BULLETIN DE LA S. M. F.

MARGUERITE MANGENEY

Sur la finitude de la fermeture intégrale

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 277-286
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__277_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 277 à 286.

SUR LA FINITUDE DE LA FERMETURE INTÉGRALE

PAR

Mlle MARGUERITE MANGENEY.

Nous nous placerons dans la situation suivante : A est un anneau noethérien intègre, local, d'idéal maximal $\mathfrak{m}$. Soient K le corps des fractions de A, et K' une extension finie de K. Si B est une A-algèbre (que nous supposerons souvent entière, donc contenue dans la fermeture intégrale de A dans K') telle que $A \subset B \subset K'$, on cherche des conditions pour que la structure de A s'étende à B.

On traitera ici essentiellement de la finitude de B (c'est-à-dire : B est un A-module noethérien).

Donnons tout d'abord la définition suivante :

DÉFINITION. — On dira, comme dans les EGA de GROTHENDIECK [2], que M est un A-module quasi-fini si $M/\mathfrak{m}M$ est de rang fini sur le corps résiduel $k = A/\mathfrak{m}$.

1. — Nous aurons besoin du résultat préliminaire suivant (NAGATA [3], 30.6) :

PROPOSITION 1 (CHEVALLEY). — *Soit* $(R, \mathfrak{n})$ *un anneau local complet noethérien, d'idéal maximal* $\mathfrak{n}$. *Si* M *est un* R*-module quasi-fini et séparé pour la topologie* $\mathfrak{n}$*-adique, alors* M *est un* R*-module de type fini.*

En effet, comme $\mathfrak{n}/\mathfrak{n}^2$ est un $R/\mathfrak{n}$-module de type fini, gr (R) est noethérien. Soit $\hat{M}$ le complété de M pour la topologie $\mathfrak{n}$-adique, nous avons l'isomorphisme canonique

$$\hat{M}/\mathfrak{n}\hat{M} \simeq M/\mathfrak{n}M.$$

Ceci montre que $\hat{M}$ est un R-module quasi-fini. Soient $(z_i)_{i\in I}$, une famille finie d'éléments de $\hat{M}$ dont les classes $\mathrm{mod}(\mathfrak{n}\hat{M})$ forment un système générateur de $\hat{M}/\mathfrak{n}\hat{M}$. Ces classes engendrent aussi le $\mathrm{gr}(R)$-module $\mathrm{gr}(\hat{M})$, qui est donc un $\mathrm{gr}(R)$-module de type fini. Comme R est complet, on en déduit que $\hat{M}$ est un R-module de type fini (BOURBAKI [1], chap. III, § 3, nº 1, prop. 3). Comme M est séparé, M s'identifie à un sous-R-module de $\hat{M}$, et par suite, M est un R-module de type fini.

En se plaçant dans les hypothèses du problème posé, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Si B est entier sur A, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *B est un A-module quasi-fini.*

(ii) *Les idéaux maximaux de B sont des B-modules de type fini.*

Montrons que (i) entraîne (ii). Soit $\mathfrak{m}'$ un idéal maximal de B. Comme $B/\mathfrak{m}B$ est $A/\mathfrak{m}$-module de type fini, le sous-$A/\mathfrak{m}$-module $\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}B$ de $B/\mathfrak{m}B$ est lui aussi de type fini. C'est donc un A-module de type fini, et *a fortiori* un B-module de type fini. Comme $\mathfrak{m}B$ est un B-module de type fini, $\mathfrak{m}'$ est engendré sur B par un nombre fini d'éléments.

Reste à montrer que (ii) entraîne (i). Comme B est entier sur A, les idéaux maximaux de B sont en nombre fini. Soient $(\mathfrak{m}'_i)_{1\leq i\leq r}$, ces idéaux maximaux. Posons

$$\mathfrak{m}' = \mathfrak{m}'_1, \ \ldots, \ \mathfrak{m}'_r = \mathfrak{m}'_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}'_r$$

(car les idéaux sont étrangers). Alors $\mathfrak{m}'/\mathfrak{m}B$ est un sous-$A/\mathfrak{m}$-module de $\mathfrak{m}'_i/\mathfrak{m}B$, donc c'est un $A/\mathfrak{m}$-module de type fini. C'est aussi le subradical de $B/\mathfrak{m}B$. On en déduit qu'il existe $\alpha > 0$, tel que $\mathfrak{m}'^{\alpha} \subset \mathfrak{m}B$. Il suffira de montrer que $B/\mathfrak{m}'^{\alpha}$ est un $A/\mathfrak{m}$-espace vectoriel de dimension finie, car $B/\mathfrak{m}B$ est un espace quotient.

