BULLETIN DE LA S. M. F.

JACQUES DIXMIER

Représentations induites holomorphes des groupes résolubles algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 94 (1966), p. 181-206
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1966__94__181_0>

Bull. Soc. math. France,
94, 1966, p. 181 à 206.

REPRÉSENTATIONS INDUITES HOLOMORPHES DES GROUPES RÉSOLUBLES ALGÉBRIQUES;

PAR

JACQUES DIXMIER.

Introduction. — La notion de représentation unitaire induite a été introduite par MACKEY [14]. Si π est une représentation unitaire *irréductible* d'un groupe G, il arrive souvent que π soit induite au sens de Mackey par un caractère unitaire d'un sous-groupe de G. Par exemple, si G est un groupe de Lie nilpotent connexe, *toute* représentation unitaire irréductible de G est de ce type [19]. Si G est un groupe de Lie semi-simple, il n'en est plus ainsi; mais HARISH-CHANDRA [12] et GEL'FAND-GRAEV [11] ont construit des séries importantes de représentations unitaires irréductibles de G en considérant des représentations « holomorphes induites », qui opèrent dans des espaces de fonctions analytiques ou partiellement analytiques. Cette notion de représentation holomorphe induite a été systématisée par BLATTNER dans [3].

Envisageons le cas des groupes de Lie *résolubles* connexes. On connait de grandes classes de tels groupes pour lesquels toute représentation unitaire irréductible est induite au sens de Mackey par un caractère unitaire d'un sous-groupe [19]. Mais il existe des groupes de Lie résolubles qui mettent cette propriété en défaut : d'une part, bien entendu, le groupe de dimension 5 de Mautner, qui n'est pas de type I; et d'autre part certains groupes de type I (l'exemple de plus petite dimension est le groupe simplement connexe de dimension 4 dont l'algèbre de Lie admet la table de multiplication

$$[e_1, e_2] = -e_3, \qquad [e_1, e_3] = e_2, \qquad [e_2, e_3] = e_4,$$
$$[e_1, e_4] = [e_2, e_4] = [e_3, e_4] = 0).$$

Une conjecture vraisemblable est que, si G est résoluble connexe de type I toute représentation unitaire irréductible de G est holomorphe induite (en un sens qui sera précisé plus loin) par un caractère unitaire d'un sous-groupe. Dans ce Mémoire, nous vérifions cette conjecture pour les groupes résolubles connexes algébriques linéaires.

Déjà dans un article antérieur [9], pour résoudre certains problèmes concernant les représentations de groupes très généraux, on avait utilisé le théorème de von Neumann sur les solutions des relations de Heisenberg. La même situation se présente ici, mais on utilise cette fois la réalisation de ces solutions dans des espaces de fonctions entières; cette réalisation est due à BARGMANN [1] et SEGAL [18].

La notion de représentation holomorphe induite que nous utilisons est un peu différente de celle de BLATTNER : elle est plus globale. Ceci oblige à faire quelques hypothèses supplémentaires (certains sous-groupes doivent être fermés, et il faut imposer une condition aux modules).

Je remercie P. CARTIER, à qui je suis redevable de certaines corrections.

Notations et rappels. — On note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes, $\mathbf{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes $\neq 0$.

Si V est un espace vectoriel réel, on note $V_{\mathbf{C}}$ sa complexification. Si G est un groupe algébrique linéaire réel, on note $G_{\mathbf{C}}$ sa complexification.

Soit G un groupe topologique. On appelle caractère unitaire de G une fonction complexe continue χ sur G telle que $|\chi(g)| = 1$ pour tout $g \in G$, et telle que $\chi(gg') = \chi(g)\chi(g')$ quels que soient $g, g' \in G$.

On dit « représentation unitaire » pour « représentation unitaire fortement continue ». Si π est une représentation unitaire d'un groupe topologique, on note $\mathcal{E}(\pi)$ l'espace hilbertien où opère la représentation.

Si G est un groupe opérant à gauche dans un ensemble X, on note $\gamma(g)$, pour tout $g \in G$, la bijection de X sur X définie par g.

Si G est un groupe localement compact, on note β_G une mesure de Haar à droite sur G, et Δ_G le module de G. Rappelons que $\gamma(g)\beta_G = \Delta_G(g)\beta_G$ pour tout $g \in G$. Soient μ une mesure sur G, L un sous-groupe fermé de G, $g \mapsto \dot{g}$ l'application canonique de G sur l'espace G/L des classes à droite suivant L; supposons que $\gamma(l)\mu = \Delta_L(l)\mu$ pour tout $l \in L$; alors il existe une mesure μ' sur G/L et une seule telle que $\mu(f) = \mu'(f')$ pour toute fonction f continue à support compact sur G, où f' est la fonction sur G/L définie par

$$f'(\dot{g}) = \int_L f(lg)\, d\beta_L(l).$$

On pose $\mu' = \mu/\beta_L$ (*cf.* [6], chap. VII, § 2).

Soient G un groupe localement compact, L un sous-groupe fermé de G, et χ une représentation unitaire de L. La représentation unitaire de G induite par χ au sens de MACKEY peut se définir, d'après [2], de la manière suivante. Soit $\mathcal{F}^\star(\chi, G)$ l'espace vectoriel des fonctions f sur G, à valeurs dans $\mathcal{E}(\chi)$, possédant les propriétés suivantes [on note $|u|$ et (u, u') la norme et le produit scalaire dans $\mathcal{E}(\chi)$] :

(i) f est mesurable;

(ii) on a, quels que soient $l\in L$ et $g\in G$:

$$f(lg) = (\Delta_L^{-1/2}\Delta_G^{1/2})(l)\,\chi(l)\,f(g); \tag{1}$$

(iii) $|f|^2$ est localement intégrable pour β_G; d'après (ii), on a, pour tout $l\in L$,

$$\gamma(l)(|f|^2\beta_G) = (\Delta_L\Delta_G^{-1})(l)\,\Delta_G(l)\,|f|^2\beta_G = \Delta_L(l)(|f|^2\beta_G);$$

(iv) la mesure $(|f|^2\beta_G)/\beta_L$ est bornée.

Si $f, f'\in\mathcal{F}^\star(\chi, G)$, la mesure $((f, f')\beta_G)/\beta_L$ est bornée, et l'on note $(f\,|\,f')$ la masse totale de cette mesure. Ainsi, $\mathcal{F}^\star(\chi, G)$ devient un espace préhilbertien complet. L'espace hilbertien associé $\mathcal{F}(\chi, G)$ s'obtient en identifiant deux fonctions de $\mathcal{F}^\star(\chi, G)$ égales localement presque partout.

Pour $g_0\in G$ et $f\in\mathcal{F}^\star(\chi, G)$, soit $\pi(g_0)f$ la fonction $g\mapsto f(gg_0)$ sur G, qui est un élément de $\mathcal{F}^\star(\chi, G)$ de même norme que f. L'opérateur $\pi(g_0)$ est unitaire dans $\mathcal{F}^\star(\chi, G)$. Notons encore $\pi(g_0)$ l'opérateur qu'on en déduit dans $\mathcal{F}(\chi, G)$ par passage au quotient. Alors π est une représentation unitaire de G dans $\mathcal{F}(\chi, G)$ qu'on notera $\mathrm{Ind}\,(\chi, G)$.

Les groupes de Lie seront soit réels, soit complexes. On supposera implicitement qu'ils n'ont qu'une famille dénombrable de composantes connexes (en fait, ils n'en auront qu'un nombre fini dans la partie décisive du Mémoire); ils sont donc séparables. Si G est un groupe de Lie réel, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, on note Ad, ou $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}}$, la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{g}$, et $\mathrm{Ad}_{\mathbf{C}}$, ou $\mathrm{Ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}}$, la représentation adjointe de G dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$.

Comme dans [9], on aura besoin du théorème suivant, de C. CHEVALLEY : soient V une variété algébrique réelle, G un groupe algébrique réel opérant dans V régulièrement au sens de la géométrie algébrique (autrement dit, l'application donnée de $G\times V$ dans V est un morphisme au sens de la géométrie algébrique); soit G' un sous-groupe de G contenant la composante neutre de G; alors la relation d'équivalence R définie par G' dans V est borélienne, c'est-à-dire qu'il existe une suite de parties boréliennes V_i de V, saturées pour R, telles que toute classe modulo R soit l'intersection des V_i qui la contiennent. (L'énoncé ci-dessus est un peu plus général que celui de [9].) CHEVALLEY n'a jamais publié sa démonstration. Mais il existe maintenant dans la littérature des théorèmes qui permettent d'obtenir immédiatement le résultat de CHEVALLEY. D'abord, raisonnant par récurrence sur la dimension de V, et utilisant [17] (lemma et theorem), on se ramène au cas où il existe une variété quotient W de $V_{\mathbf{C}}$ (complexification de V) pour l'action de $G_{\mathbf{C}}$. Les orbites de $G_{\mathbf{C}}$ dans $V_{\mathbf{C}}$ sont alors fermées. D'après [5], p. 126, l. 10-12, pour chaque orbite O de $G_{\mathbf{C}}$ dans $V_{\mathbf{C}}$, $O \cap V$ est réunion d'un nombre fini de G-orbites ouvertes et fermées dans $O \cap V$. Chaque G-orbite est réunion d'un nombre fini de G'-orbites deux à deux homéomorphes. On voit que chaque G'-orbite est un espace topologique non maigre (de deuxième catégorie), et il suffit d'appliquer [10], théorème 2.1.

1. Définition des représentations induites utilisées.

1.1. — Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie réelle, $G_{\mathbf{C}}$ un groupe de Lie complexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, G un sous-groupe fermé du groupe réel sous-jacent à $G_{\mathbf{C}}$, d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les données G, $G_{\mathbf{C}}$ sont fixées une fois pour toutes dans les chapitres 1 et 2. Nous noterons $x \mapsto \bar{x}$ la conjugaison de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ par rapport à $\mathfrak{g}$.

1.2. — Soient M un sous-groupe fermé de $G_{\mathbf{C}}$, $\mathfrak{m}$ son algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{h} = \mathfrak{m} \cap i\mathfrak{m}$ le plus grand sous-espace vectoriel complexe de $\mathfrak{m}$. Si $m \in M$, $\mathrm{Ad}(m)$ opérant dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ laisse stables $\mathfrak{m}$ et $i\mathfrak{m}$, donc $\mathfrak{h}$. En particulier, $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{m}$. Si H est le sous-groupe de Lie connexe (non nécessairement fermé) de M correspondant à $\mathfrak{h}$, alors H est *distingué dans* M. Nous dirons que H est la *partie complexe connexe* de M. Posons $L = M \cap G$; on a $L \cap H = G \cap H$.

Nous supposerons désormais que *H est fermé dans M, et que $M = LH$* (donc $M = HL$). Le morphisme canonique de L dans M/H est continu et surjectif, donc ouvert ([10], p. 111, cor. 3.3), donc l'application canonique de $L/(L \cap H)$ dans M/H est un isomorphisme de groupes topologiques.

1.3. — Nous supposerons que *Δ_G et Δ_L coïncident sur $L \cap H$;* alors le morphisme continu $\Delta_L^{-1/2}\Delta_G^{1/2}$ de L dans $\mathbf{R}_+^*$ (ensemble des nombres réels > 0) définit un morphisme continu de $L/(L \cap H)$ dans $\mathbf{R}_+^*$; en composant avec les morphismes $M \to M/H \to L/(L \cap H)$, on obtient un morphisme continu $\delta_{M,G}$ de M dans $\mathbf{R}_+^*$. C'est l'unique morphisme égal à $\Delta_L^{-1/2}\Delta_G^{1/2}$ sur L et à 1 sur H.

1.4. — Soit ψ un morphisme continu de M dans $\mathbf{C}^*$, tel que $\chi = \psi \mid L$ soit un caractère unitaire de L.

Nous noterons $\mathcal{G}^*(\psi, G)$ l'ensemble des fonctions complexes f sur $MG = (HL)\, G = HG \subset G_{\mathbf{C}}$ possédant les propriétés suivantes :

(i) $$f \mid G \in \mathcal{F}^*(\chi, G);$$

(ii) $$f(mg) = \delta_{M,G}(m)\, \psi(m)\, f(g) \qquad \text{pour} \quad m \in M \ \text{et} \ g \in G.$$

[La propriété (ii) est alors valable aussi pour $m \in M$ et $g \in MG$.] Il est immédiat que $f \mapsto f \mid G$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{G}^*(\psi, G)$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}^*(\chi, G)$, isomorphisme qui sera dit canonique ainsi que l'isomorphisme réciproque. On transporte par ces isomorphismes la structure préhilbertienne de $\mathcal{F}^*(\chi, G)$, et $\mathcal{G}^*(\psi, G)$ devient ainsi un espace préhilbertien complet; nous noterons $\mathcal{G}(\psi, G)$ l'espace hilbertien associé, qui est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}(\chi, G)$.

