BULLETIN DE LA S. M. F.

S. DELACHE

Les solutions élémentaires hyperboliques d'opérateurs de Tricomi-Clairaut

Bulletin de la S. M. F., tome 97 (1969), p. 5-79

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1969__97__5_0>

Bull. Soc. math. France,
97, 1969, p. 5 à 79.
(*Thèse Sc. math.*, Paris, 1968).

LES SOLUTIONS ÉLÉMENTAIRES HYPERBOLIQUES D'OPÉRATEURS DE TRICOMI-CLAIRAUT

PAR

SOLANGE DELACHE (*).

Table des matières.

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1968.

Introduction.

L'objet de ce travail est d'expliciter les solutions élémentaires de certains opérateurs différentiels linéaires, strictement hyperboliques, à coefficients variables, et de décrire leur prolongement analytique.

Ces opérateurs appartiennent au type général de Tricomi : les coefficients principaux sont affines, les coefficients sous-principaux sont constants, les autres coefficients sont nuls. Ils sont entièrement caractérisés, s'ils sont auto-adjoints, par leur partie principale $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, et s'écrivent :

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = k_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[\sum_{j=1}^{l} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha\right] k_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad \alpha = \frac{l+m-1}{2},$$

$k_m(\xi)$, $k_{m-1}(\xi)$ sont des polynômes homogènes, de degré m et $m-1$, à coefficients réels constants. Nous étudierons le cas un peu plus général où α est un entier ou un demi entier.

L'équation des surfaces caractéristiques est du type de Clairaut : ces surfaces sont donc des hyperplans ou des enveloppes de ces hyperplans. Le conoïde caractéristique $K(y)$ est confondu avec le cône bicaractéristique $C(y)$, comme pour les opérateurs à coefficients constants.

La méthode utilisée pour calculer la solution élémentaire $E(x, y)$ est rappelée au chapitre I, 3. On en déduit une formule très simple pour $E(x, y)$, si $m \geqq l$ et $|x-y|$ petit [formule (II.38) de la proposition 7].

La formule (II.38) permet de montrer des relations de récurrence [*voir* (III.12) et (III.12_1)], utiles pour le prolongement analytique.

Notons Σ l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^l$ tels que la variété $G^*(x)\,[g(x, \eta) = 0]$, ait un point singulier réel, puis Ω une composante connexe de $\mathbf{R}^l - \Sigma$, où l'opérateur est strictement hyperbolique (théorème 1).

Si α est un entier n, à partir de (II.38), particulièrement simple dans ce cas, on montre que $E(x, y)$ coïncide pour $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ [$\mathcal{E}^+(y)$ émission de y] avec une fonction de (x, y) prolongeable analytiquement dans un ouvert de $\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^l$, variant avec les positions relatives de l, n, m (*voir* proposition 10 et tableau final).

Si α est un demi-entier, $\alpha = n - \frac{1}{2}$, on transforme l'intégrale (II.38) en la somme de deux intégrales, si l est pair (proposition 12), en une autre intégrale, si l est impair (proposition 13). Ces intégrales ne se prêtant pas encore à l'étude du prolongement analytique, on les transforme à nouveau en introduisant deux variables d'intégration supplémentaires [formules (III.43), (III.57), (III.58)]. Le résultat obtenu est le suivant (*voir* propositions 14 et 15, et tableau final) : $E(x, y)$ coïncide pour $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ avec une fonction de (x, y) prolongeable analytiquement là où le segment $[xy]$ est contenu dans Ω et $x \notin K(y)$, (avec toutefois une réserve si l est impair).

Nous obtenons même, dans certains cas, la nature des singularités du prolongement sur Σ (*voir* tableau final).

Chapitre I,

Les opérateurs strictement hyperboliques et leurs solutions élémentaires (rappels et compléments).

1. Opérateurs strictement hyperboliques.

1° *Hyperbolicité. Domaine d'hyperbolicité.* — Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^l$, de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_l)$, Ξ^l l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des formes linéaires complexes sur $\mathbf{R}^l$, de coordonnées $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_l)$, $\Xi^{\star, l-1}$ l'espace projectif complexe quotient de $(\Xi^l - 0)$ par le groupe de ses homothéties de centre O.

Soit $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ un opérateur différentiel dans Ω, linéaire, d'ordre m exactement en tout point de Ω, dont la partie principale $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est à coefficients réels. Au polynôme caractéristique $g(x, \xi)$, on associe le cône caractéristique $G(x)$ de Ξ^l d'équation

$$g(x, \xi) = 0,$$

et la variété algébrique projective $G^\star(x)$.

Rappelons la définition d'un opérateur strictement hyperbolique (*voir* [7], p. 132 à 137).

Définition 1. — $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est strictement hyperbolique au point $x \in \Omega$ s'il existe $N \in \mathrm{Re}\,\Xi^l$, non nul, ayant la propriété P_x : $\forall \xi \in \mathrm{Re}\,\Xi^l$, non parallèle à N, le polynôme en τ, $g(x, \xi + \tau N)$ a m racines réelles et distinctes.

La variété $G^\star(x)$ est alors sans singularité réelle. On montre que si $G^\star(x)$ est sans singularité réelle, une condition suffisante pour que l'opérateur soit strictement hyperbolique au point x est qu'il existe $N \in \mathrm{Re}\,\Xi^l$, non nul, ayant la propriété P'_x : $g(x, N) \neq 0$ et $\forall \xi \in \mathrm{Re}\,\Xi^l$, non parallèle à N, le polynôme en τ, $g(x, \xi + \tau N)$, a toutes ses racines réelles.

Supposons l'opérateur strictement hyperbolique au point x et notons $\Delta(x)$ l'ensemble des vecteurs N non nuls de $\mathrm{Re}\,\Xi^l$ ayant la propriété P_x, et $\Delta^\star(x)$ son image projective. On montre que $\Delta(x)$ est la réunion de deux cônes convexes ouverts, privés de leur sommet O et symétriques par rapport à O; sa frontière est une nappe de $G(x)$ appelée nappe interne; $\Delta^\star(x)$ est donc un ouvert convexe de $\mathrm{Re}\,\Xi^{\star, l-1}$ et sa frontière est la nappe interne de $G^\star(x)$.

Théorème 1. — *Supposons Ω connexe, $G^\star(x)$ sans singularité réelle $\forall\, x \in \Omega$, les coefficients de la partie principale de l'opérateur continus dans Ω. Alors l'ensemble $\mathcal{H}$ des points de Ω où l'opérateur est strictement hyperbolique, s'il n'est pas vide, coïncide avec Ω.*

Prouvons que $\mathcal{H}$ est ouvert et fermé dans Ω. Nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 1. — *Sous les hypothèses du théorème* 1, *la variété* Re $G^\star(x)$ *reste homéomorphe à elle-même quand x décrit Ω.*

Pour démontrer ce lemme, utilisons des hypothèses différentes, puis ramenons-nous à ces hypothèses. Indiquons la méthode.

(a) Soient $\Omega^\star$ et S deux variétés C^∞ sur $\mathbf{R}$, $\Omega^\star$ étant connexe, S étant compacte. Soit $f = f(p, \eta)$ une application C^∞ de $\Omega^\star \times S$ dans $\mathbf{R}$ telle que, pour chaque p fixé $\in \Omega^\star$, la différentielle par rapport à η, $d_\eta f$, soit non nulle. Notons alors :

$V \subset \Omega^\star \times S$, la variété C^∞ d'équation $f(p, \eta) = 0$;

$V_p \subset S$, la variété C^∞ d'équation $f(p, \eta) = 0$, p fixé;

π, la projection de V sur $\Omega^\star$, $\pi(p, \eta) = p$.

Les hypothèses : S compacte et $d_\eta f \neq 0$, $\forall\, p \in \Omega^\star$, entraînent que π est une submersion propre de V sur $\Omega^\star$. Ceci, joint au fait que $\Omega^\star$ est connexe, entraîne : $\forall\, p,\ p' \in \Omega^\star$, V_p et $V_{p'}$ sont difféomorphes. En effet, on le démontre au voisinage de tout point de $\Omega^\star$ en relevant un champ de vecteurs de $\Omega^\star$, dans V (*voir* par exemple [14]); puis globalement dans $\Omega^\star$ en utilisant la relation d'équivalence, dont les classes sont ouvertes : p équivalent à p' équivaut à V_p difféomorphe à $V_{p'}$.

(b) Prenons maintenant les hypothèses du théorème 1. S désigne alors la sphère unité de $\mathbf{R}^l$. Considérons l'application continue P de Ω dans la variété des polynômes en η de degré $\leq m$, à coefficients réels, qui à $x \in \Omega$ fait correspondre le polynôme $g(x, \eta)$. Notons $\Omega^\star$ l'image connexe $P(\Omega)$ et définissons $f(\Omega^\star \times S \to \mathbf{R})$ par

$$f(p, \eta) = g(x, \eta), \qquad \text{où} \quad x \in P^{-1}(p);$$

alors $V_p \subset S$ coïncide avec Re $G^\star(x)$ [où $x \in P^{-1}(p)$]. De (a), on déduit que V_p et $V_{p'}$ sont difféomorphes, $\forall\, p,\ p' \in \Omega^\star$; il en est donc de même pour Re $G^\star(x)$ et Re $G^\star(x')$, $\forall\, x,\ x' \in \Omega$.

$\mathcal{H}$ *est ouvert.* — Notons, pour N non nul $\in \mathrm{Re}\,\Xi^l$:

$$\mathcal{H}_N = \{ x \in \Omega \mid N^\star \in \Delta^\star(x) \}.$$

Comme $\mathcal{H} = \bigcup_N \mathcal{H}_N$, il nous suffit de montrer que chaque $\mathcal{H}_N$ est ouvert. Soit donc $y \in \mathcal{H}_N$ et montrons que, pour x voisin de y, N possède la propriété P'_x. Tout d'abord comme $g(y, N) \neq 0$, on a aussi $g(x, N) \neq 0$ pour x voisin de y.

Considérons un hyperplan Π de $\mathrm{Re}\,\Xi^l$ passant par O ne contenant pas N et montrons que, pour x voisin de y, et pour tout $\xi \in \Pi \cap S$ (S, sphère unité de $\mathrm{Re}\,\Xi^l$), le polynôme en τ, $g(x, \xi + \tau N)$ a toutes ses racines réelles. En effet, il existerait sinon, dans Ω une suite x_n de points tendant vers y, et dans $\Pi \cap S$ une suite ξ_n, telles que le polynôme en τ, $g(x_n, \xi_n + \tau N)$ n'ait pas toutes ses racines réelles. De la suite ξ_n, on peut extraire une suite convergeant vers ξ.

En reprenant les mêmes notations pour les deux suites extraites correspondantes, on obtient ceci : le polynôme $g(x_n, \xi_n + \tau_n N)$ tend vers le polynôme $g(y, \xi + \tau N)$ qui, lui, a toutes ses racines réelles et distinctes, ce qui est absurde.

Considérons maintenant $\xi \in \mathrm{Re}\,\Xi^l$ non parallèle à N, et décomposons-le sur $\Pi \cap S$ et N.

$$\xi = aN + b\xi_1, \qquad a,\ b \in \mathbf{R}, \qquad b \neq 0, \qquad \xi_1 \in \Pi \cap S.$$

Comme on a

$$g(x, \xi + \tau N) = b^m g\left(x, \xi_1 + \frac{a+\tau}{b} N\right),$$

le polynôme en τ, $g(x, \xi + \tau N)$, a aussi toutes ses racines réelles pour x voisin de y,

C. Q. F. D.

$\mathcal{H}$ *est fermé dans* Ω. — Utilisons ici le lemme 1. Comme Re $G^\star(x)$ reste homéomorphe à elle-même quand x décrit Ω, on peut définir sa nappe interne, $\forall\, x \in \Omega$. Notons $\Delta^\star(x)$ celui des deux ouverts de $\mathrm{Re}\,\Xi^{\star, l-1}$ qui a pour frontière cette nappe interne et qui ne contient aucun point de Re $G^\star(x)$.

Soit maintenant $x \in \overline{\mathcal{H}}$, $\Delta^\star(x)$, défini comme ci-dessus, et $N \in \Delta(x)$. Il existe donc une suite x_n de points de $\mathcal{H}$ tendant vers x, une suite N_n de points de $\mathrm{Re}\,\Xi^l$, $N_n \in \Delta(x_n)$, tendant vers N. Pour tout n, N_n a la propriété P_{x_n}, donc N a la propriété P'_x et $x \in \mathcal{H}$.

C. Q. F. D.

2° *Emission d'un opérateur strictement hyperbolique.* — Voici quelques définitions classiques (*voir* [11]), et utiles pour la suite. Nous supposons ceci : les coefficients de l'opérateur $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ sont analytiques dans Ω,

$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est hyperbolique strict en tout point de Ω, les deux cônes $\Delta^+(x)$ et $\Delta^-(x)$ de $\mathrm{Re}\,\Xi^l$ [dont l'image dans $\mathrm{Re}\,\Xi^{\star, l-1}$ est $\Delta^\star(x)$], d'adhérence $\Gamma^+(x)$ et $\Gamma^-(x)$, peuvent être choisis variant l'un et l'autre continûment avec $x \in \Omega$.

On peut définir, en tout point $x \in \Omega$, le cône bicaractéristique $C(x)$, dual du cône caractéristique réel $\mathrm{Re}\, G(x)$. Ses génératrices sont les droites $D(\xi)$ de $\mathbf{R}^l$ [ξ fixé $\in \mathrm{Re}\, G(x)$] :

$$D(\xi) = \{ x' \in \mathbf{R}^l \mid x'_j = x_j + \lambda\, g_{\xi_j}(x, \xi),\ \lambda \in \mathbf{R},\ j = 1, \ldots, l \}.$$

Sa nappe externe est celle qui est duale de la nappe interne de $\mathrm{Re}\, G(x)$.

Le cône d'émission $\mathcal{D}^+(x)$, de frontière $C^+(x)$, est, par définition, le cône convexe fermé dual de $\Gamma^+(x)$, c'est-à-dire l'ensemble des points $x' \in \mathbf{R}^l$ tels que

$$(x' - x).\xi \geqq 0, \qquad \forall \xi \in \Gamma^+(x).$$

Les surfaces caractéristiques de l'opérateur, d'équation $s(x) = 0$, sont obtenues en résolvant l'équation de Jacobi :

$$g\left(x, \frac{\partial s}{\partial x}\right) = 0.$$

Une bande bicaractéristique est le lieu du point $(x(t), \xi(t)) \in \Omega \times \mathrm{Re}\,\Xi^l$ tel que

$$\frac{dx_j}{dt} = g_{\xi_j}(x, \xi); \qquad \frac{d\xi_j}{dt} = - g_{x_j}(x, t); \qquad g(x, \xi) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, l).$$

Une courbe bicaractéristique est la projection sur Ω d'une bande bicaractéristique. Le lieu des courbes bicaractéristiques d'origine x est une surface caractéristique $K(x)$, appelée *conoïde caractéristique*, dont x est un point conique et $C(x)$ le cône des tangentes en x. $K^+(x)$ est, par définition, la partie de $K(x)$ dont le cône des tangentes en x est $C^+(x)$.

On prouve qu'il existe des courbes dans Ω, appelées courbes-temps, telles que leur demi-tangente en tout point $x \in \Omega$ appartienne à $\mathcal{D}^+(x)$. La réunion des courbes-temps d'origine les points de A $(A \subset \Omega)$, est l'*émission de A*, $\mathcal{E}^+(A)$. Supposons que, $\forall (x, y) \in \Omega \times \Omega$, la réunion des courbes-temps d'origine x et d'extrémité y soit compacte. On montre alors les propriétés suivantes : la frontière de $\mathcal{E}^+(A)$ est une surface caractéristique; si A est compact, $\mathcal{E}^+(A)$ est fermé; si A est un domaine, $\mathcal{E}^+(A)$ est un domaine.

Si $A = \{x\}$, la frontière de $\mathcal{E}^+(x)$ est la nappe externe de $K^+(x)$. On a des définitions analogues en remplaçant partout $+$ par $-$ et

$$x \in \mathcal{E}^+(y) \iff y \in \mathcal{E}^-(x).$$

Une partie A de Ω est dite compacte vers le passé si, $\forall\, x \in \Omega$, $A \cap \mathcal{E}^-(x)$ est compact. A est nécessairement fermé. Si A est compact vers le passé, $\mathcal{E}^+(A)$ l'est aussi, et si B est une partie compacte de Ω, $A \cap \mathcal{E}^-(B)$ et $\mathcal{E}^+(A) \cap \mathcal{E}^-(B)$ sont compacts.

3° *Théorème d'existence et d'unicité pour un opérateur strictement hyperbolique.* — Nous faisons les hypothèses de 2°. L'opérateur adjoint $a^\star\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est défini par ceci :

$$\text{Si } a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_l^{\alpha_l}}, \quad f \in C^\infty(\Omega),$$

$$a^\star\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) f = \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \frac{\partial^\alpha}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_l^{\alpha_l}} [a_\alpha(x) f(x)].$$

En particulier :

$$g^\star\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = (-1)^m g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

On montre le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *$\forall$ F partie de Ω compacte vers le passé, $\forall$ V distribution dans Ω à support dans F, il existe une distribution dans Ω unique U, telle que*

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) U = V,$$

support $U \subset \mathcal{E}^+$ (support V).

La restriction de U à tout domaine $D \subset \Omega$ ne dépend que des restrictions de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ et V à $\mathcal{E}^-(D)$.

On peut considérer $a^\star$ au lieu de a, $\mathcal{E}^+$ au lieu de $\mathcal{E}^-$, d'où des théorèmes analogues. On peut aussi, plus généralement, prendre V à support dans $\mathcal{E}^+(F)$. Si V appartient à un espace de Sobolev de type local $H^s_{\text{loc}}(\Omega)$, $U \in H^{s+m-1}_{\text{loc}}(\Omega)$ (s entier $\lesseqgtr 0$).

2. Noyaux élémentaires. Solutions élémentaires.

1° *Rappel sur les noyaux* (*voir* [15], p. 138 et suiv.). — Un noyau K sur Ω est une distribution sur $\Omega \times \Omega$. Nous noterons x (resp. y), la variable du premier facteur Ω (resp. deuxième facteur Ω), du produit $\Omega \times \Omega$. Soient $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega_y)$, $\varphi . K$ la distribution appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega_y)$ définie par $\varphi . K(\psi) = K(\varphi\psi)$, L l'application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega_x)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_y)$ définie par $L(\varphi) = \varphi . K$. On définit de même $K . \psi \in \mathcal{D}'(\Omega_x)$

et ${}^tL$ l'application linéaire continue de $\mathcal{D}(\Omega_y)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_x)$, transposée de L.

K est dit semi-régulier à droite si $L(\mathcal{D}(\Omega_x)) \subset \mathcal{E}(\Omega_y)$, (notations de [15]); alors $L \in \mathcal{L}\mathcal{C}(\mathcal{D}(\Omega_x), \mathcal{E}(\Omega_y))$ et ${}^tL$ se prolonge en une application linéaire continue de $\mathcal{E}'(\Omega_y)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_x)$ par ${}^tLV(\varphi) = V(L\varphi)$, où $V \in \mathcal{E}'(\Omega_y)$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$. Soient $y \in \Omega$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$, $\varphi . K(y)$, la valeur au point y de la fonction $\varphi . K$. k_y, distribution appartenant à $\mathcal{D}'(\Omega_x)$, définie par $k_y(\varphi) = \varphi . K(y)$, est appelée restriction de K à $\Omega_x \times y$.

On définit de façon analogue un noyau semi-régulier à gauche et ses restrictions k_x à $x \times \Omega_y$.

Un noyau est régulier s'il est semi-régulier à gauche et à droite. Un exemple en est le noyau de Dirac Δ :

$$\Delta(\Phi) = \int_\Omega \Phi(x, x)\, dx, \qquad \Phi \in \mathcal{D}(\Omega \times \Omega).$$

Ses restrictions à $\Omega \times y$ et $x \times \Omega$ sont les mesures de Dirac δ_y et δ_x.

2° *Définition et existence du noyau élémentaire d'un opérateur strictement hyperbolique* (*voir* [11]). — Nous faisons les hypothèses énoncées dans le paragraphe 1, 2°. On a le théorème ci-après :

THÉORÈME 3. — *A l'émission $\mathcal{E}^+$ est associé un noyau élémentaire E^+_{xy}, et un seul, ayant les propriétés :*

(*a*) *son support est contenu dans* $\{(x, y) \mid x \in \mathcal{E}^+(y)\}$.

(*b*) E^+_{xy} *est régulier. Ses restrictions e_y et e_x à $\Omega_x \times y$ et $x \times \Omega_y$ vérifient*

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) e_y = \delta_y, \qquad \text{support } e_y \subset \mathcal{E}^+(y),$$

$$a^*\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) e_x = \delta_x, \qquad \text{support } e_x \subset \mathcal{E}^-(x).$$

e_y et e_x sont donc solutions élémentaires en y et x de l'opérateur et de son adjoint.

En remplaçant $\mathcal{E}^+$ par $\mathcal{E}^-$, on obtient un noyau élémentaire E^-_{xy} qui a des propriétés analogues.

3° *Application au calcul de la solution U de* $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) U = V$ (*voir* théorème 2). — E^+_{xy} sera noté E^+, quand aucune confusion n'est à craindre. Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$, on sait que $\varphi . E^+ \in \mathcal{E}(\Omega_y)$; montrons que le support de $\varphi . E^+$ est contenu dans $\mathcal{E}^-$ (support φ). En effet soit $y \notin \mathcal{E}^-$ (support φ), donc $\mathcal{E}^+(y) \cap (\text{support } \varphi) = \emptyset$, d'où

$$e_y(\varphi) = 0 = \varphi . E^+(y).$$

On a donc : (support V) $\cap$ (support $\varphi . E^+$) est compact, (puisque support V est compact vers le passé). On peut alors définir la distribution $E^+ . V$ par

$$E^+ . V(\varphi) = V(\varphi . E^+), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x).$$

Son support est contenu dans $\mathcal{E}^+$ (support V) : en effet, si

$$(\text{support } \varphi) \cap \mathcal{E}^+(\text{support } V) = \emptyset,$$

alors

$$\mathcal{E}^-(\text{support } \varphi) \cap (\text{support } V) = \emptyset,$$

donc $E^+ . V(\varphi) = 0$.

D'autre part, elle vérifie

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) E^+ . V = V.$$

En effet, soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_x)$:

$$\begin{aligned}\left[a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) E^+ . V\right](\varphi) &= E^+ . V\left(a^\star\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi\right) \\ &= V\left(a^\star\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi . E^+\right) = V\left(\varphi . a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) E^+\right) \\ &= V(\varphi . \Delta) = V(\varphi).\end{aligned}$$

D'où la proposition suivante :

Proposition 1. — *$E^+ . V$ est la solution de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) U = V$ à support contenu dans $\mathcal{E}^+$*(support V). *De même, $V . E^+$ est la solution de $a^\star\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) U = V$, à support contenu dans $\mathcal{E}^-$* (support V), *si V est compact vers le futur. On peut aussi considérer $E^- . V$ et $V . E^-$.*

4° *Propriétés de symétrie.* — Nous supposons l'opérateur autoadjoint

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = (-1)^m\, a^\star\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Soit S la symétrie par rapport à la diagonale dans $\Omega \times \Omega$ et SE^+ la transformée de E^+ par S. On a

$$SE^+ = (-1)^m E^-.$$

En effet, on a

$$S\left(a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) E^+\right) = a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right) SE^+,$$

puisque

$$
\begin{aligned}
S & \left(a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)E^+\right)\varphi(x, y) \\
& = \left(a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)E^+\right)\varphi(y, x) = E^+\left(a^\star\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(y, x)\right) \\
& = E^+\left(S\left(a^\star\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x, y)\right)\right), = SE^+\left(a^\star\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi(x, y)\right) \\
& = \left(a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)SE^+\right)\varphi(x, y), \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega \times \Omega).
\end{aligned}
$$

Si l'opérateur est autoadjoint, on a de plus

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)E^+ = (-1)^m\, a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)E^+ = \Delta.$$

La symétrie S donne alors

$$a\left(y, \frac{\partial}{\partial y}\right)SE^+ = (-1)^m\, a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)SE^+ = S\Delta = \Delta.$$

Mais on a

$$\text{support } SE^+ = S(\text{support } E^+) = \text{support } E^-,$$

puisque $x \in \mathcal{E}^+(y) \Longleftrightarrow y \in \mathcal{E}^-(x)$.

Du théorème 3, on déduit donc

$$SE^+ = (-1)^m E^-.$$

Plus généralement, on vérifie facilement que

$$SE_a^+ = E_{a^\star}^-.$$

Proposition 2. — *Entre les noyaux élémentaires E_a^+ de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ et $E_{a^\star}^-$ de $a^\star\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, on a la relation de symétrie*

$$SE_a^+ = E_{a^\star}^-. \tag{I.1}$$

3. **Une méthode pour calculer les solutions élémentaires d'un opérateur strictement hyperbolique.**

Pour ce qui suit, *voir* [7], [8], [9], [10].

1° *Uniformisation.* — L'opérateur est supposé à coefficients analytiques dans Ω, mais pas nécessairement hyperbolique. Cette théorie s'étend à des opérateurs non linéaires (*voir* [3]).

Soit Ξ^{l+1}, de coordonnées $(\xi_0, \ldots, \xi^l)$, l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des fonctions complexes affines définies sur $\mathbf{R}^l$. La valeur de ξ au point x est notée :

$$\xi.x = \xi_0 + \xi_1 x_1 + \ldots + \xi_l x_l.$$

Notons :

$$S(\xi) = \{ y \in \Omega \mid \xi.y = 0 \}.$$

Soient $u(\xi, y)$ une fonction complexe de (ξ, y), holomorphe en au moins un point (η, y) où $\eta.y = 0$, $\xi(t, \eta, y)$ une fonction, à valeur dans Ξ^{l+1}, de $(t, \eta, y) \in \mathbf{C} \times \Xi^{l+1} \times \Omega$ où $\eta.y = 0$, holomorphe pour t petit, et telle que $\xi(0, \eta, y) = \eta$. Notons $u \circ \xi$ la fonction composée de $u(\xi, y)$ et $\xi(t, \eta, y)$.

DÉFINITION 2. — *$\xi(t, \eta, y)$ uniformise $u(\xi, y)$ si $u \circ \xi$ est une fonction de (t, η, y) holomorphe pour t petit.*

Considérons la solution unitaire $U^\star(\xi, y)$ de l'opérateur $a^\star\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, c'est-à-dire la solution du problème de Cauchy dans Ω :

$$\text{(I.2)} \qquad \begin{cases} a^\star\left(y, \dfrac{\partial}{\partial y}\right) U^\star(\xi, y) = 1, \\ U^\star(\xi, y) \text{ s'annule } m \text{ fois sur } S(\xi) = \{ y \in \Omega \mid \xi.y = 0 \}. \end{cases}$$

On sait qu'au voisinage de chaque point $y \in S(\xi)$, non caractéristique, $g(y, \xi) \neq 0$, il existe une solution et une seule de (I.2) holomorphe de (ξ, y); c'est le théorème de Cauchy-Kowalewski. Le problème est de compenser l'annulation du polynôme caractéristique aux points caractéristiques de $S(\xi)$ par un changement de variable, donné par le théorème d'uniformisation suivant (*voir* [6]).