Considérons les quotients :

$$\frac{B}{\mathfrak{m}'_1}, \ \frac{\mathfrak{m}'_1}{\mathfrak{m}'^2_1}, \ \ldots, \ \frac{\mathfrak{m}'^{\alpha}_1}{\mathfrak{m}'^{\alpha}_1\mathfrak{m}'_2}, \ \ldots, \ \frac{\mathfrak{m}'^{\alpha}_1 \ldots \mathfrak{m}'^{\alpha}_k \mathfrak{m}'^{\alpha}_{k+1}}{\mathfrak{m}'^{\alpha}_1 \ldots \mathfrak{m}'^{\alpha}_k \mathfrak{m}'^{\alpha+1}_{k+1}}, \ \ldots, \ \frac{(\mathfrak{m}'^{\alpha}_1 \ldots \mathfrak{m}'^{\alpha}_{r-1})\,\mathfrak{m}'^{\alpha+1}_r}{\mathfrak{m}'^{\alpha}}.$$

Chacun d'eux est un $B/\mathfrak{m}'_i$-module de type fini, pour un certain i. Les $B/\mathfrak{m}'_i$, étant des $A/\mathfrak{m}$-modules de type fini d'après un théorème de MORI-NAGATA ([3], 33.10), tous ces quotients sont des $A/\mathfrak{m}$-modules de type fini. Par conséquent, $B/\mathfrak{m}'^{\alpha}$ est un $A/\mathfrak{m}$-module de type fini.

Toujours dans les hypothèses du problème, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 3. — *Pour que B soit un A-module de type fini, il faut et il suffit que $B \otimes_A \hat{A}$ soit un $\hat{A}$-module de type fini.*

Si $B \otimes_A \hat{A}$ est un anneau noethérien, alors B est un anneau noethérien. De plus, si B est entier sur A et si $B \otimes_A \hat{A}$ est noethérien, alors B est un A-module de type fini et, par conséquent, $B \otimes_A \hat{A}$ est un $\hat{A}$-module de type fini.

La première assertion résulte du fait que $\hat{A}$ est une A-algèbre fidèlement plate, car A est un anneau local noethérien. Pour la même raison, $B \otimes_A \hat{A}$ est une B-algèbre fidèlement plate. On peut donc identifier B à une sous-B-algèbre de $B \otimes_A \hat{A}$. Si $\mathfrak{i}$ est un idéal de B, on a

$$\mathfrak{i}(B \otimes_A \hat{A}) \cap B = \mathfrak{i}.$$

Comme $B \otimes_A \hat{A}$ est noethérien, on en déduit qu'une suite croissante d'idéaux de B est stationnaire, d'où la deuxième assertion.

Comme B est entier sur A et noethérien, B est un A-module quasi-fini, d'après la proposition 2. D'autre part, on a les isomorphismes suivants :

$$\frac{B \otimes_A \hat{A}}{\mathfrak{m}(B \otimes_A \hat{A})} \simeq \frac{B}{\mathfrak{m}B} \otimes_{A/\mathfrak{m}} \frac{\hat{A}}{\mathfrak{m}\hat{A}} \simeq \frac{B}{\mathfrak{m}B} \otimes_{A/\mathfrak{m}} \frac{A}{\mathfrak{m}} \simeq \frac{B}{\mathfrak{m}B}.$$

(car $\hat{A}/\mathfrak{m}\hat{A} \simeq A/\mathfrak{m}$).

