Y. AMICE

Interpolation *p*-adique

Bulletin de la S. M. F., tome 92 (1964), p. 117-180
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1964__92__117_0>

Bull. Soc. math. France,
92, 1964, p. 117 à 180.

INTERPOLATION p-ADIQUE (*) ;

PAR

Mme YVETTE AMICE.

Table des Matières.

Pages.

INTRODUCTION 118

CHAPITRE I. — *Suites très bien réparties.*

1. Systèmes projectifs réguliers.
   1.1. Définitions 119
   1.2. Exemples 121
   1.3. Mesure 123
2. Suites très bien réparties.
   2.1. Définitions 123
   2.2. Construction de suites très bien réparties 126
   2.3. Exemples de suites très bien réparties 132
   2.4. Énoncés particuliers aux corps locaux 134
3. Isométries de M 136
4. Approximation des intégrales.
   4.1. Notations 138
   4.2. Approximation 138

CHAPITRE II. — *Interpolation des fonctions continues.*

5. Propriétés de certains espaces de Banach 139
6. Interpolation sur un compact régulier d'un corps local.
   6.1. Notations 142
   6.2. Un théorème d'interpolation 143
7. Application aux fonctions de plusieurs variables 145

CHAPITRE III. — *Fonctions analytiques.*

8. Fonctions analytiques ; définitions et notations 148
9. Bases d'un espace $A_h(M)$. Interpolation 150
10. Rayon de convergence 158
11. Une base particulière 163

Pages.

12. Fonctions analytiques de plusieurs variables.
 12.1. Notations 165
 12.2. Théorème 2 *bis* 166
 12.3. Fonctions analytiques à valeurs dans un espace de Banach... 166

CHAPITRE IV. — *Applications.*

13. Sommes de séries de Laurent.
 13.1. Définitions 167
 13.2. Proposition 10 168
14. Limites uniformes de séries de Laurent 171
15. Logarithme 175
16. Exponentielle.
 16.1. Fonction α^x 176
 16.2. Prolongement de l'exponentielle à $\mathbf{Q}_p$ 177

BIBLIOGRAPHIE 179

Introduction.

Ce travail est consacré à l'étude de certaines bases normales d'espaces de Banach p-adiques constitués de fonctions continues ou analytiques.

On sait [15] que toute fonction à valeurs p-adiques, continue sur l'anneau $\mathbf{Z}_p$ des entiers p-adiques est la somme d'une série $\sum_{n\geq 0} a_n\binom{x}{n}$, uniformément convergente sur $\mathbf{Z}_p$. Les coefficients de cette série se calculent par interpolation à partir des valeurs prises par la fonction sur la suite des entiers naturels. Nous généralisons ici ce résultat : les ensembles de définition des fonctions étudiées sont des compacts suffisamment réguliers, les suites permettant l'interpolation des fonctions continues sont les suites que nous appelons très bien réparties.

Le chapitre I rassemble des résultats valables dans des espaces métriques compacts totalement discontinus dont la métrique satisfait à une condition de régularité [condition (D) du paragraphe 1]. Ces résultats s'appliquent à une famille très large de compacts d'un corps local : on obtient alors, d'une part les propriétés d'interpolation des fonctions continues qui font l'objet du chapitre II, d'autre part des bases normales des espaces de fonctions analytiques que nous construisons au chapitre III.

Les théorèmes 2 et 3 du chapitre III permettent de caractériser les fonctions localement analytiques parmi les fonctions continues et de déterminer à l'aide de la série d'interpolation le plus petit rayon de convergence des séries de Taylor d'une fonction localement analytique (1).

(*) *Thèse Sc. math.*, Paris, 1963.

(1) Une partie de ces résultats figure dans [1], [2] et [3].

Enfin, au chapitre IV, nous appliquons certains des résultats précédents à l'interpolation des sommes de séries de Laurent et à des prolongements continus de l'exponentielle.

NOTATIONS :

p est un nombre premier, $\mathbf{Q}_p$ le complété p-adique du corps $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, et $\mathbf{Z}_p$ est l'anneau de valuation de $\mathbf{Q}_p$;

K désigne un corps local à valuation discrète, A est l'anneau de valuation de K et $\mathfrak{m}$ l'idéal maximal de A. Le corps des reste $\mathfrak{k} = A/\mathfrak{m}$ est fini; $q = p^r$ est son cardinal. De plus, K est complet.

Nous notons $v(x)$ (resp. $|x|$) la valuation (resp. valeur absolue) d'un élément x de K. Si K est de caractéristique 0, v prolonge la valuation normalisée de $\mathbf{Q}_p$: $v(p) = 1$ et $|x| = p^{-v(x)}$.

CHAPITRE I.

Suites très bien réparties.

1. Systèmes projectifs réguliers.

1.1. Définitions.

Considérons un système projectif dénombrable d'ensembles finis constitué par :

(*a*) *une suite d'ensembles finis* $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$;

(*b*) *des applications* $\varphi_{k,n}$ *de* M_n *dans* M_k, *définies pour* $k < n$ *et telles que pour* $k < n < m$, *on ait*

$$\varphi_{k,m} = \varphi_{k,n} \circ \varphi_{n,m}.$$

Soient M la limite projective de ce système et pr_k la projection canonique de M dans M_k.

La limite projective des topologies discrètes des M_n munit M d'une structure d'espace compact totalement discontinu métrisable (ultramétrique).

Soit $\alpha \in M$: les ensembles

$$V_k(\alpha) = \mathrm{pr}_k^{-1}(\mathrm{pr}_k(\alpha))$$

forment un système fondamental de voisinages ouverts et fermés de α.

DÉFINITION. — *Nous dirons que les données (a) et (b) définissent un* **système projectif régulier** *si elles satisfont aux conditions suivantes :*

PR 0. *M_0 est réduit à un élément;*

PR 1. *Les projections $\varphi_{k,n}$ sont surjectives;*

PR 2. *Il existe une suite d'entiers naturels $q_n \geqq 1$, définis pour $n \geqq 1$ et tels que, quel que soit $\alpha \in M_{n-1}$, on ait*

$$\operatorname{Card}\{\varphi_{n-1,n}^{-1}(\alpha)\} = q_n.$$

La condition **PR** 0 n'est introduite que pour la commodité des notations. La condition **PR** 1 restreint les ensembles M_n à leur partie « efficace » dans la définition de M : le système $\{M_n, \varphi_{k,n}\}$ est, en effet, équivalent au système

$$M'_n = \mathrm{pr}_n(M),$$
$$\varphi'_{k,n} = \varphi_{k,n} \mid M'_n$$

qui satisfait à **PR** 1.

Nous allons montrer comment **PR** 2 caractérise certains aspects de la structure de M. Soit $v(x, y)$ la fonction à valeurs entières, définie sur $M \times M$ par

$$\mathrm{V}\begin{cases} v(x, y) = \sup\{k \mid v_k(x) = v_k(y)\} & \text{si} \quad x \neq y, \\ v(x, x) = +\infty. \end{cases}$$

Cette « *valuation* » satisfait à l'inégalité ultramétrique :

$$v(x, z) \geqq \inf(v(x, y), v(y, z)).$$

Soient ω un nombre réel, $0 < \omega < 1$, et

$$d_\omega(x, y) = \omega^{v(x,y)},$$

la distance d_ω induit la topologie naturelle de M, et les voisinages $V_k(\alpha)$ définis plus haut sont les boules

$$d_\omega(x, \alpha) \leqq \omega^k.$$

On déduit immédiatement de **PR** 2 la propriété :

(D) *Pour $k \geqq 1$, il existe un entier $q_k \geqq 1$ tel que toute boule $V_{k-1}(\alpha)$ soit réunion disjointe de q_k boules $V_k(\alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, q_k)$.*

DÉFINITION. — *Soit M un ensemble muni d'une fonction à valeurs entières définie sur $M \times M$, notée $v(x, y)$ et satisfaisant, quels que soient x, y et z dans M à :*

$v(x, y) = v(y, x)$
$v(x, y) = +\infty \Leftrightarrow y = x$
$v(x, z) \geqq \inf(v(x, y), v(y, z)).$

Nous dirons que la fonction v est une **valuation** *sur M, ou que M est valué par v.*

Il est immédiat qu'étant donné ω, $0 < \omega < 1$, la fonction

$$d_\omega(x, y) = \omega^{v(x,y)}$$

est une distance ultramétrique sur M. De plus, si M est compact pour la topologie définie par cette distance, toute boule $V_k(\alpha) = \{ x \mid v(x, \alpha) \geqq k \}$ est, quel que soit $k \geqq 0$, réunion finie de boules $V_{k+1}(\beta)$. Nous dirons alors que M est un *compact valué*.

Soit M un compact valué, tel que les boules associées à la valuation v satisfassent à la propriété (D). Nous lui associerons :

— la relation d'équivalence π_k, définie pour $k \geqq 0$, par

$$x \pi_k y \iff V_k(x) = V_k(y);$$

— le quotient M_k de M par π_k, et la projection canonique pr_k de M sur M_k;

— l'application $\varphi_{k,n}$ de M_n sur M_k, définie pour $k < n$ par

$$\varphi_{k,n}(\alpha) = \mathrm{pr}_k(\mathrm{pr}_n^{-1}(\alpha)) \qquad \text{pour} \quad \alpha \in M_n.$$

Le système $(M_n, \varphi_{k,n})$ est alors un système projectif régulier, que nous associerons canoniquement à la valuation v, et dont la limite projective est isomorphe à M.

DÉFINITION. — *Nous appellerons* **compact valué régulier**, *un compact valué dont les boules satisfont à la condition* (D).