THÉORÈME 4. — *$U^\star(\xi, y)$ et toutes ses dérivées d'ordre $\leqq m - 1$, sont uniformisables quand on choisit $\xi(t, \eta, y)$ comme suit. $(\xi(t, \eta, y), x(t, \eta, y))$ est la solution, holomorphe, pour t petit, du système différentiel*

$$\text{(I.3)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_j}{dt} = g_{\xi_j}(x, \xi), \qquad \dfrac{d\xi_j}{dt} = - g_{x_j}(x, \xi) \qquad (j = 1, \ldots, l), \\ \dfrac{d\xi_0}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{l} x_j\, g_{x_j}(x, \xi) - g(x, \xi), \end{cases}$$

telle que

$$x(0, \eta, y) = y, \qquad \xi(0, \eta, y) = \eta, \qquad \eta \in \Xi^{l+1}, \qquad \eta.y = 0.$$

On a les propriétés d'homogénéité $(\theta \in \mathbf{C})$:

$$\text{(I.4)} \qquad x(\theta^{1-m} t, \theta\eta, y) = x(t, \eta, y) \qquad \xi(\theta^{1-m} t, \theta\eta, y) = \theta\xi(t, \eta, y).$$

Nous utiliserons aussi $U_m^\star(\xi, y)$ définie par

$$(\mathrm{I}.5) \qquad U_m^\star(\xi, y) = \left(-\frac{\partial}{\partial\xi_0}\right)^m U^\star(\xi, y).$$

$U_m^\star(\xi, y)$ n'est pas uniformisée par $\xi(t, \eta, y)$ mais $U_m^\star = \dfrac{\partial}{\partial\xi_0} U_{m-1}^\star$, où $U_{m-1}^\star(\xi, y)$ est uniformisée par $\xi(t, \eta, y)$.

De la proposition 5.2 de [10], on déduit que la forme différentielle sur Ξ^{l+1}, $U_m^\star(\xi, y)\, d\xi_0 \wedge \ldots \wedge d\xi_l$, est uniformisée par $\xi(t, \eta, y)$; ceci signifie que

$$U_m^\star(\xi(t, \eta, y), y) \frac{D(\xi_0, \ldots, \xi_l)}{D(t, \eta_1, \ldots, \eta_l)}$$

est une fonction holomorphe de (t, η, y). Notons :

$$(\mathrm{I}.6) \qquad \begin{cases} \omega^\star(\xi) &= \displaystyle\sum_{j=0}^{l} (-1)^j\, d\xi_0 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\xi_j} \wedge \ldots \wedge d\xi_l, \\ \varpi(t, \eta) &= (1-m)\, t\, d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_l - dt \wedge \omega'(\eta), \\ \omega'(\eta) &= \displaystyle\sum_{j=1}^{l} (-1)^{j-1} \eta_j\, d\eta_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\eta_j} \wedge \ldots \wedge d\eta_l. \end{cases}$$

De la relation

$$(\mathrm{I}.7) \qquad \omega^\star(\xi(t, \eta, y)) = \frac{D(\xi_0, \ldots, \xi_l)}{D(t, \eta_1, \ldots, \eta_l)} \varpi(t, \eta),$$

on déduit que la forme différentielle sur Ξ^{l+1}, de degré l, $U_m^\star(\xi, y)\, \omega^\star(\xi)$, est aussi uniformisée par $\xi(t, \eta, y)$.

2° *Calcul des solutions élémentaires.* — Supposons ceci : l'opérateur est strictement hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \ldots, 0)$ en tout point de Ω, et son ordre m est supérieur ou égal à la dimension l de $\mathbf{R}^l$.

Notations :

$\Phi = \{(t, \eta) \mid t \in \mathbf{C}, \eta = (\eta_1, \ldots, \eta_l) \in \Xi^l\}$;

$\tilde{\Phi}$ = quotient de la partie de Φ où $\eta \neq 0$ par le groupe de transformations :

$$\theta(t, \eta) = (\theta^{1-m} t, \theta\eta), \ \theta \in \mathbf{C};$$

$$(\mathrm{I}.8) \qquad \begin{cases} \Psi = \{(t, \eta) \in \Phi \mid |t| . |\eta|^{m-1} < \mathrm{Cte}\}, \qquad \tilde{\Psi} \text{ son image dans } \tilde{\Phi}; \\ \tilde{x} = \left\{(t, \eta) \in \Psi \,\middle|\, \xi(t, \eta, y) . x = \xi_0 + \displaystyle\sum_{j=1}^{l} \xi_j x_j = 0,\ x \text{ et } y \text{ fixés}\right\}. \end{cases}$$

Les formules d'homogénéité (I.4) montrent que $\tilde{x}$ est un sous-ensemble analytique de $\tilde{\Psi}$. On montre aussi que le conoïde $K(y)$ associé à la projection $\xi(t, \eta, y)$, c'est-à-dire le lieu des points x tels que $\tilde{x}$ ait une singularité réelle, coïncide avec le conoïde caractéristique de l'opérateur, défini au paragraphe 1, 2° (*voir* [10]).

A tout polynôme de dérivation en x, homogène de degré $m-l$, $P_{m-l}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, associons la forme différentielle, de degré $l-1$:

$$(\text{I}.9)\quad \Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l}) = -\left.\frac{P_{m-l}(\xi(t, \eta, y))U_m^\star(\xi(t, \eta, y), y)\,\omega^\star(\xi(t, \eta, y))}{d[\xi(t, \eta, y).x]}\right|_{\tilde{x}},$$

Π_{m-l} est définie et holomorphe sur la partie régulière de $\tilde{x}$.

On définit d'autre part sur $\tilde{x}$, pour x voisin de y, une classe d'homologie compacte h, de dimension $l-1$, relative à la sous-variété $\tilde{x}\cap y^\star (y^\star : t = 0)$ pour la définition de h, *voir* [10], n° 41, et pour la construction de cycles appartenant à h, *voir* la proposition 8.2.

Notons $E(x, y)$, la solution élémentaire au point y, à support dans $\mathcal{E}^+(y)$, de $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ (notée e_y au paragraphe 2, 1°). Toute dérivée $P_{m-l}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x, y)$ s'obtient comme suit. Pour chaque y fixé, l'intégrale

$$\int_{h=h(\tilde{x}, y^\star)} \Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l})$$

définit une distribution en x, au voisinage de y et là où $x_1 > y_1$. Plus précisément, si $x \notin K^+(y)$, cette intégrale définit une fonction holomorphe de x (théorème 3 de [10]); en étudiant sa partie singulière lorsque $x \in K^+(y)$, on montre qu'il existe une distribution, définie au voisinage de y et là où $x_1 > y_1$, coïncidant, hors de $K^+(y)$, avec elle. On a alors la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *La distribution définie pour x voisin de y par*

$$(\text{I}.10)\quad \begin{cases} \textit{la distribution}\ \ \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\int_h \Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l}), & x_1 > y_1, \\ 0, \quad \text{si}\ \ x_1 \leq y_1, \end{cases}$$

est $P_{m-l}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x, y)$ (*voir* les formules (12.4), p. 60; (10.3), p. 54; $(10.1)_2$, p. 53 de [10]).

Pour expliciter $h = h(\tilde{x}, y^\star)$, il nous sera utile de considérer des cycles construits dans l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^{l-1}$.

4. Une construction de cycles dans l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^{l-1}$.

Notons $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_l)$ les coordonnées homogènes d'un point de $\mathbf{P}^{l-1}$. A la partie principale de l'opérateur, $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$, nous avons associé la variété $G^\star(x)$, d'équation $g(x, \eta) = 0$.

Supposons maintenant que le polynôme en η se décompose en le produit de deux polynômes :

$$g(x, \eta) = g_0(\eta)\, g_1(x, \eta),$$

g_0 étant indépendant de x et g_1 à coefficients continus de x. Tous les coefficients sont supposés réels.

Supposons que, pour $x = y$, $G^\star(x)$ soit sans singularité réelle. En particulier $G_0^\star[g_0(\eta) = 0]$, $G_1^\star(y)$ $[g_1(y, \eta) = 0]$ sont sans singularité réelle et n'ont pas de point réel commun.

Supposons donné d'autre part un hyperplan $\pi^\star(x)$ dans $\mathbf{P}^{l-1}$, dépendant continûment de x, Re $\pi^\star(x)$ étant en position générale par rapport à Re $G^\star(y)$ pour x voisin de y.

La construction qui suit s'inspire de celle du « cobord » si l est pair (*voir* [9], p. 107 à 110), de celle « d'un cycle détourné » si l est impair (*voir* [10], p. 92 à 94).

1° *Construction d'un fibré $W^\star$ de base* Re $G^\star(y)$. — Il existe dans Re $\mathbf{P}^{l-1}$ des structures riemaniennes C^∞. Re $G^\star(y)$ et Re $\Pi^\star(x)$ étant en position générale, on peut en construire une, telle que ces deux surfaces soient orthogonales : on le fait localement, puis globalement à l'aide d'une partition de l'unité. On construit ainsi, en chaque point $\tau \in$ Re $G^\star(y)$, une direction réelle, $g_\tau(y, \tau)$, orthogonale à Re $G^\star(y)$, donc tangente à Re $\Pi^\star(x)$ si $\tau \in$ Re $\Pi^\star(x)$. La droite projective complexe $d^\star(\tau)$, passant par τ, ayant la direction réelle $g_\tau(y, t)$, dépend continûment de (τ, x). Quand τ décrit Re $G^\star(y)$, les droites $d^\star(\tau)$ sont deux à deux disjointes au voisinage de Re $G^\star(y)$. Leur réunion, là où elles sont disjointes, est un espace fibré $W^\star$, de dimension réelle l, de base Re $G^\star(y)$, dont la fibre est un disque contenu dans une droite projective complexe; la fibre est donc une variété analytique complexe et elle a une orientation naturelle.

Comme Re $G_0^\star \cap$ Re $G_1^\star(y) = \emptyset$, on a

$$W^\star = W_0^\star \cup W_1^\star, \qquad W_0^\star \cap W_1^\star = \emptyset,$$

$W_0^\star$ et $W_1^\star$ étant deux fibrés de base Re $G_0^\star$ et Re $G_1^\star(y)$, dépendant de x.

2° *Construction d'une coupure $D_1^\star$ dans $W_1^\star$.* — Re $W_1^\star$ est un voisinage dans Re $\mathbf{P}^{l-1}$ de Re $G_1^\star(y)$. Notons, pour x fixé :

$$D_1^\star = \{\, \eta \in \operatorname{Re} \mathbf{P}^{l-1} \mid g_1(x, \eta)\, g_1(y, \eta) \leqq 0 \,\}.$$

Pour $|x - y|$ petit, $D_1^\star \subset$ Re $W_1^\star$. Sinon, il existerait une suite $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de points de $\mathbf{R}^l$ tendant vers y, et une suite $\{\eta_n\}_{n \in \mathbf{N}}$ de points de $[\operatorname{Re} \mathbf{P}^{l-1} - W_2^\star]$ telles que $\left[\text{où } \mathrm{W}_2^\star = \bigcup_n \mathrm{W}_{1, x_n}^\star\right]$

$$g(x_n, \eta_n)\, g(y, \eta_n) \leqq 0.$$

Puisque $[\mathrm{Re}\,\mathbf{P}^{l-1} - W_2^\star]$ est compact, on peut supposer (en considérant des suites extraites, bien sûr) qu'il existe $\eta \in [\mathrm{Re}\,\mathbf{P}^{l-1} - W_2^\star]$ tel que

$$\lim_{n \to \infty} \eta_n = \eta.$$

On aurait donc $g(y, \eta) = 0$, ce qui est absurde.

Supposons maintenant $|x - y|$ assez petit pour que

$$D_{1,x}^\star \subset \mathrm{Re}\,W_{1,x}^\star.$$

En particulier :

$$\mathrm{Re}\,G_1^\star(x) \subset \mathrm{Re}\,W_{1,x}^\star;$$

et par tout point $\xi \in \mathrm{Re}\,G_1^\star(x)$ passe une fibre, et une seule, d'origine $\tau \in \mathrm{Re}\,G_1^\star(y)$. Inversement, toute fibre $d^\star(\tau)$, issue de τ, coupe $G_1^\star(x)$ en un point, et un seul, ξ voisin de τ : en effet, $G_1^\star(x)$ est une hypersurface voisine de $G_1^\star(y)$, et $G_1^\star(y)$ coupe $d^\star(\tau)$ en τ et est en position générale par rapport à $d^\star(\tau)$. En particulier, ξ est réel, donc $\xi \in \mathrm{Re}\,G_1^\star(x)$. Les segments réels $[\tau\xi]$, d'origine $\tau \in \mathrm{Re}\,G_1^\star(y)$, d'extrémité $\xi \in \mathrm{Re}\,G_1^\star(x)$, fibrent $D_1^\star$ coupure réelle, de dimension réelle $l - 1$, construite dans $W_1^\star$.

3° *Construction de cycles* γ (voir *fig.* 1).

Supposons l pair : Dans chaque fibre $d^\star(\tau)$ de $W^\star$, munie de son orientation naturelle, traçons un « contour » $\gamma(\tau)$ orienté dans le sens direct, autour de τ, si $\tau \in \mathrm{Re}\,G_0^\star$, autour du segment réel $[\tau\xi]$, si $\tau \in \mathrm{Re}\,G_1^\star(y)$, ce contour dépendant continûment de τ. Supposons $\mathrm{Re}\,G^\star(y)$ munie d'une orientation changeant sur $\Pi^\star(x)$, et notons $h(G^\star(y), \Pi^\star(x))$ sa classe d'homologie. Lorsque τ décrit $\mathrm{Re}\,G^\star(y)$ ainsi orientée, $\gamma(\tau)$ engendre γ. γ est situé hors de $G^\star(y)$ et donc de $G^\star(x)$, pour $|x - y|$ petit, d'après la construction faite. Sa classe d'homologie $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y), \Pi^\star(x))$ vérifie

$$h(\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y), \Pi^\star(x)) = \delta h(G^\star(y), \Pi^\star(x)).$$

On peut évidemment décomposer γ en la somme de deux cycles :

$$\gamma = \gamma(W_0^\star) + \gamma(W_1^\star), \qquad \gamma(W_0^\star) \subset W_0^\star, \qquad \gamma(W_1^\star) \subset W_1^\star.$$

Supposons l impair : Supposons $\mathrm{Re}\,\mathbf{P}^{l-1}$ munie d'une orientation changeant sur $\Pi^\star(x)$. Orientons la partie réelle de la fibre de $W^\star$ de façon naturelle, orientons enfin la base $\mathrm{Re}\,G^\star(y)$ de $W^\star$ de sorte que le produit de ces deux orientations, avec la convention

(I.11) orientation fibre $\times$ orientation base,

soit l'orientation donnée à $\mathrm{Re}\,\mathbf{P}^{l-1}$.

Dans chaque fibre $d^\star(\tau)$ de $W^\star$, traçons un « détour » $\gamma(\tau)$, obtenu en détournant « deux fois sa partie réelle » de τ, si $\tau \in \mathrm{Re}\,G_0^\star$, du segment $[\tau\xi]$, si $\tau \in \mathrm{Re}\,G_1^\star(y)$, ce détour dépendant continûment de τ.

Quand τ décrit $\operatorname{Re} G^*(y)$ orienté, $\gamma(\tau)$ engendre $\gamma(W^*)$ situé hors de $G^*(y) \cup G^*(x)$, pour $|x-y|$ petit. Définissons γ comme suit :

Hors de W^*, $\gamma = \gamma(\mathbf{P}^{l-1} - W^*)$ est deux fois $\operatorname{Re} \mathbf{P}^{l-1}$ orientée comme ci-dessus. Dans W^*, $\gamma = \gamma(W^*)$ qui vient d'être construit. La classe d'homologie $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y), \mathrm{II}^*(x))$ de γ est donc celle de $2 \operatorname{Re} \mathbf{P}^{l-1}$ orientée et détournée de $G^*(y)$.

On peut aussi décomposer $\gamma(W^*)$ en la somme de deux chaînes :

$$\gamma(W^*) = \gamma(W_0^*) + \gamma(W_1^*), \qquad \gamma(W_0^*) \subset W_0^*, \qquad \gamma(W_1^*) \subset W_1^*.$$

4° *Construction d'une famille de cycles* $\gamma(\varepsilon)$. — Faisons dépendre γ, et plus précisément $\gamma(W_1^*)$, d'un paramètre $\varepsilon > 0$ petit. Utilisons dans chaque fibre de W_1^* la métrique riemanienne introduite au début.

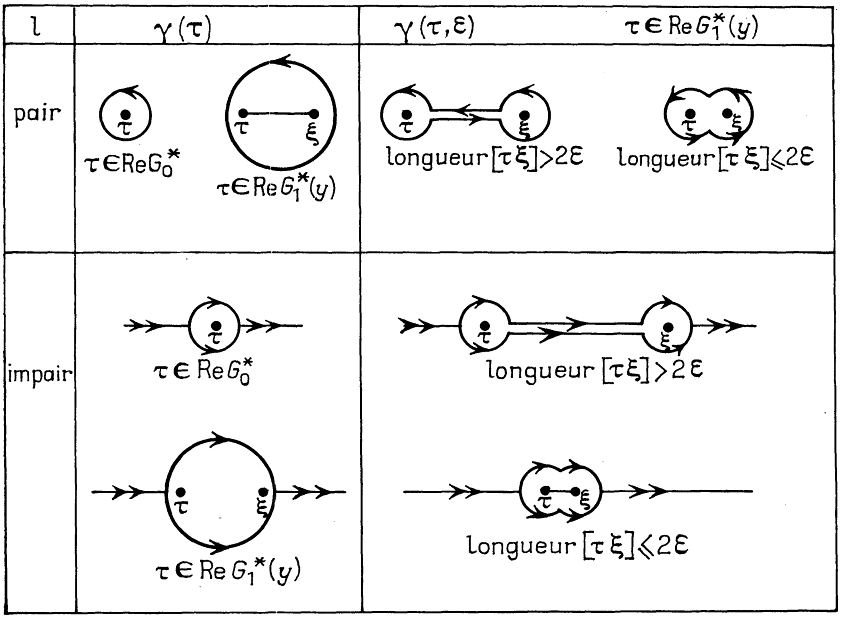

Figure 1.

Si l est pair, dans chaque fibre $d^*(\tau)$ de W_1^*, le contour $\gamma(\tau) = \gamma(\tau, \varepsilon)$ est la somme de deux arcs de cercles orientés (centrés en τ et ξ, de rayon $\varepsilon > 0$, de sorte que tous les points de l'un des arcs soient à une distance $\geqq \varepsilon$ du centre de l'autre arc), et de deux segments réels situés sur les deux bords du segment $[\tau\xi]$. Notons $\gamma_\varepsilon(W_1^*)$ la chaîne de W_1^* engendrée par $\gamma(\tau, \varepsilon)$ quand τ décrit $\operatorname{Re} G_1^*(y)$.

Si l est impair, dans chaque fibre $d^*(\tau)$ de W_1^*, le détour $\gamma(\tau) = \gamma(\tau, \varepsilon)$ est aussi la somme de deux arcs de cercles orientés (construits comme précédemment) et de segments réels situés sur la partie réelle de la fibre. Notons $\gamma_\varepsilon(W_1^\star)$ la chaîne de $W_1^\star$ engendrée par $\gamma(\tau, \varepsilon)$ quand τ décrit $\mathrm{Re}\, G_1^\star(y)$. Dans tout ce qui précède, nous avons conservé les mêmes conventions d'orientation qu'au paragraphe précédent.

Posons ensuite :

$$(\mathrm{I}.12)\quad \begin{cases} \gamma(\varepsilon) = \gamma(W_0^\star) + \gamma_\varepsilon(W_1^\star), & \text{si } l \text{ est pair;} \\ \gamma(\varepsilon) = \gamma(\mathbf{P}^{l-1} - W^\star) + \gamma(W_0^\star) + \gamma_\varepsilon(W_1^\star), & \text{si } l \text{ est impair.} \end{cases}$$

Évidemment, la classe d'homologie $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y), \mathrm{II}^\star(x))$ de $\gamma(\varepsilon)$ est celle :

du cobord de $Re\, G^\star(y)$ orientée, si l est pair;

de 2 fois $\mathrm{Re}\,\mathbf{P}^{l-1}$ orienté et détourné de $G^\star(y)$, si l est impair.

Chapitre II.

Les opérateurs de Tricomi-Clairaut. Propriétés. Calcul, pour x voisin de y, des solutions élémentaires $E(x, y)$ de certains de ces opérateurs.

1. Définition. Propriétés de l'ensemble des opérateurs de Tricomi-Clairaut.

1° *Définition.* — Un opérateur de Tricomi généralisé est un opérateur dont la partie principale $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ est à coefficients affines :

$$g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sum_{j=1}^{l} x_j g_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

la partie sous-principale $g'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ est à coefficients constants, les coefficients des termes de dérivation d'ordre inférieur sont nuls.

Pour de tels opérateurs, la projection $\xi(t, \eta, y)$ est telle que [*voir* (I.3)] :

$$(\mathrm{II}.1)\quad \begin{cases} d\xi_j = -g_j(\xi)\, dt & (j = 0, 1, \ldots, l), \\ \xi(0, \eta, y) = \eta, & \eta \cdot y = 0. \end{cases}$$

D'autre part, en utilisant le théorème de réciprocité énoncé dans la proposition 13.3 de [10], on peut calculer explicitement $U_m^\star(\xi(t, \eta, y), y)$. En effet, posons

$$(\mathrm{II}.2)\quad V_m(t, \eta, y) = -U_m^\star(\xi(t, \eta, y), y)\frac{D(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_l)}{D(t, \eta_1, \ldots, \eta_l)}.$$

Des formules (13.22) et (13.23), p. 65 de [10], on déduit

$$\text{(II.3)} \qquad \frac{d}{dt}\log V_m = -g'(\xi), \qquad V_m(0, \eta, y) = 1, \qquad \eta . y = 0.$$

Simplifions encore la résolution de (II.1) en choisissant

$$g_j(\xi) = \xi_j k_{m-1}(\xi) \qquad (j = 1, \ldots, l),$$

$k_{m-1}(\xi)$ polynôme homogène de degré $m-1$.

DÉFINITION 3. — *Appelons opérateur de Tricomi-Clairaut, un opérateur de Tricomi généralisé* $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$:

$$\text{(II.4}_1\text{)} \qquad a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) + g'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

dont la partie principale $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ vaut

$$\text{(II.4}_2\text{)} \qquad g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = k_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[\sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j}\right] k_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

$k_m(\xi)$, $k_{m-1}(\xi)$, $g'(\xi)$ sont des polynômes homogènes de degré m et $m-1$. Nous admettrons que k_m et k_{m-1} puissent avoir un facteur commun; dans ce cas, nous poserons

$$\text{(II.5}_1\text{)} \qquad g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

où $g_0(\xi)$ est homogène de degré $m-p$, où $g_1(x, \xi)$ s'écrit :

$$\text{(II.5}_2\text{)} \qquad g_1(x, \xi) = k_p(\xi) + \left[\sum_1^l x_j \xi_j\right] k_{p-1}(\xi), \qquad k_{p-1} \not\equiv 0,$$

$k_p(\xi)$ et $k_{p-1}(\xi)$ étant homogènes de degré p et $p-1$ et sans facteur commun.

On vérifie que l'opérateur (II.4) est autoadjoint si et seulement si

$$\text{(II.6)} \qquad g'(\xi) = \alpha k_{m-1}(\xi), \qquad \alpha = \frac{l+m-1}{2}.$$

Un opérateur de Tricomi-Clairaut autoadjoint est donc entièrement déterminé par sa partie principale.

2° *Quelques propriétés de l'ensemble des opérateurs de Tricomi.* — Notons $\mathcal{T}_{l,m}$, $\mathcal{TC}_{l,m}$, $\mathcal{TCA}_{l,m}$, l'ensemble des opérateurs de Tricomi, de Tricomi-Clairaut, ou de Tricomi-Clairaut autoadjoints, et $\mathcal{H}_{l,m}$ l'ensemble des opérateurs homogènes à coefficients constants, à l variables et d'ordre m. Tous ces ensembles sont stables par changement de coordonnées affine et l'on a

$$\mathcal{T}_{l,m} \supset \mathcal{TC}_{l,m} \supset \mathcal{TCA}_{l,m} \supset \mathcal{H}_{l,m}.$$

Si $a \in \mathcal{T}_{l,m}$, $b \in \mathcal{T}_{l,n}$, en général $ab \notin \mathcal{T}_{l,m+n}$, sauf si un des deux opérateurs est homogène à coefficients constants. Considérons alors $b \in \mathcal{H}_{l,n}$; on a

$$a \in \mathcal{T}_{l,m} \quad \Rightarrow \quad ab \in \mathcal{T}_{l,m+n},$$
$$a \in \mathcal{TC}_{l,m} \quad \Rightarrow \quad ab \in \mathcal{TC}_{l,m+n},$$

mais

$$a \in \mathcal{TCA}_{l,m} \quad \not\Rightarrow \quad ab \in \mathcal{TCA}_{l,m+n},$$

[*voir* la formule (II.6)].

Remarquons aussi que $\mathcal{T}_l$, $\mathcal{TC}_l$, $\mathcal{TCA}_l$ (on ne précise plus l'ordre, qui est quelconque), sont stables par l'opération crochet. En effet, si on a

$$a = g_0 + \sum_1^l x_j g_j + g', \qquad b = h_0 + \sum_1^l x_j h_j + h',$$

$$\text{(II.7)} \quad ab - ba = \sum_1^l \left[h_j \frac{\partial g_0}{\partial \xi_j} - g_j \frac{\partial h_0}{\partial \xi_j} \right] + \sum_{j=1}^l x_j \sum_{k=1}^l \left[h_k \frac{\partial g_j}{\partial \xi_k} - g_k \frac{\partial h_j}{\partial \xi_k} \right] + \sum_1^l \left[h_j \frac{\partial g'}{\partial \xi_j} - g_j \frac{\partial h'}{\partial \xi_j} \right].$$

2. Propriétés géométriques des opérateurs de Tricomi-Clairaut.

1° *Surfaces caractéristiques.* — Les surfaces caractéristiques de l'opérateur, d'équation $s(x) = 0$, sont les solutions de l'équation de Jacobi :

$$\text{(II.8)} \qquad g\left(x, \frac{\partial s}{\partial x}\right) \equiv g_1\left(x, \frac{\partial s}{\partial x}\right) g_0\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right) = 0.$$

Tout hyperplan de $\mathbf{R}^l$, d'équation $\eta_0 + \sum_1^l \eta_j x_j = 0$, est une solution de (II.8) quand le paramètre η vérifie

$$g_0(\eta_1, \ldots, \eta_l) = 0 \qquad \text{ou} \qquad k_p(\eta_1, \ldots, \eta_l) = \eta_0 k_{p-1}(\eta_1, \ldots, \eta_l).$$

Cette famille d'hyperplans, dépendant de l paramètres homogènes, est donc une intégrale complète de (II.8), équation dite du type de Clairaut. Toute solution de (II.8) est donc une enveloppe de ces hyperplans (*voir* [16], t. 1, p. 534 à 538).