Donc $B \otimes_A \hat{A}$ est un module quasi-fini sur A et, *a fortiori*, sur l'anneau $\hat{A}$, qui est complet. D'après la proposition 1 et la première assertion de cette proposition, il suffit de montrer que $B \otimes_A \hat{A}$ est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}\hat{A}$-adique. Montrons que $\mathfrak{m}(B \otimes_A \hat{A})$ est contenu dans le radical de $B \otimes_A \hat{A}$. Comme B est entier sur A, $B \otimes_A \hat{A}$ est entier sur l'anneau local $\hat{A}$. On en déduit que tout idéal maximal de $B \otimes_A \hat{A}$ contient $\mathfrak{m}(B \otimes_A \hat{A})$ (l'idéal maximal de $\hat{A}$ est $\mathfrak{m}\hat{A}$). Comme $\mathfrak{m}(B \otimes_A \hat{A})$ est contenu dans le radical de $B \otimes_A \hat{A}$, il définit une topologie séparée.

Lorsque B est un A-module de type fini, d'après le lemme d'Artin-Rees, il existe un entier $r > 0$ tel que

$$\mathfrak{m}^n B \cap A = \mathfrak{m}^{n-r}(\mathfrak{m}^r B \cap A) \qquad \text{pour} \quad h > r.$$

Ceci implique que la topologie définie par les $(\mathfrak{m}^n B \cap A)_{n \in N}$ définit une topologie identique à la topologie $\mathfrak{m}$-adique. Sous certaines conditions, cela entraînera que B est un A-module de type fini. Dans les hypothèses du problème, deux cas se présentent.

Cas où $K' = K$.

Lemme. — *Si les $\mathfrak{m}^n B \cap A$ définissent sur A la même topologie que la topologie $\mathfrak{m}$-adique, alors le $\hat{A}$-module $B \otimes_A \hat{A}$ est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}\hat{A}$-adique.*

L'hypothèse signifie que, pour tout $n > 0$, il existe un entier $m(n) > 0$ tel que $\mathfrak{m}^{m(n)} B \cap A \subset \mathfrak{m}^n$. Comme $\hat{A}$ est un A-module fidèlement plat,

$\hat{A}$ s'injecte dans $B \otimes \hat{A}$. On verrait, comme dans la démonstration de la proposition 3, qu'on a

$$\frac{B \otimes_A \hat{A}}{\mathfrak{m}^n (B \otimes_A \hat{A})} \simeq \frac{B}{\mathfrak{m}^n B} \quad \text{pour tout } n > 0.$$

Comme $A/\mathfrak{m}^n B \cap A$ s'injecte dans $B/\mathfrak{m}^n B$ et que $\hat{A}$ est fidèlement plat, on a l'injection

$$\frac{\hat{A}}{(\mathfrak{m}^n B \cap A)\hat{A}} \subsetneq \frac{B \otimes_A \hat{A}}{\mathfrak{m}^n (B \otimes_A \hat{A})}.$$

Pour tout $n > 0$, on a

$$\mathfrak{m}^{m(n)} (B \otimes_A \hat{A}) \cap \hat{A} = (\mathfrak{m}^{m(n)} B \cap A) \hat{A} \cap \hat{A} \subset \mathfrak{m}^n \hat{A} = (\mathfrak{m} \hat{A})^n.$$

Soit $y \in \bigcap_n \mathfrak{m}^n (B \otimes_A \hat{A})$. On peut mettre y sous la forme $\sum y_i \otimes a_i$ avec $y_i \in B$ et $a_i \in \hat{A}$. Comme $B \subset K$, il existe $a \in A$ tel que

$$ay \in \bigcap_n [\mathfrak{m}^n (B \otimes_A \hat{A}) \cap \hat{A}] \subset \bigcap_n (\mathfrak{m} \hat{A})^n = 0.$$

Puisque a n'est pas diviseur de zéro dans B, il ne l'est pas non plus dans $B \otimes_A \hat{A}$, car $B \otimes_A \hat{A}$ est plat sur B, ceci implique $y = 0$. On a démontré que $B \otimes_A \hat{A}$ est un $\hat{A}$-module séparé pour la topologie $\mathfrak{m}\hat{A}$-adique. On a finalement le théorème suivant :

Théorème 1. — *Si l'anneau B satisfait les conditions suivantes :*

(i) *Les $\mathfrak{m}^n B \cap A$ définissent une topologie identique à la topologie $\mathfrak{m}$-adique;*

(ii) *B est un A-module quasi-fini.*

Alors B est un A-module de type fini.