1.2. Exemples.

1.2.1. Soient $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ des ensembles finis non vides et q_n le cardinal de A_n.

Les produits $M_n = A_1 \times \ldots \times A_n$ (M_0 réduit à un élément), munis des projections canoniques de M_n sur M_k, définies pour $k < n$ par

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_k) \qquad (x_i \in A_i),$$

forment un système projectif régulier.

Réciproquement, tout système projectif régulier est isomorphe à un tel système.

1.2.2. Soit $(G_n, \varphi_{n,k})$ un système projectif de groupes finis, c'est-à-dire un système de données (a) et (b) satisfaisant de plus à :

(c) *G_n est un groupe et $\varphi_{n,k}$ un homomorphisme de groupes.*

Supposons que ce système satisfasse à **PR** 0 et **PR** 1, ce qui est loisible, quitte à le remplacer par un système équivalent. Alors il satisfait à **PR** 2.

En effet, le noyau H_n de $\varphi_{n-1,n}$ est un sous-groupe distingué de G_n, donc chaque $\varphi_{n-1,n}^{-1}(\alpha)$ est une classe module H_n et a Card $H_n = q_n$ éléments.

Réciproquement, soit G un groupe compact totalement discontinu muni d'une distance d invariante par translation à gauche. Les boules de centre l'élément neutre sont des sous-groupes de G, $H_0 = G \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots$, et G s'identifie canoniquement à la limite projective des espaces homogènes G/H_n, dont on vérifie aisément qu'ils forment un système projectif régulier. On peut ici associer à la distance d une valuation canonique, en choisissant pour les sous-groupes H_n toutes les boules centrées à l'élément neutre, et en ordonnant la suite H_n par inclusion stricte : avec ces conventions, un groupe compact totalement discontinu muni d'une distance invariante à gauche est un compact valué régulier.

1.2.3. Soit a une suite de nombres entiers positifs,

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \qquad (a_n \geqq 1).$$

Soient $b_0 = 1$, $b_n = a_1 \ldots a_n$, et A_n l'anneau $\mathbf{Z}/b_n\mathbf{Z}$.

Les anneaux A_n munis des homomorphismes canoniques $\varphi_{k,n}$ de A_n sur A_k, définis, pour $k < n$, par l'isomorphisme

$$A_k \simeq A_n / a_{k+1} \ldots a_n A_n,$$

forment un système projectif régulier d'anneaux. La limite projective $\mathbf{Z}_a$ de ce système est un anneau topologique compact dans lequel $\mathbf{Z}$ est dense (*cf.* par exemple [9]).

En particulier, si $p = (p, p, \ldots, p, \ldots)$, l'anneau $\mathbf{Z}_p$ est l'anneau des entiers p-adiques.

De plus, comme il résulte de 1.2.1, un compact valué régulier, auxquels sont associés les entiers $q_1, \ldots, q_n, \ldots$, est homéomorphe à l'anneau $\mathbf{Z}_a$, où $a = (q_1, \ldots, q_n, \ldots)$.

1.2.4. Soient K un corps local et $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_q\}$ un système de représentants de $\mathfrak{k} = A/\mathfrak{m}$.

A une suite $(P_i)_{i \geqq i_0}$ de parties non vides de α, on peut associer le compact M :

$$M = \left\{ x \mid x = \sum_{i \geqq i_0} \alpha_i \pi^i,\ \alpha_i \in P_i \right\},$$

Le système projectif « naturel » de M induit par la structure canonique de limite projective de K est alors un système projectif régulier. Nous indiquerons au paragraphe 2.4 comment nous normaliserons le système projectif associé à un tel compact. En particulier, l'anneau de valuation A (ou une boule quelconque de K) sont de tels compacts pour lesquels $q_n = q$ pour $n \geqq 1$.

La circonférence unité U de K, ensemble des éléments inversibles de A : $U = \{ x \mid |x| = 1 \}$ est aussi un tel compact pour lequel

$$q_1 = q - 1 \qquad \text{et} \qquad q_n = q \quad \text{pour } n \geqq 2.$$

1.3. **Mesure.**

Soit M un compact valué régulier. Les mesures μ_k définies sur M_k par

$$\mu_k(\{x\}) = \frac{1}{N_k}$$

forment un système projectif de mesures [5] qui définit sur M une forme linéaire telle que $\mu(V_k(\alpha)) = \frac{1}{N_k}\cdot$ En particulier, si M est un groupe, μ est sa mesure de Haar.

Soit $\mathcal{C}(\mathbf{M})$ l'espace des fonctions continues sur M et à valeurs complexes muni de la norme de la convergence uniforme : μ définit sur $\mathcal{C}(M)$ une mesure de norme 1.

2. **Suites très bien réparties.**

Dans ce paragraphe, ainsi qu'aux paragraphes 4 et 5 de ce chapitre, M est un compact valué régulier de valuation v, $q_1, \ldots, q_n$ sont les entiers définis par la condition (D), $N_n = q_1 \ldots q_n$, μ est la mesure ci-dessus définie; enfin, $(M_n, \varphi_{k,n})$ est le système projectif régulier canoniquement associé à v.

2.1. **Définitions.**

Soit u une suite à valeurs dans un ensemble X. Nous noterons u_i la valeur $u(i)$ de la suite u au point $i \in N$ et $S_n(u)$ l'ensemble des n premières valeurs de u

$$S_n(u) = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\} \qquad [S_0(u) = \emptyset].$$

Définition **F**. — *Soient F un ensemble fini, N son cardinal, u une suite à valeurs dans F. Pour $x \in F$ et $n \geqq 1$, posons*

$$\nu_u(x, n) = \text{Card}\{u^{-1}(x) \cap [0, \ldots, n-1]\}.$$

Nous dirons que u est **bien répartie** *dans F si, quels que soient $x \in F$ et $n \geqq 1$,*

$$\nu(x, n) \geqq \left[\frac{n}{N}\right] \qquad \left(\textit{partie entière de } \frac{n}{N}\right)\cdot$$

Définition **BRh**. — *Soient M un compact valué régulier et h un entier $\geqq 1$: une suite u à valeurs dans M est* **bien répartie d'ordre** *h dans M si, pour $i \leqq h$, $\mathrm{pr}_i \circ u$ est bien répartie dans M_i.*

Définition **TBR**. — *Une suite u à valeurs dans M y est* **très bien répartie** *si elle est bien répartie d'ordre h, quel que soit $h \geqq 1$.*

Pour $\alpha \in M$, $k \geqq 1$ et $n \geqq 1$, nous poserons

$$\nu_u(\alpha, n, k) = \operatorname{Card}\{ u^{-1}(V_k(\alpha)) \cap [0, n-1] \}$$

(si u est injectif, on a aussi

$$\nu_u(\alpha, n, k) = \operatorname{Card}\{ V_k(\alpha) \cap S_n(u) \}).$$

En général, une seule suite u interviendra : nous écrirons S_n et $\nu(\alpha, n, k)$ pour $S_n(u)$ et $\nu_u(\alpha, n, k)$.

Proposition 1. — *La suite u est bien répartie d'ordre h dans M si et seulement si elle satisfait à l'une des quatre conditions équivalentes ci-dessous :*

BRh 1. — *Quels que soient $n \geqq 1$ et $1 \leqq k \leqq h$,*

$$\sup_{\alpha \in M} \{ \nu(\alpha, n, k) - \inf_{\alpha \in M} \{ \nu(\alpha, n, k) \} \leqq 1.$$

BRh 2. — *Quels que soient $\alpha \in M$, $m \geqq 1$ et $1 \leqq k \leqq h$,*

$$\nu(\alpha, mN_k, k) = m.$$

BRh 3. — *Quels que soient $\alpha \in M$, $n \geqq 1$ et $1 \leqq k \leqq h$,*

$$\nu(\alpha, n, k) \geqq \left[\frac{n}{N_k} \right].$$

BRh 4. — *Quels que soient $\alpha \in M$, $n \geqq 1$ et $1 \leqq k \leqq h$,*

$$\nu(\alpha, n, k) \leqq \left[\frac{n-1}{N_k} \right] + 1.$$

Remarquons tout d'abord que $\nu(\alpha, n, k) = \nu_{\mathrm{pr}_k \circ u}(\mathrm{pr}_k(\alpha), n)$: l'équivalence de la définition **BRh** et de la condition **BRh 3** en résulte immédiatement.

Nous allons montrer que $\mathbf{2} \overset{\Longrightarrow \mathbf{3} \Longrightarrow}{\underset{\Rightarrow \mathbf{1} \Rightarrow \mathbf{4} \Rightarrow}{}} \mathbf{2}$, ce qui démontrera la proposition.

$\mathbf{2} \overset{\Rightarrow \mathbf{1}}{\underset{\Rightarrow \mathbf{3}}{}}$. Soient $n \geqq 1$, $k \leqq h$ et $m = \left[\frac{n}{N_k} \right]$.

Alors $mN_k \leqq n < (m+1) N_k$; donc, quel que soit $\alpha \in M$,

$$\nu(\alpha, mN_k, k) \leqq \nu(\alpha, n, k) \leqq \nu(\alpha, (m+1) N_k, k).$$

Or, $\nu(\alpha, mN_k, k) = m$ et $\nu(\alpha, (m+1) N_k, k) = m+1$, d'où

$$\left[\frac{n}{N_k} \right] \leqq \nu(\alpha, n, k) \leqq 1 + \left[\frac{n}{N_k} \right],$$

ce qui démontre **1** et **3**.