1.5. — Pour tout $g_0 \in G$, soit $\pi(g_0)$ l'opérateur de translation à droite par g_0 dans $\mathcal{F}^*(\chi, G)$ et $\mathcal{F}(\chi, G)$. Si $f \in \mathcal{G}^*(\psi, G)$, il est immédiat que la fonction $mg \mapsto f(mgg_0)$ sur MG [fonction que nous noterons $\pi^\sim(g_0) f$] appartient à $\mathcal{G}^*(\psi, G)$, et que $(\pi^\sim(g_0) f) \mid G = \pi(g_0)\ (f \mid G)$. Notons encore $\pi^\sim(g_0)$ l'opérateur correspondant dans $\mathcal{G}(\psi, G)$. Alors $\pi^\sim$ est une représentation unitaire de G dans $\mathcal{G}(\psi, G)$, transformée de π par l'isomorphisme canonique de $\mathcal{F}(\chi, G)$ sur $\mathcal{G}(\psi, G)$; nous la noterons $\mathrm{Ind}^\sim(\psi, G)$.

Les définitions de 1.4 et 1.5 n'ont évidemment aucun intérêt en elles-mêmes; elles servent seulement à faciliter ce qui suit.

1.6. — Supposons que $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}$ *soit une sous-algèbre de* $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. Alors il existe une sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$. Si $l \in L$, $\mathrm{Ad}(l)$ opérant dans $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ laisse stables $\mathfrak{h}$ et $\bar{\mathfrak{h}}$, donc $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ et $\mathfrak{k}$. Si K, $K_{\mathbf{C}}$ sont les sous-groupes de Lie connexes de $G_{\mathbf{C}}$ correspondant à $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$, alors K *et* $K_{\mathbf{C}}$ *sont normalisés par* L.

1.7. — Si $x \in \mathfrak{h}$, on a $x + \bar{x} \in \mathfrak{g} \cap \mathfrak{k}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{k}$, donc $\bar{x} \in \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$; donc $\bar{\mathfrak{h}} \subset \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$; donc $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} + \mathfrak{k}$. Donc HK *est une partie ouverte de* $K_{\mathbf{C}}$.

On a $MG = HG = H(KG) = (HK)\, G$.

1.8. — Nous noterons $\mathcal{H}^*(\psi, G)$ l'ensemble des $f \in \mathcal{G}^*(\psi, G)$ telles que, pour tout $g_0 \in G$, la fonction $hk \mapsto f(hkg_0)$ sur HK soit *holomorphe* (ceci a un sens d'après 1.7). Il est clair que $\mathcal{H}^*(\psi, G)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}^*(\psi, G)$. Soit $\mathcal{H}(\psi, G)$ son image canonique dans $\mathcal{G}(\psi, G)$.

1.9. LEMME. — *Supposons K fermé dans G. Alors $\mathcal{H}(\psi, G)$ est fermé dans l'espace hilbertien $\mathcal{G}(\psi, G)$.*

Démonstration. — Soit $(f_1, f_2, \ldots)$ une suite d'éléments de $\mathcal{H}^*(\psi, G)$ tendant, dans $\mathcal{G}^*(\psi, G)$, vers un élément f. Il s'agit de démontrer qu'il existe $f' \in \mathcal{H}^*(\psi, G)$ égale à f presque partout sur G.

Soit $(U_1, U_2, \ldots)$ un recouvrement de G par une suite de parties ouvertes relativement compactes. Fixons un entier $j \geqq 1$. D'après [2], p. 81, lemme 1, la suite $(f_1 \mid U_j, f_2 \mid U_j, \ldots)$ tend vers $f \mid U_j$ en moyenne (pour β_G). Comme K est fermé dans G, on peut considérer une mesure quasi-invariante λ sur G/K, et ramener une intégration par rapport à β_G à des intégrations superposées par rapport à λ et β_K; d'après un raisonnement classique, on peut supposer, après extraction d'une suite partielle, qu'il existe une partie négligeable N_j de G ayant les propriétés suivantes : $KN_j = N_j$, et, pour tout $g \in G - N_j$, la suite $(f_1 \mid U_j \cap Kg, f_2 \mid U_j \cap Kg, \ldots)$ tend vers $f \mid U_j \cap Kg$ en moyenne (pour la mesure sur $U_j \cap Kg$ déduite de β_K par translation). En extrayant une suite partielle par le procédé diagonal, on peut supposer qu'il existe une partie négligeable N de G ayant les propriétés suivantes : $KN = N$, et, pour tout $g \in G - N$, la suite $(f_1 \mid Kg, f_2 \mid Kg, \ldots)$ tend vers $f \mid Kg$ en moyenne sur toute partie ouverte relativement compacte de Kg (pour la mesure sur Kg déduite de β_K par translation).

Soient $g_0 \in G - N$, $h_0 \in H$, $k_0 \in K$. Il existe un voisinage ouvert U de $h_0 k_0 g_0$ dans $K_{\mathbf{C}} g_0$, un voisinage ouvert relativement compact W de l'élément neutre dans K, et une sous-variété analytique réelle relativement compacte V dans H contenant l'élément neutre, tels que l'application $(v, w) \mapsto h_0 v w k_0 g_0$ soit un isomorphisme de la variété analytique réelle $V \times W$ sur la variété analytique réelle U. On peut supposer qu'il existe sur V un système de coordonnées $(\xi_1, \ldots, \xi_p)$, et sur W un système de coordonnées $(\xi_{p+1}, \ldots, \xi_n)$, tels que $d\xi_{p+1} \ldots d\xi_n$ soit le produit de $\beta_K \mid W$ par une fonction bornée; d'où un système de coordonnées $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ sur U. On a $f_k(h_0 v w k_0 g_0) = \psi(h_0 v) f_k(w k_0 g_0)$, donc la suite $(f_1 \mid U, f_2 \mid U, \ldots)$ tend vers $f \mid U$ en moyenne pour $d\eta_1 \ldots d\eta_n$. Donc la suite de fonctions holomorphes $(f_1 \mid U, f_2 \mid U, \ldots)$ tend vers une fonction holomorphe pour la topologie de la convergence compacte. Ainsi, pour tout $g_0 \in G - N$, la suite $(f_1 \mid HKg_0, f_2 \mid HKg_0, \ldots)$ tend vers une fonction holomorphe pour la topologie de la convergence compacte.

Soit $N' \subset N$ le complémentaire dans G de $L(G - N)$. Alors N' est négligeable, et $LN' = N'$; d'autre part, $KL(G - N) = LK(G - N) = L(G - N)$, donc $KN' = N'$. Soit e_i la fonction égale à f_i sur $G - N'$ et à o sur N'. Comme $f_i \mid G \in \mathcal{F}^\star(\chi, G)$ et $LN' = N'$, on a $e_i \in \mathcal{F}^\star(\chi, G)$. Soit $e_i^\sim$ l'élément de $\mathcal{G}^\star(\psi, G)$ correspondant à e_i dans l'isomorphisme canonique. Comme $e_i^\sim = f_i$ presque partout sur G, $e_i^\sim$ tend vers f dans $\mathcal{G}^\star(\psi, G)$.

Soit $g_0 \in G$. On va montrer que la suite $(e_1^\sim \mid HKg_0, e_2^\sim \mid HKg_0, \ldots)$ tend vers une fonction holomorphe pour la topologie de la convergence compacte. Si $g_0 \in N'$, on a $HKg_0 \subset HKN' = HN'$, donc $e_i^\sim$ s'annule sur HKg_0, et notre assertion est évidente. Si $g_0 \in G - N'$, on a $g_0 = l_0 g'_0$ avec $l_0 \in L$ et $g'_0 \in G - N$, donc $HKg_0 = HKl_0 g'_0 = l_0 HKg'_0$, et $e_i^\sim \mid HKg_0 = f_i \mid HKg_0 = f_i \mid l_0 HKg'_0$; notre assertion résulte alors de ce qu'on a dit plus haut des f_i.

Soit f' la limite simple des $e_i^\sim$ sur HG. Comme $e_i^\sim$ tend vers f dans $\mathcal{G}^\star(\psi, G)$, on a $f' = f$ presque partout sur G. Comme $e_i^\sim \in \mathcal{G}^\star(\psi, G)$ pour tout i, on a $f'(mg) = (\delta_{M,G}\psi)(m) f'(g)$ pour $m \in M$ et $g \in G$; d'autre part, pour tout $g_0 \in G$, $f' \mid HKg_0$ est holomorphe. Donc $f' \in \mathcal{H}^\star(\psi, G)$.

1.10. — Ainsi, lorsque K est fermé dans G, $\mathcal{H}(\psi, G)$ est un sous-espace hilbertien de $\mathcal{G}(\psi, G)$. Il est clair que $\mathcal{H}^*(\psi, G)$ est stable par les translations à droite que définissent les éléments de G. *Nous noterons* $\mathrm{Ind}(\psi, G)$ *la sous-représentation de* $\mathrm{Ind}^{\sim}(\psi, G)$ *dans* $\mathcal{H}(\psi, G)$.

1.11. — Récapitulons les hypothèses nécessaires pour définir $\mathrm{Ind}(\psi, G)$:

(i) M est un sous-groupe fermé de $G_{\mathbf{C}}$, dont la partie complexe connexe H est fermée, et tel que $M = LH$ (où $L = M \cap G$);

(ii) Δ_G et Δ_L coïncident sur $L \cap H$;

(iii) ψ est un morphisme continu de M dans $\mathbf{C}^*$ tel que $\psi \mid L$ soit un caractère unitaire de L;

(iv) $\mathfrak{h}$ étant l'algèbre de Lie de H, $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$ (nécessairement de la forme $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$, où $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$);

(v) le sous-groupe connexe K de G correspondant à $\mathfrak{k}$ est fermé.

1.12. — Soit $f \in \mathcal{H}^*(\psi, G)$. Quel que soit $g_0 \in G$ et $h \in H$, on a $f(hg_0) = \psi(h) f(g_0)$; et l'application $h \mapsto f(hg_0)$ est holomorphe sur H. Donc, si $f \neq 0$, $\psi \mid H$ est holomorphe. Ainsi, lorsque $\psi \mid H$ n'est pas holomorphe, on a $\mathcal{H}(\psi, G) = 0$. Autrement dit, la définition de $\mathrm{Ind}(\psi, G)$ ne peut être utile que si $\psi \mid H$ est holomorphe.

1.13. — Si $M \subset G$, on a $\mathfrak{h} = 0$, et $\mathrm{Ind}(\psi, G)$ est la représentation de G induite par χ au sens de MACKEY.

1.14. — Dans le cas de [12], on a $M = H$ et $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}} = \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$, donc $\mathfrak{k} = \mathfrak{g}$, donc $K = G$ (car G est connexe); les ensembles HKg_0 (où $g_0 \in G$) sont tous égaux à l'ensemble HG, qui est une partie ouverte de $G_{\mathbf{C}}$.

2. Deux lemmes sur les représentations induites.

2.1. LEMME. — *On conserve les hypothèses et les notations de* 1.11. *Posons* $\pi = \mathrm{Ind}(\psi, G)$. *Soient de plus* $\mathfrak{g}'$, G', $G'_{\mathbf{C}}$ *avec des propriétés analogues à celles de* 1.1. *On suppose que* $G_{\mathbf{C}}$ *est un sous-groupe de Lie complexe fermé de* $G'_{\mathbf{C}}$, *que* $G_{\mathbf{C}} \cap G' = G$, *et que* $\Delta_G \mid K = \Delta_{G'} \mid K$.

Alors on peut former $\mathrm{Ind}(\psi, G')$, *et* $\mathrm{Ind}(\psi, G')$ *est unitairement équivalente à* $\mathrm{Ind}(\pi, G')$.

Démonstration. — On a $M \cap G' = M \cap G_{\mathbf{C}} \cap G' = M \cap G = L$.

Donc L reste inchangé quand on passe de G à G'. De même évidemment pour $\mathfrak{h}$, H, $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$, $\mathfrak{k}$, $K_{\mathbf{C}}$, K.

Puisque $\Delta_G \mid K = \Delta_{G'} \mid K$, on a

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x = \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}'} x \quad \text{pour tout } x \in \mathfrak{k},$$

donc

$$\operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}} y = \operatorname{tr} \operatorname{ad}_{\mathfrak{g}'_{\mathbf{C}}} y$$

pour tout $y \in \mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$ et en particulier pour tout $y \in \mathfrak{h}$; donc, pour tout $h \in H$, on a

$$\text{dét } \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}_{\mathbf{C}}}(h) = \text{dét } \operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}'_{\mathbf{C}}}(h);$$

donc, pour tout $h \in H \cap G$, on a dét $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}}(h) =$ dét $\operatorname{Ad}_{\mathfrak{g}'}(h)$. Donc

$$\Delta_{G'} | H \cap G = \Delta_G | H \cap G = \Delta_L | H \cap G.$$

Toutes les conditions de 1.11 sont donc remplies avec G remplacé par G', et l'on peut former $\operatorname{Ind}(\psi, G')$.

Posons $\chi = \psi | L$, et soient $\rho = \operatorname{Ind}(\chi, G)$, $\rho' = \operatorname{Ind}(\chi, G')$, $\sigma' = \operatorname{Ind}(\rho, G')$, dont les espaces sont $\mathcal{F}(\chi, G)$, $\mathcal{F}(\chi, G')$, $\mathcal{F}(\rho, G')$.