(ii) montre que $B \otimes_A \hat{A}$ est quasi-fini sur $\hat{A}$. D'après le lemme précédent, (i) montre que $B \otimes_A \hat{A}$ est séparé pour la topologie $\mathfrak{m}\hat{A}$-adique. D'après la proposition 1, $B \otimes_A \hat{A}$ est un $\hat{A}$-module de type fini, ce qui implique, d'après la proposition 3, B est un A-module de type fini.

Cas où $K \neq K'$.

Théorème 1 *bis*. — *Si l'anneau B satisfait les conditions suivantes :*

(i) *Il existe une extension finie A_1 de A, contenue dans B, dont K' est le corps des fractions, telle que la topologie $\mathfrak{m}$-adique de A_1 soit identique à la topologie définie par les $\mathfrak{m}^n B \cap A_1$.*

(ii) *B est un A-module quasi-fini.*

Alors B est un A-module de type fini.

Soit $\mathfrak{n}$ un idéal maximal de A_1. Comme $\mathfrak{n} \cap A = \mathfrak{m}$, $B_{\mathfrak{n}}$ est un $A_{\mathfrak{n}}$-module quasi-fini. Montrons que $\mathfrak{m} A_{1\mathfrak{n}}$ est ouvert pour la topologie définie par les $\mathfrak{m}^n B_{\mathfrak{n}} \cap A_{1\mathfrak{n}}$. Comme $\mathfrak{m} A_{1\mathfrak{n}}$ est $\mathfrak{n} A_{1\mathfrak{n}}$-primaire, les $\mathfrak{m}^n B_{\mathfrak{n}} \cap A_{1\mathfrak{n}}$ définissent une topologie identique à la topologie $\mathfrak{n}(A_1)_{\mathfrak{n}}$-adique. Comme $(A_1)_{\mathfrak{n}}$ et $B_{\mathfrak{n}}$ ont même corps des fractions, on peut appliquer le théorème 1. Donc $B_{\mathfrak{n}}$ est un $A_{1\mathfrak{n}}$-module de type fini. Ceci étant vrai pour tout idéal maximal de A_1, B est un A_1-module de type fini, donc un A-module de type fini.

Remarque. — Dans ce dernier cas ($K \neq K'$ et $A_1 \neq A$), les $\mathfrak{m}^n B \cap A$ définissent dans A une topologie identique à la topologie $\mathfrak{m}$-adique. En effet, comme $\mathfrak{m} A_1$ et les $(\mathfrak{m}^n B \cap A_1)$ définissent la même topologie sur A_1, ils induiront la même topologie sur A. Or $\mathfrak{m} A_1$ induit la topologie $\mathfrak{m}$-adique, d'après Artin-Rees. Donc la topologie $\mathfrak{m}$-adique est identique à la topologie définie par les $\mathfrak{m}^n B \cap A$. Mais malheureusement, cette hypothèse n'est pas suffisante, comme dans le théorème 1. En effet, dans un contre-exemple (*cf.* Bourbaki [1], chap. V, exerc. 20, § 1), $\hat{A}$ est un anneau intègre et en même fermeture intégrale de A dans une extension finie de K. S'il existait A_1 vérifiant (i), et $A \subset A_1 \subset \hat{A}$, et A_1 ayant même corps des fractions que $\hat{A}$, on aurait $A = A_1$ (*cf.* Bourbaki [1], chap. III, exerc. 9 *a*, § 3). Ce qui est impossible.

Corollaire des théorèmes 1 et 1 *bis*.

(i) *Si B est entier sur A;*

(ii) *Si les idéaux maximaux de B sont de type fini;*

(iii) *S'il existe une extension finie A_1 de A, dont K' est le corps des fractions, telle que $A_1 \subset B \subset K'$ et telle que la topologie définie par les $\mathfrak{m}^n B \cap A_1$ soit identique à la topologie $\mathfrak{m} A_1$-adique,*
alors B est un A-module de type fini.

Conséquences :

— Si $\dim A = 1$, d'après Krull-Akizuki, B est noethérien et (ii) est évidemment vérifiée; on a même plus, B est quasi-fini, même si B n'est pas entier.