1 ⇒ 4. Soient $n \geqq 1$ et $k \leqq h$, et soit $\xi = \inf_{\alpha \in M} \nu(\alpha, n, k)$, alors

$$\sup_{\alpha \in M} \nu(\alpha, n, k) \leqq \xi + 1.$$

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_k}$ des représentants de M_k :

$$\sum_{i=1}^{N_k} \nu(\alpha_i, n, k) = n.$$

Donc

$$N_k \xi \leqq n \leqq N_k(\xi + 1)$$

et

$$\xi \leqq \left[\frac{n}{N_k}\right] \leqq \xi + 1.$$

Si $\left[\frac{n}{N_k}\right] = \left[\frac{n-1}{N_k}\right]$, la condition 4 est satisfaite. Sinon, $n = mN_k$, on a $\xi = m$: alors $\sup_{\alpha \in M} \nu(\alpha, n, k) = m + 1$ entraîne

$$\sum_{i=1}^{N_k} \nu(\alpha_i, n, k) \geqq m + 1 + (N_k - 1)m = n + 1,$$

ce qui est absurde. Donc **4** est démontré.

3 ⇒ 2. En effet, d'après **3**, $\nu(\alpha, mN_k, k) \geqq m$, ce qui entraîne, comme nous venons de le montrer, $\nu(\alpha, mN_k, k) = m$.

4 ⇒ 2. En effet, d'après 4, $\nu(\alpha, mN_k, k) \leqq m$ et s'il existe un α_i tel que $\nu(\alpha_i, mN_k, k) \leqq m - 1$, on obtient

$$n = \sum_{i=1}^{N_k} \nu(\alpha_i, n, k) \leqq m - 1 + m(N_k - 1) = n - 1,$$

ce qui est absurde.

Corollaire 1. — *Une suite u est bien répartie d'ordre h dans M si et seulement si, pour $m \geqq 0$, chacune des suites $u^{(m)} : n \rightsquigarrow u_{mN_h+n}$ satisfait à l'une des conditions* **BRh 1, 2, 3, 4.**

En effet, si u est bien répartie d'ordre h,

$$\nu_u(\alpha, mN_h, k) = m\frac{N_h}{N_k}, \qquad \text{pour} \quad k \leqq h,$$

$$\nu_{u^{(m)}}(\alpha, n, k) = \nu_u(\alpha, mN_h + n, k) - m\frac{N_h}{N_k}.$$

Or, $\left[\frac{n}{N_k}\right] = \left[\frac{mN_h + n}{N_k}\right] - m\frac{N_h}{N_k}$, ce qui montre que $u^{(m)}$ satisfait aux conditions **BRh 1, 2, 3, 4.**

Réciproquement, $u^{(0)} = u$.

Remarque. — Compte tenu de la notation $\mathcal{P}_n$ introduite au paragraphe 2.2, la proposition 3 admet l'énoncé équivalent suivant :

Une suite u est bien répartie d'ordre k dans M si et seulement si, pour $m \geqq 0$, la suite finie $U_m = \{u_{mN_k}, \ldots, u_{(m+1)N_k-1}\}$ satisfait à $\mathcal{P}_{N_k}$.

On en déduit aisément le critère de très bonne répartition suivant :

Corollaire 2. — *Une suite u est très bien répartie dans M si et seulement si, quels que soient $m \geqq 0$ et $k \geqq 1$, l'ensemble des valeurs u_n, où $n = j + mN_k$, $0 \leqq j < N_k$ forme un système de représentants de M_k.*

2.2. Construction de suites très bien réparties.

Désormais, *nous supposons que M n'est pas fini* (et conservons les notations du paragraphe 2).

Étant donnée une suite finie $S_n = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$, nous dirons qu'elle satisfait à $\mathcal{P}_n$ si

$$(\mathcal{P}_n) \qquad \left\{\begin{array}{l} 1 \leqq j \leqq n \\ k \geqq 1 \\ \alpha \in M \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\frac{j}{N_k}\right] \leqq \nu(\alpha, j, k) \leqq 1 + \left[\frac{j-1}{N_k}\right].$$

Il est clair qu'une suite u est très bien répartie si et seulement si $S_n(u)$ satisfait à $\mathcal{P}_n$ quel que soit $n \geqq 1$.

Proposition 2. — *Soit $S_n = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\}$ satisfaisant à $\mathcal{P}_n$: pour que $S_{n+1} = S_n \cup \{u_n\}$ satisfase à $\mathcal{P}_{n+1}$ il faut et il suffit que, pour $k \geqq 1$,*

$$\nu(u_n, n, k) = \left[\frac{n}{N_k}\right].$$

Cette condition est nécessaire : soit en effet $k \geqq 1$,

$$\mathcal{P}_{n+1} \Rightarrow \nu(u_n, n+1, k) \leqq 1 + \left[\frac{n+1-1}{N_k}\right].$$

Or, $\nu(u_n, n, k) = \nu(u\ , n+1, k) - 1$, d'où

$$\nu(u_n, n, k) = \left[\frac{n}{N_k}\right].$$

Réciproquement, supposons que, pour $k \geqq 1$, on ait

$$\nu(u_n, n, k) = \left[\frac{n}{N_k}\right].$$

Fixons k, et soit $\alpha \in M$:

$$\nu(\alpha, n+1, k) = \begin{cases} \nu(\alpha, n, k) & \text{si } \alpha \notin V_k(u_n), \\ 1 + \left[\dfrac{n}{N_k}\right] & \text{si } \alpha \in V_k(u_n), \end{cases}$$

alors :

— ou bien $\left[\dfrac{n+1}{N_k}\right] = \left[\dfrac{n}{N_k}\right]$ donc quel que soit $\alpha \in M$,

$$\left[\frac{n+1}{N_k}\right] \leqq \nu(\alpha, n+1, k) \leqq 1 + \left[\frac{n}{N_k}\right]$$

et $\mathfrak{T}_{n+1}$ est satisfaite;

— ou bien $\left[\dfrac{n+1}{N_k}\right] = 1 + \left[\dfrac{n}{N_k}\right]$; dans ce cas on a encore, quel que soit $\alpha \in M$,

$$\nu(\alpha, n+1, k) \leqq 1 + \left[\frac{n}{N_k}\right].$$

Montrons qu'on a aussi

$$\nu(\alpha, n+1, k) \geqq \left[\frac{n+1}{N_k}\right] = m.$$

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_k}$ des représentants de M_k, et supposons par exemple que $u_n \in V_k(\alpha_1)$. Alors

$$\nu(\alpha_1, n, k) = m - 1,$$

donc

$$\sum_{i=2}^{N_k} \nu(\alpha_i, n, k) = n - (m-1) = m(N_k - 1).$$

Or, pour tout i, $\nu(\alpha_i, n, k) \leqq m$, donc, pour $i = 2, \ldots, N_k$,

$$\nu(\alpha_i, n, k) = m = \nu(\alpha_i, n+1, k)$$

et

$$\nu(\alpha_1, n+1, k) = m.$$

C. Q. F. D.

Proposition 3. — *Soit* $S_n = \{u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ *satisfaisant à* $\mathfrak{T}_n$, *et posons*

$$v_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} v(x, u_i).$$

Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $v_n(x) = \inf\limits_{y \in M} v_n(y)$;

(ii) $v_n(x) = \sum\limits_{k \geqq 1} \left[\dfrac{n}{N_k}\right]$;

(iii) *pour tout* $k \geqq 1$, $\nu(x, n, k) = \left[\frac{n}{N_k}\right]$;

(iv) *la suite* $S_n \cup \{x\}$ *satisfait à* $\mathcal{P}_{n+1}$.

De plus, l'ensemble E_n *des éléments* x *satisfaisant à l'une de ces propriétés est ouvert et compact, et si* $n = n_0 + n_1 N_1 + \ldots + n_h N_h + \ldots$, $0 \leqq n_i < q_{i+1}$,

$$\mu(E_n) = \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{n_i}{q_{i+1}}\right).$$

L'équivalence de (iii) et (iv) a fait l'objet de la proposition 2 et n'est citée ici que pour mémoire.

L'équivalence de (ii) et (iii) résulte de $\mathcal{P}_n$ par l'intermédiaire de la remarque suivante :

Le nombre des indices $j \leqq n - 1$ tels que $v(x, u_j) = k$ est $\nu(x, n, k) - \nu(x, n, k + 1)$, donc

$$v_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k(\nu(x, n, k) - \nu(x, n, k + 1)) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(x, n, k).$$

Alors

$$\mathcal{P}_n \Rightarrow v_n(x) \geqq \sum_{k \geqq 1} \left[\frac{n}{N_k}\right] \quad \text{quel que soit } x \in M,$$

et

$$v_n(x) = \sum_{k \geqq 1} \left[\frac{n}{N_k}\right] \iff \text{quel que soit } k \geqq 1, \qquad \nu(x, n, k) = \left[\frac{n}{N_k}\right].$$

L'équivalence de (i) et (iii) résultera du fait que

$$\inf_{y \in M} v_n(y) = \sum_{k \geqq 1} \left[\frac{n}{N_k}\right],$$

ce que nous allons montrer en étudiant l'ensemble E_n des éléments x satisfaisant à (iii).

Soit h défini par $N_h \leqq n \leqq N_{h+1}$, alors

$$n = n_0 + n_1 N_1 + \ldots + n_h N_h \qquad (0 \leqq n_i < q_{i+1}).$$

Quel que soit $\alpha \in M$,

$$\left[\frac{n}{N_1}\right] \leqq \nu(\alpha, n, 1) \leqq 1 + \left[\frac{n}{N_1}\right],$$

donc, parmi les N_1 disques disjoints $V_1(\alpha_i)$ recouvrant M, il y en a n_0 qui contiennent $1 + \left[\frac{n}{N_1}\right]$ points de S_n et $N_1 - n_0$ qui en contiennent $\left[\frac{n}{N_1}\right]$.