D'après [2], théorème 1, il existe un isomorphisme canonique Φ de $\mathcal{F}(\chi, G')$ sur $\mathcal{F}(\rho, G')$ qui transforme ρ' en σ'. Dans [2] est construit un sous-espace vectoriel partout dense $\mathcal{F}^\star_0(\chi, G')$ de $\mathcal{F}^\star(\chi, G')$ avec la propriété suivante : si $u \in \mathcal{F}(\chi, G')$ admet un représentant $f \in \mathcal{F}^\star_0(\chi, G')$, $\Phi(u)$ admet pour représentant la fonction dont la valeur en $g' \in G'$ est la classe de la fonction

$$g \mapsto (\Delta_G^{1/2} \Delta_{G'}^{-1/2})(g) f(gg') \quad \text{sur } G.$$

Soient maintenant u un élément quelconque de $\mathcal{F}(\chi, G')$, f un représentant de u dans $\mathcal{F}^\star(\chi, G')$, et cherchons un représentant de $\Phi(u)$. Il existe une suite $(f_1, f_2, \ldots)$ d'éléments de $\mathcal{F}^\star_0(\chi, G')$ qui tendent vers f dans $\mathcal{F}^\star(\chi, G')$. Par extraction de suite partielle, on peut supposer que $f_n(g')$ tend vers $f(g')$ presque partout sur G'. Il existe une partie négligeable N_1 de G' telle que, pour $g' \in G' - N_1$, les fonctions $g \mapsto f_n(gg')$ sur G tendent presque partout sur G vers la fonction $g \mapsto f(gg')$. Soit $f_n^\wedge$ la fonction sur G' dont la valeur en g' est la classe de la fonction $g \mapsto (\Delta_G^{1/2} \Delta_{G'}^{-1/2})(g) f_n(gg')$ sur G. D'après ce qu'on a rappelé plus haut, les $f_n^\wedge$ tendent vers un élément $f^\star$ de $\mathcal{F}^\star(\rho, G')$ de classe $\Phi(u)$. Par nouvelle extraction de suite partielle, on peut supposer que $f_n^\wedge(g') \to f^\star(g')$ sauf sur une partie négligeable N_2 de G'. Donc, pour $g' \in G' - (N_1 \cup N_2)$, la classe de la fonction $g \mapsto (\Delta_G^{1/2} \Delta_{G'}^{-1/2})(g) f(gg')$ sur G est égale à $f^\star(g')$. En résumé, on peut prendre pour représentant de $\Phi(u)$ la fonction sur G' dont la valeur en $g' \in G' - (N_1 \cup N_2)$ est la classe de la fonction $g \mapsto (\Delta_G^{1/2} \Delta_{G'}^{-1/2})(g) f(gg')$ (et la valeur en $g' \in N_1 \cup N_2$ est par exemple 0).

L'isomorphisme canonique de $\mathcal{F}(\chi, G)$ sur $\mathcal{G}(\psi, G)$, qui transforme ρ en $\rho^\sim = \operatorname{Ind}^\sim(\psi, G)$, définit un isomorphisme de $\mathcal{F}(\rho, G')$ sur $\mathcal{F}(\rho^\sim, G')$. Considérons l'isomorphisme Ψ composé des isomorphismes suivants :

$$\mathcal{G}(\psi, G') \to \mathcal{F}(\chi, G') \xrightarrow{\Phi} \mathcal{F}(\rho, G') \to \mathcal{F}(\rho^\sim, G')$$

(le premier est l'isomorphisme canonique, et le troisième a été défini à l'instant). Ces isomorphismes transforment $\mathrm{Ind}^{\sim}(\psi, G')$ successivement en $\mathrm{Ind}(\chi, G')$, $\mathrm{Ind}(\rho, G')$, $\mathrm{Ind}(\rho^{\sim}, G')$.

Soit $u \in \mathcal{G}(\psi, G')$, et cherchons $\Psi(u)$. Soit e un représentant de u dans $\mathcal{G}^\star(\psi, G')$. Il faut d'abord former $f = e \mid G'$, puis la fonction sur G' dont la valeur en g' est presque partout la classe de la fonction $g \mapsto (\Delta_G^{1/2} \Delta_{G'}^{-1/2})(g) f(gg')$ sur G, enfin la fonction sur G' dont la valeur en g' est presque partout la classe de la fonction

$$mg \mapsto (\delta_{M,G}\psi)(m)(\Delta_G^{1/2} \Delta_{G'}^{-1/2})(g) f(gg') = (\Delta_G^{1/2} \Delta_{G'}^{-1/2})(g)\, e(mgg')$$

sur MG.

Si de plus $u \in \mathcal{H}(\psi, G')$, on peut prendre e dans $\mathcal{H}^\star(\psi, G')$. Alors, pour tout $g' \in G'$ et tout $g_0 \in G$, la fonction

$$hk \mapsto (\Delta_G^{1/2} \Delta_{G'}^{-1/2})(kg_0)\, e(hkg_0 g') \quad \text{sur } HK$$

qui est égale, d'après une des hypothèses de l'énoncé, à la fonction

$$hk \mapsto (\Delta_G^{1/2} \Delta_{G'}^{-1/2})(g_0)\, e(hkg_0 g') \quad \text{sur } HK$$

est holomorphe. Donc $\Psi(u)$ est la classe d'une fonction dont presque toutes les valeurs appartiennent à $\mathcal{H}(\psi, G)$. Donc Ψ applique $\mathcal{H}(\psi, G')$ dans $\mathcal{F}(\pi, G')$.

Il suffit maintenant de prouver que $C = \Psi(\mathcal{H}(\psi, G'))$ est partout dense dans $\mathcal{F}(\pi, G')$, et pour cela de vérifier que C satisfait aux conditions (a), (b), (c), (d) du lemme 3.3 de [14] (compte tenu du passage de la définition de [14] à celle de [2]). Ceci est immédiat pour les conditions (a), (b), (c). D'autre part, soit S une section borélienne de G' relativement à G, et S' une partie borélienne relativement compacte de S telle que GS' soit non négligeable. Soit $(f''_1, f''_2, \ldots)$ une suite partout dense dans $\mathcal{H}^\star(\psi, G)$. Définissons les fonctions $f'_1, f'_2, \ldots$ sur G' de la manière suivante : pour $s \in S$ et $g \in G$, on pose

$$f'_i(gs) = \begin{cases} (\Delta_G^{-1/2} \Delta_{G'}^{1/2})(g) f''_i(g) & \text{si } s \in S', \\ 0 & \text{si } s \in S - S'. \end{cases}$$

On voit facilement que $f'_i \in \mathcal{F}^\star(\chi, G')$, donc f'_i se prolonge en une fonction $f_i \in \mathcal{G}^\star(\psi, G')$; pour $g_0 \in G$, $s_0 \in S'$, $h \in H$, $k \in K$, on a

$$\begin{aligned} f_i(hkg_0 s_0) &= \psi(h) f'_i(kg_0 s_0) \\ &= \psi(h)(\Delta_G^{-1/2} \Delta_{G'}^{1/2})(kg_0) f''_i(kg_0) = (\Delta_G^{-1/2} \Delta_{G'}^{1/2})(g_0) f''_i(hkg_0); \end{aligned}$$

pour $g_0 \in G$, $s_0 \in S - S'$, $h \in H$, $k \in K$, on a

$$f_i(hkg_0 s_0) = \psi(h) f'_i(kg_0 s_0) = 0;$$

donc $f_i \in \mathcal{H}^*(\psi, G')$. Soit $u_i \in \mathcal{H}(\psi, G')$ la classe de f_i. Alors les valeurs des $\Psi(u_i)$ sont partout denses dans $\mathcal{H}(\psi, G)$ en presque tout point de S' donc de GS', d'où la condition (*d*) du lemme cité.

2.2. LEMME. — *On conserve les hypothèses et les notations de* 1.11. *Soient de plus* $\mathfrak{g}'$, G', $G'_{\mathbf{C}}$ *avec des propriétés analogues à celles de* 1.1. *Soit* $\omega_{\mathbf{C}}$ *un morphisme holomorphe de* $G'_{\mathbf{C}}$ *dans* $G_{\mathbf{C}}$ *de noyau connexe, dont la restriction* ω *à* G' *applique* G' *sur* G. *Soient* $M' = \omega_{\mathbf{C}}^{-1}(M)$, $\psi' = \psi \circ \omega_{\mathbf{C}}$.

Alors on peut former $\operatorname{Ind}(\psi', G')$, *et* $\operatorname{Ind}(\psi', G')$ *est unitairement équivalente à* $\operatorname{Ind}(\psi, G) \circ \omega$.

Démonstration. — Observons que $d\omega(\mathfrak{g}') = \mathfrak{g}$, donc $d\omega_{\mathbf{C}}(\mathfrak{g}'_{\mathbf{C}}) = \mathfrak{g}_{\mathbf{C}}$. L'algèbre de Lie $\mathfrak{m}'$ de M' est $(d\omega_{\mathbf{C}})^{-1}(\mathfrak{m})$. On a

$$\mathfrak{m}' \cap i\mathfrak{m}' = (d\omega_{\mathbf{C}})^{-1}(\mathfrak{m} \cap i\mathfrak{m}) = (d\omega_{\mathbf{C}})^{-1}(\mathfrak{h});$$

posons

$$\mathfrak{h}' = \mathfrak{m}' \cap i\mathfrak{m}' = (d\omega_{\mathbf{C}})^{-1}(\mathfrak{h}).$$

La partie complexe connexe H' de M' est le sous-groupe de Lie connexe de $G'_{\mathbf{C}}$ d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$. On a $d\omega_{\mathbf{C}}(\mathfrak{h}') = \mathfrak{h}$, donc $\omega_{\mathbf{C}}(H') = H$, donc $\omega_{\mathbf{C}}(\omega_{\mathbf{C}}^{-1}(H)) = H$; comme $\operatorname{Ker}\omega_{\mathbf{C}}$ est connexe, $\omega_{\mathbf{C}}^{-1}(H)$ est connexe, et d'algèbre de Lie $\mathfrak{h}'$; finalement, $H' = \omega_{\mathbf{C}}^{-1}(H)$, et en particulier H' est fermé. Posons

$$L' = M' \cap G' = \omega_{\mathbf{C}}^{-1}(M) \cap G' = \omega^{-1}(L);$$

on a $\omega(L') = L$ puisque $\omega(G') = G$.

Soit $m' \in M'$. On a $\omega_{\mathbf{C}}(m') \in M$, donc $\omega_{\mathbf{C}}(m') = lh$ avec $l \in L$, $h \in H$; il existe $l' \in L'$, $h' \in H'$ tels que $l = \omega(l')$, $h = \omega_{\mathbf{C}}(h')$. Donc $m' = l'h'g'$ avec un $g' \in \operatorname{Ker}\omega_{\mathbf{C}} \subset H'$, d'où $m' \in L'H'$ et finalement $M' = L'H'$. En particulier,

$$\omega_{\mathbf{C}}(M') = \omega(L')\,\omega_{\mathbf{C}}(H') = LH = M.$$

Soit $l' \in L' \cap H'$; posons $l = \omega(l')$. On a $l \in L \cap H$, donc $\Delta_G(l) = \Delta_L(l)$. D'autre part, L et G s'identifient à $L'/\operatorname{Ker}\omega$ et $G/\operatorname{Ker}\omega$, donc

$$(\Delta_L^{-1}\,\Delta_G)(l) = (\Delta_{L'}^{-1}\,\Delta_{G'})(l') \qquad \text{([6], p. 61, cor.).}$$

Donc $(\Delta_{L'}^{-1}\,\Delta_{G'})(l') = 1$. Finalement, $\Delta_{G'}$ et $\Delta_{L'}$ coïncident sur $L' \cap H'$.

Il est clair que ψ' est un morphisme continu de M' dans $\mathbf{C}^*$, et sa restriction χ' à L' est $\chi \circ \omega$, donc est un caractère unitaire de L'.

Comme $\mathfrak{h}' + \bar{\mathfrak{h}}' = (d\omega_{\mathbf{C}})^{-1}(\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}) = (d\omega_{\mathbf{C}})^{-1}(\mathfrak{k}_{\mathbf{C}})$, $\mathfrak{h}' + \bar{\mathfrak{h}}'$ est la complexification de la sous-algèbre $\mathfrak{k}' = (d\omega)^{-1}(\mathfrak{k})$ de $\mathfrak{g}'$. Le sous-groupe de Lie connexe K' de G' correspondant à $\mathfrak{k}'$ est la composante neutre de $\omega^{-1}(K)$, donc est fermé dans G'. On a $\omega(K') = K$.

Tout ceci prouve (*cf.* 1.11) qu'on peut former Ind (ψ', G').

Il est connu et facile à voir que l'application $f_1 \mapsto f_1 \circ \omega$ définit un isomorphisme de $\mathcal{F}(\chi, G)$ sur $\mathcal{F}(\chi', G')$ qui transforme Ind $(\chi, G) \circ \omega$ en Ind (χ', G'). Soient $f_1 \in \mathcal{F}^*(\chi, G)$, et f, f' les éléments de $\mathcal{G}^*(\psi, G)$, $\mathcal{G}^*(\psi', G')$ correspondant à f_1, $f_1 \circ \omega$ par les isomorphismes canoniques; pour $h' \in H'$ et $g' \in G'$, on a

$$\begin{aligned} f'(h'g') &= \psi'(h')(f_1 \circ \omega)(g') \\ &= \psi(\omega_{\mathbf{C}}(h')) f_1(\omega(g')) = f(\omega_{\mathbf{C}}(h')\,\omega(g')) = (f \circ \omega_{\mathbf{C}})(h'g') \end{aligned}$$

donc $f' = f \circ \omega_{\mathbf{C}}$. Ainsi, l'application $f \mapsto f \circ \omega_{\mathbf{C}}$ définit un isomorphisme Ψ de $\mathcal{G}(\psi, G)$ sur $\mathcal{G}(\psi', G')$ qui transforme $\mathrm{Ind}^{\sim}(\psi, G) \circ \omega$ en $\mathrm{Ind}^{\sim}(\psi', G')$.

