_n'^{r}$, on pose

$$\mu_i(a) = \sup\left(1, r\Big/\left(2q_i + \sum_{i+1}^{n} q_j\right)\right) \qquad \text{pour} \quad 1 \leqq i \leqq n$$

et

$$\mu_0(a) = \sup\left(1, r\Big/\left(\sum_{0}^{n} q_j\right)\right).$$

Si a est un polynôme, $\mu_i(a)$ est la borne supérieure des μ_i de ses termes. Évidemment, $a \in A'_n$ équivaut à $\mu_i(a) = 1$ pour tout i. Le lemme 3.5 résulte du lemme ci-après :

Lemme 3.7. — *Si f est un polynôme unitaire de $A'_n[X]$, et a un élément de B'_n, on a*

$$\mu_i(a) = \mu_i(f(a)).$$

C'est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 3.8.

(i) *Si $\mu_i(a) = \mu_i(b)$, on a $\mu_i(a) = \mu_i(ab)$;*

(ii) *Si $\mu_i(a) > \mu_i(b)$, on a $\mu_i(a) > \mu_i(ab) \geqq \mu_i(b)$.*

C'est le résultat d'arithmétique bien connu :

$$\text{Si } \frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}, \text{ on a } \frac{p}{q} = \frac{p+p'}{q+q'};$$

$$\text{Si } \frac{p}{q} > \frac{p'}{q'}, \text{ on a } \frac{p}{q} > \frac{p+p'}{q+q'} > \frac{p'}{q'}.$$

Appendice.

Écriture d'un module comme limite inductive de modules de présentation finie.

Soient M un A-module à gauche et $(x_i)_{i \in I}$ un système de générateurs de M. Avec un A-module libre L de base $(X_i)_{i \in I}$ on peut construire la suite exacte

$$0 \to R \xrightarrow{i} L \xrightarrow{p} M \to 0,$$

l'homomorphisme p étant défini par $p(X_i) = x_i$. Si J est une partie de I, désignons par L_J le sous-module de L engendré par les X_i pour $i \in J$. Soit E l'ensemble des couples (J, S), où J est une partie finie de I et S un sous-module de type fini de $L_J \cap S$. Munissons E de l'ordre déduit de l'inclusion : on aura $(J, S) \leqq (J', S')$ si et seulement si $J \subset J'$, et $S \subset S'$. L'ensemble ordonné E est filtrant, car si (J_1, S_1) et (J_2, S_2) sont deux éléments de E, $(J_1 \cup J_2, S_1 + S_2)$ majore (J_1, S_1) et (J_2, S_2) et appartient à E. En effet, il est immédiat que $S_1 + S_2 \subset R$ et que

$$S_1 + S_2 \subset L_{J_1} + L_{J_2} = L_{J_1 \cup J_2}.$$

Considérons, pour tout élément $e = (J, S)$ de E, le module $M_e = L_J/S$. Comme $S \subset R$, l'injection canonique de L_J dans L définit par passage au quotient un homomorphisme $\theta_e : M_e \to M$. De même, si $e' = (J', S')$ est un deuxième élément de E, supérieur à e, l'injection canonique de L_J dans $L_{J'}$ définit un homomorphisme $\varphi_{e', e} : M_e \to M_{e'}$. Il est immédiat que

$$\varphi_{e'', e'} \circ \varphi_{e', e} = \varphi_{e'', e} \quad \text{et que} \quad \theta_{e'} \circ \varphi_{e', e} = \theta_e \quad \text{si} \quad e \leqq e' \leqq e''.$$

Ceci montre que les M_e et les $\varphi_{e', e}$ forment un système inductif de limite inductive N et que les θ_e forment un système inductif d'homomorphismes de limite inductive $\theta : N \to M$.

Si $e = (\{ i \}, (0))$, on a $x_i \in \operatorname{Im}(\theta_e)$. Ceci montre que θ est surjectif.

Soit y un élément de N tel que $\theta(y) = 0$. Il existe un $e = (J, S) \in E$, tel que y soit l'image d'un élément y_e de M_e. On a donc $\theta_e(y_e) = 0$. Désignons par $x_{e, i}$ l'image canonique de X_i dans M_e (pour $i \in J$). On peut donc écrire $y_e = \sum_{i \in J} \lambda_i x_{e, i}$. Comme $\theta_e(y_e) = 0$, on a $z = \sum_{i \in J} \lambda_i X_i \in R$. Posons $e' = (J, S + Az)$. Ce qui précède montre que $\varphi_{e', e}(y_e) = 0$, et donc que $y = 0$, c'est-à-dire que θ est une injection.