L'ensemble $\mathcal{E}_{1,n} = \left\{ x \,\middle|\, \nu(x, n, 1) = \left[\frac{n}{N_1}\right] \right\}$ est réunion de $N_1 - n_0$ disques $V_1(\alpha_i)$ dont chacun contient

$$n_1 + n_2 q_2 + \ldots + n_h q_2 \ldots q_h \quad \text{points de } S_n.$$

Soit, pour $k \geqq 1$, $\mathcal{E}_{k,n} = \left\{ x \,\middle|\, \nu(x, n, h) = \left[\frac{n}{N_h}\right] \text{ pour tout } h \leqq k \right\}$.

Alors, $\mathcal{E}_{h+1,n} = \mathcal{E}_{k,n}$ pour $k \geqq h+1$ et

$$E_n = \bigcap_{k \geqq 1} \mathcal{E}_{k,n} = \mathcal{E}_{h+1,n}.$$

Soit $j \leqq h$, et supposons que $\mathcal{E}_{j,n}$ soit réunion disjointe de

$$(q_1 - n_0)(q_2 - n_1) \ldots (q_j - n_{j-1}) \quad \text{disques } V_j(\alpha)$$

dont chacun contient

$$\left[\frac{n}{N_j}\right] = n_j + n_{j+1} q_{j+1} + \ldots + n_h q_{j+1} \ldots q_h \quad \text{points de S}_n$$

(ce qui est vrai pour $j = 1$), alors pour $\alpha \in \mathcal{E}_{j,n}$, $V_j(\alpha)$ est réunion de q_{j+1} boules $V_{j+1}(\alpha_i)$ parmi lesquelles

— n_j contiennent $1 + \left[\frac{n}{N_j}\right]$ points de S_n, et

— $q_{j+1} - n_j$ en contiennent $\left[\frac{n}{N_j}\right] = n_{j+1} + n_{j+2} + \ldots + n_h q_{j+2} \ldots q_h$.

Donc $V_j(\alpha) \cap \mathcal{E}_{j+1,n}$, est réunion disjointe de $q_{j+1} - n_j$ boules $V_{j+1}(x_1)$, quel que soit $\alpha \in \mathcal{E}_{j,n}$, ce qui montre que $E_n = \mathcal{E}_{h+1,n}$ est réunion de $(q_1 - n_0) \ldots (q_{h+1} - n_h)$ disques $V_{h+1}(\alpha_i)$; c'est donc un ensemble ouvert et compact, dont la mesure est

$$\mu(E_n) = \prod_{j=0}^{+\infty} \left(1 - \frac{n_i}{q_{i+1}}\right).$$

En particulier, E_n n'est pas vide, ce qui montre l'équivalence de (i) et (iii),

Corollaire 1. — *Pour que u soit très bien répartie dans M, il faut et il suffit que pour $n \geqq 1$,*

$$v_n(u_n) = \sum_{k \geqq 1} \left[\frac{n}{N_k}\right].$$

Corollaire 2. — *Pour que u soit très bien répartie dans M, il faut et il suffit que pour $n \geqq 1$,*

$$v_n(u_n) = \inf_{x \in M} v_n(x).$$

Proposition 3 *bis*. — *Si pour tout* $j \leqq N_h$ *on a*

$$\inf_{x \in M} v_j(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{j}{N_k}\right],$$

alors S_{N_h} *satisfait à* $\mathfrak{P}_{N_h}$.

Supposons, que S_{N_h} ne satisfasse pas $\mathfrak{P}_{N_h}$: il existe alors $n \in [1, \ldots, N_h]$, $x \in M$ et $k \in [1, h]$ tels que

$$\nu(x, n, k) < \left[\frac{n}{N_k}\right]. \tag{1}$$

Soit n_0 le plus petit des n ainsi définis, et soit k_0 le plus petit entier tel qu'il existe x satisfaisant à (1) pour $n = n_0$. Alors n_0 est un multiple de N_{k_0}, sinon, $\left[\frac{n_0 - 1}{N_{k_0}}\right] = \left[\frac{n_0}{N_{k_0}}\right]$ et

$$\nu(x, n_0, k) < \left[\frac{n_0}{N_{k_0}}\right] \quad \Rightarrow \quad \nu(x, n_0 - 1, k) < \left[\frac{n_0 - 1}{N_{k_0}}\right],$$

n_0 ne serait donc pas minimal.

Alors, pour $j < k_0$ et quel que soit $x \in M$,

$$\nu(x, n_0, j) \geqq \left[\frac{n_0}{N_j}\right] = \frac{n_0}{N_j},$$

ce qui entraîne que

$$\nu(x, n_0, j) = \frac{n_0}{N_j}.$$

De plus, il existe $x_1 \in V_{k_0}(x_0)$ et tel que

$$\nu(x_1, n_0, k_0 + 1) \leqq \left[\frac{n_0}{N_{k_0+1}}\right]$$

sinon, on aurait en sommant sur les disques V_{k_0+1} recouvrant $V_{k_0}(x_0)$

$$\frac{n_0}{N_k} > \nu(x_0, n_0, k_0) \geqq (q_{k_0+1}) \left(1 + \left[\frac{n_0}{N_{k_0+1}}\right]\right),$$

ce qui est absurde.

Finalement, il existe donc $x_{h-k_0-1} \in V_{h-1}(x_{h=k_0-1}), \ldots, x_1 \in V_{k_0}(x_0)$ et tel que $\nu(x_{h-k_0-1}, n_0, j)$ soit :

— égal à $\left[\frac{n_0}{N_j}\right]$ pour $j < k_0$;

— strictement inférieur à $\left[\frac{n_0}{N_{k_0}}\right]$ pour $j = k_0$;

— inférieur ou égal à $\left[\frac{n_0}{N_j}\right]$ pour $j \geqq k_0$.

Alors $v_{n_0}(V_{h-k_0-1}) < \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n_0}{N_j}\right]$, et la proposition est démontrée.

REMARQUES.

1. Une suite très bien répartie est injective.

2. Soit $S_{N_k} = \{u_0, \ldots, u_{N_{k-1}}\}$ satisfaisant à $\mathcal{P}_{N_k}$: S_{N_k} est un système de représentants de M_k. Réciproquement, tout système de représentants de M_k peut être indexé de façon à constituer une suite S_{N_k} satisfaisant à $\mathcal{P}_{N_k}$.

3. Soit $h \geq 1$: la condition (iii), pour $n = N_h$, se réduit à : il existe $j < N_h$, tel que $v(x, u_j) = h$. L'ensemble E_{N_h} est de mesure $1 - \frac{1}{q_{h+1}}$.

4. Étant donnés x_0 et y_0 distincts, on peut construire une suite très bien répartie u telle que :

— $u_0 = y_0$;
— il existe n, avec $u_n = y_0$;
— $1 \leq j \leq n - 1 \Rightarrow v(x_0, u_j) < v(x_0, y_0)$.

Soient, en effet, $k = v(x_0, y_0)$ et $S_{N_k} = \{x_0, u_1, \ldots, u_{N_{k-1}}\}$ satisfaisant à $\mathcal{P}_{N_k}$. Alors $y_0 \in E_{N_k}$, d'après la remarque 3, $S_{N_k+1} = \{x_0, u_0, \ldots, N_{N_{k-1}}, y_0)\}$ satisfaisant à P_{N_k+1}, et pour $j \leq n - 1$,

$$v(x_0, u_j) \leq k - 1 < v(x_0, y_0) = k.$$

5. Soient plus généralement $S_n = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\}$ satisfaisant à $\mathcal{P}_n$ et $x_1, \ldots, x_s, \ldots$ des éléments de M deux à deux distincts n'appartenant pas à S_n, on peut alors construire une suite très bien répartie u telle que :

— $S_n = S_n(u)$;
— il existe $i_1 < i_2 < \ldots < i_s < \ldots$, avec $u(i_j) = x_j$. Soient, en effet,

$$k_1 = \sup_{j \leq n-1} v(x_1, u_j) \qquad \text{et} \qquad X = \{x_1, \ldots, x_0, \ldots\}.$$

On peut construire $u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{N_{k_1-1}}$, de telle sorte que

$$S_{N_{k_1}} = \{u_0, \ldots, u_{N_{k_1-1}}\}$$

satisfasse à $\mathcal{P}_{N_{k_1}}$ et $S_{N_{k_1}} \cap X = \emptyset$, car X étant de mesure nulle, pour $n \leq j \leq N_{k_1-1}$, on a $\mu(E_j) \neq 0$ et l'on peut choisir $u_j \in E_j$ et $u_j \notin X$.

Alors $x_1 \in E_{N_{k_1}}$, d'après la remarque 3, et l'on peut prendre $i_1 = N_{k_1}$. La démonstration se poursuit par récurrence sur s.

En particulier, étant donnée une suite injective v, on peut construire une suite u très bien répartie telle que v soit une suite extraite de u.

6. Soit S une partie dense de M : on peut construire une suite très bien répartie dans M, à valeurs dans S.

2.3. Exemples de suites très bien réparties.

2.3.1. — *La suite des entiers naturels est très bien répartie dans l'anneau* $\mathbf{Z}_a$ construit dans l'exemple 1.2.3. En particulier, la suite des entiers naturels est très bien répartie dans l'anneau $\mathbf{Z}_p$ des entiers p-adiques.