Si $f \in \mathcal{H}^*(\psi, G)$, il est clair que $f \circ \omega_{\mathbf{C}} \in \mathcal{H}^*(\psi', G')$. Donc, si $u \in \mathcal{H}(\psi, G)$, on a $\Psi(u) \in \mathcal{H}(\psi', G')$. Réciproquement, soit $u \in \mathcal{G}(\psi, G)$, et supposons que $\Psi(u) \in \mathcal{H}(\psi', G')$. Soient $f \in \mathcal{G}^*(\psi, G)$ un représentant de u, $f' \in \mathcal{H}^*(\psi', G')$ un représentant de $\Psi(u)$. Alors $f' = f \circ \omega_{\mathbf{C}}$ presque partout sur G'. Pour $g' \in G'$ et $g'_1 \in \mathrm{Ker}\,\omega \subset L'$, on a

$$f'(g'_1 g') = (\chi\, \Delta_L^{-1/2}\, \Delta_G^{1/2})(\omega(g'_1))\, f'(g') = f'(g').$$

Donc il existe une fonction f_1 sur G telle que $f' \mid G' = f_1 \circ \omega$. Comme $f_1 \circ \omega = f \circ \omega$ presque partout sur G', on a $f_1 = f$ presque partout sur G. Comme $\omega(L') = L$, on voit que $f_1 \in \mathcal{F}^*(\chi, G)$. Donc f_1 admet un prolongement $f_2 \in \mathcal{G}(\psi, G)$. On a $f_2 = f$ presque partout sur G. Si $h' \in H'$ et $g' \in G'$,

$$\begin{aligned} f'(h'g') &= \psi'(h') f'(g') \\ &= \psi(\omega_{\mathbf{C}}(h')) f_1(\omega(g')) = f_2(\omega_{\mathbf{C}}(h')\,\omega(g')) = (f_2 \circ \omega_{\mathbf{C}})(h'g') \end{aligned}$$

donc $f' = f_2 \circ \omega_{\mathbf{C}}$. Comme $\omega_{\mathbf{C}}(H'K') = HK$ et que f' est holomorphe sur les ensembles $H'K'g'$ (où $g' \in G'$), f_2 est holomorphe sur les ensembles HKg (où $g \in G$). Donc $f_2 \in \mathcal{H}^*(\psi, G)$. Comme u admet les représentants f et f_2, on a $u \in \mathcal{H}(\psi, G)$. Donc Ψ définit par restriction un isomorphisme de $\mathcal{H}(\psi, G)$ sur $\mathcal{H}(\psi', G')$, qui transforme $\mathrm{Ind}(\psi, G) \circ \omega$ en $\mathrm{Ind}(\psi', G')$.

3. Remarques sur certains groupes nilpotents.

3.1. — Soit $(e_0, e_1, \ldots, e_{2\delta-1}, e_{2\delta})$ la base canonique de $\mathbf{R}^{2\delta+1}$. Il existe une algèbre de Lie unique $\mathfrak{n}$ dont l'espace vectoriel sous-jacent est $\mathbf{R}^{2\delta+1}$ et pour laquelle

$$(1) \qquad [e_{2l-1}, e_{2l}] = -[e_{2l}, e_{2l-1}] = e_0 \qquad (l = 1, 2, \ldots, \delta),$$

les autres crochets entre vecteurs de base étant nuls. Le centre et l'algèbre dérivée $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{n}$ sont égaux à $\mathbf{R}e_0$. Soit N le groupe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{n}$. On identifiera N à $\mathfrak{n} = \mathbf{R}^{2\delta+1}$ par l'application exponentielle. La loi de composition dans N est alors donnée par l'égalité suivante, qu'on déduit de la formule de Campbell-Hausdorff :

$$(2)\quad (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{2\delta})(\rho'_0, \rho'_1, \ldots, \rho'_{2\delta}) = \left(\rho_0 + \rho'_0 + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\delta}(\rho_{2l-1}\rho'_{2l} - \rho_{2l}\rho'_{2l-1}), \rho_1 + \rho'_1, \ldots, \rho_{2\delta} + \rho'_{2\delta}\right).$$

Le centre et le groupe dérivé Z de N sont égaux à $\mathbf{R}e_0$.

On identifiera $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$ et le groupe complexe simplement connexe correspondant $N_{\mathbf{C}}$ à $\mathbf{C}^{2\delta+1}$; la loi de composition dans $N_{\mathbf{C}}$ est encore donnée par (2).

3.2. — Soit π une représentation unitaire irréductible de N. Alors il existe un caractère unitaire unique χ de Z tel que $\pi(z) = \chi(z).1$ pour tout $z \in Z$. L'application $\pi \mapsto \chi$ est une bijection de l'ensemble des classes de représentations unitaires irréductibles de N non triviales sur Z, sur l'ensemble des caractères unitaires non triviaux de Z (*cf.* [16], p. 577). Pour tout caractère unitaire non trivial χ de Z, nous noterons π_χ la représentation unitaire irréductible correspondante de N.

Soit ρ une représentation unitaire de N. Supposons qu'il existe un caractère unitaire non trivial φ de Z tel que $\rho(z) = \varphi(z).1$ pour tout $z \in Z$. Alors ρ est somme hilbertienne de représentations unitairement équivalentes à π_φ ([16], p. 577). En d'autres termes, il existe un espace hilbertien $\mathcal{H}$ tel que ρ soit unitairement équivalente à la représentation $\pi_\varphi \otimes 1$ dans $\mathcal{E}(\pi_\varphi) \otimes \mathcal{H}$.

3.3. — Soit $\mathfrak{h} = \mathbf{C}e_0 + \mathbf{C}(e_1 + ie_2) + \mathbf{C}(e_3 + ie_4) + \ldots + \mathbf{C}(e_{2\delta-1} + ie_{2\delta})$, qui est un idéal commutatif de $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$. Alors $\mathfrak{h} + \overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$. Soit H le sous-groupe connexe correspondant de $N_{\mathbf{C}}$ (en tant qu'ensemble, H s'identifie à $\mathfrak{h}$). Soit ψ_0 le morphisme holomorphe $(\rho_0, \rho_1, i\rho_1, \rho_3, i\rho_3, \ldots, \rho_{2\delta-1}, i\rho_{2\delta-1}) \mapsto \exp(i\rho_0)$ de H dans $\mathbf{C}^\star$. Soit χ_0 le caractère unitaire $(\rho_0, 0, 0, \ldots, 0) \mapsto \exp(i\rho_0)$ de Z. On a $H \cap N = Z$, $\psi_0 | Z = \chi_0$, N et Z sont unimodulaires. On peut donc former

$$(3)\qquad \pi_0 = \operatorname{Ind}(\psi_0, N).$$

3.4. — Comme $\mathfrak{h} + \mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$, HN est ouvert dans $N_{\mathbf{C}}$. Mais H est distingué dans $N_{\mathbf{C}}$, donc HN est un sous-groupe de $N_{\mathbf{C}}$, et $HN = NH = N_{\mathbf{C}}$.

3.5. — Par suite, $\mathcal{H}^\star(\psi_0, N)$ est l'ensemble des fonctions f holomorphes sur $N_{\mathbf{C}}$ qui possèdent les propriétés suivantes :

(i) quels que soient $h \in H$ et $n \in N_{\mathbf{C}}$, on a

$$(4)\qquad f(hn) = \psi_0(h) f(n);$$

(ii) f' désignant la restriction de f à N, la mesure $|f'|^2 \beta_N / \beta_Z$ est bornée.

L'espace $\mathcal{H}(\psi_0, N)$ s'identifie à $\mathcal{H}^*(\psi_0, N)$.

La mesure β_N sur $N = \mathbf{R}^{2\delta+1}$ est la mesure de Lebesgue $d\rho_0\, d\rho_1 \ldots d\rho_{2\delta}$. Identifiant N/Z à $\mathbf{R}^{2\delta}$ muni des coordonnées $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2\delta}$, la mesure $|f'|^2 \beta_N/\beta_Z$ s'identifie, comme on le voit facilement, à la mesure

$$|f'(\mathrm{o}, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2\delta})|^2\, d\rho_1\, d\rho_2 \ldots d\rho_{2\delta}.$$

Ainsi, la condition (ii) s'écrit

$$\int_{\mathbf{R}^{2\delta}} |f(\mathrm{o}, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2\delta})|^2\, d\rho_1\, d\rho_2 \ldots d\rho_{2\delta} < +\infty.$$

3.6. Lemme. — *La représentation π_0 est unitairement équivalente à π_{χ_0} (cf. 3.2).*

Démonstration. — Pour $z \in Z$ et $f \in \mathcal{H}(\psi_0, N)$, on a, quel que soit $n \in N_{\mathbf{C}}$:

$$(\pi_0(z) f)(n) = f(nz) = f(zn) = \psi_0(z) f(n) = \chi_0(z) f(n)$$

donc $\pi_0(z) = \chi_0(z_0).\mathrm{I}$. Compte tenu de 3.2, π_0 est somme hilbertienne de représentations unitairement équivalentes à π_{χ_0}.

Soit $\mathfrak{h}' = \mathbf{C}(e_1 - ie_2) + \ldots + \mathbf{C}(e_{2\delta-1} - ie_{2\delta})$. Soit $H' = \exp(\mathfrak{h}') \subset N_{\mathbf{C}}$. On a $H \cap H' = \{\mathrm{o}\}$, et, pour tout élément $(\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{2\delta})$ de $N_{\mathbf{C}}$,

$$(5)\quad (\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{2\delta}) = \Big(\sigma_0 + \frac{i}{4}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_{2\delta}^2), \frac{\mathrm{I}}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2), \frac{i}{2}(\sigma_1 - i\sigma_2), \ldots, \frac{\mathrm{I}}{2}(\sigma_{2\delta-1} - i\sigma_{2\delta}), \frac{i}{2}(\sigma_{2\delta-1} - i\sigma_{2\delta})\Big).$$

$$\Big(\mathrm{o}, \frac{\mathrm{I}}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), -\frac{i}{2}(\sigma_1 + i\sigma_2), \ldots, \frac{\mathrm{I}}{2}(\sigma_{2\delta-1} + i\sigma_{2\delta}), -\frac{i}{2}(\sigma_{2\delta-1} + i\sigma_{2\delta})\Big).$$

Donc $N_{\mathbf{C}}$ est produit semi-direct des sous-groupes commutatifs H' et H. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions complexes holomorphes sur $N_{\mathbf{C}}$ vérifiant (4). Soit $\mathcal{E}^\sim$ l'ensemble des fonctions complexes entières sur $\mathbf{C}^\delta$. Pour $f \in \mathcal{E}$, soit $f^\sim$ la fonction $(\sigma_1, \ldots, \sigma_\delta) \mapsto f((\mathrm{o}, \sigma_1, -i\sigma_1, \sigma_2, -i\sigma_2, \ldots, \sigma_\delta, -i\sigma_\delta))$ sur $\mathbf{C}^\delta$, qui est un élément de $\mathcal{E}^\sim$. Alors $f \mapsto f^\sim$ est une bijection de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{E}^\sim$. Pour $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2\delta} \in \mathbf{R}$, on a, d'après (5) :

$$\begin{aligned} f((\mathrm{o}, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2\delta})) &= \psi_0\Big(\Big(\frac{i}{4}(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_{2\delta}^2), \frac{\mathrm{I}}{2}(\rho_1 - i\rho_2), \\ &\qquad \frac{i}{2}(\rho_1 - i\rho_2), \ldots, \frac{\mathrm{I}}{2}(\rho_{2\delta-1} - i\rho_{2\delta}), \frac{i}{2}(\rho_{2\delta-1} - i\rho_{2\delta})\Big)\Big). \\ & f\Big(\Big(\mathrm{o}, \frac{\mathrm{I}}{2}(\rho_1 + i\rho_2), -\frac{i}{2}(\rho_1 + i\rho_2), \ldots, \frac{\mathrm{I}}{2}(\rho_{2\delta-1} + i\rho_{2\delta}), -\frac{i}{2}(\rho_{2\delta-1} - i\rho_{2\delta})\Big)\Big) \\ &= \exp\Big(-\frac{\mathrm{I}}{4}(\rho_1^2 + \ldots + \rho_{2\delta}^2)\Big) f^\sim\Big(\frac{\mathrm{I}}{2}(\rho_1 + i\rho_2), \ldots, \frac{\mathrm{I}}{2}(\rho_{2\delta-1} + i\rho_{2\delta})\Big). \end{aligned}$$

Donc $f \in \mathcal{H}(\psi_0, N)$ si et seulement si

$$\int_{\mathbf{R}^{2\delta}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\rho_1^2+\ldots+\rho_{2\delta}^2)\right) \cdot \left| f^\sim\left(\frac{1}{2}(\rho_1+i\rho_2), \ldots, \frac{1}{2}(\rho_{2\delta-1}+i\rho_{2\delta})\right)\right|^2 d\rho_1\ldots d\rho_{2\delta} < +\infty$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_{\mathbf{C}^\delta} |f^\sim(\sigma_1, \ldots, \sigma_\delta)|^2 \exp(-2(|\sigma_1|^2+\ldots+|\sigma_\delta|^2))\, d\rho_1\ldots d\rho_{2\delta} < +\infty \\ \qquad\qquad (\sigma_k = \rho_{2k-1}+i\rho_{2k}) \end{array}\right.$$