2° *Domaine d'hyperbolicité.* — Nous supposons l'opérateur strictement hyperbolique en au moins un point y et nous utilisons le théorème 1. Cherchons donc à quelle condition $G^\star(x)$, $g(x, \eta) = 0$, a un point singulier réel. D'après l'hypothèse faite, $G_0^\star$, $g_0(\eta) = 0$, est sans singularité réelle. Donc tout point singulier réel sur $G^\star(x)$ correspond soit à un point commun à $\operatorname{Re} G_1^\star(x)$ et $\operatorname{Re} G_0^\star$, soit à un point singulier réel sur $G_1^\star(x)$. Notons donc

$$
\text{(II.9)} \quad \begin{cases} \Sigma_0 = \{ x \in \mathbf{R}^l \mid \operatorname{Re} G_1^\star(x) \cap \operatorname{Re} G_0^\star \neq \emptyset \}, \\ \Sigma_1 = \{ x \in \mathbf{R}^l \mid G_1^\star(x) \text{ a au moins un point singulier réel} \} \end{cases}
$$

On peut caractériser les points de Σ_0 ou Σ_1 par ceci :

$$
x \in \Sigma_0 \iff \exists\, \eta \text{ réel tel que}
$$

$$
\eta_0 + \sum_1^l \eta_j x_j = k_p(\eta) - \eta_0 k_{p-1}(\eta) = g_0(\eta) = 0,
$$

$$
x \in \Sigma_1 \iff \exists\, \eta \text{ réel tel que}
$$

$$
k_p(\eta) + [\eta . x]\, k_{p-1}(\eta) = \frac{\partial k_p}{\partial \eta_j} + [\eta . x] \frac{\partial k_{p-1}}{\partial \eta_j} + x_j k_{p-1}(\eta) = 0, \qquad (j = 1, \ldots, l).
$$

Σ_0 est une réunion d'hyperplans caractéristiques; sauf si $l = 2$, ce n'est pas une hypersurface de $\mathbf{R}^l$: c'est un fermé qui peut avoir des points intérieurs. Quant à Σ_1, c'est l'enveloppe des hyperplans caractéristiques :

$$
\eta_0 + \sum \eta_j x_j = 0, \qquad \text{tels que} \quad k_p(\eta) = \eta_0 k_{p-1}(\eta).
$$

C'est donc une surface caractéristique, réunion de l'hypersurface $[k_{p-1}(\eta) \neq 0]$:

$$
x_j = - \frac{1}{k_{p-1}(\eta)} \left[\frac{\partial k_p(\eta)}{\partial \eta_j} - \frac{k_p(\eta)}{k_{p-1}(\eta)} \frac{\partial k_{p-1}(\eta)}{\partial \eta_j} \right] \qquad (j = 1, \ldots, l)
$$

et des hyperplans caractéristiques, s'ils existent :

$$
\eta_0 + \sum_1^l \eta_j x_j = 0, \qquad k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = \frac{\partial k_p}{\partial \eta_j} - \eta_0 \frac{\partial k_{p-1}}{\partial \eta_j} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, l).
$$

[Ces hyperplans existent si les hypersurfaces $K_p^\star$, $k_p(\eta)=0$, $K_{p-1}^\star$, $k_{p-1}(\eta)=0$, de $\mathbf{P}^{l-1}$ ont un point de contact réel.]

Notons :

(II.10) $\Sigma=\Sigma_0\cup\Sigma_1$, $\Omega(y)$ la composante connexe $\ni y$ de $\mathbf{R}^l-\Sigma$.

Du théorème 1, on déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 4. — *L'opérateur de Tricomi-Clairaut, de partie principale* $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)=g_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, *est strictement hyperbolique dans* $\Omega(y)$.

3° *Conoïde caractéristique* $K(y)$. — $\mathrm{K}(y)$ est l'enveloppe des hyperplans caractéristiques $\ni y$; leur équation est

$$\eta_0+\sum_1^l \eta_j x_j=0,$$

η réel, avec les relations

$$\eta_0+\sum_1^l \eta_j y_j=g_0(\eta)=0 \qquad ou \qquad \eta_0+\sum_1^l \eta_j y_j=k_p(\eta)-\eta_0 k_{p-1}(\eta)=0.$$

Notons :

$$\eta(x-y)=\sum_1^l \eta_j(x_j-y_j).$$

En éliminant η_0 entre les relations ci-dessus, on obtient

$$\eta(x-y)=0,\quad \eta \text{ réel},\qquad \text{avec}\quad g_0(\eta)=0 \qquad ou \qquad g_1(y,\eta)=0.$$

L'une des deux dernières conditions exclut l'autre, puisque l'opérateur étant strictement hyperbolique en y, on a

$$\mathrm{Re}\, G_0^\star\cap \mathrm{Re}\, G_1^\star(y)=\varnothing.$$

$K(y)$ est donc l'enveloppe des hyperplans d'équation $\eta(x-y)=0$ où $g_0(\eta)=0$ *ou* $g_1(y,\eta)=0$ (η réel); pour que $x\in K(y)$, il faut et il suffit qu'il existe $\eta\in\mathrm{Re}\,\Xi^l$ et $\lambda\in\mathbf{R}$ tels que :

$$(\text{II.}11)\qquad \begin{cases} \eta(x-y)=0, \\ \quad g_0(\eta)=0 \qquad [\text{resp. } g_1(y,\eta)=0], \\ x_j-y_j=\lambda\dfrac{\partial g_0(\eta)}{\partial\eta_j} \qquad \left[\text{resp. } x_j-y_j=\lambda\dfrac{\partial g_1(y,\eta)}{\partial\eta_j}\right] \\ \qquad\qquad (j=1,\ldots,l). \end{cases}$$

Soit $\Pi^*(x-y)$ l'hyperplan de $\mathbf{P}^{l-1}$ d'équation $\eta(x-y)=0$. (II.11) exprime que $\Pi^*(x-y)$ et G_0^* [resp. $G_1^*(y)$] ont un point de contact réel η. Mais la relation

$$\text{(II.12)} \qquad g_1(x,\eta)=g_1(y,\eta)+[\eta(x-y)]\,k_{p-1}(\eta),$$

entraîne qu'un point de contact entre $\Pi^*(x-y)$ et $G_1^*(y)$ est un point de contact entre $\Pi^*(x-y)$, $G_1^*(y)$, $G_1^*(x)$. D'autre part, d'après (II.11), si $x\in K(y)$, la droite xy est contenue dans $K(y)$. $K(y)$ est donc un cône : c'est $C(y)$; Les courbes bicaractéristiques issues de y sont les génératrices de $C(y)$, puisque le long de ces droites, les hyperplans caractéristiques touchent leur enveloppe $K(y)$. L'émission $\mathcal{E}(y)$ est donc confondue avec le cône d'émission $\mathcal{D}(y)$.

Proposition 5. — *Supposons l'opérateur de Tricomi-Clairaut strictement hyperbolique en y. Pour que $x\in K(y)$, il faut et il suffit que les hypersurfaces de $\mathbf{P}^{l-1}$, $\Pi^*(x-y)$ $[\eta(x-y)=0]$ et $G_0^*[g_0(\eta)=0]$, ou $\Pi^*(x-y)$ et $G_1^*(y)[g_1(y,\eta)=0]$, aient un point de contact réel. Le conoïde caractéristique $K(y)$ est confondu avec le cône bicaractéristique $C(y)$.*

3. Calcul des dérivées d'ordre $m-l$ en x $(m\geqq l)$ des solutions élémentaires $E(x,y)$ d'opérateurs de Tricomi-Clairaut, pour x voisin de y.

Nous appliquons ici les résultats rappelés dans I, § 3, 2°.

1° *Equation de la variété $\tilde{x}$ et calcul de la forme différentielle à intégrer sur $\tilde{x}$.* — Déterminons donc $(\xi(t,\eta,y),\,V_m(t,\eta,y))$ la solution du système différentiel

$$\text{(II.13}_1\text{)}\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\xi_0}{k_m(\xi)}=\dfrac{d\xi_1}{\xi_1 k_{m-1}(\xi)}=\ldots=\dfrac{d\xi_l}{\xi_l k_{m-1}(\xi)}=\dfrac{d[\log V_m]}{g'(\xi)}=-dt,\\[2ex] \xi(0,\eta,y)=\eta \quad \left(\eta.y=\eta_0+\displaystyle\sum_1^l \eta_j y_j=0\right),\qquad V_m(0,\eta,y)=1 \end{array}\right.$$

[*voir* les formules (II.1), (II.2) et (II.3)].

Utilisons, pour le résoudre, les relations

$$\frac{\xi_j}{\eta_j}=\frac{\xi_k}{\eta_k}\qquad (k,j=1,\ldots,l),$$

que nous écrivons

$$\text{(II.13}_2\text{)}\quad \xi=\frac{\xi_j}{\eta_j}\eta,\qquad \text{où}\quad \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_l)\qquad\text{et}\qquad \eta=(\eta_1,\ldots,\eta_l).$$

On obtient ainsi, en utilisant l'homogénéité des polynômes :

$$d\xi_0 = \frac{k_m(\xi)}{\xi_j k_{m-1}(\xi)} d\xi_j = \frac{k_m(\eta)}{\eta_j k_{m-1}(\eta)} d\eta_j,$$

$$d[\operatorname{Log} V_m] = \frac{g'(\xi)}{\xi_j k_{m-1}(\xi)} d\xi_j = \frac{g'(\eta)}{\xi_j k_{m-1}(\eta)} d\xi_j.$$

En fonction de ξ_j, on a

$$\xi_0 = \frac{k_m(\eta)}{\eta_j k_{m-1}(\eta)} (\xi_j - \eta_j) - \sum_1^l \eta_k y_k,$$

(II.14) $$\xi . x = \frac{1}{k_{m-1}(\eta)} \left[\frac{\xi_j}{\eta_j} g(x, \eta) - g(y, \eta) \right],$$

(II.15) $$V_m = \left[\frac{\xi_j}{\eta_j} \right]^{\frac{g'(\eta)}{k_{m-1}(\eta)}}$$

Si $k_{m-1}(\eta) = 0$, on a

(II.16) $$\begin{cases} \xi . x = \eta(x - y), \\ V_m = \exp(-g'(\eta) t) \end{cases}$$

Dans le cas général, on peut aussi donner les expressions de $\xi . x$ et V_m en fonction de (η, t). En effet,

(II.17₁) $$\frac{d\xi_j}{\xi_j^m} = -\frac{k_{m-1}(\eta)}{\eta_j^{m-1}} dt,$$

(II.17₂) $$\xi_j = \eta_j [1 + (m-1) k_{m-1}(\eta)\, t]^{\frac{1}{1-m}},$$

la détermination du radical valant 1 pour $t = 0$. $\tilde{x}$ est le lieu des points (t, η) où $\xi . x = 0$, x et y étant fixés [*voir* (I.8)]. D'après (II.17), une équation de $\tilde{x}$ là où $k_{m-1}(\eta) \neq 0$ est

(II.18) $$[1 + (m-1) k_{m-1}(\eta)\, t]^{\frac{1}{1-m}} g(x, \eta) - g(y, \eta) = 0,$$

et d'après (II.16), l'intersection de $\tilde{x}$ avec la variété d'équation $k_{m-1}(\eta) = 0$, a pour équations

$$k_{m-1}(\eta) = \eta(x - y) = 0.$$

Il est facile de vérifier, en utilisant (II.18), que pour que $\tilde{x}$ ait un point singulier réel (t, η), il faut et il suffit que $x \in K(y)$: on retrouve en effet les conditions énoncées dans la proposition 5.

Sur la partie de $\tilde{x}$ où $\dfrac{g(x, \eta)}{g(y, \eta)}$ reste voisin de 1 pour x voisin de y, par exemple là où

$$\left| \frac{g(x, \eta)}{g(y, \eta)} - 1 \right| < k \leq 1,$$

on peut calculer explicitement t comme suit. Utilisons (II.18) et la relation

$$(\mathrm{II}.19)\qquad g(x,\eta)-g(y,\eta)=[\eta(x-y)]\,k_{m-1}(\eta).$$

On obtient

$$(m-1)\,k_{m-1}(\eta)\,t=\left[1+\frac{[\eta(x-y)]\,k_{m-1}(\eta)}{g(y,\eta)}\right]^{m-1}-1;$$

le polynôme en $k_{m-1}(\eta)$ au second membre étant divisible par $k_{m-1}(\eta)$, on a

$$(\mathrm{II}.20)\qquad t=\frac{\eta(x-y)}{g(y,\eta)}\left[1+P\left(\frac{\eta(x-y)}{g(y,\eta)},\,k_{m-1}(\eta)\right)\right],$$

où $P(u, v)$ est un polynôme de degré $m-2$ en u et v.

Pour calculer la forme différentielle sur $\tilde{x}$, on utilise (I.7) et (II.2) :

$$U_m^\star(\xi(t,\eta,y),y)\,\omega^\star(\xi(t,\eta,y))=-V_m(t,\eta,y)\,\varpi(t,\eta).$$

Supposons maintenant $\eta_1=1$. Donc

$$\varpi(t,\eta)=-dt\wedge d\eta_2\wedge\ldots\wedge d\eta_l\qquad [voir\ (\mathrm{I}.6)],$$

$$P_{m-l}(\xi(t,\eta,y))\Big|_{\tilde{x}}=\xi_1^{m-l}P_{m-l}(\eta)\Big|_{\tilde{x}}\qquad [voir\ (\mathrm{II}.13_2)],$$

$$V_m(t,\eta,y)\Big|_{\tilde{x}}=\xi_1^{\frac{g'(\eta)}{k_{m-1}(\eta)}}\Big|_{\tilde{x}}\qquad [voir\ (\mathrm{II}.15)].$$

Pour avoir, dans l'expression de V_m, un exposant indépendant de η, nous choisissons : $g'(\eta)=\alpha k_{m-1}(\eta)$, $\alpha\in\mathbf{R}$.

Définition 4. — *La classe des opérateurs de Tricomi-Clairaut que nous étudierons maintenant est définie par*

$$(\mathrm{II}.21)\qquad a_\alpha\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)=k_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+\left[\sum_1^l x_j\frac{\partial}{\partial x_j}+\alpha\right]k_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Cette classe d'opérateurs est stable par multiplication à droite par un opérateur homogène à coefficients constants et par l'opération crochet [*voir* (II.7)]. Et on a

$$a_\alpha^\star\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right)=a_\beta\left(x,\frac{\partial}{\partial x}\right),\qquad \alpha+\beta=m+l-1.$$

Poursuivons le calcul pour ces opérateurs :

$$V_m(t,\eta,y)\Big|_{\tilde{x}}=\xi_1^\alpha\Big|_{\tilde{x}}.$$

Mais, d'après (II.14), sur la partie de $\tilde{x}$ où $\dfrac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}$ reste voisin de 1, pour x voisin de y, on a

$$\xi_1 = \frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}.$$

D'où, (*voir* formule (2.3), p. 83 de [9]) :

$$\Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l}) = -\left[\frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}\right]^{m-l+\alpha} P_{m-l}(\eta) \frac{d\eta_2 \wedge \ldots \wedge d\eta_l}{\dfrac{\partial}{\partial t}(\xi.x)\Big|_{\tilde{x}}}.$$

Or, d'après (II.13) (x et y sont fixes) :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\xi.x)\Big|_{\tilde{x}} = -\xi_1^m g(x, \eta) = -\left[\frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}\right]^m g(x, \eta).$$

D'où

$$\Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l}) = P_{m-l}(\eta)\left[\frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}\right]^{\alpha-l} \frac{d\eta_2 \wedge \ldots \wedge d\eta_l}{g(x, \eta)};$$

et en revenant aux coordonnées homogènes $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_l)$,

$$\text{(II.22)} \qquad \Pi_{m-l}(t, \eta, x, y; P_{m-l}) = P_{m-l}(\eta)\left[\frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}\right]^{\alpha-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)},$$

sur la partie de $\tilde{x}$ où $\dfrac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}$ reste voisin de 1 pour $|x-y|$ petit, la détermination du radical valant 1 pour $x = y$.

2° *Expression des dérivées en x, d'ordre $m-l$, de $E(x, y)$, pour $|x-y|$ petit.* — Rappelons que y^* est la sous-variété : $t = 0$ de $\tilde{\Psi}$ et que $g^*(y)$ est la sous-variété $t = g(y, \eta) = 0$ de y^*. Identifions y^* à $\mathbf{P}^{l-1}$ et $g^*(y)$ à $G^*(y)$. Soit $\tilde{x}_1$ la partie de $\tilde{x}$ où

$$\left|\frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)} - 1\right| < 1.$$

Sur $\tilde{x}_1$, Π_{m-l} a l'expression (II.22). D'autre part, la formule (II.20) montre que, lorsque x tend vers y le long d'une droite non contenue dans $C(y)$, $\tilde{x}_1$ devient voisine de $\mathbf{P}^{l-1} - G^*(y)$.

Reprenons la construction des cycles γ (*voir* I, § 3, 3°), en remplaçant $\Pi^*(x)$ par $\Pi^*(x-y)$; elle est valable pourvu que $x \notin K(y)$ (*voir* prop. 5).

Si l est pair, donnons à $\operatorname{Re} G^*(y)$ l'orientation, hors de $\Pi^*(x-y)$:

$$\text{(II.23)} \qquad \frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1} dg(y, \eta)} > 0.$$

Si l est impair, donnons à $\mathrm{Re}\,\mathbf{P}^{l-1}$ l'orientation, hors de $\Pi^\star(x-y)$:

$$\frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0. \tag{II.24}$$

Soit $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y), \Pi^\star(x-y))$ la classe d'homologie de γ. Il existe des applications Φ_x de $[\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y)]$ dans $\tilde{x}_1$, telles que $\Phi_x(h(\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y), \Pi^\star(x-y)) = h(\tilde{x}, y^\star)$, (*voir* prop. 8.2, p. 51 de [10]). Donc $\Phi_x(\gamma) \in h(\tilde{x}, y^\star)$. Or, pour Φ_x, on peut prendre l'application qui à $\eta \in [\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y)]$ fait correspondre le point $(t, \eta) \in \tilde{x}_1$, la valeur de t étant donnée par la formule (II.20). Notons alors

$$\Omega_{m-l}(\eta, x, y); P_{m-l}) = \Phi_x^{-1}(\Pi_{m-l});$$

Ω_{m-l} a donc la même expression (II.22) que Π_{m-l}. De

$$\int_{\Phi_x(\gamma)} \Pi_{m-l} = \int_\gamma \Omega_{m-l},$$

nous déduisons [*voir* (I.10)], si x est voisin de y et $\in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$:

$$P_{m-l}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_\gamma \Omega_{m-l}(\eta, x, y; P_{m-l}),$$

Proposition 6. — *Supposons l'opérateur de Tricomi-Clairaut* (II.21), *de partie principale* $g\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, *d'ordre* $m \geqq l$, *strictement hyperbolique en* y. *Les dérivées d'ordre* $m - l$ *en* x *de sa solution élémentaire* $E(x, y)$ *au point* y *sont les fonctions de* x, *là où* $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ *est voisin de* y, *définies par les intégrales*

$$P_{m-l}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_\gamma P_{m-l}(\eta) \left[\frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}\right]^{\alpha - l} \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)}; \tag{II.25}$$

γ *est un cycle compact de* $\mathbf{P}^{l-1}$, *relatif à* $\Pi^\star(x-y)$, *situé hors de* $G^\star(x) \cup G^\star(y)$, *dont la classe d'homologie* $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y), \Pi^\star(x-y))$ *est celle :*

(II.26)
— *du cobord de* $\mathrm{Re}\, G^\star(y)$, *orienté par* (II.23), *si l est pair;*
— *de* $2\,\mathrm{Re}\,\mathbf{P}^{l-1}$ *orienté par* (II.24) *et détourné de* $G^\star(y)$, *si l est impair.*

Remarque. — Nous avons supposé l'opérateur strictement hyperbolique par rapport à $N = (1, 0, \ldots, 0)$ au voisinage de y, mais nous constatons que l'orientation de $\mathrm{Re}\,\mathbf{P}^{l-1}$, quand l est impair, est indépendante de ce choix des axes.

3° *Une remarque sur l'orientation de* Re $G^\star(y)$, *si* l *est pair.* — On suppose donc que $(1, 0, \ldots, 0) \in \Delta^+(y)$. Calculons la forme différentielle résidu :

$$\frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}\, dg(y, \eta)}.$$

Supposons $\eta_l = 1$. Elle s'écrit :

$$(-1)^{l-1} \frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_{l-1}}{[\eta(x-y)]^{l-1}\, dg(y, \eta)} = -\frac{d\eta_2 \wedge \ldots \wedge d\eta_{l-1}}{[\eta(x-y)]^{l-1}},$$

(d'après la formule (2.3) de [9]).

Revenons, aux coordonnées homogènes. Elle vaut

$$-\sum_{j=2}^{l} \frac{(-1)^j \eta_j\, d\eta_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\eta_j} \wedge \ldots \wedge d\eta_l}{[\eta(x-y)]^{l-1}}.$$

Or le produit intérieur gauche du 1-vecteur N, $N = (1, 0, \ldots, 0)$, de Ξ^l, par la $(l-1)$-forme $\omega'(\eta)$ sur Ξ^l est la $(l-2)$-forme

$$N \lrcorner\, \omega'(\eta) = -\sum_{j=2}^{l} (-1)^j \eta_j\, d\eta_2 \wedge \ldots \wedge \widehat{d\eta_j} \wedge \ldots \wedge d\eta_l,$$

(*voir* [2], chap. III, § 8, n° 4).

L'orientation de Re $G^\star(y)$ en dehors de $\Pi^\star(x-y)$ est

$$\text{(II.27)} \qquad \frac{N \lrcorner\, \omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}} > 0, \qquad N \in \Delta^+(y).$$

Sous cette forme, elle est indépendante du choix particulier des axes fait au début.

4. **Calcul des solutions élémentaires** $E(x, y)$ **d'opérateurs de Tricomi-Clairaut** ($|x-y|$ **est petit,** $m \geqq l$).

Si $m = l$, de (II.25) on déduit

$$\text{(II.28)} \qquad E(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_\gamma \left[\frac{g(x, \eta)}{g(y, \eta)}\right]^{l-\alpha-1} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

Si $m > l$, nous allons intégrer $(m-l)$ fois par rapport à x l'intégrale figurant au second membre de (II.25).

1° *Méthode d'intégration.* — Nous supposons y fixe, $|x-y|$ petit, $x \notin K(y)$. Plus précisément, x varie au voisinage de y à l'intérieur d'un cône étranger à $K(y)$. A chaque intégration, nous utiliserons le résultat : $E(x, y)$ et toutes ses dérivées d'ordre $\leqq m-l-1$ s'annulent pour $x = y$

(théorème 4 a, p. 66 de [10]). Nous utiliserons aussi la formule suivante, « dérivation sous le signe somme ».

Soit $\Omega(\eta, x)$ une forme différentielle de degré $l-1$ en η, holomorphe de (η, x) pour η voisin de γ et x voisin de y, dont les coefficients sont nuls sur $\Pi^*(x-y)$; puisque $\partial\gamma \subset \Pi^*(x-y)$, on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\int_\gamma \Omega(\eta, x) = \int_\gamma \frac{\partial}{\partial x_j}\Omega(\eta, x), \tag{II.29}$$

(*voir* formule (16.3), p. 69 de [10]).

Posons

$$F_{m-l}(u, v) = \frac{1}{v}\left[\frac{v}{u}\right]^{\alpha-l+1}, \qquad F_{m-l}(v, v) = \frac{1}{v}. \tag{II.30}$$

$F_{m-l}(u, v)$ est donc une fonction homogène de (u, v) de degré (-1), holomorphe pour $uv \neq 0$ *et* $\frac{u}{v}$ voisin de 1. D'après (II.25), on a donc

$$\begin{aligned} P_{m-l}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x, y) \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\int_\gamma P_{m-l}(\eta)\, F_{m-l}(g(x, \eta), g(y, \eta))\, \omega'(\eta). \end{aligned} \tag{II.31}$$

Notre but est d'expliciter $E(x, y)$ par une formule du même type que celle-ci. Pour le faire, nous allons montrer qu'il existe $F_p(u, v)$, $0 \leq p \leq m-l$, fonction homogène de (u, v) de degré (-1), holomorphe pour $uv \neq 0$ et $\frac{u}{v}$ voisin de 1, telle que, $\forall P_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ polynôme homogène de dérivation d'ordre p, on ait

$$\begin{aligned} P_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E(x, y) \\ = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\int P_p(\eta)\, F_p(g(x, \eta), g(y, \eta))\, [\eta(x-y)]^{m-l-p}\omega'(\eta). \end{aligned} \tag{II.32}$$

Les propriétés de $F_p(u, v)$ entraînent que la forme différentielle est holomorphe au voisinage de γ, qu'elle s'annule pour $x = y$ et pour $\eta(x-y) = 0$, dès que $p \geq 1$. D'après (II.29) une condition suffisante pour F_p est donc

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_j}([\eta(x-y)]^{m-l-p}F_p(g(x, \eta), g(y, \eta))) \\ &\quad = \eta_j[\eta(x-y)]^{m-l-p-1}F_{p+1}(g(x, \eta), g(y, \eta)). \end{aligned}$$

Or on a

$$\frac{\partial}{\partial x_j}g(x, \eta) = \eta_j k_{m-1}(\eta) = \eta_j\frac{g(x, \eta) - g(y, \eta)}{\eta(x-y)}.$$

En divisant par $\eta_j[\eta(x-y)]^{m-l-p-1}$, on obtient donc

$$(u-v)\frac{\partial}{\partial u}F_p(u, v)+(m-l-p)F_p(u, v)=F_{p+1}(u, v),$$

ce qui peut s'écrire :

$$\text{(II.33)} \qquad \frac{\partial}{\partial u}((u-v)^{m-l-p}F_p(u, v))=(u-v)^{m-l-p-1}F_{p+1}(u, v).$$

Cette relation détermine entièrement $F_p(u, v)$, $0 \leqq p \leqq m-l$. En effet, pour $p=m-l$, $F_p(u, v)$ est déterminé par (II.30). Supposons $F_{p+1}(u, v)$ déterminé, holomorphe pour $u=v$ et $uv \neq 0$, homogène de degré (-1). (II.33) détermine $F_p(u, v)$ unique, ayant les mêmes propriétés : $(u-v)^{m-l-p}F_p(u, v)$ est la primitive en u, nulle pour $u=v$, de $(u-v)^{m-l-p-1}F_{p+1}(u, v)$.