2.3.2. — Reprenant les notations de 1.2.4, supposons de plus qu'il existe une infinité d'indices i tels que $\operatorname{Card} P_i > 1$ et que chaque P_i soit indexé :

$$P_i = \{ \alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_{q_{i-i_0-1}}} \}.$$

Soit $n = n_0 + n_1 N_1 + \ldots + n_h N_h + \ldots \ (0 \leqq n_h < q_{h+1})$: la suite

$$n \rightsquigarrow u_n = \pi^{i_0} \sum_{i \geqq 0} \alpha_{n_i} \pi^i$$

est très bien répartie dans M comme on le voit immédiatement en appliquant le corollaire 2 de la proposition 3.

2.3.3. — Soient $(M_n : \varphi_{k,n})$ et $(M'_n, \varphi'_{k,n})$ deux systèmes projectifs réguliers.

Posons

$$R_n = M_n \times M'_n,$$
$$\psi_{k,n} = (\varphi_{k,n}, \varphi'_{k,n}).$$

Le système $(R_n, \psi_{k,n})$ est un système projectif régulier auquel sont associés les entiers $r_n = q_n q'_n$.

La limite projective R de ce système est canoniquement isomorphe au produit $M \times M'$ des limites projectives de M_n et M'_n.

Soient u et u' deux suites très bien réparties dans M et M'.

Pour $n \geqq 0$, posons

$$n = n_0 + n_1 r_1 + \ldots + n_h r_1 \ldots r_h \qquad (0 \leqq n_i < r_{i+1}),$$
$$n_i = m_i + q_i m'_i, \qquad \text{avec} \begin{cases} 0 \leqq m_i < q_i, \\ 0 \leqq m'_i < q'_i, \end{cases}$$
$$m(n) = m_0 + m_1 q_1 + \ldots + m_h q_1 \ldots q_h.$$
$$m'(n) = m'_0 + m'_1 q'_1 + \ldots + m'_h q'_1 \ldots q'_h,$$

Alors, la suite v à valeur dans R définie par

$$v(n) = (u_{m(n)}, u'_{m'(n)})$$

est très bien répartie dans R : nous poserons $v = (u, u')$.

2.3.4. — Soient K une extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, s le degré de K et A l'anneau de valuation de K. A est isomorphe à $\mathbf{Z}_p^s$. Utilisons la construction précédente à partir de la suite des entiers naturels : soit $(\omega_1, \ldots, \omega_s)$ une base du $\mathbf{Z}_p$-module A et posons, pour $n \geqq 0$,

$$n = \sum_{i \geqq 0} n_i p^i. \qquad (0 \leqq n_i < p)$$

et, pour $j = 0, \ldots, s-1$,

$$m_j(n) = \sum_{i \geqq 0} n_{j+si} p^i.$$

La suite $n \rightsquigarrow \sum_{j=0}^{n-1} m_j(n)\, \omega_{j+1}$ est très bien répartie dans A.

2.3.5. — Soit G un *groupe profini* (compact totalement discontinu métrisable). Supposons que G soit monogène (ou monothétique, *cf.* [7]) : il existe un générateur α de G, tel que le groupe cyclique engendré par α soit dense dans G.

A une suite décroissante de sous-groupes ouverts H_i, dont l'intersection est réduite à l'élément neutre, on peut associer biunivoquement un système projectif régulier de groupes cycliques $G/H_i = G_i$, dont G est la limite projective, ce qui munit G d'une structure de compact valué régulier. Chaque G_i est engendré par l'image de α, et il est immédiat que la suite $n \rightsquigarrow \alpha^n$ est très bien répartie dans G.

Donc $n \rightsquigarrow \alpha^n$ est très bien répartie dans G pour toute valuation invariante de G.

En particulier, soient K un corps local et $\alpha \in K$, notons $\overline{(\alpha)}$ l'adhérence du groupe cyclique $(\alpha^n)_{n \in \mathbf{Z}}$.

Si $|\alpha| \neq 1$, $\overline{(\alpha)}$ est discret.

Si $\alpha = 1$, $\overline{(\alpha)}$ est un compact régulier de K (*cf.* définition, § 2.4) et $n \rightsquigarrow \alpha^n$ y est très bien répartie, donc :

Soit $\alpha \in K$, pour qu'il existe un compact M de K dans lequel α^n soit équirépartie, il faut et il suffit que $|\alpha| = 1$. Alors M est un compact régulier de K (éventuellement discret si α est d'ordre fini dans K^*) et $n \rightsquigarrow \alpha^n$ y est très bien répartie.

Soit $\alpha \in \mathbf{Q}_p (p \neq 2)$:

(*a*) *pour que $n \rightsquigarrow \alpha^n$ soit très bien répartie dans $1 + p\mathbf{Z}_p$ il faut et il suffit que $v(\alpha - 1) = 1$;*

(*b*) *pour que $n \rightsquigarrow \alpha^n$ soit très bien répartie dans la circonférence unité $U = \mathbf{Z}_p - p\mathbf{Z}_p$ de $\mathbf{Q}_p$, il faut et il suffit que :*

— *$\bar{\alpha}$ soit un générateur de* $\left(\dfrac{Z}{(p)}\right)^*$, et

— $v(\alpha^{p-1} - 1) = 1$.

2.4. Énoncés particuliers aux corps locaux.

DÉFINITION. — *Soient K un corps local et M un compact de K, dont le diamètre est inférieur ou égal à* 1, *nous dirons que M est un* **compact régulier** *de K si la valuation à valeurs entières,*

$$v(x, y) = \frac{1}{v(\pi)} v(y - x)$$

induite sur M par la valuation de K satisfait à la condition (D).

Il est naturel de dire qu'un compact de diamètre supérieur à 1 est un compact régulier de K si ses homothétiques de diamètre 1 sont des compacts réguliers de K. Cependant, pour éviter d'alourdir les notations, nous nous restreindrons dans le chapitre II à des compacts de diamètre inférieur ou égal à 1, et dans le chapitre III à ceux de diamètre 1, la traduction des énoncés en diamètre quelconque étant immédiate.

Dans ce paragraphe, M est donc un compact régulier de K, au sens de la définition donnée ci-dessus. Nous supposerons de plus que M n'est pas discret.

A une suite u à valeurs dans M, nous associerons la suite des polynômes $P_n(X)$, définis pour $n \geq 0$ par

$$P_n(X) = (X - u_0)(X - u_1) \ldots (X - u_{n-1}).$$

Si u est injective, nous définirons de même

$$Q_n(X) = \frac{(X - u_0)(X - u_1) \ldots (X - u_{n-1})}{(u_n - u_0)(u_n - u_1) \ldots (u_n - u_{n-1})} = \frac{P_n(X)}{P_n(u_n)}.$$

Avec ces notations, la fonction $v_n(x)$ définie plus haut est

$$v_n(x) = \frac{1}{v(\pi)} v(P_n(X)).$$

Les lemmes ci-dessous, qui seront utilisés ultérieurement, sont la traduction de la proposition 3 et de ses corollaires 1 et 2, en termes de polynômes et valeurs absolues :

LEMME 1. — *Soit* $S_n = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\}$ *satisfaisant à* $\mathfrak{T}_n$, *alors*

$$\sup_{x \in M} |P_n(x)| = |\pi|^{\lambda_n}, \qquad \text{où} \quad \lambda_n = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{N_k}\right].$$

LEMME 2. — *Soit* $S_n = \{u_0, \ldots, u_{n-1}\}$ *satisfaisant à* $\mathfrak{T}_n$, *alors* $S_n \cup \{u_n\}$ *satisfait à* $\mathfrak{T}_{n+1}$ *si et seulement si*

$$|P_n(u_n)| = \sup_{x \in M} |P_n(x)|.$$

LEMME 3. — *Pour que u soit très bien répartie dans M, il faut et il suffit que, pour $n \geqq 0$,*

$$\sup_{x \in M} |Q_n(x)| = 1.$$

Il existe une réciproque au lemme 3, que J.-P. SERRE m'a signalée dans le cas des coefficients binomiaux (§ 7, exemple) : elle ne sera pas utilisée ultérieurement, en voici cependant une démonstration sommaire.

Soient Ω le complété de la fermeture algébrique de $\mathbf{Q}_p$, M un compact régulier d'une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, et u une suite très bien répartie dans M, alors

$$\{ x \in \Omega \,|\, |Q_n(x)| \leqq 1 \text{ pour tout } n \geqq 0 \} = M.$$

Le lemme 3 permet d'affirmer que M est contenu dans l'ensemble ci-dessus défini. Soit $x \in \Omega$, $x \notin M$; posons $\rho = \sup_{y \in M} v(x-y)$, ρ est fini.

Soit $h = \inf \{ n \in \mathbf{N} \,|\, \rho < n\, v(\pi) \}$. Alors

$$v(P_{N_h}(x)) = \sum_{j=0}^{N_{k-1}} v(x-u_j),$$

donc

$$v(P_{N_h}(x)) \leqq \left(\sum_{k=1}^{h-1} k \left(\sum_{v(x-u_j)=kv(\pi)} 1 \right) \right) v(\pi) + \sum_{v(x-u_j)>(h-1)v(\pi)} \rho.$$

Or, pour $k \leqq h-1$,

$$\sum_{v(x-u_j)=kv(\pi)} 1 \leqq \left[\frac{N_h}{N_k} \right] - \left[\frac{N_h}{N_{k+1}} \right],$$

et

$$\sum_{v(x-u_j)>(h-1)v(\pi)} \rho \leqq \rho.$$

D'où

$$v(P_{N_h}(x)) \leqq \sum_{k=1}^{h-1} \left[\frac{N_h}{N_k} \right] + \rho - ((h-1)\, v(\pi),$$

soit

$$v(P_{N_h}(x)) \leqq \left(\sum_{k \geqq 1} \left[\frac{N_h}{N_k} \right] \right) v(\pi) + \rho - h\, v(\pi) < v(P_{N_h}(u_{N_h})).$$

Alors $|Q_{N_h}(x)| > 1$, ce qui démontre la propriété.