Nous noterons $\mathcal{E}'$ l'espace hilbertien formé des fonctions de $\mathcal{E}^\sim$ vérifiant la condition précédente. On a donc défini un isomorphisme de l'espace hilbertien $\mathcal{H}(\psi_0, N)$ sur l'espace hilbertien $\mathcal{E}'$. Cherchons la transformée π'_0 de π_0 par cet isomorphisme. Soit $(\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{2\delta}) \in N$. On a, pour $f \in \mathcal{H}(\psi_0, N)$ et $(\sigma_1, \ldots, \sigma_\delta) \in \mathbf{C}^\delta$:

$$\begin{aligned} &(\pi_0((\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{2\delta}))f)^\sim(\sigma_1, \ldots, \sigma_\delta) \\ &= (\pi_0((\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{2\delta}))f)(0, \sigma_1, -i\sigma_1, \ldots, \sigma_\delta, -i\sigma_\delta) \\ &= f((0, \sigma_1, -i\sigma_1, \ldots, \sigma_\delta, -i\sigma_\delta)(\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{2\delta})) \\ &= f\Bigg(\Bigg(\rho_0+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\delta}\sigma_l(\rho_{2l}+i\rho_{2l-1}), \\ &\qquad \sigma_1+\rho_1, -i\sigma_1+\rho_2, \ldots, \sigma_\delta+\rho_{2\delta-1}, -i\sigma_\delta+\rho_{2\delta}\Bigg)\Bigg). \end{aligned}$$

Compte tenu de (5), ceci est la valeur de f en hh', où

$$\begin{aligned} h = \Bigg(&\rho_0+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\delta}\sigma_l(\rho_{2l}+i\rho_{2l-1})+\frac{i}{4}\sum_{l=1}^{\delta}(\rho_{2l-1}^2+\rho_{2l}^2+2\sigma_l\rho_{2l-1}-2i\sigma_l\rho_{2l}), \\ &\frac{1}{2}(\rho_1-i\rho_2), \frac{i}{2}(\rho_1-i\rho_2), \ldots, \frac{1}{2}(\rho_{2\delta-1}-i\rho_{2\delta}), \frac{i}{2}(\rho_{2\delta-1}-i\rho_{2\delta})\Bigg), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h' = \Big(&0, \frac{1}{2}(2\sigma_1+\rho_1+i\rho_2), -\frac{i}{2}(2\sigma_1+\rho_1+i\rho_2), \ldots, \\ &\frac{1}{2}(2\sigma_\delta+\rho_{2\delta-1}+i\rho_{2\delta}), -\frac{i}{2}(2\sigma_\delta+\rho_{2\delta-1}+i\rho_{2\delta})\Big). \end{aligned}$$

La valeur de f en hh' est donc

$$\begin{aligned} \exp i\Bigg(&\rho_0+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\delta}\sigma_l(\rho_{2l}+i\rho_{2l-1})+\frac{i}{4}\sum_{l=1}^{\delta}(\rho_{2l-1}^2+\rho_{2l}^2+2\sigma_l\rho_{2l-1}-2i\sigma_l\rho_{2l})\Bigg). \\ &f^\sim\Big(\sigma_1+\frac{1}{2}(\rho_1+i\rho_2), \ldots, \sigma_\delta+\frac{1}{2}(\rho_{2\delta-1}+i\rho_{2\delta})\Big). \end{aligned}$$

Ainsi

$$(\pi'_0((\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_{2\delta}))f^\sim)(\sigma_1, \ldots, \sigma_\delta)$$
$$= \exp\Big(i\rho_0 - \sigma_1(\rho_1 - i\rho_2) - \ldots - \sigma_\delta(\rho_{2\delta-1} - i\rho_{2\delta})$$
$$- \frac{1}{4}(\rho_1^2 + \rho_2^2 + \ldots + \rho_{2\delta}^2)\Big).$$
$$f^\sim\Big(\sigma_1 + \frac{1}{2}(\rho_1 + i\rho_2), \ldots, \sigma_\delta + \frac{1}{2}(\rho_{2\delta-1} + i\rho_{2\delta})\Big).$$

Cette représentation π'_0 est connue ([1], p. 207-208 et [18], p. 520-522), et l'on sait qu'elle est équivalente à π_{χ_0}. Indiquons cependant une démonstration, de sorte que notre exposé utilisera seulement [16]. Pour $\rho_1 \neq 0$, on a

$$(\rho_1^{-1}(\pi'_0(\exp(0, \rho_1, 0, 0, \ldots, 0)) - 1)f^\sim)(\sigma_1, \ldots, \sigma_\delta)$$
$$= \rho_1^{-1}\Big(f^\sim\Big(\sigma_1 + \frac{1}{2}\rho_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\delta\Big)\exp\Big(-\sigma_1\rho_1 - \frac{1}{4}\rho_1^2\Big) - f^\sim(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\delta)\Big).$$

Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}'$ l'ensemble des polynômes en $\sigma_1, \ldots, \sigma_\delta$. Si $f^\sim \in \mathcal{P}$, on voit facilement que la fonction précédente a pour limite dans $\mathcal{E}'$, quand $\rho_1 \to 0$,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f^\sim}{\partial \sigma_1} - \sigma_1 f^\sim.$$

Donc

$$(d\pi'_0)(e_1)f^\sim = \frac{1}{2}\frac{\partial f^\sim}{\partial \sigma_1} - \sigma_1 f^\sim.$$

On voit de même que

$$(d\pi'_0)(e_2)f^\sim = \frac{i}{2}\frac{\partial f^\sim}{\partial \sigma_1} + i\sigma_1 f^\sim,$$

d'où facilement

$$(d\pi'_0)(e_1^2 + e_2^2)f^\sim = -f^\sim - 2\sigma_1\frac{\partial f^\sim}{\partial \sigma_1}$$

et l'on calcule de même $(d\pi'_0)(e_{2k-1}^2 + e_{2k}^2)$. Les monômes $f_{n_1, \ldots, n_\delta}(\sigma_1, \ldots, \sigma_\delta) = \sigma_1^{n_1} \ldots \sigma_\delta^{n_\delta}$ forment une base orthogonale de $\mathcal{E}'$. On a

$$(d\pi'_0)(e_1^2 + \ldots + e_{2\delta}^2)f_{n_1, \ldots, n_\delta} = -\delta f_{n_1, \ldots, n_\delta} - 2(n_1 + n_2 + \ldots + n_\delta)f_{n_1, \ldots, n_\delta}.$$

Donc $(d\pi'_0)(e_1^2 + \ldots + e_{2\delta}^2)$ est essentiellement autoadjoint, et $f_{n_1, \ldots, n_\delta}$ est vecteur propre de valeur propre $-\delta - 2(n_1 + \ldots + n_\delta)$. En particulier, $-\delta$ est valeur propre *simple*. Il en résulte que π'_0, donc π_0, ne peuvent être somme hilbertienne de plus d'une représentation π_{χ_0}.

3.7. Lemme. — *Soit π une représentation unitaire de N telle que $\pi((\rho_0, 0, 0, \ldots, 0)) = \exp(i\rho_0).1$ pour tout $\rho_0 \in \mathbf{R}$. Il existe un espace* *hilbertien* $\mathcal{H}$ *tel que* π *soit unitairement équivalente à la représentation* $\pi_0 \otimes 1$ *dans* $\mathcal{H}(\psi_0, N) \otimes \mathcal{H}$.

Démonstration. — Ceci résulte de 3.2 et 3.6.

4. Énoncé du théorème principal.

4.1. Théorème. — *Soient* Γ *un groupe algébrique linéaire réel résoluble,* G *un sous-groupe de* Γ *contenant la composante neutre de* Γ, N *le sous-groupe algébrique distingué connexe de* Γ *formé des éléments unipotents de* Γ, $\mathfrak{g}$ *et* $\mathfrak{n}$ *les algèbres de Lie de* G *et* N. *On suppose que* G/N *est commutatif (c'est le cas notamment si* G *est connexe). Soit* π *une représentation unitaire irréductible de* G. *Il existe un sous-groupe fermé* M *de* $\Gamma_{\mathbf{C}}$ *et un morphisme continu* ψ *de* M *dans* $\mathbf{C}^\star$ *ayant les propriétés suivantes :*

(i) *la partie complexe connexe* H *de* M *est un sous-groupe algébrique de* $N_{\mathbf{C}}$;

(ii) $M = LH$ *en posant* $L = M \cap G$;

(iii) $\psi \mid L$ *est un caractère unitaire de* L;

(iv) $\mathfrak{h}$ *étant l'algèbre de Lie de* H, $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}$ *est la complexifiée d'une sous-algèbre [algébrique* (1)*]* $\mathfrak{k}$ *de* $\mathfrak{n}$; *soit* K *le sous-groupe (algébrique) connexe de* N *correspondant. Les propriétés qui précèdent permettent* (2) *de former* $\mathrm{Ind}(\psi, G)$;

(v) $HK = KH = K_{\mathbf{C}}$;

(vi) $\mathfrak{l}$ *étant l'algèbre de Lie de* L, *on a* $(\mathfrak{l}_{\mathbf{C}} + \mathfrak{h}) \cap (\mathfrak{l}_{\mathbf{C}} + \bar{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{l}_{\mathbf{C}}$;

(vii) π *est unitairement équivalente à* $\mathrm{Ind}(\psi, G)$.

4.2. — L'hypothèse que G/N soit commutatif est indispensable. En effet, soit F un groupe fini résoluble. Il est isomorphe à un groupe algébrique linéaire réel G. Si le théorème est vrai pour G, toute représentation unitaire irréductible de F est induite au sens classique par une représentation de dimension 1 d'un sous-groupe de G (car ici $\mathfrak{h} = 0$). Or, cette propriété peut être mise en défaut pour certains groupes finis résolubles. Je dois le contre-exemple que voici à J.-P. Serre. Soit A le groupe des quaternions ± 1, $\pm i$, $\pm j$, $\pm k$. Soit B le groupe multiplicatif d'ordre 3 engendré par le quaternion $\frac{1}{2}(-1 + i + j + k)$, groupe qui normalise A. Soit $C = BA = AB$, qui est un groupe réso-

(1) Toute sous-algèbre $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{n}$ (ou de $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$) est algébrique, et l'application exponentielle définit un isomorphisme de la variété analytique $\mathfrak{a}$ sur un sous-groupe algébrique A de N (ou de $N_{\mathbf{C}}$), isomorphisme qui transforme les fonctions polynômes sur $\mathfrak{a}$ en les fonctions polynômes sur A ([8], p. 123, prop. 14).

(2) Comme N est nilpotent et distingué dans G, on a $\Delta_G \mid N = \Delta_L \mid N \cap L = 1$.

luble d'ordre 24. Le groupe des commutateurs de C est A, donc C ne possède aucun sous-groupe d'indice 2. La réalisation classique des quaternions comme matrices complexes à 2 lignes et 2 colonnes fournit une représentation irréductible de dimension 2 de C, et cette représentation ne peut être induite par une représentation de dimension 1 d'un sous-groupe C' de C, car C' serait d'indice 2 dans C.

4.3. — Reprenons les notations de 4.1, et soit $\mathfrak{t}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathfrak{h}$ dans $\mathfrak{k}_{\mathbf{C}}$. Tout élément de $HK = K_{\mathbf{C}}$ s'écrit de manière unique $(\exp h)(\exp t)$ où $h \in \mathfrak{h}$, $t \in \mathfrak{t}$. Soient $f \in \mathcal{H}(\psi, G)$ et $g \in G$. La restriction de f à $K_{\mathbf{C}}g$ est parfaitement déterminée par la fonction $t \mapsto f((\exp t)g)$ sur $\mathfrak{t}$, qui est une fonction entière. Ceci est en contraste avec le cas des groupes semi-simples, pour lesquels les variétés analytiques complexes qu'on introduit en théorie des représentations sont isomorphes à des domaines bornés. C'est notre définition « globale » des représentations holomorphes induites qui nous permet de formuler cette remarque.

5. Démonstration du théorème principal.

5.1. — En diminuant au besoin Γ, on peut supposer, dans toute la démonstration, que Γ est le groupe algébrique engendré par G.

Si G est commutatif, on peut prendre $M = G$, $\psi = \pi$.

5.2. — Nous supposerons le théorème établi pour les groupes de dimension strictement majorée par celle de G. D'autre part, le nombre de composantes connexes de G est fini. Nous supposerons le théorème établi pour les groupes dont le nombre de composantes connexes est strictement majoré par le nombre de composantes connexes de G.