2° *Calcul de* $E(x, y)$. — D'après (II.32), on a donc besoin de $F_0(u, v)$, qui, d'après (II.33) vérifie

$$\frac{\partial^{m-l}}{\partial u^{m-l}}((u-v)^{m-l}F_0(u, v))=F_{m-l}(u, v)=\frac{1}{v}\left[\frac{v}{u}\right]^{\alpha-l+1};$$

on sait aussi que $(u-v)^{m-l}F_0(u, v)$ s'annule $(m-l)$ fois pour $u=v$. On a ainsi, en général :

$$\text{(II.34}_1\text{)} \qquad \left\{\begin{aligned} F_0(u, v)&=c_\alpha\frac{v^{\alpha-l}u^{m-\alpha-1}-Q_\alpha(u, v)}{(u-v)^{m-l}},\\ c_\alpha&=\frac{1}{(l-\alpha)(l-\alpha+1)\ldots(l-\alpha+m-l-1)}.\end{aligned}\right.$$

$Q_\alpha(u, v)$ est un polynôme d'intégration en u de degré $m-l-1$. Étant nécessairement homogène de degré $m-l-1$ en (u, v), c'est aussi un polynôme en v. La formule (II.34₁) vaut sauf s'il existe un entier k tel que

$$-1 \leqq k \leqq m-l-2 \qquad \text{et} \qquad l-\alpha+k=-1,$$

c'est-à-dire lorsque α est un entier n tel que

$$l \leqq \alpha = n \leqq m-1.$$

On obtient alors

$$\text{(II.34}_2\text{)} \qquad \left\{\begin{aligned} F_0(u, v)&=c_n\frac{v^{n-l}u^{m-n-1}\log\left[\dfrac{u}{v}\right]-Q_n(u, v)}{(u-v)^{m-l}},\\ c_n&=\frac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!\,(m-n-1)!} \qquad \left(\log\left[\frac{u}{v}\right]=0 \text{ pour } \frac{u}{v}=1\right)\end{aligned}\right.$$

où, pour les mêmes raisons que précédemment, $Q_n(u, v)$ est un polynôme homogène de degré $m-l-1$ en (u, v), parfaitement déterminé. Précisons comment on peut obtenir ces polynômes. Posons $\lambda = \frac{u}{v}$ dans les formules (II.34). Nous obtenons au second membre :

$$F_0(u, v) = \frac{c_\alpha}{v} \frac{\lambda^{m-\alpha-1} - Q_\alpha(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}},$$

ou

$$F_0(u, v) = \frac{c_n}{v} \frac{\lambda^{m-n-1} \log \lambda - Q_n(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}}.$$

$Q_\alpha(\lambda, 1)$ [resp. $Q_n(\lambda, 1)$], est la somme des $(m - l)$ premiers termes du développement de Taylor autour du point $\lambda = 1$ de $\lambda^{m-\alpha-1}$ (resp. $\lambda^{m-n-1} \log \lambda$). De l'homogénéité de $F_0(u, v)$, on déduit

$$F_0(u, v) = \frac{1}{v} F_0\left(\frac{u}{v}, 1\right) = \frac{1}{u} F_0\left(1, \frac{v}{u}\right). \tag{II.35}$$

Posons

$$\lambda = \frac{g(x, \eta)}{g(y, \eta)}. \tag{II.36}$$

Au voisinage de γ, λ est voisin de 1 et vaut $\frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)}$.

$$F(\lambda) = F_0(\lambda, 1) = \frac{1}{\lambda} F_0\left(1, \frac{1}{\lambda}\right). \tag{II.37}$$

De (II.32), (II.35), (II.36) et (II.37), nous déduisons

$$E(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_\gamma F(\lambda) [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

PROPOSITION 7. — *Supposons l'opérateur*

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left[k_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left(\sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha\right) k_{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right] g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

de partie principale $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, *d'ordre* $m \geqq l$, *strictement hyperbolique au point* y. *Sa solution élémentaire au point* y, $E(x, y)$, *est la fonction de* x, *pour* $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$, *définie pour* x *voisin de* y *par*

$$E(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_\gamma F(\lambda) [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}, \tag{II.38}$$

où $\lambda = \frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)}$ *est voisin de* 1 *sur* γ (γ *cycle construit comme dans la propo-*

sition 6), *où* $F(\lambda)$ *est holomorphe au voisinage de* $\lambda = 1$ *et est donnée par les formules*

$$(\text{II}.39) \quad \begin{cases} F(\lambda) = \lambda^{l-\alpha-1}, \qquad si \quad m = l; \\ F(\lambda) = c_\alpha \dfrac{\lambda^{m-\alpha-1} - Q_\alpha(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}}, \\ \qquad c_\alpha = \dfrac{1}{(l-\alpha)(l-\alpha+1)\dots(m-\alpha-1)}, \qquad si \quad m > l \\ \text{et } \alpha \text{ n'est pas un entier appartenant à } [l, m-1]; \\ F(\lambda) = c_n \dfrac{\lambda^{m-n-1}\log\lambda - Q_n(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}}, \qquad c_n = \dfrac{(-1)^{n-l}}{(n-l)!\,(m-n-1)!} \\ si \ m > l \text{ et } \alpha \text{ est un entier } n \in [l, m-1]; \end{cases}$$

$Q_\alpha(\lambda, 1)$ [*resp.* $Q_n(\lambda, 1)$], *est le polynôme en* λ, *de degré* $m-l-1$, *somme des* $m-l$ *premiers termes du développement de Taylor pour* $\lambda = 1$ *de* $\lambda^{m-\alpha-1}$, (*resp.* $\lambda^{m-n-1}\log\lambda$), *cette fonction valant* 1 (*resp.* 0), *pour* $\lambda = 1$.

Chapitre III.

Propriétés des solutions élémentaires d'opérateurs de Tricomi-Clairaut. Prolongement analytique de ces solutions élémentaires.

1. Propriétés des solutions élémentaires.

1° *Opérateurs homogènes à coefficients constants* ($m \geqq l$). — Écrivons la formule (II.25) :

$$P_{m-l}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E(x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_\gamma P_{m-l}(\eta) \left[\frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)}\right]^{\alpha-l+1} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)},$$

avec

$$g(y, \eta) \equiv g_0(\eta), \qquad \text{donc} \quad \frac{g(y, \eta)}{g(x, \eta)} \equiv 1.$$

Les calculs d'intégration sont valables à condition de poser

$$F_{m-l}(u, v) = \frac{1}{v}, \qquad \alpha = l - 1.$$

D'où

$$F_0(u, v) = \frac{1}{(m-l)!\, v},$$

$$F(\lambda) = F(1) = \frac{1}{(m-l)!}.$$

Choisissons y à l'origine; la forme différentielle

$$[\eta . x]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g_0(\eta)}$$

étant holomorphe hors de $G_0^\star$, on peut l'intégrer sur la classe d'homologie $h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^\star, \mathrm{II}^\star(x))$ de γ.

Si l est pair, utilisons la formule du résidu (théorème 1, p. 88 de [9]) :

$$2\pi i \int_{h(G_0^\star, \mathrm{II}^\star(x))} [\eta . x]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{dg_0(\eta)} = \int_{\partial h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^\star, \mathrm{II}^\star(x))} [\eta . x]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g_0(\eta)}.$$

Proposition 8. — *L'opérateur* $g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, *homogène à coefficients constants, d'ordre* $m \geqq l$, *strictement hyperbolique, a pour solution élémentaire* $E(x)$ *la fonction valant pour* $x \in \mathcal{E}^+(0) - C(0)$:

$$\text{(III.1)} \qquad E(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-2}} \int_{h(G_0^\star, \mathrm{II}^\star(x))} \frac{[\eta . x]^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\omega'(\eta)}{dg_0(\eta)},$$

si l est pair, $h(G_0^\star, \mathrm{II}^\star(x))$ *étant la classe d'homologie compacte de* $\operatorname{Re} G_0^\star$, *orientée en dehors de* $\mathrm{II}^\star(x)$ *par* $\frac{N \lrcorner\, \omega'(\eta)}{[\eta . x]^{l-1}} > 0$, *où* $N \in \Delta^+(0)$;

$$\text{(III.2)} \qquad E(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^\star, \mathrm{II}^\star(x))} \frac{[\eta . x]^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\omega'(\eta)}{g_0(\eta)},$$

si l est impair, $h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^\star, \mathrm{II}^\star(x))$ *étant la classe d'homologie compacte de* $2 \operatorname{Re} \mathbf{P}^{l-1}$, *orientée en dehors de* $\mathrm{II}^\star(x)$ *par* $\frac{\omega'(\eta)}{[\eta . x]^l} > 0$, *et détournée de* $G_0^\star$.

Comparons ces formules à celles d'Herglotz si l est pair, à celles de Petrowsky si l est impair (*voir* [11]). La formule (III.1) est, à la notation près, celle d'Herglotz (théorèmes 43.1 et 44.1, p. 82-83 de [11]). Si l est impair, la formule de Petrowsky (théorème 46.1, p. 87 de [11]) fait aussi intervenir la forme résidu

$$\frac{[\eta . x]^{m-l}}{(m-l)!} \frac{\omega'(\eta)}{dg_0(\eta)}.$$

Prouvons que h est aussi un cobord dans ce cas. En effet, on a

$$H_C(\mathbf{P}^{l-1}, \mathrm{II}^\star(x)) = H_C(\mathbf{C}^{l-1}) = 0.$$

Soit i, l'immersion de $(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^\star)$ dans $\mathbf{P}^{l-1}$. On a donc

$$ih \in H_C(\mathbf{P}^{l-1}, \mathrm{II}^\star(x)) = 0.$$

Ceci est une condition suffisante pour que h soit un cobord (*voir* [9], p. 85). Il existe donc $h_1 \in H_C(G_0^\star, \Pi^\star(x))$ tel que $h = \delta h_1$. PETROWSKY construit des cycles appartenant à h_1, dont la définition n'est pas très simple. Il peut être intéressant d'avoir comme dans (III.2) une intégrale supplémentaire et un cycle plus simple.

$E(x)$ est une fonction analytique de x pour $x \in \mathcal{E}^+(0) - C(0)$ (théorème 3, p. 97 de [9]).

2° *Opérateurs où α est un entier n ($m \geq l$).* — Considérons les opérateurs :

$$a_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = k_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[\sum_{j=1}^{l} x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + n\right] k_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

notons $E_n(x, y)$ leur solution élémentaire.

Distinguons deux cas :

(*a*) *n n'appartient pas à l'intervalle* $[l, m-1]$ (lequel est vide si $m = l$).

Si $n \leq l-1$, *posons* $n = l-1-k$, k *entier* ≥ 0. *D'après* (II.39), *on a*

$$F_n(\lambda) = c_n \frac{\lambda^{m-l+k} - Q_n(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}};$$

$F_n(\lambda)$ est donc un polynôme en λ de degré k, que nous notons $P_k(\lambda)$. Pour $k = 0$, on a $P_0(\lambda) = \frac{1}{(m-l)!}$. La forme différentielle

$$P_k\left(\frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)}\right)[\eta(x-y)]^{m-l}\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}$$

est holomorphe hors de $G^\star(y)$, où elle a une singularité polaire [d'ordre 1 sur $G_0^\star$, d'ordre $k+1$ sur $G_1^\star(y)$], et on peut l'intégrer sur la classe d'homologie $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y), \Pi^\star(x-y))$ de γ. D'où

$$\text{(III.3)} \qquad E_{l-1-k}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\int_h P_k\left(\frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)}\right)[\eta(x-y)]^{m-l}\frac{\omega'(\eta)}{g(y,\eta)},$$

où h est la classe d'homologie :

— du cobord de $\operatorname{Re} G^\star(y)$, orienté en dehors de $\Pi^\star(x-y)$ par $\frac{N \rfloor \omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}} > 0$, si $N \in \Delta^+(y)$ et *si l est pair*,

— de $2\operatorname{Re}\mathbf{P}^{l-1}$, orienté en dehors de $\Pi^\star(x-y)$ par $\frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0$ et détourné de $G^\star(y)$, *si l est impair*.

Si $n \geq m$, *posons* $n = m + k$, k *entier* ≥ 0. *D'après* (II.39), *on a*

$$\lambda F_n(\lambda) = c_n \frac{\lambda^{-k} - \lambda Q_n(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}} = c_n \frac{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{m-l+k} - Q_n\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)}{\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)^{m-l}}.$$

Comme $\lambda F_n(\lambda)$ est holomorphe au voisinage de $\lambda = 1$, comme $Q_n\left(1, \frac{1}{\lambda}\right)$ est un polynôme en $\frac{1}{\lambda}$ de degré $m-l-1$, $\lambda F_n(\lambda)$ est un polynôme de degré k en $\frac{1}{\lambda}$, notons-le $P'_k\left(\frac{1}{\lambda}\right)$. Évidemment, pour une même valeur de k, P_k et P'_k sont proportionnels. En particulier pour $k = 0$, $P'_0 = \frac{1}{(m-l)!}$. La forme

$$P'_k\left(\frac{g_1(y, \eta)}{g_1(x, \eta)}\right)[\eta(x-y)]^{m-l}\frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)}$$

étant holomorphe hors de $G^\star(x)$, où elle a une singularité polaire, on peut l'intégrer sur la classe d'homologie $h(\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(x), \Pi^\star(x-y))$ de γ, et l'on obtient

$$\text{(III.4)}\qquad E_{m+k}(x, y) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\int_h P'_k\left(\frac{g_1(y, \eta)}{g_1(x, \eta)}\right)[\eta(x-y)]^{m-l}\frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)},$$

où h est la classe d'homologie :

— du cobord de $\operatorname{Re} G^\star(x)$, orienté en dehors de $\Pi^\star(x-y)$ par $\frac{N \rfloor \omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}} > 0$, si $N \in \Delta^+(x)$ et *si l est pair*;

— de $2 \operatorname{Re} \mathbf{P}^{l-1}$, orienté en dehors de $\Pi^\star(x-y)$ par $\frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0$ et détourné de $G^\star(x)$, *si l est impair.*

(*b*) *n appartient à l'intervalle $[l, m-1]$, donc $m \geqq l+1$.*

D'après (II.39), $F_n(\lambda)$ contient $\log\lambda$. L'expression de $E(x, y)$ ne sera donc pas commode en particulier pour l'étude du prolongement analytique, mais nous allons démontrer que des dérivées d'un certain ordre de $E(x, y)$ auront des expressions simples. Il y a évidemment les dérivées d'ordre $m-l$ [formule (II.25)]; mais considérons aussi les dérivées d'ordre $m-n$, et montrons que

$$F_{m-n}(u, v) = \frac{1}{(n-l)!\,u}.$$

En effet, d'après (II.30) et (II.33), on a

$$\frac{\partial^{n-l}}{\partial u^{n-l}}((u-v)^{n-l}F_{m-n}(u, v)) = F_{m-l}(u, v) = \frac{1}{u}\left(\frac{u}{v}\right)^{l-n};$$

et une primitive d'ordre $n-l$ en u de $\frac{1}{u}\left(\frac{u}{v}\right)^{l-n}$, s'annulant $(n-l)$ fois pour $\frac{u}{v} = 1$, est évidemment $\frac{(u-v)^{n-l}}{(n-l)!\,u}$. De (II.32), on déduit

$$\text{(III.5)}\quad P_{m-n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)E_n(x, y) = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\int_h P_{m-n}(\eta)\frac{[\eta(x-y)]^{n-l}}{(n-l)!}\frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)},$$

h étant défini comme dans (III.4). (III.5) peut s'écrire d'une autre façon : considérons l'opérateur homogène à coefficients constants $g\left(x, \frac{\partial}{\partial t}\right)$, où x est un paramètre et t la variable, et sa solution élémentaire en O, $E_x(t)$. On a

$$P_{m-n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_n(x, y) = P_{m-n}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) E_x(t)\Big|_{t=x-y}.$$

3° *Relations de symétrie. Relations de récurrence.* — Nous supposons k_m et k_{m-1} fixés.

(*a*) *Relations de symétrie :* Nous avons vu que si

$$a_\alpha\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = k_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[\sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha\right] k_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$$a_\alpha^\star\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = a_\beta\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \qquad \alpha + \beta = l + m - 1.$$

De (I.1), nous déduisons donc

(III.6) $$E_\alpha^+(x, y) = (-1)^m E_\beta^-(y, x), \qquad \alpha + \beta = l + m - 1;$$

(III.6) est vraie sans hypothèse sur l et m, et on la vérifie facilement à partir des formules (II.39) pour $m \geqq l$ et $|x - y|$ petit.

(*b*) *Relations de récurrence :* Nous allons démontrer ceci [*voir* (III.12)] :

$$(l - \alpha) E_\alpha(x, y) = \left[m - \alpha - \sum_1^l (x_j - y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right] E_{\alpha-1}(x, y).$$

Nous supposons d'abord : $m \geqq l$, $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$, $|x - y|$ petit, α et $\alpha - 1$ ne sont pas des entiers appartenant à $[l, m-1]$, donc α *n'est pas un entier appartenant à* $[l, m]$. Posons

$$\mathcal{F}_\alpha(\lambda) = \frac{\lambda^{m-\alpha-1} - Q_\alpha(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}}, \qquad d_\alpha = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} c_\alpha.$$

D'où, en utilisant les formules (II.38) et (II.39) :

(III.7) $$\begin{cases} E_\alpha(x, y) = d_\alpha \displaystyle\int_\gamma \mathcal{F}_\alpha(\lambda)[\eta(x-y)]^{m-l}\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}, \\ E_{\alpha-1}(x, y) = d_{\alpha-1}\displaystyle\int_\gamma \mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda)[\eta(x-y)]^{m-l}\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}. \end{cases}$$

Cherchons une relation entre $\mathcal{F}_\alpha(\lambda)$ et $\mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda)$. Si $m > l$, on a

$$Q_\alpha(\lambda, 1) = 1 + (m-\alpha-1)(\lambda-1) + \ldots + \frac{(m-\alpha-1)(m-\alpha-2)\ldots(l-\alpha+1)}{(m-l-1)!}(\lambda-1)^{m-l-1}.$$

$$Q_{\alpha-1}(\lambda, 1) = 1 + (m-\alpha)(\lambda-1) + \ldots + \frac{(m-\alpha)(m-\alpha-1)\ldots(l-\alpha+2)}{(m-l-1)!}(\lambda-1)^{m-l-1}.$$

D'où la relation, évidemment valable si $m = l$ ($Q_\alpha = Q_{\alpha-1} = 0$) :

$$\text{(III.8)} \qquad Q_{\alpha-1}(\lambda, 1) - Q_\alpha(\lambda, 1) = \frac{\lambda-1}{m-\alpha}\,\frac{\partial Q_{\alpha-1}(\lambda, 1)}{\partial\lambda}.$$

Écrivons

$$\mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda) = \frac{\lambda^{m-\alpha-1}(1+\lambda-1) - Q_{\alpha-1}(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}}$$
$$= \mathcal{F}_\alpha(\lambda)\,\frac{\lambda^{m-\alpha-1}(\lambda-1) + Q_\alpha(\lambda, 1) - Q_{\alpha-1}(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}}.$$

De (III.8), on déduit

$$\text{(III.9)} \quad \mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda) = \mathcal{F}_\alpha(\lambda) + \frac{1}{m-\alpha}\,\frac{(m-\alpha)\lambda^{m-\alpha-1} - \dfrac{\partial Q_{\alpha-1}(\lambda, 1)}{\partial\lambda}}{(\lambda-1)^{m-l-1}}.$$

Démontrons

$$\text{(III.10)} \quad \left[\sum_{j=1}^{l}(x_j-y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right] E_{\alpha-1}(x, y)$$
$$= d_{\alpha-1}\int_\gamma \frac{(m-\alpha)\lambda^{m-\alpha-1} - \dfrac{\partial Q_{\alpha-1}(\lambda, 1)}{\partial\lambda}}{(\lambda-1)^{m-l-1}}\,[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

D'après (III.9), cette forme différentielle est holomorphe au voisinage de γ.

Remarquons que

$$\text{(III.11)} \qquad \left[\sum_1^{l}(x_j-y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right][\eta(x-y)] = \eta(x-y).$$

Dans l'expression (III.7) de $E_{\alpha-1}$, on peut dériver sous le signe somme par rapport à x : en effet, si $m > l$, la forme différentielle s'annule sur $\partial\gamma$, puisque $\eta(x-y) = 0$ et si $m = l$, on utilise (III.11) et la formule (16.3) de [9]. On obtient ainsi

$$\left[\sum_{1}^{l}(x_j-y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right]E_{\alpha-1}(x, y)$$

$$= d_{\alpha-1}\int_{\gamma}\left\{\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda)}{\partial\lambda}\left[\sum_{1}^{l}(x_j-y_j)\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\right]\right.$$
$$\left.+(m-l)\,\mathcal{F}_{\alpha-1}(\lambda)\right\}[\eta(x-y)]^{m-l}\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)},$$

avec

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\alpha-1}}{\partial\lambda}=\frac{(m-\alpha)\,\lambda^{m-\alpha-1}-\dfrac{\partial Q_{\alpha-1}}{\partial\lambda}}{(\lambda-1)^{m-l}}+\frac{l-m}{\lambda-1}\mathcal{F}_{\alpha-1}\qquad(\lambda\neq 1),$$

$$\sum_{1}^{l}(x_j-y_j)\frac{\partial\lambda}{\partial x_j}=\sum_{1}^{l}(x_j-y_j)\frac{\eta_j k_{m-1}(\eta)}{g(y, \eta)}=\frac{[\eta(x-y)]\,k_{m-1}(\eta)}{g(y, \eta)}=\lambda-1.$$

D'où la formule (III.10). De (III.7), (III.9) et (III.10), on déduit

$$\text{(III.12)}\quad (l-\alpha)\,E_\alpha(x, y)=\left[m-\alpha-\sum_{1}^{l}(x_j-y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right]E_{\alpha-1}(x, y).$$

Si α et $\alpha-1$ sont entiers et appartiennent à $[l, m-1]$, c'est-à-dire si α est un entier appartenant à $[l+1, m-1]$, la démonstration de (III.12) est analogue, la relation entre $Q_n(\lambda, 1)$ et $Q_{n-1}(\lambda, 1)$ étant

$$(m-n)\,[Q_{n-1}(\lambda, 1)-Q_n(\lambda, 1)]=(\lambda-1)\left[\frac{\partial Q_{n-1}(\lambda, 1)}{\partial\lambda}-\lambda^{m-n-1}\right].$$

Restent les cas ou $\alpha=l$ ou $\alpha=m$. Dans le premier cas, on a

$$\text{(III.13)}\qquad E_{l-1}(x, y)=\frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\int_{\gamma}\frac{[\eta(x-y)]^{m-l}}{(m-l)!}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

D'où la relation

$$\text{(III.14)}\qquad\left[\sum_{1}^{l}(x_j-y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right]E_{l-1}(x, y)=(m-l)\,E_{l-1}(x, y);$$

c'est une relation d'homogénéité : pour y fixé, d'après (III.13) $E_{l-1}(x, y)$ est une fonction de $(x-y)$ homogène de degré $m-l$.

Si $\alpha = m$, on a

$$(\text{III.15}) \qquad E_m(x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_\gamma \frac{[\eta(x-y)]^{m-l}}{(m-l)!}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)},$$

$$E_{m-1}(x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\,\frac{(-1)^{m-l-1}}{(m-l-1)!} \times \int_\gamma \frac{\log\lambda - Q_{m-1}(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}}[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)},$$

puisque $\mathcal{F}_m(\lambda) = \dfrac{(-1)^{m-l}}{\lambda}$, $\mathcal{F}_{m-1}(\lambda) = \dfrac{\log\lambda - Q_{m-1}(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}}$,

$$Q_m(\lambda, 1) + (-1)^{m-l}(\lambda-1)^{m-l-1} = \frac{\partial Q_{m-1}(\lambda, 1)}{\partial\lambda}.$$

D'où, par des calculs analogues :

$$(\text{III.16}) \qquad (m-l)\,E_m(x, y) = \left[\sum_1^l (x_j - y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right] E_{m-1}(x, y).$$

Supposons maintenant $m < l$. Multiplions l'opérateur $a_\alpha\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ par un opérateur $b\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, homogène, à coefficients constants, strictement hyperbolique, de sorte que $a_\alpha b$ soit strictement hyperbolique au point y et d'ordre $m' \geq l$. Entre $E_{\alpha, ab}(x, y)$, solution élémentaire en y de $a_\alpha b$, et $E_\alpha(x, y)$, solution élémentaire en y de a_α, on a la relation

$$E_\alpha(x, y) = b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{\alpha, ab}(x, y),$$

puisque la distribution (en x) au second membre a son support dans $\mathcal{E}_a^+(y)$ et vérifie

$$a_\alpha\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)\left[b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{\alpha, ab}(x, y)\right] = \delta_y.$$

On a donc, d'après (III.12) :

$$(l-\alpha)\,E_{\alpha, ab}(x, y) = \left[m' - \alpha - \sum_1 (x_j - y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right] E_{\alpha-1, ab}(x, y).$$

Faisons opérer $b\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$ sur les deux membres de cette relation, en utilisant la relation

$$b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\sum_1^l (x_j - y_j)\frac{\partial}{\partial x_j} = \left[\sum_1^l (x_j - y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}\right] b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \sum_1^l \xi_j\, b_{\xi_j}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

$$= \left[\sum_1^l (x_j - y_j)\frac{\partial}{\partial x_j} + m' - m\right] b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

On obtient exactement (III.12) :

$$(l-\alpha)\, E_\alpha(x, y) = \left[m-\alpha-\sum_1^l (x_j-y_j)\frac{\partial}{\partial x_j} \right] E_{\alpha-1}(x, y).$$

En utilisant la relation de symétrie (III.6) dans (III.12), on obtient

$$\text{(III.12}_1\text{)}\quad (m-\alpha)E_{\alpha-1}(x, y) = \left[l-\alpha-\sum_1^l (x_j-y_j)\frac{\partial}{\partial y_j} \right] E_\alpha(x, y).$$

(III.12) et (III.12_1) sont deux relations différentielles entre E_α et $E_{\alpha-1}$, sauf si $\alpha = l$ ou $\alpha = m$. Résumons les résultats.