On a donc montré que M était limite inductive des modules de présentation finie M_e.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Akiba (T.). — Remarks on generalized rings of quotients, *Proc. Japan Acad.*, t. 40, 1964, p. 801-806.

[2] Akiba (T.). — Remarks on generalized rings of quotients, II, *J. Math. Kyoto Univ.*, t. 5, 1965, p. 39-44.

[3] Balcerzyk (S.). — On projective dimension of direct limit of modules, *Bull. Acad. polon. Sc., Série Sc. math., astr. et phys.*, t. 14, 1966, p. 241-244.

[4] Bass (H.). — Big projective modules are free, *Illinois J. Math.*, t. 7, 1963, p. 24-31.

[5] Bass (H.). — Finistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 95, 1960, p. 466-488.

[6] Bass (H.). — *K-theory and stable algebra*. — Paris, Presses universitaires de France, 1964 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 22).

[7] BERNSTEIN (I.). — On the dimension of modules and algebras, IX, *Nagoya math. J.*, t. 13, 1958, p. 83-84.

[8] BESSERRE (A.) et MICALI (A.). — Quelques résultats sur les algèbres universelles, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 2658-2659.

[9] BOURBAKI (N.). — *Éléments de Mathématique*. Livre II : *Algèbre*. — Paris, Hermann.

[10] BOURBAKI (N.). — *Éléments de Mathématique*. Livre III : *Topologie générale*. — Paris, Hermann.

[11] BOURBAKI (N.). — *Éléments de Mathématique. Algèbre commutative*. — Paris, Hermann.

[12] CHASE (S. U.). — Direct products of modules, *Trans. Amer. math. Soc.*, t. 97, 1960, p. 457-473.

[13] COHN (P. M.). — On the free product of associative rings, *Math. Z.*, t. 71, 1959, p. 380-398.

[14] FERRAND (D.). — Annulateur et dual d'un module sur un anneau non intègre, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 260, 1965, p. 4295-4298.

[15] FERRAND (D.). — Sur les modules qui sont limite projective de leurs localisés, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, 1966, série A, p. 609-611.

[16] FERRAND (D.). — Épimorphismes d'anneaux et algèbres séparables, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 265, 1967, série A, p. 411-414.

[17] FERRAND (D.). — Épimorphismes d'anneaux à source noethérienne et monomorphismes de schémas, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, 1968, série A, p. 319-321.

[18] FERRAND (D.). — Monomorphismes de schémas noethériens, *Séminaire P. Samuel*, 1967-1968, n° 7, 25 pages.

[19] FLANDERS (H.). — Tensor and exterior powers, *J. of Algebra*, t. 7, 1967, p. 1-24.

[20] GODEMENT (R.). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux*. — Paris, Hermann, 1958 (*Act. scient. et ind.*, 1252; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 13).

[21] GOVOROV (V. E.). — Des modules plats [en russe], *Sibirs. mat. Z.*, t. 6, 1965, p. 300-304.

[22] GROTHENDIECK (A.). — *Éléments de Géométrie algébrique*. — Paris, Presses universitaires de France, 1960 à 1967 (*Institut des Hautes Études Scientifiques. Publications mathématiques*, 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28 et 32).

[23] HINOHARA (Y.). — Projective modules over weakly noetherian rings, *J. Math. Soc. Japan*, t. 15, 1963, p. 75-88.

[24] HINOHARA (Y.). — Supplement to « Projective modules over weakly noetherian rings », *J. Math. Soc. Japan*, t. 15, 1963, p. 474-475.

[25] HOWIE (J. M.) et ISBELL (J. R.). — Epimorphisms and dominions, II, *J. of Algebra*, t. 6, 1967, p. 7-21.

[26] ISBELL (J. R.). — Epimorphisms and dominions, *Proceedings of the Conference on categorical algebra* [1965; La Jolla], p. 232-246. — Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1966.

[27] JENSEN (C. U.). — A remark on flat and projective modules, *Canad. J. Math.*, t. 18, 1966, p. 943-949.

[28] JENSEN (C. U.). — On cohomological dimension of rings with countably generated ideals, *Math. Scand.*, Kobenhavn, t. 18, 1966, p. 97-107.