5.3. — Soient $\mathfrak{a}$ un idéal commutatif de $\mathfrak{n}$ stable par $\mathrm{Ad}(G)$, et A le sous-groupe connexe correspondant de G. Alors A est distingué dans G. D'après un théorème de Chevalley (*cf.* Notations et rappels) et le raisonnement de [9], p. 326, l. 22-34, A est régulièrement plongé dans G. D'après [15], théorème 6.3, il existe, dans le dual $\hat{A}$ du groupe A, une G-orbite Ω qui porte la classe de mesures associée à $\pi \mid A$. Soient $\omega \in \Omega$, et G' (resp. Γ') le stabilisateur de ω dans G (resp. Γ). Alors Γ' est un sous-groupe algébrique de Γ ([8], p. 28, cor. 2), $G' = \Gamma' \cap G$, et G' contient la composante neutre de Γ'; soit $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie de G' et Γ'. D'après [15], théorème 8.1, il existe une représentation unitaire irréductible π' de G' telle que $\pi = \mathrm{Ind}(\pi', G)$.

Supposons $\Omega \neq \{\omega\}$. Alors $G' \neq G$. Donc, ou bien $\dim G' < \dim G$, ou bien $\mathfrak{g}' = \mathfrak{g}$ et le nombre de composantes connexes de G' est strictement majoré par le nombre de composantes connexes de G. D'autre part, $G'/(N \cap G')$ est commutatif. On peut donc appliquer à G' l'hypothèse de récurrence. Il existe un sous-groupe fermé M de $\Gamma'_{\mathbf{C}}$ et un morphisme continu ψ de M dans $\mathbf{C}^*$ ayant les propriétés suivantes :

(i) la partie complexe connexe H de M est un sous-groupe algébrique de $(\Gamma' \cap N)_{\mathbf{C}}$;

(ii) $M = LH$ en posant $L = M \cap G'$;

(iii) $\psi \mid L$ est un caractère unitaire de L;

(iv) $\mathfrak{h}$ étant l'algèbre de Lie de H, $\mathfrak{h} + \bar{\mathfrak{h}}$ est la complexification d'une sous-algèbre $\mathfrak{k}$ de $\mathfrak{g}' \cap \mathfrak{n}$;

(v) K étant le groupe connexe correspondant à $\mathfrak{k}$, on a $HK = KH = K_{\mathbf{C}}$;

(vi) $\mathfrak{l}$ étant l'algèbre de Lie de L, on a $(\mathfrak{l}_{\mathbf{C}} + \mathfrak{h}) \cap (\mathfrak{l}_{\mathbf{C}} + \bar{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{l}_{\mathbf{C}}$;

(vii) $\pi' = \operatorname{Ind}(\psi, G')$.

On a $\Gamma' = \Gamma'_{\mathbf{C}} \cap \Gamma$, donc $G' = \Gamma' \cap G = \Gamma'_{\mathbf{C}} \cap G$, donc

$$M \cap G = M \cap \Gamma'_{\mathbf{C}} \cap G = M \cap G' = L.$$

D'autre part, $\Delta_G \mid K = \Delta_{G'} \mid K = 1$, donc le lemme 2.1 où l'on échange les rôles de G et G' (et où $\Gamma_{\mathbf{C}}$, $\Gamma'_{\mathbf{C}}$ servent de groupes complexes) donne

$$\pi = \operatorname{Ind}(\pi', G) = \operatorname{Ind}(\psi, G).$$

Ainsi, le théorème est établi si $\Omega \neq \{\omega\}$, autrement dit si $\pi \mid A$ n'est pas une représentation par des opérateurs scalaires. On peut donc faire désormais l'hypothèse suivante :

(H_1) Pour tout idéal commutatif $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{n}$ stable par $\operatorname{Ad}(G)$, la restriction de π à A (sous-groupe connexe correspondant à $\mathfrak{a}$) est une représentation par des opérateurs scalaires.

5.4. — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal $\neq 0$ de $\mathfrak{n}$ stable par $\operatorname{Ad}(G)$, donc par $\operatorname{Ad}(\Gamma)$. Soit A le sous-groupe connexe correspondant de G. Supposons π triviale sur A.

La complexification $A_{\mathbf{C}}$ de A est un sous-groupe algébrique connexe de $N_{\mathbf{C}}$, distingué dans $\Gamma_{\mathbf{C}}$. Le groupe quotient $\Gamma'_{\mathbf{C}} = \Gamma_{\mathbf{C}}/A_{\mathbf{C}}$ est canoniquement un groupe algébrique. Soient $\omega_{\mathbf{C}}$ le morphisme canonique de $\Gamma_{\mathbf{C}}$ sur $\Gamma'_{\mathbf{C}}$, et ω la restriction de $\omega_{\mathbf{C}}$ à Γ. Alors $\Gamma' = \omega(\Gamma)$ est un groupe algébrique réel de complexification $\Gamma'_{\mathbf{C}}$ ([5], p. 67, l. 15-16). Soit $\mathfrak{g}'$ l'algèbre de Lie de Γ'. On a $d\omega(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}'$ ([7], p. 140, prop. 5). Donc, si Γ'^0 est la composante neutre de Γ', et si $G' = \omega(G)$, on a $\Gamma'^0 \subset G' \subset \Gamma'$. Soient $N' = \omega(N)$, $\mathfrak{n}' = d\omega(\mathfrak{n})$. Les éléments unipotents de $\Gamma'_{\mathbf{C}}$ sont ceux de $\omega_{\mathbf{C}}(N_{\mathbf{C}})$ ([4], th. 9.3); donc les éléments unipotents de G' sont les images des éléments de G congrus modulo $A_{\mathbf{C}}$ à des éléments de $N_{\mathbf{C}}$, c'est-à-dire les éléments de

$$\omega(G \cap N_{\mathbf{C}} A_{\mathbf{C}}) = \omega(G \cap N_{\mathbf{C}}) = \omega(N) = N'.$$

Le groupe G'/N', isomorphe à G/N, est commutatif. Soit π' la représentation unitaire irréductible de G' telle que $\pi = \pi' \circ \omega$. On a $\dim G' < \dim G$, donc on peut appliquer à G' et π' l'hypothèse de récurrence. Il existe un sous-groupe fermé M' de $\Gamma'_{\mathbf{C}}$ et un morphisme continu ψ' de M' dans $\mathbf{C}^\star$ ayant les propriétés suivantes :

(i) la partie complexe connexe H' de M' est un sous-groupe algébrique de $N'_{\mathbf{C}}$;

(ii) $M' = L'H'$ en posant $L' = M' \cap G'$;

(iii) $\psi' \mid L'$ est un caractère unitaire de L';

(iv) $\mathfrak{h}'$ étant l'algèbre de Lie de H', $\mathfrak{h}' + \overline{\mathfrak{h}}'$ est la complexification d'une sous-algèbre $\mathfrak{k}'$ de $\mathfrak{n}'$;

(v) K' étant le sous-groupe connexe correspondant à $\mathfrak{k}'$, on a $H'K' = K'H' = K'_{\mathbf{C}}$;

(vi) $\mathfrak{l}'$ étant l'algèbre de Lie de L', on a $(\mathfrak{l}'_{\mathbf{C}} + \mathfrak{h}') \cap (\mathfrak{l}'_{\mathbf{C}} + \overline{\mathfrak{h}}') = \mathfrak{l}'_{\mathbf{C}}$;

(vii) $\pi' = \operatorname{Ind}(\psi', G')$.

Appliquons le lemme 2.2, où l'on échange G et G', où $\Gamma_{\mathbf{C}}$, $\Gamma'_{\mathbf{C}}$ servent de groupes complexes, et où ω est remplacé par $\omega \mid G$. Soient $M = \omega_{\mathbf{C}}^{-1}(M')$, $\psi = \psi' \circ \omega_{\mathbf{C}}$. On a vu dans la démonstration du lemme 2.2 que $\mathfrak{h} = (d\omega_{\mathbf{C}})^{-1}(\mathfrak{h}')$ est l'algèbre de Lie de la partie complexe connexe H de M et que $\omega^{-1}(L') = L = M \cap G$. On a donc $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$ et $\omega_{\mathbf{C}}^{-1}(\mathfrak{l}'_{\mathbf{C}}) = \mathfrak{l}_{\mathbf{C}}$ en notant $\mathfrak{l}$ l'algèbre de Lie de L. Les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv), du théorème sont alors immédiates ou implicites dans l'énoncé du lemme 2.2. On a

$$\pi = \pi' \circ \omega = \operatorname{Ind}(\psi', G') \circ \omega = \operatorname{Ind}(\psi, G) \quad \text{(lemme 2.2)}.$$

Enfin, soit $k \in K_{\mathbf{C}}$. D'après la démonstration du lemme 2.2,

$$\omega_{\mathbf{C}}(K_{\mathbf{C}}) = K'_{\mathbf{C}}, \; \omega(K) = K', \; \omega_{\mathbf{C}}(H) = H',$$

et

$$H = \omega_{\mathbf{C}}^{-1}(H'),$$

donc il existe $h \in H$, $k_1 \in K$ tels que $\omega_{\mathbf{C}}(k) = \omega_{\mathbf{C}}(h)\,\omega(k_1)$, d'où

$$k \in A_{\mathbf{C}} HK = HK.$$

Donc

$$K_{\mathbf{C}} = HK = (HK)^{-1} = KH.$$

Le théorème est ainsi établi dans le cas étudié. On peut donc faire désormais l'hypothèse suivante :

(H_2) Pour tout idéal $\mathfrak{a} \neq 0$ de $\mathfrak{n}$ stable par $\operatorname{Ad}(G)$, la restriction de π à A (sous-groupe connexe de G correspondant à $\mathfrak{a}$) est non triviale.

5.5. — Soit $\mathfrak{a}$ un idéal commutatif de $\mathfrak{n}$ stable par $\mathrm{Ad}(G)$ et de dimension > 1. Soit A le sous-groupe connexe correspondant, qui s'identifie canoniquement à un espace vectoriel réel. Soit P la composante neutre de $(\mathrm{Ker}\,\pi) \cap A$; c'est un sous-espace vectoriel de A, et un sous-groupe distingué de G. D'après (H_1), les opérateurs de $\pi(A)$ sont scalaires; comme $\dim A > 1$, on a donc $P \neq 0$. Mais ceci contredit (H_2). Donc *tout idéal commutatif de* $\mathfrak{n}$ *stable par* $\mathrm{Ad}(G)$ *est de dimension* ≤ 1.

5.6. — Si $\mathfrak{n} = 0$, G est commutatif et le théorème est démontré. On supposera désormais $\mathfrak{n} \neq 0$.

5.7. — Le centre $\mathfrak{z}$ de $\mathfrak{n}$ est alors non nul, et de dimension 1 d'après 5.5. Soit Z le sous-groupe connexe correspondant à $\mathfrak{z}$. D'après (H_1) et (H_2), $\pi \mid Z$ est non triviale et les opérateurs de $\pi(Z)$ sont scalaires. Nous pouvons donc choisir une fois pour toutes un élément non nul e_0 de $\mathfrak{z}$ tel que

$$\pi(\exp(\lambda e_0)) = (\exp i\lambda) \,.\, 1 \quad \text{pour tout } \lambda \in \mathbf{R}. \tag{6}$$

Soit $g \in G$. Il existe $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ tel que $g(\exp \lambda e_0)\, g^{-1} = \exp(\lambda_0 \lambda e_0)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \exp(i\lambda_0 \lambda) \,.\, 1 &= \pi(\exp(\lambda_0 \lambda e_0)) = \pi(g(\exp \lambda e_0)\, g^{-1}) \\ &= \pi(g)\,(\exp i\lambda)\, \pi(g)^{-1} = \exp(i\lambda) \,.\, 1 \end{aligned}$$

pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. Donc $\lambda_0 = 1$. Ainsi, *Z est contenu dans le centre de G et donc de* Γ.

5.8. — Supposons $\dim[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \geq 2$. Comme $\mathfrak{n}$ est nilpotente, il existe des idéaux $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ de $\mathfrak{n}$ tels que $\mathfrak{n}_1 \subset \mathfrak{n}_2 \subset [\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$, $\dim \mathfrak{n}_1 = 1$, $\dim \mathfrak{n}_2 = 2$. Alors

$$[[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}], \mathfrak{n}_2] \subset [[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}_2], \mathfrak{n}] \subset [\mathfrak{n}_1, \mathfrak{n}] = 0.$$

Donc le centre de $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ est de dimension ≥ 2. Mais ce centre est stable par $\mathrm{Ad}(G)$, ce qui contredit 5.5. Donc $\dim[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \leq 1$. Alors $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$ est un idéal central de $\mathfrak{n}$, donc $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z}$.

Si $\mathfrak{n}$ *est commutative, on a* $\mathfrak{n} = \mathfrak{z}$; *sinon, on a* $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] = \mathfrak{z}$; *rappelons que* $\dim \mathfrak{z} = 1$.

5.9. — Il existe une forme bilinéaire alternée B_0 sur $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}} \times \mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$ telle que $[x, y] = B_0(x, y)\, e_0$ quels que soient $x, y \in \mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$. Pour que x soit dans le noyau de B_0, il faut et il suffit que x soit dans le centre de $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$, c'est-à-dire dans $\mathfrak{z}_{\mathbf{C}}$. Donc B_0 définit par passage au quotient une forme bilinéaire alternée non dégénérée B sur $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{z}_{\mathbf{C}}$. Nous noterons 2δ la dimension paire de $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{z}_{\mathbf{C}}$. En outre, B_0 est invariante par $\mathrm{Ad}_{\mathbf{C}}(\Gamma_{\mathbf{C}})$. Soit Ad' la représentation de $\Gamma_{\mathbf{C}}$ dans $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{z}_{\mathbf{C}}$ déduite de $\mathrm{Ad}_{\mathbf{C}}$ par passage au quotient. Alors B est invariante par $\mathrm{Ad}'(\Gamma_{\mathbf{C}})$.