Proposition 9. — *Soit la famille des opérateurs de Tricomi-Clairaut :*

$$a_\alpha\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = k_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[\sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \right] k_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

de partie principale $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$. *Supposons* k_m, k_{m-1} *fixés et* α *réel variant. Entre les solutions élémentaires hyperboliques* $E_\alpha(x, y)$ *de ces opérateurs, on a les relations*

$$E_\alpha^{\pm}(x, y) = (-1)^m E_\beta^{\mp}(y, x), \qquad \alpha+\beta = l+m-1;$$

$$(l-\alpha)\, E_\alpha\ \ (x, y) = \left[m-\alpha-\sum_1^l (x_j-y_j)\frac{\partial}{\partial x_j} \right] E_{\alpha-1}(x, y);$$

$$(m-\alpha)\, E_{\alpha-1}(x, y) = \left[l-\alpha-\sum_1^l (x_j-y_j)\frac{\partial}{\partial y_j} \right] E_\alpha(x, y).$$

Pour $\alpha = l$ (resp. $\alpha = m$), la deuxième formule (resp. troisième formule) est une formule d'homogénéité. Si $m \geqq l$, on a d'ailleurs

$$E_{l-1}(x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(\mathbf{P}^{l-1}-G^\star(y),\, \Pi^\star(x-y))} \frac{[\eta(x-y)]^{m-l}}{(m-l)!}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)},$$

$$E_m\ \ (x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(\mathbf{P}^{l-1}-G^\star(x),\, \Pi^\star(x-y))} \frac{[\eta(x-y)]^{m-l}}{(m-l)!}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)}.$$

Si n est un entier appartenant à $[l, m-1]$, on a

$$P_{m-n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_n(x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \times \int_{h(\mathbf{P}^{l-1}-G^\star(x),\, \Pi^\star(x-y))} P_{m-n}(\eta)\,\frac{[\eta(x-y)]^{n-l}}{(n-l)!}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)}.$$

2. Prolongement analytique des solutions élémentaires, si α est un entier n,

Soit Ω une composante connexe de $\mathbf{R}^l - \Sigma$ où l'opérateur est strictement hyperbolique (théorème 1). Lorsque $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$, la valeur de la solution élémentaire $E_n(x, y)$ est donnée par une intégrale. Nous étudions le prolongement analytique de cette intégrale.

1° $n \leqq l-1$. — *Pour* $m \geqq l$, l'intégrale figurant au second membre de la formule (III.3) est prolongeable analytiquement en tout point (x, y) tel que $y \in \Omega$ et $x \in \mathbf{R}^l - K(y)$. En effet, en un tel point, Re $G^\star(y)$ est sans singularité, Re $G^\star(y)$ et *Re* $\mathbf{II}^\star(x-y)$ sont en position générale; ceci reste vrai pour les variétés complexes correspondantes au voisinage de leur partie réelle (nous utiliserons souvent ceci par la suite). Le théorème 3, p. 97 de [9] prouve que, dans ces conditions, l'intégrale (III.3) est une fonction holomorphe dans un voisinage complexe de l'un de ces points (x, y), d'où le résultat.

Pour $m < l$, la solution élémentaire est aussi égale, pour $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ à une fonction prolongeable analytiquement dans le même domaine réel. En effet, multiplions l'opérateur $a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ par $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, homogène à coefficients constants, de sorte que ab soit strictement hyperbolique en y et d'ordre $m' = l$, ou $m' = l+1$: c'est possible en choisissant $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ produit d'opérateurs hyperboliques d'ordre 2. Calculons, pour $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$, $E_n(x, y) = b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{ab}(x, y)$ comme suit, *en supposant* $n = l-1$ *ou* $n = m-1$: l'analyticité du prolongement pour ces deux valeurs de n et la relation de récurrence (III.12_1) montrent alors l'analyticité du prolongement pour toute valeur de $n \leqq l-1$. *Supposons aussi que* $m' = l$: après une dérivation, si $m' = l+1$, les calculs sont les mêmes. D'après (III.3), on a

$$E_{l-1,ab}(x, y) = \mathrm{Cte} \int_{h(\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y) \cup B^\star,\, \mathrm{II}^\star(x,y))} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)\, b(\eta)},$$

$$E_{m-1,ab}(x, y) = \mathrm{Cte} \int_{h(\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y) \cup B^\star,\, \mathrm{II}^\star(x,y))} P_{l-m}\left(\frac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)}\right) \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)\, b(\eta)}$$

$P_{l-m}(\lambda)$ étant un polynôme de degré $l-m$, $B^\star$ ayant pour équation $b(\eta) = 0$. Utilisons les formules de dérivation (16.3), p. 69 de [10], et (10.6), p. 97 de [9]. $P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ étant de degré 1, on a

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{l-1,ab}(x, y) = \mathrm{Cte} \int_{\partial h} \frac{P_1(\eta)}{g(y, \eta)\, b(\eta)} \frac{\omega'(\eta)}{d[\eta(x-y)]},$$

$$P_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{m-1,ab}(x, y) = \text{Cte} \int_h \frac{P_1(\eta)\, k_{p-1}(\eta)}{g_1(y, \eta)} \frac{dP_{l-m}}{d\lambda} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)\, b(\eta)} + \text{Cte} \int_{\partial h} \frac{P_1(\eta)\, P_{l-m}(1)}{g(y, \eta)\, b(\eta)} \frac{\omega'(\eta)}{d[\eta(x-y)]}.$$

$b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ étant homogène de degré $l-m$, on obtient finalement

$$(\text{III}.17_1) \quad E_{l-1}(x, y) = b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{l-1,ab}(x, y) = \text{Cte} \int_{\partial h} \frac{d^{l-m-1}\left[\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}\right]}{d[\eta(x-y)]^{l-m}},$$

$$\begin{aligned}(\text{III}.17_2) \quad E_{m-1}(x, y) &= b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{m-1,ab}(x, y) \\ &= \text{Cte} \int_h \left[\frac{k_{p-1}(\eta)}{g(y, \eta)}\right]^{l-m} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ &\quad + \text{Cte} \int_{\partial h} \left\{ \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)\, d[\eta(x-y)]} + \frac{d\left[\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}\right]}{d[\eta(x-y)]^2} + \ldots + \frac{d^{l-m-1}\left[\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}\right]}{d[\eta(x-y)]^{l-m}} \right\}.\end{aligned}$$

$b(\eta)$ a disparu de toutes ces intégrales, qui sont prolongeables analytiquement pour $y \in \Omega$ et $x \in \mathbf{R}^l - K(y)$, d'après le même théorème 3, p. 97 de [9], C. Q. F. D.

2° $n \geqq m$. — Utilisons alors la relation de symétrie (III.6) et le résultat précédent : $E_n(x, y)$ coïncide pour $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ avec une fonction prolongeable analytiquement en tous les points (x, y) tels que $y \in \mathbf{R}^l$ et $x \in \Omega - K(y)$. Ce qui précède est valable sans hypothèse sur l et m.

Supposons maintenant : $m < l$ et $m \leqq n \leqq l-1$. On a un résultat plus fort dans ce cas : la formule (III.17₁) montre que, pour $n = l-1$, l'intégrale se prolonge analytiquement en tout point (x, y) tel que $x \notin K(y)$; la relation de récurrence (III.12₁) montre qu'il en est ainsi pour tout $n \in [m, l-1]$.

3° $n \in [l, m-1]$ *et* $m \geqq l+1$. — Considérons d'abord $n = l$. On rappelle que

$$P_{m-l}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_l(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{h(\mathbf{P}^{l-1} - G^*(x), \Pi^*(x-y))} P_{m-l}(\eta) \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)}.$$

$E_l(x, y)$ est solution d'un système différentiel à coefficients constants, dont les seconds membres sont des fonctions analytiques de (x, y)

pour $y \in \mathbf{R}^l$ et $x \in \Omega - K(y)$. Les conditions d'intégrabilité d'un tel système sont (*voir* [13]) :

$$\text{(III.18)} \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \int_h \eta_k P_{m-l-1}(\eta) \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)} = \frac{\partial}{\partial x_k} \int_h \eta_j P_{m-l-1}(\eta) \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)},$$

pour $j \neq k$, $P_{m-l-1}(\eta)$ étant un polynôme arbitraire homogène de degré $m - l - 1$. Or (III.18) est vrai pour $x \in \Omega$ voisin de y et $x \notin K(y)$, la valeur commune des deux termes étant

$$-\int_h \frac{\eta_j \eta_k k_{m-1}(\eta) P_{m-l-1}(\eta) \omega'(\eta)}{[g(x, \eta)]^2} + \int_{\partial h} \frac{\eta_j \eta_k P_{m-l-1}(\eta) \omega'(\eta)}{g(x, \eta) d[\eta(x - y)]},$$

fonction analytique de (x, y). Donc (III.18) reste vrai quand x décrit tout segment d'origine y, contenu dans $\Omega - K(y)$; il existe une forme différentielle $\omega(z)$ de degré 1 en z, à coefficients analytiques de (x, y) telle que :

$$P_{m-l-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_l(x, y) = \int_y^x \omega(z).$$

$P_{m-l-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_l(x, y)$ est donc une fonction analytique de (x, y), et l'on poursuit les intégrations; $E_l(x, y)$, donc $E_n(x, y)$, pour $n \in [l, m - 1]$, [en utilisant (III.12)], coïncide pour $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ avec une fonction prolongeable analytiquement en tous les points (x, y) tels que le segment $[xy]$ soit contenu dans Ω et $x \notin K(y)$.

4° *Singularités de la solution élémentaire sur* Σ. — Nous allons préciser la nature des singularités, lorsqu'elles existent, sur $\Sigma_1 - \Sigma_0$, des prolongements obtenus précédemment pour la solution élémentaire. Nous supposons d'abord $m \geqq l$. Nous utiliserons le théorème 4, p. 98 de [9].

(*a*) *Singularité de* $E_{l-1}(x, y)$ *pour* $y \in \Sigma_1$ $(m \geqq l)$: Nous supposons x fixe, $y \in \Omega$ tendant vers $\Sigma_1 - \Sigma_0$; $G_1^\star(y)$ a donc un point singulier réel lorsque $y \in \Sigma_1$. Nous supposons qu'il est quadratique et qu'il n'appartient pas à $\Pi^\star(x - y)$. Rappelons que [*voir* (III.3)] :

$$E_{l-1}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_h \frac{[\eta(x - y)]^{m-l}}{(m - l)!} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)};$$

mais nous savons que $k(\mathbf{P}^{l-1} - G^\star(y), \Pi^\star(x - y))$ est un cobord : $h = \delta h_1$ (*voir* II, § 1, 1°). Écrivons donc

$$E_{l-1}(x, y) = \text{Cte} \int_{h_1} [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{d\, g(y, \eta)}.$$

Avec les hypothèses faites, le théorème rappelé [appliqué pour $q = 1$, $p = 0$, degré $\omega'(\eta) = l - 1$], s'applique à cette intégrale, et l'on obtient

$$E_{l-1}(x, y) = \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y) \log s(y) \qquad \text{(si } l \text{ est impair)},$$
$$= \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y) [s(y)]^{\frac{l-3}{2}} \qquad \text{(si } l \text{ est pair)},$$

$s(y)$ étant une équation locale de Σ_1, $\mathrm{Hol}(y)$ désignant une fonction holomorphe de y.

Remarque. — On vérifie facilement que si le point singulier de $G_1^\star(y) \in \Pi^\star(x - y)$, cela entraîne, en général $y \in K(x)$. En effet, s'il existe η réel tel que

$$g_1(y, \eta) = \eta(x - y) = \frac{\partial k_p}{\partial \eta_j} + [\eta . y] \frac{\partial k_{p-1}}{\partial \eta_j} + y_j k_{p-1} = 0 \qquad (j = 1, \ldots, l),$$

cela entraîne, si $k_{p-1}(\eta) \neq 0$,

$$g_1(x, \eta) = \eta(x - y) = \frac{\partial k_p}{\partial \eta_j} + [\eta . x] \frac{\partial k_{p-1}}{\partial \eta_j} + x_j k_{p-1} + (y_j - x_j) k_{p-1} = 0$$
$$(j = 1, \ldots, l).$$

C'est la condition $x \in K_1(y)$ (*voir* prop. 5).

Si $k_{p-1}(\eta) = 0$, η est aussi singulier sur Re $G_1^\star(x)$ et $x \in \Sigma_1$. Nous avons donc à écarter aussi le cas où x et y appartiennent à un des hyperplans dont peut être constitué Σ_1, hyperplan correspondant aux points de contact réels, s'ils existent, entre $K_p^\star$ et $K_{p-1}^\star$.

(*b*) *Singularité de $E_n(x, y)$ pour x ou $y \in \Sigma_1$, $n \notin [l, m-1]$ $(m \geqq l)$:* Utilisons (III.12_1) et (III.6). D'où (k entier $\geqq 0$), si $y \in \Sigma_1 - \Sigma_0 - K(x)$:

$$(\text{III}.19_1) \quad \begin{cases} E_{l-1-k}(x, y) = \mathrm{Hol}(y) \log s(y) + \mathrm{Hol}(y) [s(y)]^{-k} & (l \text{ impair}), \\ \qquad = \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y) [s(y)]^{\frac{l-3}{2} - k} & (l \text{ pair}); \end{cases}$$

si $x \in \Sigma_1 - \Sigma_0 - K(y)$:

$$(\text{III}.19_2) \quad \begin{cases} E_{m+k}(x, y) = \mathrm{Hol}(x) \log s(x) + \mathrm{Hol}(x) [s(x)]^{-k} & (l \text{ impair}), \\ \qquad = \mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x) [s(x)]^{\frac{l-3}{2} - k} & (l \text{ pair}). \end{cases}$$

(*c*) *Singularité de $E_n(x, y)$ pour $n \in [l, m-1]$ $(m \geqq l + 1)$:* Utilisons $P_{m-n}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_n(x, y)$ et (III.6). D'où :

— si $y \in \Sigma_1$,

$$(\text{III}.20_1) \quad \begin{cases} P_{n-l+1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) E_n(x, y) = \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y) \log s(y) & (l \text{ impair}), \\ \qquad = \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y) [s(y)]^{\frac{l-3}{2}} & (l \text{ pair}); \end{cases}$$

— si $x \in \Sigma_1$,

$$(\mathrm{III}.20_2)\quad \begin{cases} P_{m-n}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) E_n(x, y) = \mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x)\log s(x) & (l \text{ impair}),\\ \qquad = \mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x)\,[s(x)]^{\frac{l-3}{2}} & (l \text{ pair}).\end{cases}$$

(*d*) *Cas où* $m < l$*:* Si $n \in [m, l-1]$, nous savons que le prolongement de E_n n'est pas singulier sur Σ_1. Sinon, étudions d'abord le cas $n = m-1$, en utilisant la formule explicite (III.17_2). Seule la première intégrale est singulière; la forme différentielle étant cohomologue à des formes ayant sur $G^\star(y)$ une singularité polaire d'ordre 1, on a, si $y \in \Sigma_1$:

$$\begin{aligned} E_{m-1}(x, y) &= \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y)\log s(y) && (l \text{ impair}),\\ &= \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y)\,[s(y)]^{\frac{l-3}{2}} && (l \text{ pair}).\end{aligned}$$

Utilisons les relations de récurrence et symétrie. Pour k entier $\geqq 0$, on a :

— si $y \in \Sigma_1$:

$$(\mathrm{III}.21_1)\quad \begin{cases} E_{m-1-k}(x, y) = \mathrm{Hol}(y)\log s(y) + \mathrm{Hol}(y)\,[s(y)]^{-k} & (l \text{ impair}),\\ \qquad = \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y)\,[s(y)]^{\frac{l-3}{2}} & (l \text{ pair});\end{cases}$$

— si $x \in \Sigma_1$:

$$(\mathrm{III}.21_2)\quad \begin{cases} E_{l+k}(x, y) = \mathrm{Hol}(x)\log s(x) + \mathrm{Hol}(x)\,[s(x)]^{-k} & (l \text{ impair}),\\ \qquad = \mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x)\,[s(x)]^{\frac{l-3}{2}} & (l \text{ pair}).\end{cases}$$

On obtient ces formules à partir des formules (III.19) en échangeant l et m.

Remarques. — 1° Si $l = 2$, Σ_0 est une réunion finie de droites de $\mathbf{R}^2$ et les résultats précédents s'appliquent lorsque x ou $y \in \Sigma_0 - \Sigma_1$.

2° L'indice α des opérateurs auto-adjoints, $\alpha = \dfrac{l+m-1}{2}$, est entier si m et l sont de parité différente. On a alors : si $m \leqq l-1$, le prolongement de $E(x, y)$ est analytique pour $x \notin K(y)$, si $m \geqq l+1$, il est analytique pour $[xy] \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$, et singulier pour x ou $y \in \Sigma$.

Proposition 10. — *Les solutions élémentaires* $E_n(x, y)$ *des opérateurs de Tricomi-Clairaut* (*n entier positif ou négatif*) :

$$a_n\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = k_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[\sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + n\right] k_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

sont égales pour $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ à des fonctions de (x, y), prolongeables analytiquement dans les ouverts suivants (Ω, composante connexe de $\mathbf{R}^l - \Sigma$, où l'opérateur est strictement hyperbolique) :

(*a*) $y \in \Omega$, $x \in \mathbf{R}^l - K(y)$, si $n \leqq \inf(l, m) - 1$;
(*b*) $y \in \mathbf{R}^l$, $x \in \Omega - K(y)$, si $n \geqq \sup(l, m)$;
(*c*) $x \notin K(y)$, si $m \leqq n \leqq l - 1$;
(*d*) segment $xy \subset \Omega$, $x \notin K(y)$, si $l \leqq n \leqq m - 1$.

Quand m et l sont de parité différente, tous les opérateurs autoadjoints correspondants sont du type (*c*) ou (*d*). Les singularités du prolongement, lorsqu'elles existent, sont données, pour x ou $y \in \Sigma_1$, par les formules (III.19), (III.20), (III.21).

Remarque. — A la fin du paragraphe 4 suivant, nous étudierons le problème du prolongement à travers Σ (au sens des distributions).

3. Transformation des intégrales en vue de leur prolongement analytique, lorsque α n'est pas entier ($m \geqq l$).

1° *Position du problème.* — L'intégrale (II.38) définit une fonction analytique de (x, y) pour x voisin de y et $x \notin K(y)$, d'après le théorème 3, p. 97 de [9]. Mais, sauf si α est entier ou si l'opérateur est homogène à coefficients constants, nous ne pouvons conclure que pour x voisin de y. On peut alors penser utiliser le théorème de Nilsson-Leray (*voir* [12]) : sa conclusion serait que l'intégrale définit une fonction analytique de (x, y) hors d'une hypersurface algébrique. Malheureusement, on ne peut l'appliquer dans ce cas; en effet, supposons par exemple y fixe, et soit Ω un voisinage de y dans $\mathbf{R}^l$. Il est possible que

$$\forall\, x_0 \in \Omega, \qquad \{x_0\} \times \Pi^*(x_0 - y) \subset \Omega \times \mathbf{P}^{l-1}$$

s'appuie sur la sous-variété de $\Omega \times \mathbf{P}^{l-1}$,

$$\{(x, \eta) \mid g_1(x, \eta) = g_1(y, \eta) = 0\}$$

qui fait partie du support singulier de la forme différentielle : il peut en effet exister, $\forall x_0 \in \Omega$, η réel tel que $\eta(x_0 - y) = g_1(x_0, \eta) = 0$, alors on a aussi $g_1(y, \eta) = 0$ et de plus $(j = 1, \ldots, l)$:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j} g_1(x_0, \eta) = \frac{\partial}{\partial \eta_j} g_1(y, \eta) + k_{p-1}(\eta)(x_{0j} - y_j).$$

Puisque nous ne pouvons pas appliquer le théorème cité, nous allons transformer l'intégrale (II.38) en vue de son prolongement analytique.

2° *Étude de limites d'intégrales.* — Intégrons, dans (II.38), sur n'importe quel cycle $\gamma(\varepsilon)$ construit comme au chapitre I, paragraphe 4, 4°.

Notons $\gamma'_\varepsilon(W_1^\star)$ la partie de $\gamma_\varepsilon(W_1^\star)$ engendrée, lorsque τ décrit $\operatorname{Re} G_1^\star(y)$ orientée, par la somme $\gamma'(\tau, \varepsilon)$ des deux arcs de cercles de la fibre $d^\star(\tau)$, centrés en τ et ξ et de rayon ε, orientés de façon convenable. Posons

$$I(\varepsilon) = \int_{\gamma'_\varepsilon(W_1^\star)} F(\lambda)\,[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

Nous allons démontrer que, si $l - \frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq m - \frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon) = 0$. En effet, choisissons comme coordonnées locales réelles d'un point $\eta \in W_1^\star$ $(\tau_1, \ldots, \tau_{l-2}, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$, où $(\tau_i)_{1 \leqq i \leqq l-2}$ est un système de coordonnées locales réelles de $\tau \in \operatorname{Re} G_1^\star(y)$, où $z = g(y, \eta)$ est l'affixe du point η dans la fibre $d^\star(\tau)$, après avoir choisi un des η_i égal à 1. Les $(l-1)$ autres coordonnées (η_i) du point η sont donc des fonctions complexes différentiables de $(\tau_1, \ldots, \tau_{l-2}, z)$. De plus, pour tout $(\tau_1, \ldots, \tau_{l-2})$ fixé, ce sont des fonctions holomorphes de z puisque toute fibre $d^\star(\tau)$ est une sous-variété analytique complexe de dimension 1 de l'espace projectif complexe $\mathbf{P}^{l-1}$, dans laquelle on peut prendre z comme coordonnée d'un point. Donc $[\eta(x-y)]^{m-l}\,\omega'(\eta)$ (après avoir choisi un des η_i égal à 1) s'écrit :

$$[\eta(x-y)]^{m-l}\,\omega'(\eta) = \omega_1(\tau, z) \wedge \omega_{l-2}(\tau),$$

$\omega_1(\tau, z)$ étant une forme différentielle en z, holomorphe, à coefficients continus de τ; $\omega_{l-2}(\tau)$ s'écrivant :

$$\omega_{l-2}(\tau) = d\tau_1 \wedge \ldots \wedge d\tau_{l-2}.$$

λ est une fonction continue de (τ, z), holomorphe en z pour chaque τ fixé, sur $\gamma'(\tau, \varepsilon)$.

Posons [en utilisant (II.35) et (II.37)] :

$$\text{(III.22)} \qquad A(\eta) = \frac{F(\lambda)}{g(y, \eta)} = \frac{\lambda^{\frac{1}{2}} F(\lambda)}{[g(x, \eta)\, g(y, \eta)]^{\frac{1}{2}}},$$

où $\lambda^{\frac{1}{2}} = 1$ et $[g(x, \eta)\, g(y, \eta)]^{\frac{1}{2}} = g(y, \eta)$ pour $x = y$.

I(ε) s'écrit donc

$$I(\varepsilon) = \int_{\operatorname{Re} G_1^\star(y)} \omega_{l-2}(\tau) \int_{\gamma'(\tau, \varepsilon)} A(\tau, z)\, \omega_1(\tau, z).$$

Notons $z_0(\tau)$, la valeur réelle de $g(y, \eta)$ au point ξ où $d^\star(\tau)$ coupe $G_1^\star(x)$. De (III.22), nous déduisons, si $\lambda^{\frac{1}{2}} F(\lambda)$ est borné :

$$\text{(III.23)} \qquad |I(\varepsilon)| \leqq \text{Cte} \int_{\operatorname{Re} G_1^\star(y)} |\omega_{l-2}(\tau)| \int_{\gamma'(\tau, \varepsilon)} \frac{|dz|}{|z(z - z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}}$$

$\left[\text{où } \int_{\operatorname{Re} G_1^*(y)} |\omega_{l-2}(\tau)|\right.$ désigne l'intégrale du module du coefficient de $\omega_{l-2}(\tau)$, quand on a orienté Re $G_1^*(y)$ par $\left.\omega_{l-2}(\tau) > 0\right]$.

Considérons les expressions (II.39) de $F(\lambda)$. $\lambda^{\frac{1}{2}} F(\lambda)$ est holomorphe sauf au voisinage de 0 ou ∞. Il suffit donc qu'elle soit bornée au voisinage de ces points, c'est-à-dire que

$$\left(\frac{1}{2} + m - \alpha - 1\right) \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad (1 + m - \alpha - 1 - m + l) \leqq 0;$$

c'est-à-dire

$$l - \frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq m - \frac{1}{2}. \tag{III.24}$$

Nous supposons cette condition réalisée, donc nous avons l'inégalité (III.23). Nous allons démontrer que

(*a*) $\displaystyle\int_{\gamma'(\tau,\varepsilon)} \frac{|dz|}{|z(z - z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}} \leqq \text{Cte}$ (indépendante de τ, ε);

(*b*) $\displaystyle\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma'(\tau,\varepsilon)} \frac{|dz|}{|z(z - z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}} = 0$ pour presque tout $\tau \in \operatorname{Re} G_1^*(y)$.

Le théorème de Lebesgue montre que l'intégrale au second membre de (III.23) tend vers zéro, donc il en est de même pour $I(\varepsilon)$.

Démonstration de (*a*). — La construction de $\gamma(\tau, \varepsilon)$ a été faite de telle sorte que, sur $\gamma'(\tau, \varepsilon)$, on ait

$$|z| \geqq \text{Cte}\,\varepsilon, \qquad |z - z_0(\tau)| \geqq \text{Cte}\,\varepsilon \qquad (\text{Cte indépendante de } \tau, \varepsilon).$$

Donc sur $\gamma'(\tau, \varepsilon)$, on a

$$\frac{1}{|z(z - z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}} \leqq \frac{\text{Cte}}{\varepsilon}.$$

Comme $\displaystyle\int_{\gamma'(\tau,\varepsilon)} |dz| \leqq \text{Cte}\,\varepsilon$, le résultat (*a*) est acquis.

Démonstration de (*b*). — Fixons τ, supposons $z_0(\tau) \neq 0$, c'est-à-dire $\tau \notin G_1^*(x)$. Pour ε assez petit, nous avons, par construction sur l'arc de cercle centré en τ :

$$|z| \geqq \text{Cte}\,\varepsilon \qquad \text{et} \qquad |z - z_0(\tau)| \geqq \text{Cte},$$

donc sur $\gamma'(\tau, \varepsilon)$, nous avons

$$\frac{1}{|z(z - z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}} \leqq \frac{\text{Cte}}{\sqrt{\varepsilon}} \qquad (\text{Cte peut être fonction de } \tau),$$

d'où

$$\int_{\gamma'(\tau,\varepsilon)} \frac{|dz|}{|z(z-z_0(\tau))|^{\frac{1}{2}}} \leq \text{Cte}\sqrt{\varepsilon}.$$

Or l'ensemble des points $\tau \in \operatorname{Re} G_1^*(y)$ où $z_0(\tau) = 0$ est de mesure nulle sur $\operatorname{Re} G_1^*(y)$, puisque $G_1^*(x)$ et $G_1^*(y)$ n'ont pas de nappe réelle commune. Ceci démontre (*b*).

PROPOSITION 11. — *Si* $l - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq m - \frac{1}{2}$, *on a*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma'_\varepsilon(W_1^*)} F(\lambda)[\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y,\eta)} = 0,$$

$\gamma'_\varepsilon(W_1^*)$ *étant la chaîne de* W_1^* *engendrée par la somme des deux arcs de cercle orientés, de rayon* ε, *centrés aux extrémités de la coupure* D_1^* *dans* W_1^*.

Précisons les déterminations de la forme différentielle.