[29] JENSEN (C. U.). — Homological dimension of $\aleph_0$-coherent rings, *Math. Scand.*, Kobenhavn, t. 20, 1967, p. 56-60.

[30] KAPLANSKI (I.). — Projective modules, *Annals of Math.*, t. 68, 1958, p. 372-377.

[31] LAZARD (D.). — Sur les modules plats, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 258, 1964, p. 6313-6316.

[32] LAZARD (D.). — Algèbre symétrique et platitude, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 264, 1967, série A, p. 228-230.

[33] LAZARD (D.). — Disconnexités des spectres d'anneaux et des préschémas, *Bull. Soc. math. France*, t. 95, 1967, p. 95-108.

[34] LAZARD (D.). — Épimorphismes plats d'anneaux, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, 1968, série A, p. 314-316.

[35] LAZARD (D.). — Épimorphismes plats, *Séminaire P. Samuel*, 1967-1968, n° 4, 12 pages.

[36] LAZARD (D.). — Deux méchants épimorphismes, *Séminaire P. Samuel*, 1967-1968, n° 8, 5 pages.

[37] MAZET (P.). — Générateurs, relations et épimorphismes d'anneaux, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, 1968, série A, p. 309-311.

[38] MAZET (P.). — Caractérisation des épimorphismes par relations et générateurs, *Séminaire P. Samuel*, 1967-1968, n° 2, 8 pages.

[39] MICALI (A.). — Sur les algèbres universelles, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 14, 1964, p. 33-88.

[40] MICALI (A.). — Algèbres intègres et sans torsion, *Bull. Soc. math. France*, t. 94, 1966, p. 5-14.

[41] MICALI (A.), SALMON (P.) et SAMUEL (P.). — Intégrité et factorialité des algèbres symétriques, *Atas do IV° Coloquio Brasileiro de Matematica* [1963; Poços de Caldas], p. 61-76. — Sao Paulo, 1965.

[42] NAGATA (M.). — A treatise on the 14th problem of Hilbert, *Mem. Coll. Sc. Univ. Kyoto*, Series A, t. 30, 1956, p. 57-70; t. 30, 1957, p. 197-200.

[43] NAGATA (M.). — *On the fourteenth problem of Hilbert.* — Bombay, Tata Institute, 1965 (*Tata Institute of Fundamental Research. Lectures on Mathematics*, 31).

[44] OLIVIER (J.-P.). — Anneaux absolument plats universels et épimorphismes d'anneaux, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, 1968, série A, p. 317-318.

[45] OLIVIER (J.-P.). — Anneaux absolument plats universels et épimorphismes à buts réduits, *Séminaire P. Samuel*, 1967-1968, n° 6, 12 pages.

[46] OLIVIER (J.-P.). — Le foncteur T^{∞}, globalisation du foncteur T, *Séminaire P. Samuel*, 1967-1968, n° 9, 10 pages.

[47] RAYNAUD (M.). — Un critère d'effectivité de descente, *Séminaire P. Samuel*, 1967-1968, n° 5, 22 pages.

[48] RICHMANN (F.). — Generalized quotient rings, *Proc. Amer. math. Soc.*, t. 16, 1965, p. 794-799.

[49] ROBY (N.). — Sur les épimorphismes de la catégorie des anneaux, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 266, 1968, série A, p. 312-313.

[50] ROBY (N.). — Diverses caractérisations des épimorphismes, *Séminaire P. Samuel*, 1967-1968, n° 3, 12 pages.

[51] *Séminaire P. Samuel : Algèbre commutative*, 1967-1968 : *Les épimorphismes d'anneaux.* — Paris, Secrétariat mathématique, 1968.

[52] SERRE (J.-P.). — Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle, *Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres*, 11e année, 1957-1958, n° 23, 18 pages. — Paris, Secrétariat mathématique, 1959.

[53] SILVER (L.). — Non commutative localizations and applications, *J. of Algebra*, t. 7, 1967, p. 44-76.

[54] MERKER (J.). — Idéaux faiblement associés, *Bull. Sc. math.*, t. 93, 1969, p. 15-21.

[55] HEINZER (W.) et OHM (J.). — Nœtherian and non-nœtherian commutative rings, *Trans. Amer. math. Soc.* (à paraître).

[56[QUENTEL (Y.). — Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau (à paraître).

(Texte reçu le 11 octobre 1968.)

Daniel LAZARD,
3, rue Boissonade, 75-Paris 14e.