— Si $\dim A = 2$, et si B est la fermeture intégrale de A dans K', alors B est noethérien.

Pour que B soit un A-module de type fini, il faut et il suffit qu'on ait (iii).

2. — Nous allons étudier d'autres cas pour lesquels le problème admet des solutions.

THÉORÈME 1. — *Soient K' une extension finie séparable de K, B une A-algèbre entière telle que $A \subset B \subset K'$. Si B est un A-module plat, B est un A-module de type fini.*

Remarque. — Si B est un A-module plat, comme il est entier, il est aussi fidèlement plat, et par suite, les $\mathfrak{m}^n B \cap A (= \mathfrak{m}^n)$ définissent la topologie $\mathfrak{m}$-adique de A.

Nous appellerons C_{rad}, si C est un anneau, le quotient de C par son nilradical. Soient R l'anneau total de fractions de $\hat{A}_{\text{rad}}$ et $\mathfrak{q}_i$ pour $1 \leqq i \leqq r$, les idéaux premiers minimaux de $\hat{A}$. Pour tout i, soit L_i le corps des fractions de $\hat{A}/\mathfrak{q}_i$. Alors les homomorphismes canoniques suivants sont tous des injections :

$$\hat{A}_{\text{rad}} \to \bigoplus_{i=1}^{n} \hat{A}/\mathfrak{q}_i \to \bigoplus_{i=1}^{n} L_i = R.$$

Comme $\hat{A}$ est un A-module plat, tout élément de A_1 différent de zéro, étant non diviseur de zéro dans A, ne l'est pas non plus dans $\hat{A}$ et n'appartient à aucun élément de A et $\hat{A}$. Par suite, il n'est pas non plus diviseur de zéro dans $\hat{A}_{\text{rad}}$. Donc

$$A \subset \hat{A}_{\text{rad}} \qquad \text{et} \qquad K \subset R.$$

De même, A peut être considéré comme un sous-anneau de $\hat{A}/\mathfrak{q}_i$, car $\mathfrak{q}_i \cap A = 0$, et K comme un sous-corps de L_i, pour tout i. Comme K' est une extension séparable de K, $K' \otimes_K L_i$ est réduit, c'est donc une somme directe finie d'extensions finies de L_i. Mais $K' = K[B]$, donc

$$K' \otimes_K L_i = K[B] \otimes_K L_i = ((B \otimes_A K) \otimes_K L_i) = B \otimes_A L_i.$$

Comme B est un A-module plat, on a la suite exacte :

$$0 \to B \otimes_A A/\mathfrak{q}_i \to B \otimes_A L_i,$$

ce qui montre que $B \otimes_A \hat{A}/\mathfrak{q}_i$ est réduit. Mais

$$B \otimes_A \hat{A}/\mathfrak{q}_i = (B \otimes_A \hat{A}) \otimes_{\hat{A}} \hat{A}/\mathfrak{q}_i = (B \otimes_A \hat{A})/\mathfrak{q}_i(B \otimes_A \hat{A}).$$

Comme B est un A-module fidèlement plat, la A-algèbre $\hat{A}/\mathfrak{q}_i$ s'identifie à une sous-A-algèbre de $B \otimes_A \hat{A}/\mathfrak{q}_i$. Mais $\hat{A}/\mathfrak{q}_i$ est un anneau local, noethérien, intègre, complet, sa fermeture intégrale dans une extension finie de son corps des fractions est un $\hat{A}/\mathfrak{q}_i$-module de type fini. Il en est de même de sa fermeture intégrale dans $K' \otimes_K L_i$ qui est somme directe d'extensions finies des L_i. Celle-ci contient $B \otimes_A \hat{A}/\mathfrak{q}_i$ puisque B est entier sur A.