3° *Déterminations de la forme différentielle sur les bords de la coupure* D_1^*. — Notons $[F(\lambda)]_+$ et $[F(\lambda)]_-$ les déterminations de $F(\lambda)$ sur les bords supérieur et inférieur de la coupure D_1^*. Dans une fibre $d^*(\tau)$ où $z_0(\tau)$ est > 0, on a, puisque $\lambda = \dfrac{g(x,\eta)}{g(y,\eta)}$:

$$[\lambda^{m-\alpha-1}]_+ = |\lambda|^{m-\alpha-1} e^{i\pi(m-\alpha-1)},$$
$$[\lambda^{m-\alpha-1}]_- = |\lambda|^{m-\alpha-1} e^{-i\pi(m-\alpha-1)}.$$

D'où, si $z_0(\tau) > 0$:

$$\text{(III.25)} \quad \begin{cases} [F(\lambda)]_+ = c_\alpha \dfrac{|\lambda|^{m-\alpha-1} e^{i\pi(m-\alpha-1)} - Q(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}}, \\[2ex] [F(\lambda)]_- = c_\alpha \dfrac{|\lambda|^{m-\alpha-1} e^{-i\pi(m-\alpha-1)} - Q(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}}; \end{cases}$$

si $z_0(\tau) < 0$, nous devons échanger ces valeurs de $[F(\lambda)]_+$ et $[F(\lambda)]_-$. On en déduit

$$\text{(III.26)} \quad [F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- = (-1)^{m-1}\, 2\, c_\alpha \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}\cos\pi\alpha - Q(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}};$$

$$\text{(III.27)} \quad [F(\lambda)]_+ - [F(\lambda)]_- = \pm(-1)^m\, 2ic_\alpha \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}\sin\pi\alpha}{(\lambda-1)^{m-l}},$$

le signe étant $+$ si $z_0(\tau) > 0$ et $-$ si $z_0(\tau) < 0$.

4° *Supposons l pair.* — Par construction, $\lim_{\varepsilon\to 0}[\gamma_\varepsilon(W_1^*) - \gamma'_\varepsilon(W_1^*)]$ est la somme de deux chaînes de W_1^* : chacune d'elles est fibrée par le segment réel $[\tau\xi]$ orienté, et a pour base $\operatorname{Re} G_1^*(y)$. Précisons les orientations.

Celle de Re $G_1^\star(y)$ est donnée par (II.23) que nous pouvons écrire aussi :

$$\text{(III.28)} \qquad \frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}\, d\, g_1(y, \eta)} > 0.$$

La fibre de la première chaîne est le bord supérieur de la coupure, orienté par $dz < 0$, la fibre de la deuxième chaîne est le bord inférieur de la coupure, orienté par $dz > 0$ [$z = g(y, \eta)$, un des η_j valant 1]. Notons $D_1'^\star$ (resp. $D_1''^\star$), la chaîne de $W_1^\star$ fibrée par les segments $[\tau\xi]$ tels que $z_0(\tau) < 0$ [resp. $z_0(\tau) < 0$], orientés par $dz < 0$, Re $G_1^\star(y)$ étant orientée par (III.28). De la proposition 11, on déduit que, lorsque $\varepsilon \to 0$, la limite de

$$\int_{\gamma_\varepsilon(W_1^\star) - \gamma'_\varepsilon(W_1^\star)} F(\lambda)\,[\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}$$

existe et vaut

$$\text{(III.29)} \qquad \int_{D_1'^\star + D_1''^\star} \{[F(\lambda)]_+ - [F(\lambda)]_-\}\,[\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

Précisons l'orientation de $D_1'^\star$ et $D_1''^\star$ (*fig.* 2).

Fig. 2.

Si sur $D_1'^\star$, on a $\dfrac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \neq 0$, son orientation est

$$\text{(III.30)} \qquad \frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}\, g_1(y, \eta)} < 0,$$

d'après la règle d'orientation 2.9, p. 84 de [9]. Nous allons montrer que c'est vrai pour x voisin de y. En effet, l'hyperbolicité au point y par rapport à $N = (1, 0, \ldots, 0)$ entraîne $\dfrac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} \neq 0$ pour $g(y, \eta) = 0$ et η réel non nul. Or sur Re $G_1^\star(y)$, on a

$$\frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} = g_0(\eta) \frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1}, \qquad \text{donc} \quad \frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \neq 0.$$

Il existe par suite un voisinage réel $\mathcal{V}_1^\star$ de Re $G_1^\star(y)$ dans Re $\mathbf{P}^{l-1}$ tel que

$$\eta \in \mathcal{V}_1^\star \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \neq 0.$$

Il suffit de prendre $|x-y|$ assez petit pour avoir $D_1^\star \subset \mathcal{V}_1^\star$. L'orientation de $D_1''^\star$ étant l'opposée de celle définie par (III.30), $D_1^\star = D_1'^\star - D_1''^\star$ a l'orientation (III.30). De (III.27) et (III.29), on déduit

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon(W_1^\star) - \gamma_\varepsilon'(W_1^\star)} F(\lambda)\,[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y,\eta)}$$
$$= (-1)^m\, 2\, i c_\alpha \sin \pi\alpha \int_{D_1^\star} \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}}{(\lambda-1)^{m-l}}[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y,\eta)}.$$

Nous avons donc obtenu, si $l-\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq m-\frac{1}{2}$, d'après la proposition 11 :

$$\int_{\gamma_\varepsilon(W_1^\star)} F(\lambda)\,[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y,\eta)}$$
$$= (-1)^m\, 2\, i c_\alpha \sin \pi\alpha \int_{D_1^\star} \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}}{(\lambda-1)^{m-1}}[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y,\eta)}.$$

Rappelons que $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ a une partie $\gamma(W_0^\star)$ dans $W_0^\star$, dont la classe d'homologie $h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^\star,\ \Pi^\star(x-y))$ est celle du cobord de $\operatorname{Re} G_0^\star$ orienté par $\dfrac{N \lrcorner\, \omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}} > 0$. On a donc

$$\int_{\gamma(W_0^\star)} F(\lambda)\,[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y,\eta)} = 2\pi i \int_{\operatorname{Re} G_0^\star} F(\lambda)\,[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{dg(y,\eta)},$$

la forme différentielle est holomorphe sur $\operatorname{Re} G_0^\star$ puisque $\lambda = \dfrac{g_1(x,\eta)}{g_1(y,\eta)}$ est $\neq 0, \infty$ sur *Re* $G_0^\star$.

De (II.38) et de ce qui précède, on déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 12. — *L'opérateur de Tricomi-Clairaut :*

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\{ k_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[\sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha\right] k_{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

de partie principale $g\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) = g_1\left(x, \dfrac{\partial}{\partial x}\right) g_0\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right)$, *d'ordre* $m \geqq l$, l *étant pair,* $l-\frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq m-\frac{1}{2}$, α *non entier, strictement hyperbolique en* y *par rapport à* $N=(1, 0, \ldots, 0)$, *a pour solution élémentaire* $E(x, y)$ *la fonction définie pour* x *voisin de* y *et* $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ *par*

$$E(x,y) = E_0(x,y) + E_1(x,y),$$

$$\text{(III.31)} \quad E_0(x,y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-2}} \int_{\operatorname{Re} G_0^\star} F(\lambda)\,[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{dg(y,\eta)},$$

Re G_0^* *étant orienté, en dehors de* $\Pi^*(x-y)$, *par* $\dfrac{N \rfloor \omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}} > 0$,
$F(\lambda)$ *étant donné par* (II.39), *avec* $\lambda = \dfrac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)}$;

$$\text{(III.32)} \qquad E_1(x, y) = \frac{(-1)^m}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-2}} c_\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} \times \int_{D_1^*} \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}}{(\lambda-1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)},$$

$$D_1^* = \{ \eta \in \operatorname{Re} \mathbf{P}^{l-1} \mid g_1(x, \eta)\, g_1(y, \eta) < 0 \},$$

orienté par $\dfrac{\partial g_1(y, \eta)}{\partial \eta_1} \dfrac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1} g_1(y, \eta)} < 0$, c_α *étant donné par* (II.39).

Remarques. — 1° Si l'opérateur est homogène à coefficients constants, D_1^* est vide, donc $E_1(x, y) = 0$. C'est la formule d'Herglotz.

2° Si α est un entier n compris entre l et $m-1$, on peut aussi décomposer $E(x, y)$ comme précédemment, avec

$$E_1(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-2}} c_n \int_{D_1^*} \frac{\lambda^{m-n-1}}{(\lambda-1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}.$$

5° *Supposons l impair.* — Par construction, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} [\gamma_\varepsilon(W_1^*) - \gamma'_\varepsilon(W_1^*)]$ est la somme de trois chaînes réelles de W_1^*. L'une est fibrée par la partie réelle de la fibre extérieure au segment $[\tau\xi]$, les deux autres sont fibrées par les deux bords du segment $[\tau\xi]$: rappelons que la partie réelle de chaque fibre a l'orientation naturelle de la fibre et que la base $\operatorname{Re} G_1^*(y)$ est orientée de telle sorte que l'orientation produit soit $\dfrac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0$. Notons :

$$\text{(III.33)} \qquad \begin{cases} D_1^* = \{ \eta \in \operatorname{Re} \mathbf{P}^{l-1} \mid g_1(x, \eta)\, g_1(y, \eta) < 0 \}, \\ \Delta_1^* = \{ \eta \in \operatorname{Re} \mathbf{P}^{l-1} \mid g_1(x, \eta)\, g_1(y, \eta) > 0 \}, \end{cases}$$

ces deux ouverts ayant l'orientation, en dehors de $\Pi^*(x-y)$, $\dfrac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0$. Comme

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [\gamma_\varepsilon(W_1^*) - \gamma'_\varepsilon(W_1^*)] = 2(\Delta_1^* \cap W_1^*) + D_1^{*+} + D_1^{*-},$$

de la proposition 11, on déduit, si $l - \frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq m - \frac{1}{2}$:

$$\begin{aligned} &\int_{\gamma_\varepsilon(W_1^*)} F(\lambda) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ &\quad = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon(W_1^*) - \gamma'_\varepsilon(W_1^*)} F(\lambda) [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ &\quad = \int_{\Delta_1^* \cap W_1^* + D_1^*} \{ [F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- \} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}, \end{aligned}$$

où

$$\text{(III.34)}\quad \begin{cases} [F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- = 2F(\lambda) \text{ est donné par (II.39) si } \eta \in \Delta_1^\star, \\ [F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- \text{ est donné par (III.26) si } \eta \in D_1^\star. \end{cases}$$

Comme $\gamma = \gamma(\varepsilon) = \gamma_\varepsilon(W_1^\star) + \gamma(W_0^\star) + 2\,\mathrm{Re}\,(\mathbf{P}^{l-1} - W^\star)$, et comme $\gamma(W_0^\star) + 2\,\mathrm{Re}(\mathbf{P}^{l-1} - W^\star)$ coïncide, hors de $W_1^\star$, avec des cycles dont la classe d'homologie $h(\mathbf{P}^{l-1} - G_0^\star,\ \Pi^\star(x-y))$ est celle de « $2\Delta_1^\star$, détourné de $G_0^\star$ », nous écrirons :

$$\text{(III.35)}\quad \int_{\Delta_1^\star \cap W_1^\star + D_1^\star + \gamma(W_0^\star) + 2\,\mathrm{Re}\,(\mathbf{P}^{l-1} - W^\star)} \times \{[F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_-\}\,[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y,\eta)}$$
$$= \int_{D_1^\star + \Delta_1^\star \text{ détourné de } G_0^\star} \{[F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_-\}\,[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y,\eta)}.$$

Proposition 13. — *L'opérateur de Tricomi-Clairaut :*

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\{ k_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[\sum_j^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha \right] k_{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\} g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

de partie principale $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, *d'ordre* $m \geq l$, *l impair,* $l - \frac{1}{2} \leq \alpha \leq m - \frac{1}{2}$, α *non entier, a pour solution élémentaire* $E(x, y)$, *la fonction définie pour x voisin de y, et* $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$ *par*

$$\text{(III.36)}\quad E(x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \int_{D_1^\star + \Delta_1^\star \text{ détourné de } G_0^\star} \times \{[F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_-\}\,[\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y,\eta)},$$

l'intégrale ayant le sens de (III.35), *la valeur de* $[F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_-$ *étant donnée par* (III.34), *la définition de* $D_1^\star$, $\Delta_1^\star$ *étant donnée par* (III.33).

Remarque. — Pour un opérateur homogène à coefficients constants, $D_1^\star$ est vide et $\Delta_1^\star = \mathrm{Re}\,\mathbf{P}^{l-1}$: c'est la formule de Petrowsky.

4. Prolongement analytique des solutions élémentaires lorsque l est pair et $\alpha = n - \frac{1}{2}$, n entier positif ou négatif.

Utilisons donc la décomposition de $E(x, y)$ donnée dans la proposition 11.

1° *Prolongement analytique de $E_0(x, y)$.* — Notons Ω_0 une composante connexe de $\mathbf{R}^l - \Sigma_0$. Quand x et y varient dans Ω_0, on sait que $\operatorname{Re} G_1^\star(x) \cap \operatorname{Re} G_0^\star$ et $\operatorname{Re} G_1^\star(y) \cap \operatorname{Re} G_0^\star$ sont vides. Donc dans l'intégrale (III.31), λ reste $\neq 0$, ∞ sur $\operatorname{Re} G_0^\star$. Elle définit donc une fonction analytique de (x, y) pourvu que $\operatorname{Re} G_0^\star$ et $\operatorname{Re} \mathbf{\Pi}^\star(x-y)$ soient en position générale, c'est-à-dire $x \notin K_0(y)$, (théorème 3, p. 97 de [9]).

2° *Étude de l'intégrale donnant $E_1(x, y)$.* — (III.32) est l'intégrale réelle, convergente, sur un ouvert de $\operatorname{Re} \mathbf{P}^{l-1}$, d'une forme différentielle singulière au bord, ceci ne se prêtant pas de façon commode à l'étude de son prolongement analytique, nous allons la transformer en l'intégrale d'une forme différentielle holomorphe sur un cycle compact.

(*a*) *Transformation de l'intégrale $J(x, y)$ (x voisin de y)* : Posons donc, si $l - \frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq m - \frac{1}{2}$:

$$E_1(x, y) = \frac{(-1)^m}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-2}} c_\alpha \frac{\sin \pi\alpha}{\pi} J(x, y).$$

Soit $D^{\star\star}$ l'ouvert de S^{l-1} $\left(\text{sphère unité de } \operatorname{Re} \Xi^l : \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0\right)$,

où $g(x, \eta)\, g(y, \eta) < 0$, orienté par $\dfrac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1} \dfrac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^{l-1}\, g(x, \eta)} > 0$.

D'où

$$J(x, y) = \frac{1}{2} \int_{D^{\star\star}} \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}}{(\lambda-1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}. \tag{III.37}$$

Introduisons deux variables supplémentaires; dans le produit $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^{l+1}$, de coordonnées (t, w, η), considérons la variété $V(x, y)$:

$$tw - g(x, \eta) = w + tg(y, \eta) = \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0. \tag{III.38}$$

Posons

$$\varpi(t, w, \eta) = \left.\frac{dt \wedge dw \wedge d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_l}{d[tw - g(x, \eta)] \wedge d[w + tg(y, \eta)] \wedge d\left[\sum \eta_j^2\right]}\right|_{V(x, y)} \tag{III.39}$$

qui, on le vérifie, vaut

$$\varpi(t, w, \eta) = \frac{\omega'(\eta)}{4w}. \tag{III.40}$$

$\varpi(t, w, \eta)$ est holomorphe sur la partie régulière de $V(x, y)$. Sur la partie de $V(x, y)$, où η est réel et $g(x, \eta)\, g(y, \eta) < 0$, on a, puisque

$t^2 = -\dfrac{g(x, \eta)}{g(y, \eta)} = -\lambda$, t et w réels, $|\lambda| = t^2$ et

$$(\text{III.41}) \quad \frac{|\lambda|^{m-\alpha-1}}{(\lambda-1)^{m-l}}[\eta(x-y)]^{m-l}\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}$$
$$= (-1)^{m-l-1}\frac{t^{2(m-\alpha-1)}}{(t^2+1)^{m-l}}[\eta(x-y)]^{m-l}\frac{t\omega'(\eta)}{w}$$
$$= (-1)^{m-1}\times 4\times\frac{t^{2(m-\alpha)-1}}{(t^2+1)^{m-l}}[\eta(x-y)]^{m-l}\varpi(t, w, \eta),$$

où $t^{2(m-\alpha)-1}$ a le signe de t.

Notons : $\Gamma(x, y)$ la partie de $\operatorname{Re} V(x, y)$ où $\eta\in D^{**}(x, y)$, orientée par

$$(\text{III.42}) \qquad t\frac{\partial g(y, \eta)}{\partial \eta_1}[\eta(x-y)]\frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)} > 0,$$

$\Gamma^+(x, y)$, [resp. $\Gamma^-(x, y)$], la partie de $\Gamma(x, y)$ où $t > 0$ (resp. $t < 0$), p la projection :

$$p(t, w, \eta) = \eta.$$

On a donc

$$p(\Gamma^+(x, y)) = D^{**} \qquad \text{et} \qquad p(\Gamma^-(x, y)) = -D^{**}.$$

D'où

$$J(x, y) = (-1)^{m-1}\int_{\Gamma(x,y)}\frac{t^{2(m-\alpha)-1}}{(t^2+1)^{m-l}}[\eta(x-y)]^{m-l}\varpi(t, w, \eta)$$

à condition que l'intégrale ait un sens. Nous allons choisir : $\alpha = n - \dfrac{1}{2}$, n entier appartenant à $[l, m]$, de façon à avoir une forme différentielle holomorphe sur la partie régulière de $V(x, y)$, puis nous allons démontrer que $\Gamma(x, y)$ est un cycle à support compact de $\operatorname{Re} V(x, y)$, qu'on peut décomposer en la somme de p cycles disjoints $\Gamma_j(x, y)$, chacun d'eux étant relatif à la sous-variété de $V(x, y)$ où $\eta(x-y) = 0$; que $\operatorname{Re} V(x, y)$ est en général sans singularité ainsi que sa sous-variété où $\eta(x-y) = 0$. Supposant ceci démontré, on aura

$$(\text{III.43}) \quad \begin{cases} J(x, y) = \sum J_j(x, y), \\ J_j(x, y) = (-1)^{m-1}\displaystyle\int_{\Gamma_j}\frac{t^{2(m-n)}}{(t^2+1)^{m-l}}[\eta(x-y)]^{m-l}\varpi(t, w, \eta), \end{cases}$$

chaque $J_j(x, y)$ ayant la forme désirée.

(*b*) *Le support* $S(\Gamma)$ *de* Γ *est compact.* En effet pour que $(t, w, \eta) \in S(\Gamma)$, il faut et il suffit que

$$\eta \in \overline{D}^{**},$$
$$w^2 = - g(x, \eta)\, g(y, \eta),$$
$$t^2 = - \frac{g(x, \eta)}{g(y, \eta)},$$

Donc la projection de $S(\Gamma)$ sur $\operatorname{Re}\Xi^l$, $\operatorname{pr}_{\operatorname{Re}\Xi^l} S(\Gamma)$, est compacte, sa projection sur $\mathbf{R}$ (coordonnée w), l'est donc aussi, puisque c'est la réunion des deux compacts images de $\overline{D}^{**}$ par les deux applications continues sur $\overline{D}^{**}$:

$$\eta \rightsquigarrow [-g(x, \eta)\, g(y, \eta)]^{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \eta \rightsquigarrow -[-g(x, \eta)\, g(y, \eta)]^{\frac{1}{2}}.$$
$$S(\Gamma) \subset \operatorname{Re}\mathbf{P}^1 \times \operatorname{proj}_R S(\Gamma) \times \operatorname{proj}_{\operatorname{Re}\Xi^l} S(\Gamma)$$

est fermé dans un compact, donc compact.

(*c*) *Décomposition de* Γ *pour* $|x - y|$ *petit.* — Décomposons D^{**}. Nous supposons l'opérateur strictement hyperbolique en y par rapport à $N = (1, 0, \ldots, 0)$. Pour chaque $\hat{\eta} = (\eta_2, \ldots, \eta_l)$ réel non nul, $g(y, \eta) = g(y, \eta_1, \hat{\eta})$ a m racines réelles distinctes en η_1, $\eta_{1j}(y, \hat{\eta})$, $1 \leqq j \leqq m$ (que nous supposons par exemple croissantes avec j). De plus $g_{\eta_1}(y, \eta_1, \hat{\eta})$ a, pour $\hat{\eta}$ réel non nul, $(m-1)$ racines réelles en η_1 séparant les $\eta_{1j}(y, \hat{\eta})$. Les racines en η_1 de $g(x, \eta_1, \hat{\eta})$ dépendant continûment de $(x, \hat{\eta})$ $\forall \hat{\eta}_0$ réel, $\exists\, \varepsilon(\hat{\eta}_0) > 0$ tel que

$|x - y| < \varepsilon(\hat{\eta}_0)$ et $|\hat{\eta} - \hat{\eta}_0| < \varepsilon(\hat{\eta}_0)$
$\Rightarrow$ les $(m-1)$ racines réelles en η_1 de $g_{\eta_1}(y, \eta_1, \hat{\eta})$ séparent les m racines réelles $\eta_{1j}(x, \hat{\eta})$ de $g(x, \eta_1, \hat{\eta})$.

On en déduit :

il existe $\varepsilon > 0$ tel que les $(m-1)$ racines réelles en η_1 de $g_{\eta_1}(y, \eta_1, \hat{\eta})$ séparent les m racines réelles $\eta_{1j}(x, \hat{\eta})$ de $g(x, \eta_1, \hat{\eta})$ pour $|x - y| < \varepsilon$.

En effet, à cause de l'homogénéité en η de $g(x, \eta)$, il suffit de supposer $\hat{\eta} \in S^{l-2}$. Du recouvrement de S^{l-2} par les ouverts $|\hat{\eta} - \hat{\eta}_0| < \varepsilon(\hat{\eta}_0)$, $\hat{\eta}_0 \in S^{l-2}$, extrayons un recouvrement fini $(\hat{\eta}_0^i)$, et prenons $\varepsilon = \inf\limits_i \varepsilon(\hat{\eta}_0^i)$. Ceci entraîne, pour $|x - y|$ petit, sur chaque droite $\mathcal{D}(\hat{\eta})$ réelle (η_1 varie, $\hat{\eta}$ est réel fixé), la situation suivante (*fig.* 3) :

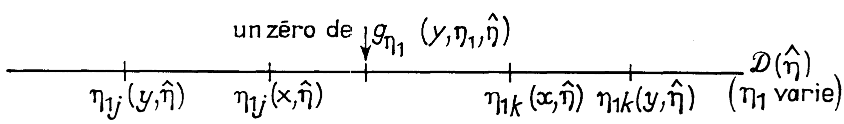

Fig. 3.

Les intervalles $[\eta_{1j}(y, \hat{\eta}), \eta_{1j}(x, \hat{\eta})]$ sont deux à deux disjoints, ils peuvent être réduits à des points, en particulier quand $\eta_{1j}(y, \hat{\eta})$ est racine de $g_0(\eta_1, \hat{\eta})$. Sur chacun de ces intervalles, on a $g(x, \eta)\, g(y, \eta) \leqq 0$, $g_{\eta_1}(y, \eta)$ ne s'annule pas et a un signe fixe. En dehors de la réunion de ces intervalles, on a $g(x, \eta)\, g(y, \eta) > 0$. Précisons le signe de $g_{\eta_1}(y, \eta_1, \hat{\eta})$ sur le premier intervalle $[\eta_{11}(y, \hat{\eta}), \eta_{11}(x, \hat{\eta})]$. De la relation

$$g(y, \eta) = [\eta_1 - \eta_{11}(y, \hat{\eta})]\, g_{\eta_1}(y, \eta_{11}, \hat{\eta}) + \ldots,$$

on déduit que le signe cherché est l'opposé du signe qu'a $g(y, \eta)$ lorsque $\eta_1 < \eta_{11}(y, \hat{\eta})$, c'est-à-dire l'opposé du signe de $g(y, \eta)$ lorsque $\eta_1 \to -\infty$ sur $\mathcal{D}(\hat{\eta})$. D'où

$$\begin{aligned}
&\text{signe } g_{\eta_1}(y, \eta_1, \hat{\eta}) \text{ sur } [\eta_{11}(y, \hat{\eta}), \eta_{11}(x, \hat{\eta})] \\
&\quad = - \text{signe } g(y, -1, 0, \ldots, 0) \\
&\quad = (-1)^{m+1} \text{ signe } g(y, 1, 0, \ldots, 0) \\
&\quad = (-1)^{m+1} \text{ signe } g(y, N) \qquad \text{où} \quad N \in \Delta^+(y).
\end{aligned}$$

Plus généralement, on a

$$\text{(III.44)} \qquad \text{signe } g_{\eta_1}(y, \eta) \text{ sur } [\eta_{1j}(y, \hat{\eta}), \eta_{1j}(x, \hat{\eta})] = (-1)^{m+j} \text{ signe } g(y, N).$$

Notons alors (pour x voisin de y) :

$$\text{(III.45)} \qquad \begin{cases} D_j(x, y) = \{ \eta \in \mathrm{Re}\,\Xi^l \mid \eta_1 \in \,]\eta_{1j}(y, \hat{\eta}), \eta_{1j}(x, \hat{\eta})[\}, \\ D_j^{**}(x, y) \text{ sa trace sur la sphère } \sum_k \eta_k^2 - 1 = 0. \end{cases}$$

Il y a autant de cônes $D_j(x, y)$ que de nappes à Re $G_1(x)$, c'est-à-dire p. Remarquons que

$$\text{(III.46)} \qquad D_j(x, y) = \Delta_j(y) \cup \Delta_j(x) - \Delta_j(y) \cap \Delta_j(x),$$

$$\text{(III.47}_1\text{)} \qquad \Delta_j(x) = \{ \eta \in \mathrm{Re}\,\Xi^l \mid \eta_1 < \eta_{1j}(x, \hat{\eta}) \},$$

$$\text{(III.47}_2\text{)} \qquad \partial\Delta_j(x) = G_j(x) = \{ \eta \in \mathrm{Re}\,\Xi^l \mid \eta_1 = \eta_{1j}(x, \hat{\eta}) \}.$$

On a les propriétés

$$\text{(III.48)} \qquad \begin{aligned}
&\eta \in D_{m-j+1}(x, y) \iff -\eta \in D_j g\,(x, y), \\
&\begin{cases} \overline{D}_j^{**}(x, y) \cap \overline{D}_k^{**}(x, y) = \emptyset, & \text{si } j \neq k, \\ \overline{D}_j^{**}(x, y) \cap G_{0l}^{**} = \emptyset, & \text{si } j \neq l, \end{cases} \\
&\eta \in D^{**} \iff \exists_j \text{ tel que } \eta \in D_j^{**}(x, y),
\end{aligned}$$

$g_{\eta_1}(y, \eta) \neq 0$ sur $\overline{D}_j^{**}(x, y)$, et son signe est $(-1)^{j+m}$ signe $g\ (y, N)$.

On a donc décomposé $D^{**} = \sum_j D_j^{**}(x, y)$, l'orientation de $D_j^{**}(x, y)$ étant

$$(-1)^{j+m} \text{ signe } g(y, N)[\eta(x-y)] \frac{\omega'(\eta)}{g(x, \eta)} > 0.$$

On a donc décomposé $\Gamma(x, y) = \sum_j \Gamma_j(x, y)$, de telle sorte que $\Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset$, pour $j \neq k$, et l'orientation de $\Gamma_j(x, y)$ sur $V(x, y)$ est

$$(\text{III}.49) \qquad (-1)^{j+m} \text{ signe } g(y, N)[\eta(x-y)]\, \varpi(t, w, \eta) > 0,$$

d'après (III.40) et (III.42).