5.10. — Considérons une suite $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ de vecteurs de $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{z}_{\mathbf{C}}$ qui possèdent les propriétés suivantes :

(i) $f_1, \overline{f}_1, f_2, \overline{f}_2, \ldots, f_k, \overline{f}_k$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{C}$;

(ii) $B(f_l, f_m) = B(\overline{f}_l, \overline{f}_m) = 0$ quels que soient l et m;

(iii) $B(f_l, \overline{f}_m) = -2i\,\delta_{lm}$ quels que soient l et m;

(iv) $\mathbf{C}f_1, \mathbf{C}f_2, \ldots, \mathbf{C}f_k$ sont stables par $\mathrm{Ad}'(\Gamma_{\mathbf{C}})$ [donc $\mathbf{C}\overline{f}_1, \mathbf{C}\overline{f}_2, \ldots, \mathbf{C}\overline{f}_k$ sont stables par $\mathrm{Ad}'(\Gamma_{\mathbf{C}})$].

D'après (i), on a $k \leq \delta$. Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{z}_{\mathbf{C}}$ engendré par $f_1, \overline{f}_1, \ldots, f_k, \overline{f}_k$. D'après (ii) et (iii), la restriction de B à V est non dégénérée, donc l'orthogonal W de V pour B est supplémentaire de V dans $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}/\mathfrak{z}_{\mathbf{C}}$. Cet orthogonal est stable par conjugaison. D'après (iv), W est stable par $\mathrm{Ad}'(\Gamma_{\mathbf{C}})$. Puisque $[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z}$, on a $\mathrm{Ad}'(N_{\mathbf{C}}) = \{1\}$. Donc Ad' définit une représentation de $\Gamma_{\mathbf{C}}/N_{\mathbf{C}}$ dans W. Supposons $k < \delta$. Alors $W \neq 0$. Comme $\Gamma_{\mathbf{C}}/N_{\mathbf{C}}$ est commutatif, il existe un vecteur non nul f_{k+1} de W tel que $\mathbf{C}f_{k+1}$ soit stable par $\mathrm{Ad}'(\Gamma_{\mathbf{C}})$. Si $\mathbf{C}f_{k+1} = \mathbf{C}\overline{f}_{k+1}$, $\mathbf{C}f_{k+1}$ est stable par conjugaison, donc il existe un sous-espace vectoriel de dimension 2 de $\mathfrak{n}$ contenant $\mathfrak{z}$ et stable par $\mathrm{Ad}(G)$; le crochet est nécessairement nul sur un tel sous-espace, et ceci contredit 5.5. Donc f_{k+1} et $\overline{f}_{k+1}$ sont linéairement indépendants. Notons que $\mathbf{C}f_{k+1} + \mathbf{C}\overline{f}_{k+1}$ est stable par conjugaison; si $B(f_{k+1}, \overline{f}_{k+1}) = 0$, on obtient un idéal commutatif de dimension 3 de $\mathfrak{n}$ contenant $\mathfrak{z}$, stable par $\mathrm{Ad}(G)$, ce qui contredit 5.5; donc $B(f_{k+1}, \overline{f}_{k+1}) \neq 0$. Comme B est alternée, $B(f_{k+1}, \overline{f}_{k+1})$ est imaginaire pur; en échangeant au besoin f_{k+1} et $\overline{f}_{k+1}$, puis en multipliant f_{k+1} par un scalaire convenable, on peut supposer $B(f_{k+1}, \overline{f}_{k+1}) = -2i$. Alors la suite $(f_1, f_2, \ldots, f_{k+1})$ possède les propriétés (i) à (iv) avec k remplacé par $k+1$.

Choisissant $(f_1, f_2, \ldots, f_k)$ de manière que k soit le plus grand possible, on voit donc que $k = \delta$.

5.11. — Prenons des images réciproques $f'_1, \ldots, f'_\delta$ de $f_1, \ldots, f_\delta$ dans $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$, et écrivons $f'_1 = e_1 + ie_2, \ldots, f'_\delta = e_{2\delta-1} + ie_{2\delta}$ avec $e_1, \ldots, e_{2\delta} \in \mathfrak{n}$. On a les propriétés suivantes :

(i) $(e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{2\delta-1}, e_{2\delta})$ est une base de $\mathfrak{n}$;

(ii) pour $l = 1, 2, \ldots, \delta$, $\mathrm{Ad}_{\mathbf{C}}(\Gamma_{\mathbf{C}})$ laisse stables $\mathbf{C}(e_{2l-1} + ie_{2l}) + \mathbf{C}e_0$, $\mathbf{C}(e_{2l-1} - ie_{2l}) + \mathbf{C}e_0$;

(iii) on a

$$\begin{cases} [e_{2l-1} + ie_{2l}, e_{2l-1} - ie_{2l}] = -2ie_0, & \\ [e_{2l-1} + ie_{2l}, e_{2m-1} \pm ie_{2m}] = 0 & \text{pour } l \neq m \end{cases}$$

donc

$$\left\{\begin{array}{c}[e_{2l-1}, e_{2l}] = e_0, \\ [e_{2l-1}, e_{2m-1}] = [e_{2l}, e_{2m-1}] = [e_{2l-1}, e_{2m}] = [e_{2l}, e_{2m}] = 0 \\ \text{pour} \quad l \neq m.\end{array}\right.$$

5.12. — Soit $\Lambda_{\mathbf{C}}$ l'ensemble des $g \in \Gamma_{\mathbf{C}}$ tels que $\mathrm{Ad}_{\mathbf{C}}(g)$ laisse stables $\mathbf{C}(e_{2l-1} + ie_{2l})$ et $\mathbf{C}(e_{2l-1} - ie_{2l})$ pour $l = 1, 2, \ldots, \delta$. Si $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2\delta} \in \mathbf{C}$, on a

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Ad}\exp(\lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{2\delta} e_{2\delta}))(e_{2l-1} \pm ie_{2l}) \\ &\quad = e_{2l-1} \pm ie_{2l} + [\lambda_{2l-1} e_{2l-1} + \lambda_{2l} e_{2l}, e_{2l-1} \pm ie_{2l}] \\ &\quad = e_{2l-1} \pm ie_{2l} + (\pm i\lambda_{2l-1} - \lambda_{2l}) e_0,\end{aligned}$$

donc

(7) $$N_{\mathbf{C}} \cap \Lambda_{\mathbf{C}} = Z_{\mathbf{C}}.$$

D'autre part, soit $g \in \Gamma_{\mathbf{C}}$. D'après 5.11, il existe $\alpha_l^+, \alpha_l^- \in \mathbf{C}^*$, $\beta_l^+, \beta_l^- \in \mathbf{C}$ tels que

$$\mathrm{Ad}(g)(e_{2l-1} \pm ie_{2l}) = \alpha_l^\pm (e_{2l-1} \pm ie_{2l}) + \beta_l^\pm e_0.$$

Donc

$$\begin{aligned}&\mathrm{Ad}\exp(\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{2\delta} e_{2\delta})(\mathrm{Ad}\, g)(e_{2l-1} \pm ie_{2l}) \\ &\quad = \alpha_l^\pm (e_{2l-1} \pm ie_{2l} + (\pm i\lambda_{2l-1} - \lambda_{2l}) e_0) + \beta_l^\pm e_0.\end{aligned}$$

Choisissons $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2\delta}$ de manière que

$$\alpha_l^\pm (\pm i\lambda_{2l-1} - \lambda_{2l}) + \beta_l^\pm = 0$$

ou

(8) $$\lambda_{2l} \mp i\lambda_{2l-1} = (\alpha_l^\pm)^{-1} \beta_l^\pm.$$

On voit qu'alors $\exp(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_{2\delta} e_{2\delta}).g \in \Lambda_{\mathbf{C}}$. Donc

(9) $$\Gamma_{\mathbf{C}} = N_{\mathbf{C}} \Lambda_{\mathbf{C}} = \Lambda_{\mathbf{C}} N_{\mathbf{C}}.$$

Reprenons les notations précédentes. Si de plus $g \in \Gamma$, on a $\alpha_l^- = \overline{\alpha_l^+}$, $\beta_l^- = \overline{\beta_l^+}$, et les formules (8) prouvent que $\lambda_{2l-1}, \lambda_{2l}$ sont réels. Donc, posant $L = \Lambda_{\mathbf{C}} \cap G$, on a

(10) $$G = NL = LN.$$

D'après (7), on a

(11) $$N \cap L = Z.$$

5.13. — Les éléments unipotents de $\Lambda_{\mathbf{C}}$ sont les éléments de $\Lambda_{\mathbf{C}} \cap N_{\mathbf{C}} = Z_{\mathbf{C}}$, et sont donc centraux dans $\Gamma_{\mathbf{C}}$ d'après 5.7. On va voir que tout élément semi-simple l de $\Lambda_{\mathbf{C}}$ est central dans $\Lambda_{\mathbf{C}}$. Soit $l' \in \Lambda_{\mathbf{C}}$. Comme $\Lambda_{\mathbf{C}}/Z_{\mathbf{C}}$, qui est isomorphe à $\Gamma_{\mathbf{C}}/N_{\mathbf{C}}$, est commutatif, on a $l'll'^{-1}l^{-1} = z \in Z_{\mathbf{C}}$. Alors l'élément semi-simple $l'll'^{-1}$ s'écrit lz avec l semi-simple, z unipotent, l et z permutables. Donc $z = 1$, donc $ll' = l'l$, ce qui prouve notre assertion. Comme tout élément de $\Lambda_{\mathbf{C}}$ est produit d'un élément semi-simple de $\Lambda_{\mathbf{C}}$ et d'un élément unipotent de $\Lambda_{\mathbf{C}}$, on voit que $\Lambda_{\mathbf{C}}$ est commutatif. (Si $\Lambda_{\mathbf{C}}$ était connexe, ceci serait bien classique.) Donc ([4], th. 9.1) $\Lambda_{\mathbf{C}}$ est produit direct, en tant que groupe algébrique, du sous-groupe $Z_{\mathbf{C}}$ des éléments unipotents de $\Lambda_{\mathbf{C}}$ et du sous-groupe $\Lambda'_{\mathbf{C}}$ des éléments semi-simples de $\Lambda_{\mathbf{C}}$.

On a $\Gamma_{\mathbf{C}} = \Lambda_{\mathbf{C}} N_{\mathbf{C}} = \Lambda'_{\mathbf{C}} Z_{\mathbf{C}} N_{\mathbf{C}} = \Lambda'_{\mathbf{C}} N_{\mathbf{C}}$, et $\Lambda'_{\mathbf{C}} \cap N_{\mathbf{C}} = 0$; comme on est en caractéristique 0, $\Gamma_{\mathbf{C}}$ est produit semi-direct, en tant que groupe algébrique, de $\Lambda'_{\mathbf{C}}$ et de $N_{\mathbf{C}}$.

5.14. — Nous identifierons $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_{2\delta-1}, e_{2\delta}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$, N, Z, $N_{\mathbf{C}}$ aux objets ainsi notés au chapitre 3. Introduisons les notations $\mathfrak{h}$, H, π_0, ψ_0, χ_0 de ce chapitre. D'après (6) et 3.7, il existe un espace hilbertien $\mathcal{H}$ tel que $\mathcal{E}(\pi)$ s'identifie à $\mathcal{H}(\psi_0, N) \otimes \mathcal{H}$, avec

$$\pi(n) = \pi_0(n) \otimes 1 \qquad \text{pour} \quad n \in N. \tag{12}$$

5.15. — Si $g \in \Gamma_{\mathbf{C}}$, l'automorphisme intérieur de $\Gamma_{\mathbf{C}}$ défini par g laisse stable H d'après 5.11, et laisse fixes les points de Z. Si de plus $g \in \Lambda_{\mathbf{C}}$, on a $\psi_0(ghg^{-1}) = \psi_0(h)$ pour tout $h \in H$ comme le prouve aussitôt la définition de ψ_0 et le fait que $\mathrm{Ad}_{\mathbf{C}}(g)$ laisse stables les $\mathbf{C}(e_{2l-1} + ie_{2l})$.

5.16. — Soient $l \in L$ et $f \in \mathcal{H}(\psi_0, N)$. Posons $f_l(n) = f(l^{-1}nl)$ pour tout $n \in N_{\mathbf{C}}$. Alors f_l est une fonction holomorphe sur $N_{\mathbf{C}}$. Pour $h \in H$ et $n \in H_{\mathbf{C}}$, on a, compte tenu de 5.15,

$$\begin{aligned} f_l(hn) &= f(l^{-1}hnl) = f((l^{-1}hl)(l^{-1}nl)) = \psi_0(l^{-1}hl) f(l^{-1}nl) \\ &= \psi_0(h) f_l(n). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Ad}'(l)$ laisse fixe la forme bilinéaire alternée non dégénérée B, on a $\det(\mathrm{Ad}'(l)) = 1$. Comme $\mathrm{Ad}(l)$ est l'identité dans $\mathfrak{z}$, on voit que la restriction de $\mathrm{Ad}(l)$ à $\mathfrak{n}$ est de déterminant 1. Si l'on note α_l l'automorphisme $n \mapsto lnl^{-1}$ de N, on a donc $\alpha_l(\beta_N) = \beta_N$. Soient $f^\sim$, $f_l^\sim$ les restrictions de f, f_l à N. On a $\alpha_l(|f^\sim|^2 \beta_N) = |f_l^\sim|^2 \beta_N$. Donc la mesure $(|f_l^\sim|^2 \beta_N)/\beta_Z$ se déduit de la mesure $(|f|^2 \beta_N)/\beta_Z$ par un automorphisme de N/Z. Tout ce qui précède prouve que $f_l \in \mathcal{H}(\psi_0, N)$ et que $\|f_l\| = \|f\|$. Ainsi, $f \mapsto f_l$ est un opérateur unitaire $\rho(l)$ dans $\mathcal{H}(\psi_0, N)$. Il est clair que $l \mapsto \rho(l)$ est une représentation unitaire ρ de L dans $\mathcal{H}(\psi_0, N)$.