Donc

$$B \otimes_A \hat{A}/\mathfrak{q}_i \simeq B \otimes_A \hat{A}/\mathfrak{q}_i(B \otimes_A \hat{A})$$

est un $\hat{A}/\mathfrak{q}_i$-module de type fini, et en particulier, c'est un anneau noethérien. Montrons que $B \otimes_A \hat{A}$ est un anneau noethérien. D'après le théorème de Cohen, il suffit de démontrer que tout idéal premier de $B \otimes_A \hat{A}$ est de type fini. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $B \otimes_A \hat{A}$. Alors $\mathfrak{p}$ contient un idéal premier minimal de $B \otimes_A \hat{A}$ qui contient un $\mathfrak{q}_i(B \otimes_A \hat{A})$. Comme $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}_i(B \otimes_A \hat{A})$ et $\mathfrak{q}_i(B \otimes_A \hat{A})$ sont de type fini sur $B \otimes_A \hat{A}$, $\mathfrak{p}$ est un idéal de type fini et $B \otimes_A \hat{A}$ est noethérien. D'après la proposition 3 du paragraphe 1, comme B est entier sur A, B est un A-module de type fini.

Conséquence I. — Le théorème n'a d'intérêt que dans le cas où $K \neq K'$: en effet, comme B est fidèlement plat, on a, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de A, $\mathfrak{a}B \cap A = \mathfrak{a}$. Si $K' = K$, soit b/a un élément de B (b, a appartenant à A); on a

$$b \in aB \cap A = aA,$$

donc $b/a \in A$. Ainsi $B = A$.

Conséquence II. — L'hypothèse « K' extension séparable de K » est nécessaire. [Pour le voir, on se reportera au contre-exemple cité dans le paragraphe 1 (*cf.* Bourbaki [1], chap. V, exerc. 20, § 1). Dans celui-ci, on avait $\hat{A}$ = fermeture intégrale de A dans K', et $\hat{A}$ est fidèlement plat.]

Conséquence III. — Les hypothèses faites sur K' et B servent essentiellement pour affirmer que $B \otimes_A \hat{A}_{\text{rad}}$ est réduit. En effet, $B \otimes_A \hat{A}_{\text{rad}}$ s'identifie à un sous-anneau de $B \otimes_A \hat{A}/\mathfrak{q}_i$ qui est réduit. Si nous appelons $\mathfrak{n}$ le nilradical de $\hat{A}$, nous avons :

$$B \otimes_A \hat{A}/\mathfrak{n} = (B \otimes_A \hat{A}) \otimes_{\hat{A}} \hat{A}/\mathfrak{n} = (B \otimes_A \hat{A})/\mathfrak{n}(B \otimes_A \hat{A})$$

et si nous notons $\mathfrak{n}_{B \otimes_A \hat{A}}$, le nilradical de $B \otimes_A \hat{A}$, on a

$$\mathfrak{n}_{B \otimes_A \hat{A}} = \mathfrak{n}(B \otimes_A \hat{A}).$$

Et même, nous avons l'équivalence entre « $B \otimes_A \hat{A}_{\text{rad}}$ est réduit » et « $\mathfrak{n}_{B \otimes_A \hat{A}} = \mathfrak{n}(B \otimes_A \hat{A})$ ». Plus généralement, sans faire d'hypothèses sur K' et B, on a :

Théorème 2. — *Soit B une A-algèbre entière telle que $A \subset B \subset K'$ (K' extension finie de K).*

Si $B \otimes_A \hat{A}_{\text{rad}}$ est lui-même réduit, B est un A-module de type fini.

Comme dans le théorème précédent, en utilisant la proposition 3 du paragraphe 1, on est ramené à démontrer que $B \otimes_A \hat{A}$ est noethérien.
Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME (EGA, [2], chap. IV, § 0, 23-2-3). — *L'application canonique* $(B \otimes_A \hat{A})_{\mathrm{rad}} \to (K' \otimes_A R)_{\mathrm{rad}}$ *est une injection.*