(*d*) *Régularité de* Re $V(x, y)$: Un point (t, w, η) réel est singulier sur $V(x, y)$ si, et seulement si, il existe α, β, γ réels non tous nuls tels que

$$tw - g(x, \eta) = w + tg(y, \eta) = \sum_1 \eta_j^2 - 1 = 0,$$

$$\alpha\, d[tw - g(x, \eta)] + \beta\, d[w + tg(y, \eta)] + \gamma[\eta\, d\eta] = 0,$$

si t n'est pas voisin de l'infini $\left(\text{nous notons } \eta\, d\eta \text{ la forme différentielle} \sum_{j=1}^{l} \eta_j\, d\eta_j\right)$. On en déduit :

$$\alpha w + \beta g(y, \eta) = \alpha t + \beta = -\alpha\, dg(x, \eta) + \beta t\, dg(y, \eta) + \gamma[\eta\, d\eta] = 0.$$

Des deux premières équations, on déduit :

$$w - tg(y, \eta) = 0,$$

puis en tenant compte des équations de $V(x, y)$:

$$w = g(x, \eta) = tg(y, \eta) = 0.$$

Premier cas : $t \neq 0$.

$$w = g(x, \eta) = g(y, \eta) = -\alpha[dg(x, \eta) + t^2\, dg(y, \eta)] + \gamma[\eta\, d\eta] = 0.$$

Le point $z = \dfrac{x + t^2 y}{1 + t^2}$ est réel et appartient à $]x, y[$. On a donc

$$g(z, \eta) = -\alpha(1 + t^2)\, dg(z, \eta) + \gamma[\eta\, d\eta] = 0.$$

On en déduit $dg(z, \eta) = 0$.

En effet, multiplions la forme $-\alpha(1+t^2)\,dg\,(z, \eta)+\gamma[\eta\, d\eta]$ par le vecteur η, et utilisons l'homogénéité en η de $g(z, \eta)$, puis $g(z, \eta)=0$; on obtient

$$\gamma\eta.\eta\, d\eta=\gamma=0 \qquad \left(\text{puisque} \sum \eta_j^2=1\right).$$

D'où $\alpha\, dg(z, \eta)=0$; α ne pouvant être aussi nul, on a le résultat.

Remarque. — Nous utiliserons plusieurs fois par la suite ce raisonnement; nous le mentionnerons comme ceci : tel terme (ici $\gamma[\eta\, d\eta]$) est supprimé par produit intérieur par le vecteur η.

Résumons : Pour que (t, w, η) soit un point singulier réel sur Re $V(x, y)$, $t \neq 0, \infty$, il faut et il suffit qu'il existe $z \in \,]x, y[$ tel que $G^*(z)$ ait le point singulier réel η; le point $(t, 0, \eta)$, où $(1+t^2)z=x+t^2 y$, est alors singulier sur Re $V(x, y)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que cela ait lieu est que $]x, y[$ coupe Σ.

Deuxième cas : $t=0$.

$$w=g(x, \eta)=t=-\alpha\, dg(x, \eta)+\gamma[\eta\, d\eta]=0.$$

D'où (par produit intérieur par η) : $dg(x, \eta)=0$. Cela équivaut à $x \in \Sigma$.

Au voisinage de $t=\infty$, nous prendrons pour équations de $V(x, y)$:

$$w-tg(x, \eta)=wt+g(y, \eta)=\sum_1^l \eta_j^2-1=0.$$

Les calculs sont analogues aux précédents, à condition d'échanger x et y, remarque que nous utiliserons fréquemment par la suite.

On a donc obtenu ceci : pour que $V(x, y)$ ait un point singulier réel, il faut et il suffit que le segment fermé $[x, y]$ coupe Σ en z. $G^*(z)$ a alors un point singulier réel η; si $z \neq x$ et y, on en déduit deux points singuliers distincts sur $V(x, y)$, $(t, 0, \eta)$ et $(-t, 0, \eta)$. Si $z=x$, le point singulier correspondant sur $V(x, y)$ est $(0, 0, \eta)$; si $z=y$, c'est $(\infty, 0, \eta)$.

Pour le moment, nous supposons l'opérateur strictement hyperbolique au voisinage de y : $[x, y]$ ne coupe pas Σ et Re $V(x, y)$ est donc sans singularité.

(*e*) *Régularité de* Re $P(x, y)$. — Notons $P(x, y)$, la sous-variété de $V(x, y)$ où $\eta(x-y)=0$. [Chaque Γ_j est relatif à $P(x, y)$, mais comme Γ_j est réel il nous suffit de considérer Re $P(x, y)$]. Un point (t, w, η) de Re $P(x, y)$ est singulier, s'il existe α, β, γ, δ réels non tous nuls tels que

$$w=g(x, \eta)=g(y, \eta)=\eta(x-y)=\sum_1^l \eta_j^2-1=0,$$

$$\alpha\, d[tw-g(x, \eta)]+\beta\, d[w+tg(y, \eta)]+\gamma[(x-y)\, d\eta]+\delta[\eta\, d\eta]=0.$$

D'où

$$\alpha[t dw - dg(x, \eta)] + \beta[dw + t\, dg(y, \eta)] + \gamma[(x-y)\, d\eta] + \delta[\eta\, d\eta] = 0.$$

Soit $\alpha t + \beta = 0$, et de la relation

$$dg(x, \eta) = dg(y, \eta) + k_{m-1}(\eta)[(x-y)\, d\eta],$$

on déduit

$$-\alpha(1+t^2)\, dg(y, \eta) + [\gamma - \alpha k_{m-1}(\eta)][\eta\, d\eta] + \delta[\eta\, d\eta] = 0$$

Le dernier terme est supprimé par produit intérieur par η, et la condition écrite exprime ceci : Re $G^*(y)$ et Re $\Pi^*(x-y)$ ne sont pas en position générale, c'est-à-dire $x \in K(y)$.

Le calcul précédent suppose t non voisin de l'infini. Sinon, d'après la remarque faite, on échange x et y et la conclusion $x \in K(y)$ est la même.

Remarque. — Γ_j est en fait relatif à la nappe de Re $P(x, y)$ où

$$w = g_j(x, \eta) = g_j(y, \eta) = \eta(x-y) = \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0,$$

qui est sans singularité si $x \notin K_j(y)$, nappe de $K(y)$ associée à la nappe $G_j(y)$ de $G(y)$.

Conclusion. — Les intégrales $J_j(x, y)$ [définies par (III.43)], ont un sens; elles définissent des fonctions analytiques de (x, y) pour x voisin de y et $x \notin K_j(y)$ (théorème 3, p. 97 de [9]); $J(x, y)$ [donc $E_1(x, y)$], est donc une fonction analytique de (x, y) pour x voisin de y et x n'appartenant pas à la partie de $K(y)$ associée à la variété $G_1^*(y)$.

3° *Prolongement analytique de* $E_1(x, y)$. — Nous allons prolonger la définition de $\Gamma(x, y)$. Supposons d'abord y fixe et x variant dans $\Omega(y)$, réunion des segments $[x, y]$ qui ne coupent pas Σ. $\Omega(y)$ est étoilé par rapport à y, donc simplement connexe et contenu dans Ω composante connexe de $\mathbf{R}^l - \Sigma \ni y$.

D'après le lemme 1, on peut définir, pour tout $x \in \Omega(y)$, m nappes $G_j(x)$, disjointes (hors de o), de $G(x)$ et m domaines $\Delta_j(x)$ de Re Ξ^l, de bord $G_j(x)$, coïncidant au voisinage de y avec ceux définis au n° 2 précédent. Définissons alors $D_j(x, y)$, pour $x \in \Omega(y)$, par (III.46). De la relation $g(x, \eta) - g(y, \eta) = [\eta(x-y)]\, k_{m-1}(\eta)$, on déduit

$$G(x) \cap \Pi(x-y) = G(y) \cap \Pi(x-y).$$

$G(x) \cap \Pi(x-y)$ est donc indépendant de x, quand x décrit un segment d'origine y. On a donc, $\forall x \in \Omega(y)$:

$$\text{(III.50)} \qquad \begin{cases} G_j(x) \cap \Pi(x-y) = G_j(y) \cap \Pi(x-y), \\ \Delta_j(x) \cap \Pi(x-y) = \Delta_j(y) \cap \Pi(x-y). \end{cases}$$

Montrons que cela entraîne $G_j(x) \cap G_k(y) = \{0\}$, si $j \neq k$ et $x \in \Omega(y)$.

Supposons en effet qu'il existe $\eta \neq 0 \in G_j(x) \cap G_k(y)$. Ou bien $\eta(x-y) = 0$, et (III.50) entraîne $\eta \in G_j(y) \cap G_k(y)$; ce qui est impossible. Ou bien $k_{m-1}(\eta) = k_m(\eta) = 0$, et $\eta \in G(x)$ $\forall x \in \Omega(y)$, donc $\eta \in G_k(x)$, c'est aussi impossible.

Par suite, on a, puisque $\Delta_j(x)$ dépend continûment de x, son bord étant $G_j(x)$:

$$\text{(III.51)} \qquad \begin{cases} \overline{\Delta}_j(x) \subset \{0\} \cup \Delta_k(y), \qquad \overline{\Delta}_j(y) \subset \{0\} \cup \Delta_k(x), \\ \qquad \forall x \in \Omega(y), \quad \forall j < k. \end{cases}$$

D'où

$$\overline{D}_j^{**}(x, y) \cap \overline{D}_k^{**}(x, y) = \emptyset, \qquad \forall x \in \Omega(y), \quad \forall j \neq k.$$

En effet, supposons $j \neq k$. De (III.46), on déduit

$$\overline{D}_k(x, y) \subset \overline{\Delta}_k(x) \cup \overline{\Delta}_k(y) - \Delta_k(x) \cap \Delta_k(y),$$

$$\overline{D}_j(x, y) \subset \overline{\Delta}_j(x) \cup \overline{\Delta}_j(y) - \Delta_j(x) \cap \Delta_j(y).$$

D'où, d'après (III.51) :

$$\overline{D}_j(x, y) \subset \{0\} \cup \Delta_k(x) \cap \Delta_k(y).$$

C. Q. F. D.

De façon analogue, on a

$$\overline{D}_j^{**}(x, y) \cap G_{0l}^{**} = \emptyset, \qquad \forall x \in \Omega(y), \quad \forall j \neq l.$$

Conclusion. — La décomposition de $D^{**} = \sum_j D_j^{**}$, faite au 2° précédent $\left(\text{donc la décomposition de } \Gamma = \sum \Gamma_j\right)$, est valable $\forall x \in \Omega(y)$. On peut aussi la prolonger en faisant varier y, de sorte que le segment $[x, y]$ soit contenu dans Ω. L'intégrale (III.43) où $\Gamma_j(x, y)$ a l'orientation (III.49), définit un prolongement de $J_j(x, y)$. L'étude faite dans les paragraphes (*d*) et (*e*) précédents montrent l'analyticité du prolongement en tous les points (x, y) tels que $[x.y] \subset \Omega$, $x \notin K_j(y)$, $\operatorname{Re} V(x, y)$ étant sans singularité, $\operatorname{Re} P(x, y)$ étant une sous-variété régulière de $V(x, y)$.

Remarques. — 1° Dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^{l+1}$, on peut aussi introduire $V_1(x, y)$:

$$tw - g_1(x, \eta) = w + tg_1(y, \eta) = \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0,$$

puis $\varpi_1(t, w. \eta)$, obtenue en remplaçant $g(x, \eta)$ et $g(y, \eta)$ par $g_1(x, \eta)$ et $g_1(y, \eta)$ dans $\varpi(t, w, \eta)$, puis de façon analogue Γ_1. D'où

$$\text{(III.43)} \quad E_1(x, y) = \text{Cte} \int_{\Gamma_1} \frac{t^{2(m-n)}}{(t^2+1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\varpi_1(t, w, \eta)}{g_0(\eta)},$$

g_0 ne s'annulant pas sur Γ_1 si x et $y \in \Omega$.

2° Si α est un entier appartenant à $[l, m-1]$, $m \geqq l+1$, on peut démontrer de façon analogue la décomposition de $E_1(x, y)$ en somme de p fonctions analytiques pour $x \notin K_1(y)$.

3° J'ignore si l'on peut appliquer aux intégrales (III.43) le théorème de Nilsson-Leray (*voir* [12]) déjà cité, en le modifiant puisque la forme différentielle n'est pas définie sur un espace projectif. Pour (x, y) réel, le support singulier de la forme différentielle Ss $[\omega]$ est vide. Mais pour (x, y) complexe, Ss $[\omega]$ contient les deux hyperplans $t+i=0$, $t-i=0$; ce sont des surfaces développables. La proposition 3 de [13] ne peut être utilisée et l'on n'a que des conditions suffisantes d'appui. Ceci est gênant pour savoir si le théorème est effectivement applicable.

4° *Prolongement analytique des solutions élémentaires.* — Notons donc Ω une composante connexe de $\mathbf{R}^l - \Sigma$ où l'opérateur est strictement hyperbolique (théorème 1).

(*a*) *Si* $m \geqq l$, utilisons les résultats des n^os^ 1° et 3° précédents, par exemple pour $\alpha = l - \frac{1}{2}$. La somme des deux intégrales $E_0(x, y)$, (III.31), et $E_1(x, y)$, (III.32), se prolonge analytiquement en tout point (x, y) tel que $[x.y] \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$. Les relations de récurrence (III.12) et (III.12$_1$) montrent qu'on a la même conclusion pour $\alpha = n - \frac{1}{2}$, n entier positif ou négatif.

(*b*) *Si* $m < l$, multiplions $a_\alpha\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ par $b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ homogène, de sorte que $a_\alpha b$ soit strictement hyperbolique en y, et d'ordre $m' \geqq l$. Supposons $\alpha = l - \frac{1}{2}$ et $m' = l$. D'après (III.31) et (III.43$_1$), on a

$$\begin{aligned}\text{(III.52)} \quad E_{l-\frac{1}{2},\, ab} = {} & \text{Cte} \int_{h(G_0^\star,\, \Pi^\star(x-y))} \frac{\left[\dfrac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)}\right]^{-\frac{1}{2}}}{g_1(y, \eta)\, b(\eta)} \left.\frac{\omega'(\eta)}{dg_0(\eta)}\right|_{G_0^\star} \\ & + \text{Cte} \int_{h(B^\star,\, \Pi^\star(x-y))} \frac{\left[\dfrac{g_1(x, \eta)}{g_1(y, \eta)}\right]^{-\frac{1}{2}}}{g_1(y, \eta)\, g_0(\eta)} \left.\frac{\omega'(\eta)}{db(\eta)}\right|_{B^\star} \\ & + \text{Cte} \int_{h(V_1,\, P_1(x, y))} \left.\frac{dt \wedge dw \wedge d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_l}{\left\{\begin{array}{c} b(\eta)\, g_0(\eta)\, d[tw - g_1(x, \eta)] \\ \wedge\, d[w + tg_1(y, \eta)] \wedge d\Sigma \eta_j^2 \end{array}\right\}}\right|_{V_1}.\end{aligned}$$

Calculons maintenant $E_{l-\frac{1}{2}}(x, y) = b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) E_{l-\frac{1}{2}, ab}$, en utilisant les formules (16.3), p. 69 de [10] et (10.6), p. 97 de [9]. Nous obtenons, en dérivant la première intégrale, la somme d'une intégrale sur h et d'une intégrale sur ∂h de classes de formes différentielles où $b(\eta)$ ne figure plus; en dérivant la deuxième intégrale, o; en dérivant la troisième intégrale, une intégrale dans laquelle $b(\eta)$ ne figure plus. Ces intégrales se prolongent donc analytiquement en tout point (x, y) tel que $[xy] \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$.

On obtient la même conclusion que pour $m \geqq l$ et pour tout $\alpha = n - \frac{1}{2}$.

5° *Singularités du prolongement sur* Σ.

(*a*) *Si* $m \geqq l$, supposons d'abord $l - \frac{1}{2} \leqq \alpha \leqq m - \frac{1}{2}$ et utilisons la décomposition de $E(x, y)$. D'après (III.31), le prolongement de l'intégrale $E_0(x, y)$ n'est pas singulier si x ou $y \in \Sigma_1 - \Sigma_0$. Étudions donc les singularités du prolongement de $E_1(x, y)$. Supposons que le point singulier réel de $G_1^\star(x)$, pour $x \in \Sigma_1$, est quadratique. Pour nous ramener exactement aux hypothèses du théorème 4, p. 98 de [9], nous considérons dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^{l+1}$, $\mathcal{V}_1(y)$: $w + tg_1(y, \eta) = \sum \eta_j^2 - 1 = 0$, qui est sans point singulier réel, puis $V_1(x, y)$ sous variété de $\mathcal{V}_1(y)$ où $tw - g_1(x, \eta) = 0$. On vérifie que le point singulier $(0, 0, \eta)$ sur $V_1(x, y)$, si $x \in \Sigma_1$, est alors quadratique aussi, si et seulement si $g_1(y, \eta) \neq 0$, c'est-à-dire pour x n'appartenant pas à la partie de Σ_1 constituée des hyperplans caractéristiques, s'ils existent, correspondant aux points de contact réels de $K_p^\star$ et $K_{p-1}^\star$ (*voir* II, § 2, 2°). Faisons cette hypothèse. Nous avons donc, en posant

$$\pi(t, w, \eta) = \frac{t^{2(m-n)}}{(t^2+1)^{m-l}} \frac{[\eta(x-y)]^{m-l}}{g_0(\eta)} \left.\frac{dt \wedge dw \wedge d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_l}{d[w + tg_1(y, \eta)] \wedge d[\Sigma \eta_j^2]}\right|_{\mathcal{V}_1(y)}$$

$$E_1(x, y) = \mathrm{Cte} \int_{\sum \Gamma_j} \left.\frac{\pi(t, w, \eta)}{d[tw - g_1(x, \eta)]}\right|_{V_1(x, y)}.$$

Appliquons à cette intégrale le théorème cité (avec $q = 1$, $p = 0$, degré de la forme différentielle $= l$ pair). Nous obtenons ceci, après avoir aussi utilisé les relations de récurrence.

Si $\alpha = n - \frac{1}{2}$, $n \in [l, m]$,

$$(\mathrm{III}.53_1) \quad \begin{cases} E_{n-\frac{1}{2}}(x, y) = \mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x) \log s(x), & x \in \Sigma_1 - \Sigma_0 - K(y) \\ \qquad\qquad = \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y) \log s(y), & y \in \Sigma_1 - \Sigma_0 - K(y); \end{cases}$$

Si $\alpha = l - \frac{1}{2} - k$, k entier $\geqq 0$,

$$(\mathrm{III}.53_2) \quad \begin{cases} E_{l-\frac{1}{2}-k}(x, y) = \mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x) \log s(x), & x \in \Sigma_1, \\ \qquad = \mathrm{Hol}(y) \log s(y) + \mathrm{Hol}(y) [s(y)]^{-k}, & y \in \Sigma_1; \end{cases}$$

Si $\alpha = m - \frac{1}{2} + k$, k entier $\geqq 0$:

$$(\mathrm{III}.53_3) \quad \begin{cases} E_{m-\frac{1}{2}+k}(x, y) = \mathrm{Hol}(x) \log s(x) + \mathrm{Hol}(x) [s(x)]^{-k}, & x \in \Sigma_1, \\ \qquad = \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y) \log s(y), & y \in \Sigma_1. \end{cases}$$

(*b*) *Si* $m < l$, reprenons le calcul de $E_{l-\frac{1}{2}}(x, y)$ à l'aide de (III.52); seule la dernière intégrale est singulière, si $x \in \Sigma_1$, et l'on se ramène à une forme différentielle à singularité polaire d'ordre 1 là où $tw - g_1(x, \eta) = 0$. On obtient donc des résultats analogues aux précédents que nous précisons comme suit; posons $\alpha = n - \frac{1}{2}$, n entier positif ou négatif. Si n est compris entre l et m, $E(x, y)$ a une singularité logarithmique si x ou $y \in \Sigma_1$; si $n = \inf(l, m) - k$, k entier > 0, $E(x, y)$ a une singularité logarithmique si $x \in \Sigma_1$ et logarithmique et polaire d'ordre k si $y \in \Sigma_1$; si $n = \sup(l, m) + k$, k entier > 0, $E(x, y)$ a une singularité logarithmique si $y \in \Sigma_1$ et logarithmique et polaire d'ordre k si $x \in \Sigma_1$.

Remarques. — 1° Les opérateurs autoadjoints concernés par cette étude sont nécessairement d'ordre m pair, et $\alpha = n - \frac{1}{2}$ est tel que $n \in [l, m]$.

2° Si $l = 2$, on peut aussi avoir la nature de la singularité du prolongement pour x ou $y \in \Sigma_0 - \Sigma_1$. Supposons $\alpha = n - \frac{1}{2}$, $n \in [2, m]$; on décompose $E = E_0 + E_1$. Pour E_1, ce qui précède s'applique à condition d'intégrer sur $V(x, y)$, le polynôme en θ, $g(x, \theta)$, ayant une racine double pour $x \in \Sigma_0$, θ_0. Pour E_0, il suffit de faire un calcul explicite, en utilisant la formule du résidu. D'où

$$E_0 = \mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x) [g_1(x, \theta_0)]^{m-n-\frac{1}{2}}.$$

Or $g_1(x, \theta_0) = 0$ est l'équation de Σ_0 au voisinage de x. D'où

$$(\mathrm{III}.54) \quad E(x, y) = \mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x) \log s(x) + \mathrm{Hol}(x) [s(x)]^{-\frac{1}{2}}, \qquad x \in \Sigma_0.$$

Pour les autres valeurs de α, on utilisera les relations de récurrence.

PROPOSITION 14. — *Les solutions élémentaires $E_\alpha(x, y)$ des opérateurs de Tricomi-Clairaut (l pair) :*

$$a_\alpha\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = k_m\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[\sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha\right] k_{m-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

$\alpha = n - \frac{1}{2}$, *n entier, de partie principale :*

$$g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

sont des fonctions de (x, y), coïncidant pour $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$, ($y$ point où l'opérateur est hyperbolique), avec des fonctions prolongeables analytiquement en tous les points (x, y) tels que le segment $[x, y]$ soit contenu dans Ω et $x \notin K(y)$ (Ω composante connexe de $\mathbf{R}^l - \Sigma \ni y$, où l'opérateur est hyperbolique). Les prolongements ont des singularités si x ou $y \in \Sigma$. La nature des singularités pour x ou $y \in \Sigma_1 - \Sigma_0$ est donnée par les formules (III.53).

Lorsque $l \leqq n \leqq m$, on a la décomposition $E = E_0 + E_1$, E_0 étant défini par l'intégrale (III.31), E_1 par l'intégrale (III.43$_1$) fonctions analytiques de (x, y) pour $[xy] \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$.

6° *Étude du prolongement à travers Σ_1.* — Nous supposons le prolongement singulier sur Σ_1. Montrons qu'on peut définir au voisinage de Σ_1 une distribution prolongeant l'intégrale, annulée par l'opérateur. Supposons que si $x \in \Sigma_1 - \Sigma_0 - K(y)$, on ait

$$E_1(x, y) = \mathrm{Hol}(x) \log s(x) + \mathrm{Hol}(x).$$

Supposons aussi $l = 2$, pour simplifier, et choisissons en un point de Σ_1 des coordonnées locales (u, v) telles que $u = s(x)$, $v = t(x)$,

$$a\left(u, v, \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right) = -u\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} + H\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}, u, v\right),$$

H étant un opérateur différentiel du premier ordre, à coefficients analytiques de (u, v). Pour $u > 0$, on a

$$E_1(u, v) = \alpha(u, v) \log u + \beta(u, v),$$

$\alpha(u, v)$ et $\beta(u, v)$ étant analytiques. Considérons un prolongement analytique quelconque $\tilde{E}_1$ de E_1 pour $u < 0$. Comme les coefficients de a sont analytiques, on a aussi $a\tilde{E}_1 = 0$ pour $u < 0$. Or

$$\alpha(u, v)(\log|u| \pm i\pi) + \beta(u, v),$$

sont deux telles solutions, donc aussi

$$\alpha(u, v) \log|u| + \beta(u, v),$$

puisque les coefficients de a sont réels. Définissons, au voisinage de $u = 0$, la distribution T par la fonction localement sommable $\alpha(u, v)\log|u| + \beta(u, v)$. T est un prolongement de E_1. Montrons que T annule a. De

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial \alpha}{\partial u}\log|u| + \alpha \operatorname{Pf}\frac{1}{u} + \frac{\partial \beta}{\partial u},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial u^2} = 2\frac{\partial \alpha}{\partial u}\operatorname{Pf}\frac{1}{u} + \frac{\partial^2 \alpha}{\partial u^2}\log|u| - \alpha \operatorname{Pf}\left(\frac{1}{u^2}\right) + \frac{\partial^2 \beta}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial v^2} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial v^2}\log|u| + \frac{\partial^2 \beta}{\partial v^2},$$

$$u \operatorname{Pf}\left(\frac{1}{u}\right) = 1, \qquad u \operatorname{Pf}\left(\frac{1}{u^2}\right) = \operatorname{Pf}\left(\frac{1}{u}\right),$$

on déduit

$$aT = \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v)\log|u| + \varphi_3(u, v)\operatorname{Pf}\left(\frac{1}{u}\right),$$

les $\varphi_i(u, v)$ étant analytiques. Or pour $u > 0$ *ou* pour $u < 0$, on a

$$aT = \varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v)\log|u| + \frac{1}{u}\varphi_3(u, v),$$

ce qui est nul d'après le début du paragraphe. D'où

$$\varphi_1(u, v) + \varphi_2(u, v)\log|u| = -\frac{\varphi_3(u, v)}{u}, \qquad u \neq 0.$$

La fonction au premier membre étant localement sommable au voisinage de $u = 0$, la fonction au second membre l'est aussi et $\varphi_3(u, v)$ a nécessairement, pour chaque v, un ordre en $u > 1$:

$$\varphi_3(u, v) = u\varphi_4(u, v), \qquad \varphi_4(u, v) \text{ analytique.}$$

D'où

$$aT = \varphi_5(u, v) + \varphi_2(u, v)\log|u|.$$

Comme $\varphi_5(u, v) = -\varphi_2(u, v)\log|u|$, $u \neq 0$, les ordres en u, de φ_5 et φ_2, pour v fixé, ne peuvent être ni égaux ni différents s'ils sont finis. On a donc

$$\varphi_5 = \varphi_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad aT = 0,$$

C. Q. F. D.

Remarque. — Le raisonnement précédent se généralise au cas où la dimension l est plus grande que 2, l'ordre m est quelconque et aux types de singularités rencontrés.