Soient $n \in N$ et $l \in L$. Pour toute $f \in \mathcal{H}(\psi_0, N)$ et tout $n_1 \in N_{\mathbf{C}}$, on a

$$\begin{aligned} (\rho(l)\pi_0(n)\rho(l)^{-1}f)(n_1) &= (\pi_0(n)\rho(l)^{-1}f)(l^{-1}n_1 l) \\ &= (\rho(l)^{-1}f)(l^{-1}n_1 ln) = f(ll^{-1}n_1 lnl^{-1}) = f(n_1 lnl^{-1}) \\ &= (\pi_0(lnl^{-1})f)(n_1) \end{aligned}$$

donc

$$\pi_0(lnl^{-1}) = \rho(l)\,\pi_0(n)\,\rho(l)^{-1}. \tag{13}$$

5.17. — Les relations (12) et (13) entraînent, dans $\mathcal{H}(\psi_0, N) \otimes \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}(\rho(l)\otimes 1)\,\pi(n)\,(\rho(l)\otimes 1)^{-1} &= \rho(l)\,\pi_0(n)\,\rho(l)^{-1}\otimes 1\\ &= \pi_0(lnl^{-1})\otimes 1 = \pi(lnl^{-1}) = \pi(l)\,\pi(n)\,\pi(l)^{-1}.\end{aligned}$$

Donc $(\rho(l)\otimes 1)^{-1}\pi(l)$ commute à $\pi_0(N)\otimes 1$. Comme π_0 est irréductible, on en déduit que $(\rho(l)\otimes 1)^{-1}\pi(l)$ est de la forme $1\otimes\rho'(l)$, où $\rho'(l)$ est un opérateur unitaire dans $\mathcal{H}$. Autrement dit, $\pi(l) = \rho(l)\otimes\rho'(l)$. Ceci montre que ρ' est une représentation unitaire de L dans $\mathcal{H}$. Soit S un opérateur linéaire continu dans $\mathcal{H}$ permutable à $\rho'(L)$. Alors $1\otimes S$ est permutable à $\pi(L)$, et aussi à $\pi(N) = \pi_0(N)\otimes 1$, donc à $\pi(G)$. Comme π est irréductible, $1\otimes S$ est scalaire, donc S est scalaire. Donc ρ' est irréductible. Comme L est commutatif, on a $\dim\mathcal{H} = 1$.

Ainsi, *$\mathcal{E}(\pi)$ s'identifie à $\mathcal{H}(\psi_0, N)$ et $\pi\,|\,N$ s'identifie à π_0*. Ce qui précède prouve aussi qu'*il existe un caractère unitaire χ de L tel que*

$$\pi(l) = \chi(l)\,\rho(l) \qquad \text{pour} \quad l\in L. \tag{14}$$

Pour $z\in Z$, on a $\rho(z) = 1$. Donc $\chi(z).1 = \pi(z) = \chi_0(z).1$ d'après (6). Donc $\chi\,|\,Z = \chi_0$.

5.18. — Comme $\Gamma_{\mathbf{C}}$ est produit semi-direct topologique de $\Lambda'_{\mathbf{C}}$ et de $N_{\mathbf{C}}$, $M = LH = HL = L'H = HL'$ est un sous-groupe fermé de $\Gamma_{\mathbf{C}}$. Comme χ et ψ_0 coïncident avec χ_0 sur $L\cap H = Z$ (5.17), il existe un morphisme continu ψ de M dans $\mathbf{C}^*$ qui prolonge χ et ψ_0. Nous allons voir que M et ψ possèdent les propriétés (i) à (vii) du théorème.

L'algèbre de Lie de M est somme de celles de L et H, donc H est la partie complexe de M, d'où (i). On a

$$M\cap G = (LH)\cap G = L.(H\cap G) = LZ = L,$$

d'où (ii). La propriété (iii) est évidente. On a $\mathfrak{h}+\overline{\mathfrak{h}} = \mathfrak{n}_{\mathbf{C}}$, d'où (iv) avec $K = N$. On a $HN = NH = N_{\mathbf{C}}$ (3.4), d'où (v). En notant $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}'$ les algèbres de Lie de L et L', on a

$$(\mathfrak{l}_{\mathbf{C}}+\mathfrak{h})\cap(\mathfrak{l}_{\mathbf{C}}+\overline{\mathfrak{h}}) = (\mathfrak{l}'_{\mathbf{C}}\oplus\mathfrak{h})\cap(\mathfrak{l}'_{\mathbf{C}}\oplus\overline{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{l}'_{\mathbf{C}}\oplus(\mathfrak{h}\cap\overline{\mathfrak{h}}) = \mathfrak{l}'_{\mathbf{C}}+\mathfrak{z}_{\mathbf{C}} = \mathfrak{l}_{\mathbf{C}}.$$

Reste à prouver que $\pi = \operatorname{Ind}(\psi, G)$.

5.19. — On a

$$MG = HG = HNG = N_{\mathbf{C}}G = N_{\mathbf{C}}L = N_{\mathbf{C}}L' = GN_{\mathbf{C}} = LN_{\mathbf{C}} = L'N_{\mathbf{C}}.$$

Si $f \in \mathcal{H}^\star(\psi, G)$, f est une fonction définie sur $MG = N_{\mathbf{C}}L'$, holomorphe sur les $N_{\mathbf{C}}g$ (où $g \in G$), telle que

$$f(hg) = \psi_0(h) f(g) \qquad \text{pour} \quad h \in H, \quad g \in HG$$

et

$$f(lg) = \chi(l) f(g) \qquad \text{pour} \quad l \in L, \quad g \in HG. \tag{15}$$

Comme $HG = L'N_{\mathbf{C}}$ est produit semi-direct, en tant que groupe topologique, de L' et $N_{\mathbf{C}}$, on voit que f est continue. On peut donc, sans abus de langage, considérer les éléments de $\mathcal{H}(\psi, G)$ comme des fonctions, et non comme des classes de fonctions. En particulier, si $f \in \mathcal{H}(\psi, G)$, on peut considérer la *restriction* f' de f à $N_{\mathbf{C}}$, qui est holomorphe sur $N_{\mathbf{C}}$ et vérifie $f'(hn) = \psi_0(h) f'(n)$ pour $h \in H$ et $n \in N_{\mathbf{C}}$. Montrons que $f' \in \mathcal{H}(\psi_0, N)$. Si l'on identifie l'espace localement compact G à l'espace localement compact $L' \times N$, β_G s'identifie à $\beta_{L'} \otimes \beta_N$ ([6], p. 66, prop. 14), et G/L s'identifie à N/Z; si l'on note $f^\sim$, $f'^\sim$ les restrictions de f, f' à G, N, alors $(|f^\sim|^2 \beta_G)/\beta_L$ s'identifie à $(|f'^\sim|^2 \beta_N)/\beta_Z$. Ainsi $f' \in \mathcal{H}(\psi_0, N)$, et $\|f'\| = \|f\|$. Par ailleurs, tout élément de $\mathcal{H}(\psi_0, N)$ se prolonge de manière unique en une fonction sur $L'N_{\mathbf{C}} = HG$ vérifiant (15), et cette fonction est élément de $\mathcal{H}(\psi, G)$. Donc $f \mapsto f'$ est un isomorphisme Φ de $\mathcal{H}(\psi, G)$ sur $\mathcal{H}(\psi_0, N)$.

5.20. — Nous achèverons la démonstration en prouvant que $\pi(g) \circ \Phi = \Phi \circ \operatorname{Ind}(\psi, G)(g)$ pour tout $g \in G$. Il suffit de faire la vérification pour $g \in N$ et $g \in L$.

Soient d'abord $n \in N$, $f \in H(\psi, G)$, $n_1 \in N_{\mathbf{C}}$; on a

$$((\Phi \circ \operatorname{Ind}(\psi, G)(n))f)(n_1) = ((\operatorname{Ind}(\psi, G)(n))f)(n_1) = f(n_1 n)$$
$$((\pi(n) \circ \Phi)f)(n_1) = ((\pi_0(n) \circ \Phi)f)(n_1) = \Phi(f)(n_1 n) = f(n_1 n)$$

donc

$$\Phi \circ \operatorname{Ind}(\psi, G)(n) = \pi(n) \circ \Phi.$$

Soient maintenant $l \in L$, $f \in H(\psi, G)$, et $n_1 \in N_{\mathbf{C}}$; on a

$$((\Phi \circ \operatorname{Ind}(\psi, G)(l))f)(n_1) = (\operatorname{Ind}(\psi, G)(l)f)(n_1) = f(n_1 l)$$

et, compte tenu de (14) et (15) :

$$((\pi(l) \circ \Phi)f)(n_1) = (\chi(l)\rho(l)\Phi(f))(n_1) = \chi(l)\Phi(f)(l^{-1}n_1 l)$$
$$= \chi(l) f(l^{-1}n_1 l) = \chi(l)\chi(l^{-1}) f(n_1 l) = f(n_1 l)$$

donc

$$\Phi \circ \operatorname{Ind}(\psi, G)(l) = \pi(l) \circ \Phi.$$

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Bargmann (V.). — On a Hilbert space of analytic functions and an associated integral transform, Part I, *Comm. on pure and appl. Math.*, t. 14, 1961, p. 187-214.

[2] Blattner (R. J.). — On induced representations, *Amer. J. of Math.*, t. 83, 1961, p. 79-98.

[3] Blattner (R. J.). — On induced representations, Part II : Infinitesimal induction, *Amer. J. of Math.*, t. 83, 1961, p. 499-512.

[4] Borel (A.). — Groupes linéaires algébriques, *Annals of Math.*, Séries 2, t. 64, 1956, p. 20-82.

[5] Borel (A.) et Tits (J.). — *Groupes réductifs.* — Paris, Presses universitaires de France, 1965 (Institut des Hautes Études Scientifiques, Publications mathématiques, 27, p. 55-150).

[6] Bourbaki (N.). — *Intégration*, Chap. 7-8. — Paris, Hermann, 1963 (Act. scient. et ind., 1306; Bourbaki, 29).

[7] Chevalley (C.). — *Théorie des groupes de Lie*, Vol. 2. — Paris, Hermann, 1951 (Act. scient. et ind., 1152; Publ. Inst. math. Univ. Nancago, 1).

[8] Chevalley (C.). — *Théorie des groupes de Lie*, Vol. 3. — Paris, Hermann, 1955 (Act. scient. et ind., 1226; Publ. Inst. math. Univ. Nancago, 4).

[9] Dixmier (J.). — Sur les représentations unitaires des groupes de Lie algébriques, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 7, 1957, p. 315-328.

[10] Effros (E. G.). — Transformation groups and C*-algebras, *Annals of Math.*, Séries 2, t. 81, 1965, p. 38-55.

[11] Gel'fand (I. M.) et Graev (M. I.). — Représentations unitaires du groupe réel unimodulaire (séries principales non dégénérées) [en russe], *Izv. Akad. Nauk S. S. S. R.*, t. 17, 1953, p. 189-248; *Amer. math. Soc. Transl.*, Séries 2, t. 2, 1956, p. 147-205.

[12] Harish-Chandra. — Representations of semisimple Lie groups, V, *Amer. J. of Math.*, t. 78, 1956, p. 1-41.

[13] Helgason (S.). — *Differential geometry and symmetric spaces.* — New York, Academic Press, 1962 (Pure and applied Mathematics, 12).

[14] Mackey (G. W.). — Induced representations of locally compact groups, I, *Annals of Math.*, Séries 2, t. 55, 1952, p. 101-139.

[15] Mackey (G. W.). — Unitary representations of group extensions, I, *Acta Math.*, t. 99, 1958, p. 265-311.

[16] von Neumann (J.). — Die Eindeutigkeit des Schrödingerschen Operatoren, *Math. Annalen*, t. 104, 1931, p. 570-578.

[17] Rosenlicht (M.). — A remark on quotient spaces, *Anais Acad. Brasil. Ciencias*, t. 35, 1963, p. 487-489.

[18] Segal (I. E.). — Mathematical characterization of the physical vacuum for a linear Bose-Einstein field, *Illinois J. of Math.*, t. 6, 1962, p. 500-523.

[19] Takenouchi (O.). — Sur la facteur-représentation des groupes de Lie de type (E), *Math. J. Okayama Univ.*, t. 7, 1957, p. 151-161.

(Manuscrit reçu le 5 février 1966.)

Jacques Dixmier,
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris,
64, rue Gay-Lussac, Paris, 5e.