De plus, les polynômes $\mathbf{Q}_n$ ont la propriété suivante :

LEMME 4. — *Soit u très bien répartie dans M et soit $n < N_h$, alors*

$$x \in V_h(a) \Rightarrow |Q_n(x) - Q_n(a)| < 1.$$

En effet, si $|Q_n(a)| = 1$, $a \in E_n$, donc

$$\nu(a, n, h) = \left[\frac{n}{N_h}\right] = 0.$$

Alors, pour $x \in V_h(a)$, $|x - a| \leqq |\pi| . |a - u_j|$, quel que soit $j < n$, et

$$\left|\frac{x - u_j}{a - u_j} - 1\right| \leqq |\pi|.$$

Donc, $\left|\frac{Q_n(x)}{Q_n(a)} - 1\right| \leqq |\pi|$, ce qui, avec $|Q_n(a)| = 1$, donne

$$|Q_n(x) - Q_n(a)| < 1.$$

Si $|Q_n(a)| < 1$, il n'existe aucun $x \in V_h(a)$ et tel que $|Q_n(x)| = 1$, car la première partie de la démonstration entraînerait $|Q_n(a)| = 1$. Donc pour tout $x \in V_h(a)$,

$$|Q_n(x)| < 1, \qquad \text{et aussi} \qquad |Q_n(x) - Q_n(a)| < 1.$$

D'où le lemme.

3. Isométries de M.

DÉFINITION. — *Soit M un compact valué régulier :* une **isométrie** *de M est une application g de M dans lui-même telle que, quels que soient x et y dans M,*

$$v(g(x), g(y)) = v(x, y).$$

Une isométrie est une bijection : en effet, si $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_k}$ sont des représentants de M_k, $g(\alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, N_k)$ sont aussi des représentants de M_k, donc g induit une permutation de M_k, ceci quel que soit k, et g est bijective.

L'ensemble G des isométries de M est un sous-groupe du groupe des permutations de M.

Soient 1 l'application identique et $g \in G$, posons

$$v(g, 1) = \sup_{x \in M}(v(g(x)), x).$$

Ceci définit sur G une valuation qui induit la topologie de la convergence uniforme, et G est un compact valué régulier : explicitons le système projectif régulier associé.

Soit $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de M.

Si $g \in G$ et $\mathrm{pr}_n(x) = \mathrm{pr}_n(y)$, $\mathrm{pr}_n(g(x)) = \mathrm{pr}_n(g(y))$, donc g définit une permutation g_n de M_n : soit π_n l'homomorphisme $g \rightsquigarrow \pi_n(g) = g_n$ de G dans $\mathfrak{S}_n$.

Posons

$$G_n = \pi_n(G) \qquad \text{et} \qquad \varphi_{k,n} = \pi_k \circ \pi_n^{-1};$$

alors le système $(G_n, \varphi_{k,n})$ est le système projectif régulier associé au groupe valué G.

Les groupes G_n sont d'ailleurs caractérisés par les propriétés suivantes :

— $G_0 = \mathfrak{S}_0$;

— soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$:

$$\sigma \in G_n \iff \varphi_{n-1,n} \circ \sigma \circ \varphi_{n-1,n}^{-1} \in G_{n-1}.$$

Dans le cas où M_n est un produit $A_1 \times \ldots \times A_n$ (exemple 1.2.1), le groupe G_n est le produit complet des groupes symétriques de $A_1 \ldots A_n$ (*cf*, par exemple, [12], [13] et [14]).

Nous allons montrer que les suites très bien réparties permettent de caractériser les isométries de M.

PROPOSITION 4. — *Soient U l'ensemble des suites très bien réparties dans M et g une application de M dans lui-même. Alors*

$$g \in G \iff \{u \in U \Rightarrow g \circ u \in U\}.$$

Si $g \in G$, il est clair que $g \circ U \subseteq U$.

Réciproquement, d'après le corollaire 1, proposition 3,

$$u \in U \iff v_n(u_n) = \sum_{k \geq 1} \left[\frac{n}{N_k}\right] \qquad \text{pour} \quad n \geq 1.$$

Soient $g \in M$,

$$u \in U, \qquad u' = g \circ U \qquad \text{et} \qquad v'_n(x) = \sum_{j=0}^{n-1} v(x, u'_j).$$

Nous allons montrer que si $g \notin G$, on peut construire $u \in U$ de telle sorte que $g \circ u = u' \notin U$.

Soit, pour $x \in M$,

$$A_x = \{ y \mid v(g(x), g(y)) \neq v(x, y) \}.$$

Si $g \notin G$, il existe x_0 tel que A_{x_0} soit non vide. Soit $y_0 \in A_{x_0}$ et tel que

$$v(x_0, y_0) = k = \inf_{y \in A_{x_0}} v(x_0, y).$$

On peut construire (remarque 4, § 2.2) une suite $u \in U$ et telle que

$$u_0 = y_0,$$
$$u_{N_k} = x_0,$$
$$v(x_0, u_j) < v(x_0, y_0) \qquad \text{pour} \quad 1 \leq j < N_k.$$

Alors, pour $1 \leq j < N_k$, $u_j \notin A_{x_0}$. Donc

$$\sum_{j=1}^{N_{k-1}} v(g(x_0), g(u_j)) = \sum_{j=1}^{N_{k-1}} v(x_0, u_j).$$

Donc $v'_{N_k}(g(x_0)) \neq v_{N_k}(x_0)$, et $u' = g \circ u \notin U$.

C. Q. F. D.

4. Approximation des intégrales.

4.1. Notations.

Soient E une partie de M et u une suite à valeurs dans M, posons

$$\nu_E(n) = \mathrm{Card}\,\{ u^{-1}(E) \cap [\,0, n-1\,[\,\}$$

[alors $\nu_{F_k(\alpha)}(n) = \nu(\alpha, n, k)$].

Équirépartition. — Nous dirons qu'une suite u est *équirépartie dans M* si elle satisfait à l'une des conditions équivalentes suivantes :

E_1 : *Pour tout fermé E dont la frontière est de mesure nulle,*

$$\lim_{n \to +\infty} \nu_E(n)/n = \mu(E).$$

E_2 : *Pour toute $f \in \mathcal{C}(M)$ (espace des fonctions continues sur M à valeurs complexes)*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(u_j) \right) = \mu(f).$$

La démonstration classique de l'équivalence de E_1 et E_2 dans un groupe compact (*cf.*, par exemple, [7]) reste valable ici. On peut d'ailleurs aussi utiliser un isomorphisme de M sur un anneau $\mathbf{Z}_a$.

Modules de continuité. — Soit φ une application décroissante de N dans R^+, tendant vers zéro à l'infini. Nous noterons A_φ l'ensemble des fonctions de $\mathcal{C}(M)$ admettant le module de continuité φ :

$$A_\varphi = \{ f \in \mathcal{C}(M) \mid v(x, y) \geqq k \Leftrightarrow |f(x) - f(y)| \leqq \varphi(k) \}.$$

Enfin, pour toute $f \in \mathcal{C}(M)$ et tout $n \geqq 1$, nous poserons

$$\sum(f, n) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(u_j).$$

4.2. Approximation.

PROPOSITION 5. — *Une suite u est très bien répartie dans M si, et seulement si, quel que soit le module de continuité φ,*

$$\left. \begin{array}{r} f \in A_\varphi \\ k \geqq 1 \\ n \geqq 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left| \sum(f, nN_k) - \mu(f) \right| \leqq \varphi(k).$$

Soit u très bien répartie : l'ensemble $S_{nN_k}(u)$ est réunion disjointe de n systèmes de représentants de M_k. Soient $S_1, \ldots, S_n$ ces systèmes et soit $f_i(x)$ la fonction constante par morceaux, définie pour $i = 1, \ldots, n$, par

$$f_i(x) = f(u_j) \quad \text{pour} \quad x \in V_k(u_j) \quad \text{et} \quad u_j \in S_i.$$

Si $f \in A_\varphi$, $|f(x) - f_i(x)| \leqq \varphi(k)$, quel que soit $x \in M$, donc

$$|\mu(f) - \mu(f_i)| \leqq \varphi(k).$$

Or

$$\sum (f, nN_k) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{N_k}\sum_{u_j\in S_i} f(u_j)\right)\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu(f_i)\right).$$

D'où

$$\left|\sum (f, nN_k) - \mu(f)\right| \leqq \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n}(\mu(f_i) - \mu(f))\right| \leqq \varphi(k).$$

Réciproquement, soit u une suite satisfaisant aux inégalités d'approximation de l'énoncé et soit $k \geqq 1$ fixé.

Posons

$$\varphi(n) = 1 \quad \text{pour } n < k,$$
$$\varphi(n) = 0 \quad \text{pour } n \geqq k;$$

l'ensemble A_φ associé à ce module de continuité φ contient, quel que soit $\alpha \in M$, la fonction caractéristique χ_α de $V_k(\alpha)$. Or,

$$\sum (\chi_\alpha, nN_k) = \frac{1}{nN_k}\nu(\alpha, nN_k, k)$$

et

$$\mu(\chi_\alpha) = \frac{1}{N_k},$$

l'hypothèse d'approximation entraîne donc

$$\left|\frac{1}{nN_k}\nu(\alpha, nN_k, k) - \frac{1}{N_k}\right| \leqq \varphi(k) = 0,$$

soit

$$\nu(\alpha, nN_k, k) = n, \qquad \text{quels que soient} \quad \alpha \in M, \quad n \geqq 1 \quad \text{et} \quad k \geqq 1;$$

autrement dit, u est très bien répartie dans M.