5. Prolongement analytique des solutions élémentaires lorsque l est impair et $\alpha = n - \frac{1}{2}$, n entier positif ou négatif.

Montrons que l'intégrale dans (III.36), $l \leq n \leq m$, peut, en général, être décomposée aussi en la somme de deux intégrales. Notons Ω une composante connexe de $\mathbf{R}^l - \Sigma \ni y$ où l'opérateur est strictement hyperbolique.

1° *Étude d'une intégrale.* — De (III.26), on déduit

$$[F(\lambda)]_+ + [F(\lambda)]_- = (-1)^m \frac{2}{\left(l-n+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(m-n-\frac{1}{2}\right)} \frac{Q(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}}.$$

Posons

$$\text{(III.55)} \quad \left\{ \begin{aligned} &E_1(x, y) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{(-1)^m}{\left(l-n+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(m-n-\frac{1}{2}\right)} \\ &\qquad \times \int_{D^{**}} \frac{Q(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)}, \\ &D^{**} = \left\{ \eta \in \operatorname{Re}\Xi^l \,\middle|\, \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0,\ g(x, \eta)\, g(y, \eta) < 0 \right\}, \\ &\text{muni de l'orientation, là où } \eta(x-y) \neq 0,\ \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0. \end{aligned} \right.$$

Pour montrer que l'intégrale (III.55) a un sens, nous allons la transformer (comme dans le cas où l est pair). Introduisons, dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^{l+1}$, la variété $V_1(x, y)$,

$$wt - g_1(x, \eta) = w + tg_1(y, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0,$$

le cycle Γ_1 compact réel de $V_1(x, y)$,

$$\Gamma_1(x, y) = \{ (t, w, \eta) \mid \eta \in D^{**} \},$$

muni de l'orientation $[\eta(x-y)]\,\omega'(\eta) > 0$. Sur $V_1(x, y)$, cette orientation est donc définie par

$$w[\eta(x-y)]\,\varpi(t, w, \eta) > 0,$$

$$\varpi(t, w, \eta) = \frac{dt \wedge dw \wedge d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_l}{d[tw - g_1(x, \eta)] \wedge d[w + tg_1(y, \eta)] \wedge d\left[\sum \eta_j^2\right]} = \frac{\omega'(\eta)}{4w}.$$

$\Gamma_1(x, y)$ est donc relatif à $W_1(x) \cup W_1(y) \cup W_1(x, y)$,

$$\text{(III.56)} \quad \begin{cases} W_1(x) \quad : \quad t = w = g_1(x, \eta) = \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0, \\ W_1(y) \quad : \quad t = \infty, \quad w = g_1(y, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0, \\ W_1(x, y) : \quad w = g_1(x, \eta) = g_1(y, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0, \end{cases}$$

car la sous-variété de $V_1(x, y)$ où $w = 0$ est $W_1(x) \cup W_1(y) \cup W_1(x, y)$, et sur Re $V_1(x, y)$, $\eta(x - y) = 0$ entraîne $w = 0$. D'où

$$\text{(III.57)} \quad E_1(x, y) = \frac{-1}{(2\pi i)^{l-1}} \frac{1}{\left(l - n + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(m - n - \frac{1}{2}\right)} \times \int_{\Gamma_1(x,y)} \frac{tQ(-t^2, 1)}{(t^2 + 1)^{m-l}} [\eta(x - y)]^{m-l} \frac{\varpi(t, w, \eta)}{g_0(\eta)};$$

Remarque. — Sur Γ_1, on a $g_0 \neq 0$.

Nous savons que Re $V_1(x, y)$ est sans singularité si $[xy] \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$ (même étude que pour l pair). Si Re $W_1(x)$, Re $W_1(y)$, Re $W_1(x, y)$ sont des sous-variétés régulières de $V_1(x, y)$, et en position générale, (III.57) aura un sens (théorème 3, p. 97 de [9]).

(*a*) *Régularité de* Re $W_1(x)$ *et* Re $W_1(y)$: Un point $(t, w, \eta) \in$ Re $W_1(x)$ est singulier si

$$t = w = g_1(x, \eta) = \sum \eta_j^2 - 1 = 0,$$

et si, en ce point, les différentielles

$$dt, \quad d[wt - g_1(x, \eta)] = dg_1(x, \eta),$$
$$d[w + tg_1(y, \eta)] = dw + g_1(y, \eta)\, dt, \quad \eta\, d\eta,$$

sont linéairement dépendantes. D'où l'on déduit

$$dg_1(x, \eta) = 0, \qquad \text{soit} \quad x \in \Sigma_1.$$

Le résultat pour Re $W_1(y)$ s'obtient en échangeant x et y : Re $W_1(y)$ est singulière si $y \in \Sigma_1$.

(*b*) *Régularité de* Re $W_1(x, y)$: Il est équivalent d'étudier la régularité de Re $\hat{W}_1(x, y)$,

$$\hat{W}_1(x, y) : \quad w = g_1(x, \eta) = g_1(y, \eta) = 0, \quad \text{dans} \quad \hat{V}_1(x, y),$$
$$\hat{V}_1(x, y) : \quad wt - g_1(x, \eta) = w + tg_1(y, \eta) = 0$$
$$\left(\text{on supprime} \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0\right).$$

(t, w, η) réel est singulier s'il existe α, β, γ réels non tous nuls tels que :

$$w = g_1(x, \eta) = g_1(y, \eta) = \alpha\, dw$$
$$+ \beta[t\, dw - dg_1(x, \eta)] + \gamma[dw + t\, dg_1(y, \eta)] = 0.$$

D'où

$$\alpha + \beta t + \gamma = 0 \qquad \text{et} \qquad -\beta\, dg_1(x, \eta) + \gamma t\, dg_1(y, \eta) = 0.$$

Cette condition exprime ceci :

$\exists\, \eta \in \operatorname{Re} G_1(x) \cap \operatorname{Re} G_1(y)$ et en ce point les surfaces ne sont pas en position générale.

Ceci peut se produire dans l'un des trois cas suivants :

— *si* $k_{p-1}(\eta) \neq 0$, alors $\eta(x - y) = 0$, et de

$$dg_1(x, \eta) = dg_1(y, \eta) + k_{p-1}(\eta)\,[(x - y)\, d\eta],$$

on déduit $x \in K(y)$;

— *si* $k_{p-1}(\eta) = k_p(\eta) = 0$, $\eta(x - y) \neq 0$, de

$$dg_1(x, \eta) = dk_p(\eta) + [\eta x]\, dk_{p-1}(\eta), \qquad dg_1(y, \eta) = dk_p(\eta) + [\eta y]\, dk_{p-1}(\eta),$$

on déduit $K_p[k_p(\eta) = 0]$ et $K_{p-1}[k_{p-1}(\eta) = 0]$ ont un point de contact réel;

— *si* $k_{p-1}(\eta) = k_p(\eta) = \eta(x - y) = 0$, puisque

$$dg_1(x, \eta) = dg_1(y, \eta).$$

En conclusion, $\operatorname{Re} W_1(x, y)$ est régulière pour $(xy) \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$, *s'il n'existe aucun point* η *réel tel que* $k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = 0$.

(*c*) *Positions relatives de* $\operatorname{Re} W_1(x)$, $\operatorname{Re} W_1(y)$, $\operatorname{Re} W_1(x, y)$: Tout d'abord, $\operatorname{Re} W_1(x) \cap \operatorname{Re} W_1(y) = \emptyset$. Étudions $\operatorname{Re} \hat{W}_1(x)$ et $\operatorname{Re} \hat{W}_1(x, y)$. Prenons, au voisinage d'un point $t = 0$, dans $\hat{V}_1(x, y)$, les coordonnées locales t, $(l - 1)$ coordonnées de η, η_1 par exemple étant déterminé par

$$g_1(x, \eta) + t^2 g_1(y, \eta) = 0,$$

[ce qui est possible puisque $\operatorname{Re} G_1^*(x)$ est sans singularité], w est alors déterminé par $w = -t g_1(y, \eta)$.

Une équation de $\hat{W}_1(x)$ est $t = 0$, une équation de $\hat{W}_1(x, y)$ est $g_1(x, \eta) - g_1(y, \eta) = 0$. En exprimant qu'en un point appartenant à $\hat{W}_1(x) \cap \hat{W}_1(x, y)$, les différentielles dt et $dg_1(x, \eta) - dg_1(y, \eta)$ sont linéairement dépendantes [en utilisant les coordonnées locales précédemment choisies dans $\hat{V}_1(x, y)$], on trouve les mêmes conditions qu'en (*b*).

En conclusion, s'il n'existe pas de point η réel tel que $k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = 0$ (III.57) définit une fonction analytique de (x, y) si $(x\,y) \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$.

Remarque. — Nous aurions pu utiliser $V(x, y)$ au lieu de $V_1(x, y)$; en effet, les points singuliers appartenant à Re $W(x, y)$, ou les points où Re $W(x)$ et Re $W(x, y)$ ne sont pas en position générale, qui correspondent aux racines réelles de $g_0(\eta)$ (points communs à K_m et K_{m-1} !) ne sont pas voisins de support de Γ si $(xy) \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$.

2° *Étude d'une deuxième intégrale.* — Faisons, à partir de maintenant, l'hypothèse suivante : Re $K_p^\star \cap$ Re $K_{p-1}^\star = \emptyset$, hypothèse équivalente à celle-ci :

$$\mathrm{Re}\; G_1^\star(x) \cap \mathrm{Re}\; G_1^\star(y) \text{ non en position générale} \iff x \in K(y).$$

Posons

$$\text{(III.58)}\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{E}_0(x, y) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{(2\pi i)^{l-1}}\,\frac{1}{\left(l-n+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(m-n-\frac{1}{2}\right)} \\ &\qquad\times \int_{\Delta^{\star\star}\ \text{détourné de}\ G_0^{\star\star}} \frac{\lambda^{m-n-\frac{1}{2}} - Q(\lambda, 1)}{(\lambda-1)^{m-l}} \\ &\qquad\times [\eta(x-y)]^{m-l}\,\frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\ &\Delta^{\star\star} = \left\{ \eta \in \mathrm{Re}\; \Xi^l \,\middle|\, \sum_1^l \eta_j^2 - 1 = 0,\ g(x, \eta)\,g(y, \eta) > 0 \right\}, \\ &\text{muni de l'orientation, là où } \eta(x-y) \neq 0,\ \frac{\omega'(\eta)}{[\eta(x-y)]^l} > 0. \end{aligned}\right.$$

Rappelons qu'il s'agit de la détermination positive de $\lambda^{m-n-\frac{1}{2}}$. Nous allons montrer que (III.58) a un sens en transformant, encore une fois, l'intégrale. Considérons dans $\mathbf{P}^1 \times \mathbf{C}^{l+1}$,

$$\tilde{V}_1(x, y):\quad tw - g_1(x, \eta) = w - tg_1(y, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0,$$

$$\varpi(t, w, \eta) = \left.\frac{dt \wedge dw \wedge d\eta_1 \wedge \ldots \wedge d\eta_l}{d[tw - g_1(x, \eta)] \wedge d[w - tg_1(y, \eta)] \wedge d\left[\sum_j \eta_j^2\right]}\right|_{\tilde{V}_1(x, y)} = \frac{w'(\eta)}{4w},$$

$\tilde{\Gamma}_1(x, y) = \{ (t, w, \eta) \mid \eta \in \Delta^{\star\star},\ t > 0,$ détourné de la sous-variété $\tilde{G}_0$ de $\tilde{V}_1(x, y)$ où $g_0(\eta) = 0 \}$ muni de l'orientation :

$$w\,[\eta(x-y)]\,\varpi(t, w, \eta) > 0.$$

$\tilde{\Gamma}_1$ est un cycle compact relatif à $\tilde{W}_1(x) \cup \tilde{W}_1(y) \cup \tilde{P}_1(x, y)$,

$$
\text{(III.59)} \quad \begin{cases} \tilde{W}_1(x) : \quad t = w = g_1(x, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0; \\ \tilde{W}_1(y) : \quad t = \infty, \qquad w = g_1(y, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0; \\ \tilde{P}_1(x, y) : \quad \text{sous-variété de } \tilde{V}_1(x, y) \text{ où } \eta(x = y) = 0, \end{cases}
$$

car la sous-variété de $\tilde{V}_1(x, y)$ où $w = 0$ est $\tilde{W}_1(x) \cup \tilde{W}_1(y) \cup \tilde{W}_1(x, y)$,

$$
\tilde{W}_1(x, y) : \quad w = g_1(x, \eta) = g_1(y, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0,
$$

mais l'hypothèse faite entraîne $\operatorname{Re} \tilde{W}_1(x, y) \subset \operatorname{Re} \tilde{P}_1(x, y)$.

Comme sur $\tilde{\Gamma}_1$, on a

$$
\begin{aligned}
&\frac{\lambda^{m-n-\frac{1}{2}} - Q(\lambda, 1)}{(\lambda - 1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\omega'(\eta)}{g(y, \eta)} \\
&= 4t \frac{(t^{2(m-n)-1} - Q(t^2, 1)}{(t^2 - 1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\varpi(t, w, \eta)}{g_0(\eta)}, \qquad (t^{2(m-n)-1} > 0),
\end{aligned}
$$

$$
\text{(III.60)} \quad \begin{aligned}
E_0(x, y) = {} & \frac{2}{(2\pi i)^{l-1} \left(l - n + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(m - n - \frac{1}{2}\right)} \\
& \times \int_{\tilde{\Gamma}_1} \frac{t^{2(m-n)} - tQ(t^2, 1)}{(t^2 - 1)^{m-l}} [\eta(x-y)]^{m-l} \frac{\varpi(t, w, \eta)}{g_0(\eta)}.
\end{aligned}
$$

Les calculs faits précédemment montrent que $\operatorname{Re} \tilde{V}_1(x, y)$, $\operatorname{Re} \tilde{W}_1(x)$, $\operatorname{Re} \tilde{W}_1(y)$, $\operatorname{Re} \tilde{P}_1(x, y)$ sont régulières pour $[xy] \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$. Étudions la régularité de $\operatorname{Re} \tilde{G}_0$ et les positions relatives de $\operatorname{Re} \tilde{W}_1(x)$, $\operatorname{Re} \tilde{W}_1(y)$, $\operatorname{Re} \tilde{P}_1(x, y)$, $\operatorname{Re} \tilde{G}_0$.

(*a*) *Régularité de* $\operatorname{Re} \tilde{G}_0$: Considérons $\hat{G}_0$ $\left(\text{on supprime} \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0\right)$ dans $\hat{V}_1$. (t, w, η) est singulier, sur $\operatorname{Re} \hat{G}_0$, s'il existe α, β, γ réels non tous nuls tels que

$$
\begin{aligned}
tw - g_1(x, \eta) &= w - tg_1(y, \eta) = g_0(\eta) \\
&= \alpha d[tw - g_1(x, \eta)] + \beta d[w - tg_1(y, \eta)] + \gamma dg_0(\eta) = 0.
\end{aligned}
$$

D'où

$$
\alpha t + \beta = \alpha w - \beta g_1(y, \eta) = 0,
$$

puis

$$
w + tg_1(y, \eta) = 0 \qquad \text{et} \qquad w = tg_1(y, \eta) = g_1(x, \eta) = g_0(\eta) = 0.
$$

Si $[xy] \subset \Omega$, c'est impossible car $\operatorname{Re} G_1^*(x) \cap \operatorname{Re} G_0^* = \emptyset$.

Conclusion. — Re $\tilde{G}_0$ est régulière si $[xy] \subset \Omega$.

(*b*) *Positions de* Re $\tilde{G}_0$, Re $\tilde{W}_1(x)$, Re $\tilde{W}_1(y)$, Re $\tilde{P}_1(x, y)$: Tout d'abord, Re $\tilde{G}_0 \cap$ Re $\tilde{W}_1(x) = \emptyset$, Re $\tilde{G}_0 \cap$ Re $\tilde{W}_1(y) = \emptyset$, si $[xy] \subset \Omega$. Étudions donc Re $\tilde{G}_0$ et Re $\tilde{P}_1(x, y)$, en se ramenant à Re $\hat{G}_0$ et Re $\hat{P}_1$. En un point appartenant à Re $\hat{G}_0 \cap$ Re $\hat{P}_1$, on peut prendre les équations $g_0(\eta) = 0$, $\eta(x - y) = 0$ $(\eta_1, \ldots, \eta_l)$ étant des coordonnées dans $\hat{V}_1$. Ces deux surfaces ne sont donc pas en position générale si et seulement si $x \in K_0(y)$, partie de $K(y)$ associée à $G_0^\star$.

En conclusion, s'il n'existe aucun point η réel tel que $k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = 0$, l'intégrale (III.60) se prolonge analytiquement pour $[xy] \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$.

3° *Prolongement analytique des solutions élémentaires.* — Nous supposons Re $K_p^\star \cap$ Re $K_{p-1}^\star = \emptyset$. Si $m \geqq l$, $\alpha = n - \frac{1}{2}$, $n \in [l, m]$, (III.36) a été décomposée en la somme de deux intégrales prolongeables analytiquement en tous les points (x, y) tels que $[xy] \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$. Dans tous les autres cas, en utilisant les mêmes méthodes qu'en dimension paire, on obtient ceci : la solution élémentaire $E(x, y)$, $\alpha = n - \frac{1}{2}$, n entier, coïncide, pour $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$, avec une fonction prolongeable analytiquement en tous les points (x, y) tels que $[xy] \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$.

PROPOSITION 15. — *Supposons l impair, $\alpha = n - \frac{1}{2}$, n entier. Pour l'opérateur de Tricomi-Clairaut :*

$$a\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\{ k_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \left[\sum_1^l x_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \alpha\right] k_{p-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\} g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

de partie principale $g\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) = g_1\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right) g_0\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$, *supposons qu'il n'existe aucun point η réel vérifiant $k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = 0$. Sa solution élémentaire $E(x, y)$ coïncide pour $x \in \mathcal{E}^+(y) - K(y)$, avec une fonction prolongeable analytiquement en tous les points (x, y) tels que $[xy] \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$, Ω désignant une composante connexe de $\mathbf{R}^l - \Sigma$, où l'opérateur est strictement hyperbolique.*

Si de plus $l \leqq n \leqq m$, le prolongement se décompose,

$$E(x, y) = E_0(x, y) + E_1(x, y),$$

E_0, E_1 étant les fonctions analytiques de (x, y) pour $[xy] \subset \Omega$ et $x \notin K(y)$ définies par les intégrales (III.58) et (III.57).

Ces résultats sont valables pour les opérateurs de Tricomi-Clairaut autoadjoints, si m et l sont impairs.

TABLEAU DES RÉSULTATS.

$\alpha = n$.	*Prolongement analytique des intégrales.*	*Nature des singularités du prolongement si x ou $y \in \Sigma_1 - \Sigma_0$ et $x \notin K(y)$.*
$n \leqq \inf(l, m) - 1$	$y \in \Omega$, $x \in \mathbf{R}^l$, $x \notin K(y)$.	$m \geqq l$, $n = l - 1 - k$ ou $m < l$, $n = m - 1 - k$ $y \in \Sigma_1$: $\mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y)[s(y)]^{\frac{l-3}{2}-k}$ (l pair), $\mathrm{Hol}(y) \log s(y) + \mathrm{Hol}(y)[s(y)]^{-k}$ (l impair) $x \in \Sigma_1$: Sans singularité.
$n \geqq \sup(l, m)$	$y \in \mathbf{R}^l$, $x \in \Omega$, $x \notin K(y)$.	$m \geqq l$, $n = m + k$ ou $m < l$, $n = l + k$ $y \in \Sigma_1$: Sans singularité. $x \in \Sigma_1$: $\mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x)[s(x)]^{\frac{l-3}{2}-k}$ (l pair), $\mathrm{Hol}(x) \log s(x) + \mathrm{Hol}(x)[s(x)]^{-k}$ (l impair).
$m \leqq n \leqq l - 1$	$x \notin K(y)$	Sans singularité

$l \leqq n \leqq m - 1$	$(xy) \subset \Omega$, $x \notin K(y)$	$y \in \Sigma_1$: $P_{n-l+1}\left(\dfrac{\partial}{\partial y}\right) E_n = \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y)[s(y)]^{\frac{l-3}{2}}$ (l pair), $= \mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y) \log s(y)$ (l impair) $x \in \Sigma_1$: $P_{m-n}\left(\dfrac{\partial}{\partial x}\right) E_n = \mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x)[s(x)]^{\frac{l-3}{2}}$ (l pair) $= \mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x) \log s(x)$ (l impair),
$\alpha = n - \frac{1}{2}$ n compris entre l et m		$y \in \Sigma_1$: $\mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y) \log s(y)$ (l pair) $x \in \Sigma_1$: $\mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x) \log s(x)$ (l pair)
$n = \inf(l, m) - k$	$(xy) \subset \Omega$, $x \notin K(y)$.	$y \in \Sigma_1$: $\mathrm{Hol}(y) \log s(y) + \mathrm{Hol}(y)[s(y)]^{-k}$ (l pair) $x \in \Sigma_1$: $\mathrm{Hol}(x) + \mathrm{Hol}(x) \log s(x)$ (l pair)
$n = \sup(l, m) + k$		$y \in \Sigma_1$: $\mathrm{Hol}(y) + \mathrm{Hol}(y) \log s(y)$ (l pair) $x \in \Sigma_1$: $\mathrm{Hol}(x) \log s(x) + \mathrm{Hol}(x)[s(x)]^{-k}$ (l pair)

Remarques. — 1° La décomposition (obtenue pour $l \leq n \leq m$), n'est pas valable si α est entier : le logarithme intervenant dans les formules ne peut être uniformisé par la méthode utilisée.

2° S'il existe η réel tel que $k_p(\eta) = k_{p-1}(\eta) = 0$, les intégrales intervenant dans la décomposition divergent sans doute. Peut-on trouver une autre décomposition ?

3° Pour les singularités des intégrales (III.57) et (III.58) sur $\Sigma_1 - \Sigma_0$, on se heurte à la difficulté suivante pour l'application du théorème 4, p. 98 de [9] : le point singulier réel qu'a $V_1(x, y)$ [ou $\tilde{V}_1(x, y)$], si $x \in \Sigma_1$, vérifie toujours $w = 0$, donc appartient à $W_1(x)$ [ou $\tilde{W}_1(x)$], variété à laquelle est relatif Γ_1, (ou $\tilde{\Gamma}_1$).

4° Nous avons introduit deux variables (t, w) pour étudier les intégrales, si $\alpha = n - \frac{1}{2}$. La plus « naturelle » des deux, qui intervient dès le début, est $t(t^2 = \lambda$, ou $t^2 = -\lambda)$. On peut se demander pourquoi introduire seulement t et la variété

$$t^2 g_1(y, \eta) \pm g_1(x, \eta) = \sum_j \eta_j^2 - 1 = 0,$$

ne suffit pas. En fait, dans ce cas, certaines variétés, relativement auxquelles on doit intégrer, sont singulières; par exemple la variété où $g_1(x, \eta) = 0$ est singulière en les points où $t = 0$. Il y a des cas où il serait sans doute possible d'utiliser seulement t, mais nous avons préféré donner une démonstration plus générale.

5° Si l'indice α de l'opérateur est un nombre rationnel compris entre $l - \frac{1}{2}$ et $m - \frac{1}{2}$, et $m \geq l$, nous pensons qu'il est possible de faire des transformations sur les intégrales en ajoutant deux variables. Quant aux valeurs irrationnelles de α, la méthode n'est plus applicable : c'est particulièrement pour ces cas qu'il serait intéressant de savoir si le théorème de Nilsson-Leray s'applique.

Dressons un tableau des résultats obtenus (k désigne toujours un entier ≥ 0); et dans le cas où $\alpha = n - \frac{1}{2}$, l impair, nous supposons $\operatorname{Re} K_p^\star \cap \operatorname{Re} K_{p-1}^\star = \emptyset$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BATEMAN (Harry). — *Higher transcendental functions*, Vol. 1. — New York, Toronto, London, Mc Graw-Hill Book Company, 1953.

[2] BOURBAKI (Nicolas). — *Algèbre*, Chap. 1 à 9. — Paris, Hermann, 1942 à 1964 (*Act. scient. et ind.*, 1044, 1102, 1144, 1179, 1236, 1261, 1272; *Bourbaki*, 4, 6, 7, 9, 11, 14, 23 et 24).

[3] CHOQUET-BRUHAT (Yvonne). — Uniformisation de la solution d'un problème de Cauchy non linéaire à données holomorphes, *Bull. Soc. math. France*, t. 94, 1966, p. 25-48.

[4] DELACHE (Solange). — Calcul de solutions élémentaires de l'opérateur de Tricomi-Clairaut à deux variables, autoadjoint, d'ordre $m \geq 2$, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 259, 1964, p. 30-33.

[5] DELACHE (Solange). — Calcul de solutions élémentaires d'opérateurs de Tricomi-Clairaut, auto-adjoints, à l variables, $l \geq 3$, d'ordre m, et où $m = l$, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 262, Série A, 1966, p. 233-236.

[6] GÅRDING (Lars), KOTAKE (T.) et LERAY (J.). — Uniformisation et développement asymptotique de la solution du problème de Cauchy linéaire... (Problème de Cauchy, I *bis* et VI), *Bull. Soc. math. France*, t. 94, 1966, p. 263-361.

[7] HÖRMANDER (Lars). — *Linear partial differential operators*. — Berlin, Springer-Verlag, 1953 (*Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*, 116).

[8] LERAY (Jean). — La solution unitaire d'un opérateur différentiel linéaire, *Bull. Soc. math. France*, t. 86, 1958, p. 75-96.

[9] LERAY (Jean). — Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe, *Bull. Soc. math. France*, t. 87, 1959, p. 81-180.

[10] LERAY (Jean). — Un prolongement de la transformation de Laplace qui transforme la solution unitaire d'un opérateur hyperbolique en sa solution élémentaire, *Bull. Soc. math. France*, t. 90, 1962, p. 39-156.

[11] LERAY (Jean). — *Hyperbolic differential equations*. — Princeton, Institute for advanced Study, 1963 (multigr.).

[12] LERAY (Jean). — Un complément au théorème de N. Nilsson sur les intégrales de formes différentielles à support singulier algébrique, *Bull. Soc. math. France*, t. 95, 1967, p. 313-374.

[13] MALGRANGE (Bernard). — Sur les systèmes différentiels à coefficients constants, *Colloques internationaux du Centre national de la Recherche scientifique : Les équations aux dérivées partielles* [1962, Paris], p. 113-122. — Paris, C. N. R. S., 1963.

[14] NOMIZU (Katsumi). — *Lie groups and differential geometry*. — Tokyo, The mathematical Society of Japan, 1956 (*Publications of the mathematical Society of Japan*, 2).

]15] SCHWARTZ (Laurent). — *Théorie des distributions*. — Paris, Hermann, 1967.

[16] VALIRON (Georges). — *Théorie des fonctions*. — Paris, Masson, 1948 (*Cours d'Analyse mathématique*, Tome 1).

(Texte reçu le 2 mai 1968.)

Mme Solange DELACHE,
Département de Mathématiques,
Faculté des Sciences,
Parc Valrose,
06-Nice.