Remarque. — $\hat{A}_{\mathrm{rad}}$ peut être considéré comme un sous-anneau de $(B \otimes_A \hat{A})_{\mathrm{rad}}$ puisque $\hat{A}$ s'identifie à un sous-anneau de $B \otimes_A \hat{A}$. Nous savons que $(K' \otimes_A R)_{\mathrm{rad}}$ est somme directe d'extensions finies des L_i, donc $(B \otimes_A \hat{A})_{\mathrm{rad}}$ est semi-local. Par suite, $\mathfrak{m}(B \otimes_A \hat{A}) + \mathfrak{n}_{B \otimes_A \hat{A}}$ est contenu dans $\mathrm{Rad}(B \otimes_A \hat{A})$, donc

$$\mathfrak{m}(B \otimes_A \hat{A}) \subset \mathrm{Rad}(B \otimes_A \hat{A}).$$

Démonstration du lemme. — On peut, en effet, considérer l'homomorphisme canonique $h : B \otimes_A \hat{A} \to K' \otimes_A R$ comme composé des homomorphismes :

$$B \otimes_A \hat{A} \xrightarrow{u} K' \otimes_A \hat{A} \xrightarrow{v} K' \otimes_A \hat{A}_{\mathrm{rad}} \xrightarrow{w} K' \otimes_A R.$$

Comme $\hat{A}$ est fidèlement plat, u est injectif. Comme K' est un K-module plat et que K est un A-module plat, K' est un A-module plat et w est injectif. Enfin, pour la même raison, le noyau de v est contenu dans $K' \otimes_A \hat{A}$ et est contenu dans le nilradical de $K' \otimes_A \hat{A}$. On en conclut aussitôt que, si l'image par $h = w \circ v \circ u$ d'un élément x de $B \otimes_A \hat{A}$ est nilpotente, x est nilpotent. D'où l'assertion.

Démonstration du théorème. — On sait que :

$$(K' \otimes_A R)_{\mathrm{rad}} = \bigoplus (K' \otimes_A L_i)_{\mathrm{rad}}$$

et que $(K' \otimes_A L_i)_{\mathrm{rad}}$ est composé direct d'extensions finies des L_i. La fermeture intégrale de $\hat{A}/\mathfrak{q}_i$ dans ces extensions est une $\hat{A}/\mathfrak{q}_i$-algèbre finie et *a fortiori* une $\hat{A}_{\mathrm{rad}}$-algèbre finie. Donc la fermeture intégrale de $\hat{A}_{\mathrm{rad}}$ dans $(K' \otimes_A R)_{\mathrm{rad}}$ est une $\hat{A}_{\mathrm{rad}}$-algèbre finie. Comme B est entier sur A, $(B \otimes_A \hat{A})_{\mathrm{rad}}$, qui contient $\hat{A}_{\mathrm{rad}}$ et qui est contenu dans la fermeture intégrale de $\hat{A}_{\mathrm{rad}}$, est une $\hat{A}_{\mathrm{rad}}$-algèbre finie. En particulier, $(B \otimes_A \hat{A})_{\mathrm{rad}}$ est un anneau noethérien. Mais comme

$$\mathfrak{n}_{B \otimes_A \hat{A}} = \mathfrak{n}(B \otimes_A \hat{A}),$$

$\mathfrak{n}_{B \otimes_A \hat{A}}$ est un $B \otimes_A \hat{A}$ module de type fini. Comme tout idéal premier $\mathfrak{p}$ contient $\mathfrak{n}_{B \otimes_A \hat{A}}$, on a $\mathfrak{p}/\mathfrak{n}_{B \otimes_A \hat{A}}$ et $\mathfrak{n}_{B \otimes_A \hat{A}}$ sont des $B \otimes_A \hat{A}$ modules de type fini, donc $\mathfrak{p}$ est un $B \otimes_A \hat{A}$ module de type fini. Donc $B \otimes_A \hat{A}$ est un anneau noethérien et, par conséquent, B est un A-module de type fini.

Examinons maintenant la condition suivante :

(E) « *Pour toute A-algèbre finie intègre C, $C \otimes_A \hat{A}_{\mathrm{rad}}$ est réduit* ».

PROPOSITION. — *Si A vérifie la condition* (E), *alors $\hat{A}$ est lui-même réduit.*

D'après un théorème de Zariski-Nagata (EGA [2], chap. IV, § 2, 7.6.4), il suffit de montrer que, pour tout quotient intègre B de A, B est un anneau japonais. D'après le théorème précédent, il suffit de vérifier la condition (E) pour l'anneau B.