Chapitre II.

Interpolation des fonctions continues.

5. Propriétés de certains espaces de Banach.

Soit E un *espace de Banach sur* K, c'est-à-dire un espace vectoriel sur K, normé, ultramétrique et complet; nous supposerons parfois que la norme sur E satisfait à la condition :

(N) $y \in E$, $y \neq 0$ $\Rightarrow$ *il existe* $\lambda \in K$ *tel que* $|\lambda y| = 1$;

($|y|$ désigne la norme d'un élément y de E).

On dit qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ d'éléments de E est une *base normale* (ou orthonormale) de E si elle satisfait à :

(B) *Tout $y \in E$ est, de façon unique, somme d'une série*

$$y = \sum_{i \in I} y_i e_i,$$

où $y_i \in K$, $|y_i| \to 0$ quand $i \to +\infty$, et $|y| = \sup_{i\in I} |y_i|$.

On sait qu'un espace satisfaisant à la condition (N) admet au moins une base normale ([8], [16], *cf.* par exemple [22]).

Étant donné un espace E satisfaisant à (N), nous poserons

$$E_0 = \{ x \in E \mid |x| \leqq 1 \},$$
$$\bar{E} = E_0 / \pi E_0.$$

Si $x \in E_0$, nous noterons $\bar{x}$ son image dans $\bar{E}$.

On sait ([22], lemme 1) qu'alors, pour qu'une famille $(e_i)_{i\in I}$ soit une base normale de E, il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition (Q) (quotient) :

(Q) 1° $\forall i \in I$, $e_i \in E_0$;

2° $(\bar{e}_i)_{i \in I}$ *est une base* (algébrique) *du $\mathfrak{k}$-espace vectoriel $\bar{E}$.*

Exemples.

1. Soient X un espace topologique compact et $\mathcal{C}(X, K)$ l'espace des fonctions continues sur X et à valeurs dans K, muni de la norme de la convergence uniforme : $\mathcal{C}(X, K)$ est un espace de Banach sur K satisfaisant à la condition (N).

L'espace $\overline{\mathcal{C}(X, K)}$ associé est l'espace des fonctions continues sur X et à valeurs dans $\mathfrak{k}$, c'est-à-dire des fonctions localement constantes sur X et à valeurs dans $\mathfrak{k}$.

2. Soient E un espace de Banach sur K, X un espace topologique compact, et $\mathcal{C}(X, E)$ l'espace des fonctions continues sur X à valeurs dans E, muni de la norme de la convergence uniforme : $\mathcal{C}(X, E)$ est un espace de Banach sur K; de plus, il satisfait à (N) si E y satisfait.

3. Les espaces de fonctions analytiques que nous étudierons au chapitre III sont également de ce type.

Dans ce chapitre, nous étudions des espaces $\mathcal{C}(X, E)$, où X est un produit fini de compacts réguliers de K et E un espace de Banach sur K [ne satisfaisant pas nécessairement à (N)].

Le paragraphe 6 est consacré aux espaces $\mathcal{C}(M, K)$, où M est un compact régulier de K : au paragraphe 7 les énoncés sont généralisés au cas des espaces $\mathcal{C}(X, E)$, grâce aux propriétés générales ci-dessous.

Nous noterons $E \hat{\otimes} F$ le *produit tensoriel complété* (ou topologique) de deux espaces de Banach sur K, tel qu'il est défini dans ([22], § 4).

Nous aurons essentiellement à utiliser les propriétés suivantes de $E \hat{\otimes} F$, qui se déduisent immédiatement de la proposition 6 de [22] :

PTT 1. — *Soient E et F deux espaces de Banach sur K, F satisfaisant* à (N).

Soit $(f_j)_{j\in J}$ une base normale de F, alors tout élément $z \in E \hat{\otimes} F$ est, de façon unique, somme d'une série

$$z = \sum_{j\in J} x_j \hat{\otimes} f_j.$$

PTT 2. — *Soient E et F deux espaces de Banach sur K satisfaisant à* (N), *$(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ des bases normales de E et F. Alors $(e_i \hat{\otimes} f_j)_{i,j\in I\times J}$ est une base normale de $E \hat{\otimes} F$, qui satisfait donc à la condition* (N).

Conséquence : Avec les hypothèses de **PTT 2**, soit $(a_{i,j})_{i,j\in I\times J}$ une famille de scalaires, $|a_{i,j}| \to 0$ quand $(i, j) \to +\infty$. L'élément $z = \sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}\, e_i \hat{\otimes} f_j$ associé admet, d'après **PTT 1**, deux représentations

$$z = \sum_{j\in J} x_j \hat{\otimes} f_j \qquad \text{et} \qquad z = \sum_{i\in I} e_i \hat{\otimes} y_i.$$

Ces trois représentations de z sont liées par les relations

$$x_j = \sum_{i\in I} a_{i,j}\, e_i \qquad \text{et} \qquad y_i = \sum_{j\in J} a_{i,j} f_j,$$

avec

$$|x_j| = \sup_{i\in I} |a_{i,j}| \qquad \text{et} \qquad |y_i| = \sup_{j\in J} a_{i,j}.$$

Proposition 6. — *Soient X un espace compact, E un espace de Banach sur K, $(\varphi_i)_{i\in I}$ une base normale de $\mathcal{C}(X, K)$.*

(*a*) *Toute $f \in \mathcal{C}(X, E)$ s'écrit de façon unique comme somme d'une série,*

$$f = \sum_{i\in I} \varphi_i\, e_i, \qquad \text{où} \quad e_i \in E, \qquad |e_i| \to 0 \quad \text{quand } i \to \infty,$$

$$|f| = \sup_{i\in I} |e_i|.$$

(*b*) *L'application $\varphi \hat{\otimes} e \to \varphi e$ de $\mathcal{C}(X, K) \hat{\otimes} E$ dans $\mathcal{C}(X, E)$ définit un isomorphisme canonique de $\mathcal{C}(X, E)$, avec $\mathcal{C}(X, K) \hat{\otimes} E$.*

(*a*) $f(x)$ est compact, donc f peut être uniformément approchée par des applications à valeurs dans un sous-espace de dimension finie de E.

Or, soit E_n un sous-espace de E de dimension finie, on sait [19], qu'il est somme directe (avec sa norme) de sous-espace de dimension 1, donc (a) y est vraie. L'existence de la série en résulte, l'unicité est une conséquence de l'égalité

$$|f| = \sup_{i \in I} |e_i|.$$

(b) Il est clair que $\varphi \hat{\otimes} e \to \varphi e$ est un homomorphisme, (a) et **PTT 1** montrent que c'est un isomorphisme.

COROLLAIRE 1. — *Toute famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ satisfaisant aux conditions (a) de la proposition 6 pour un espace E de dimension au moins égale à 1 est une base normale de $\mathcal{C}(X, K)$.*

Il suffit, en effet, de choisir un élément $a \in E$, de telle sorte que Ka soit un facteur direct de E, et d'identifier $\mathcal{C}(X, K)$ avec $\mathcal{C}(X, Ka)$ muni de la norme $|fa|/|a|$.

COROLLAIRE 2. — *Soient X et Y deux espaces compacts, $E = \mathcal{C}(X, K)$ et $F = \mathcal{C}(Y, K)$, et soient $(\alpha_i)_{i \in I}$ et $(\beta_j)_{j \in J}$ des bases normales de E et F respectivement, alors la famille $(\alpha_i \beta_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est une base normale de $\mathcal{C}(X \times Y, K)$.*

On sait en effet, [4], que $\mathcal{C}(X \times Y, K) = \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(Y, K))$. Donc, d'après la proposition 6,

$$\mathcal{C}(X \times Y, K) = \mathcal{C}(X, K) \hat{\otimes} \mathcal{C}(Y, K),$$

ce qui donne le corollaire, en appliquant **PTT 2**.

Réciproquement, on voit facilement que deux familles $(\alpha_i)_{i \in I}$ et $(\beta_j)_{j \in J}$ d'éléments de E et F, telles que $(\alpha_i \beta_j)_{i,j \in I \times J}$ soit une base normale de $\mathcal{C}(X \times Y, K)$, et qu'il existe $i_0 \in I$ et $j_0 \in J$, avec $|\alpha_{i_0}| \geqq 1$ et $|\beta_{j_0}| \geqq 1$, sont des bases normales de E et F respectivement.

6. Interpolation sur un compact régulier d'un corps local.

6.1. Notations.

Soit M un compact régulier d'un corps local K : dans ce paragraphe, nous noterons E l'espace $\mathcal{C}(M, K)$.

Étant donnée une suite injective u à valeurs dans M, nous associerons à toute fonction f définie sur M et à valeurs dans K la suite $f_n(X)$ de ses *polynômes d'interpolation* sur u, définie par

$$(1) \qquad \begin{cases} f_n(X) \in K[X,] \\ \operatorname{dg} f_n \leqq n, \\ f_n(u_j) = f(u_j) \qquad \text{pour} \quad j = 0, \ldots, n. \end{cases}$$

La suite u est supposée injective, de façon à ce que ces conditions définissent effectivement les polynômes f_n.