Supposons B de la forme $A/\mathfrak{p}$, pour $\mathfrak{p} \neq 0$ et $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ [le cas où $\mathfrak{p} = (0)$ (donc A intègre) est évident]. Alors

$$B \otimes_A \hat{A}_{\mathrm{rad}} = (A/\mathfrak{p} \otimes_A \hat{A}) \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_{\mathrm{rad}} = \hat{A}/\mathfrak{p}\hat{A} \otimes_{\hat{A}} \hat{A}_{\mathrm{rad}} = \hat{A}/\mathfrak{p}\hat{A} + \mathfrak{n}.$$

Donc $\hat{A}/\mathfrak{p}\hat{A} + \mathfrak{n}$ est réduit. Mais si $\mathfrak{q}$ est un idéal premier contenant $\mathfrak{p}\hat{A}$, $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{p}\hat{A} + \mathfrak{n}$ (puisque $\mathfrak{q}$ contient $\mathfrak{n}$), et réciproquement. La racine de $\mathfrak{p}\hat{A}$ est $\mathfrak{p}\hat{A} + \mathfrak{n}$. D'où

$$(\hat{A}/\mathfrak{p}\hat{A})_{\mathrm{rad}} = B \otimes \hat{A}_{\mathrm{rad}} \qquad \text{et} \qquad \hat{B}_{\mathrm{rad}} = B \otimes_A \hat{A}_{\mathrm{rad}}.$$

Soient K_B le corps des fractions de B, K'_B une extension finie de K_B, B_1 la fermeture intégrale de B dans K'_B. Comme B_1 est limite inductive de B-algèbres finies ayant K'_B pour corps des fractions $\left(\text{soit } B_1 = \varinjlim_{\lambda} B_\lambda\right)$, on a

$$(\hat{B}_\lambda)_{\mathrm{rad}} = (B_\lambda \otimes_B \hat{B})_{\mathrm{rad}} = (B_\lambda \otimes_B \hat{B}_{\mathrm{rad}})_{\mathrm{rad}}$$

(car $B_\lambda \otimes_B \hat{B}_{\mathrm{rad}}$ est isomorphe à $\hat{B}_\lambda/\mathfrak{n}\hat{B}_\lambda$).

Mais

$$B_\lambda \otimes_B \hat{B}_{\mathrm{rad}} = B_\lambda \otimes_B (B \otimes_A \hat{A}_{\mathrm{rad}}) = B_\lambda \otimes_A \hat{A}_{\mathrm{rad}}$$

et B_λ qui est une B-algèbre finie, est une A-algèbre finie intègre, donc $B_\lambda \otimes_B \hat{B}_{\mathrm{rad}}$ est réduit et l'on a

$$(\hat{B}_\lambda)_{\mathrm{rad}} = B_\lambda \otimes_B \hat{B}_{\mathrm{rad}}.$$

Comme $B_1 = \varinjlim_{\lambda} B_\lambda$, on a

$$B_1 \otimes_B \hat{B}_{\mathrm{rad}} = \varinjlim (B_\lambda \otimes_B \hat{B}_{\mathrm{rad}})$$

et, par conséquent, $B_1 \otimes_B \hat{B}_{\mathrm{rad}}$ est réduit. En appliquant le théorème 2, on voit que B_1 est un B-module de type fini. Donc B est un anneau japonais.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bourbaki (Nicolas). — *Algèbre commutative*, chap. 3-4, 5-6, 7. — Paris, Hermann, 1961-1965 (*Act. scient. et ind.*, 1293, 1308, 1314; *Bourbaki*, 28, 30, 31).

[2] Grothendieck (A.) et Dieudonné (J.). — *Éléments de géométrie algébrique* (EGA). IV : *Étude locale des schémas*. — Paris, Presses universitaires de France, 1964 (*Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques*, 20).

[3] Nagata (Manayoshi). — *Local rings*. — New York, Interscience Publishers, 1962 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 13).

[4] Zariski (O.) et Samuel (P.). — *Commutative algebra*, vol. 1 and 2. — Princeton, New York, D. Van Nostrand Comp., 1958, 1960 (*The University Series in higher Mathematics*).

(Manuscrit reçu le 13 décembre 1966.)

Mlle Marguerite Mangeney,
43, rue du Château,
95-Deuil-la-Barre.