Les polynômes f_n s'expriment par les formules usuelles (Newton).

$$f_n(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k(X),$$

où

$$Q_n(X) = \frac{(X - u_0)\ldots(X - u_{n-1})}{(u_n - u_0)\ldots(u_n - u_{n-1})} = \frac{P_n(X)}{P_n(u_k)} \quad \text{(notations du § 2.2.4).}$$

Les coefficients a_k se calculent par exemple en remarquant que la formule d'interpolation de Lagrange s'écrit

$$f_n(X) = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f(u_k)}{(x - u_k)P'_{n+1}(u_k)} \right) P_{n+1}(X),$$

ce qui donne, en identifiant les valeurs des termes de plus haut degré,

$$a_n = \left(\sum_{j=0}^{n} \frac{f(u_j)}{P'_{n+1}(u_j)} \right) P_n(u_n).$$

Nous dirons que la suite u est une *suite d'interpolation pour les fonctions continues sur M à valeurs entières si :*

(SI) 1° *quelle que soit* $f \in E$, $|f \to f_n| \to 0$ *quand* $n \to +\infty$;

2° $|f| \leqq 1 \Rightarrow |f_n| \leqq 1$ *pour* $n \geqq 0$.

Lorsque 1° est satisfaite, la série $\sum_{n \geqq 0} a_n Q_n(x)$ converge uniformément sur M, autrement dit : toute fonction continue sur M y est limite uniforme de la suite de ses polynômes d'interpolation sur u.

La condition 2° exprime que les polynômes d'interpolation d'une fonction à valeurs entières sont eux-mêmes à valeurs entières; de plus, si elle est satisfaite, les polynômes $(Q_n)_{n \geqq 0}$ constituent une base du A-module des polynômes à valeurs entières.

6.2. Un théorème d'interpolation.

Théorème 1. — *Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

(*a*) *u est une suite d'interpolation pour les fonctions continues sur M et à valeurs entières (condition* SI);

(*b*) $|Q_n| = 1$ *pour tout* $n \geqq 0$;

(*c*) *u est très bien répartie dans M;*

(*d*) $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ *est une base normale de* $E = \mathcal{C}(M, K)$.

(*d*) $\Rightarrow$ (*a*) à peu près trivialement.

Soit, en effet, $f = \sum_{n \geq 0} a_n Q_n$ la décomposition de f sur la base Q_n, et soit

$$f_n^*(X) = \sum_{k=0}^{n} a_n Q_n.$$

On a $Q_n(u_j) = 0$ pour $j < n$, donc, pour $j \leq n$,

$$f(u_j) = \sum_{k=0}^{j} a_k Q_k(u_j) = f_n^*(u_j).$$

Le polynôme f_n^* satisfait aux conditions (1) et il est le polynôme f_n d'interpolation de f défini par ces conditions.

Alors, $|a_n| \to 0 \Rightarrow |f - f_n| \to 0$, et la condition SI, 1° est satisfaite. De plus,

$$|f| = \sup_{n \in \mathbf{N}} |a_n| \quad \Rightarrow \quad |f_n| \leq |f|,$$

donc la condition SI, 2° est satisfaite.

$(a) \Rightarrow (b)$. En effet, $Q_n(u_n) = 1$, donc $|Q_n| \geq 1$. Soit n fixé ≥ 0 et soit φ la fonction caractéristique d'un disque de centre u_n ne contenant aucun u_j tel que $j < n$: φ est continue, et son $(n+1)$-ième polynôme d'interpolation est $\varphi_n(X) = Q_n(X)$. La condition SI, 2° entraîne donc $|Q_n| \leq 1$.

$(b) \Rightarrow (c)$. En effet, le lemme 3 (chap. I, § 2.2.4) peut s'énoncer « $(b) \Leftrightarrow (c)$ ».

$(c) \Rightarrow (d)$. Nous allons montrer que $(Q_n)_{n \in \mathbf{N}}$ satisfait à la condition (Q).

Soit $\overline{E}_h$ le sous-espace de $\overline{E}$ constitué des fonctions à valeurs dans $\mathfrak{k}$, constantes sur toute boule V_h : $\overline{E}$ est réunion des $\overline{E}_h$, comme il résulte des remarques faites au paragraphe 5, exemple 1.

Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_h}$ des représentants de M_h et soit $\chi_{i,h}$ la fonction caractéristique de $V_h(\alpha_i)$: $(\overline{\chi_{i,h}})_{i=1,\ldots,N_h}$ est une base de $\overline{E}_h$.

De plus, si u est très bien répartie, $u_0, \ldots, u_{N_h-1}$ sont des représentants de M_h, et l'on peut choisir $\alpha_i = u_{i-1}$.

Avec ces notations, on a le lemme suivant :

Lemme 5. — *$(\overline{Q_i})_{i=0,\ldots,N_h-1}$ est une base de $\overline{E}_h$ et, pour $i = 0, \ldots, N_h - 1$,*

$$\overline{Q}_i = \overline{\chi}_{i,h} + \sum_{j=i+1}^{N_h-1} \overline{Q_i(u_{j-1})} . \overline{\chi}_{j,h}.$$

Il résulte immédiatement du lemme 5 que $(\overline{Q_n})_{n \in N}$ satisfait à la condition (Q).

De plus, il suffit de montrer les égalités du lemme 5, pour en déduire que $\overline{(Q_i)}_{i=0, N_h-1}$ est une base de $\overline{E}_h$, puisqu'en effet, la matrice à coefficients dans $\mathfrak{k}$ représentant les $\overline{Q}_i$ sur la base $\overline{X}_{i,h}$ de $\overline{E}_h$ est alors une matrice triangulaire dont la diagonale est constituée d'éléments égaux à 1. Or le lemme 4 du chapitre I (§ 2.2.4) montre que, pour $n < N_h$, $\overline{Q}_n$ est dans $\overline{E}_h$, donc

$$\overline{Q}_i = \sum_{j=0}^{N_h-1} \overline{Q_i(u_{j-1}).\chi_{j,h}},$$

de plus, pour $j \leqq i$, $Q_i(u_{j-1}) = 0$, ce qui démontre le lemme et achève la démonstration du théorème 1.

COROLLAIRE 1. — *Soient u une suite très bien répartie dans le compact régulier M du corps local K et E un espace de Banach sur K. Toute fonction $f \in \mathcal{C}(M, E)$ admet une décomposition unique :*

$$f = \sum_{n \geqq 0} a_n Q_n, \qquad \text{où} \quad Q_n(X) = \frac{(X-u_0)\ldots(X-u_{n-1})}{(u_n-u_0)\ldots(u_n-u_{n-1})},$$

$a_n \in E$ et $|a_n| \to 0$ *quand* $n \to \infty$; *de plus,* $\|f\| = \sup_{n \in N} |a_n|$.

Il suffit en effet d'appliquer le (*a*) de la proposition 6 à la base normale $(Q_n)_{n\in N}$ de $\mathcal{C}(M, K)$.

COROLLAIRE 2. — *Avec les hypothèses du corollaire* 1, *soit f une fonction définie sur* $(u_n)_{n\in \mathbf{N}}$ *et à valeurs dans E; posons*

$$a_k = P_k(u_k)\left(\sum_{j=0}^{k} \frac{f(u_j)}{P'_{k+1}(u_j)}\right).$$

Pour que f soit prolongeable en une fonction continue sur M et à valeurs dans E, il faut et il suffit que $|a_k| \to 0$ *quand* $k \to \infty$.

On peut déduire de ces résultats des énoncés sur les « polynômes à valeurs entières » dans un corps de nombres analogues à ceux de [10], [17], [18] : nous ne les donnons pas ici, car ils sont sensiblement équivalents aux résultats cités, et d'un caractère algébrique assez étranger à ce travail.

7. Application aux fonctions de plusieurs variables.

Soit $R = K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_s$, où le corps des restes $\mathfrak{k}_i$ de K_i a p^{r_i} éléments, et soit K une extension finie commune de $K_1, \ldots, K_s$. Un compact M de R sera dit régulier si

$$M = M^1 \times \ldots \times M^s,$$

où M^i est un compact régulier de K_i (M^i est donc aussi un compact régulier de K).

Soient u^i une suite injective à valeurs dans M_i et $(Q_n^i)_{n\in\mathbf{N}}$ les polynômes associés à u^i.

Si $n=(n_1, \ldots, n_s)\in\mathbf{N}^s$ et $x=(x_1, \ldots, x_s)\in M$, nous poserons

$$Q_n(x) = Q_{n_1}^1(x_1)\ldots Q_{n_s}^s(x_s).$$

Avec ces notations, on a la proposition suivante :

Proposition 7. — *Pour que $(Q_n)_{n\in\mathbf{N}^s}$ soit une base normale de $\mathcal{C}(M, K)$, il faut et il suffit que pour $i=1, \ldots, s$, u^i soit très bien répartie dans M^i.*

Pour $s=1$, la proposition 7 est l'équivalence « $(c)\Leftrightarrow(d)$ » du théorème 1.

De plus, quelles que soient les suites injectives u^i, on a pour $i=1, \ldots, s$ et $n\geqq 0$, $|Q_n^i|\geqq 1$: le corollaire 2 de la proposition 6, avec sa réciproque, donne donc la proposition 7 par récurrence sur s. On en déduit immédiatement le corollaire suivant :

Corollaire 1. — *Soient (u^i), $i=1, \ldots, s$ des suites très bien réparties dans les compacts réguliers M^i des corps locaux K_i, et E un espace de Banach sur une extension finie commune K des K_i. Toute fonction continue $f\in\mathcal{C}(M^1\times\ldots\times M^s, E)$ admet une décomposition unique :*

$$f=\sum_{n\in\mathbf{N}^s} a_n Q_n(x), \qquad \text{où} \quad n=(n_1,\ldots, n_s), \qquad x=(x_1, \ldots, x_s)$$

et

$$Q_n(x)=\prod_{i=1}^{s}\frac{(x_i-u_0^i)\ldots(x_i-u_{n_i-1}^i)}{(u_{n_i}^i-u_0^i)\ldots(u_{n_i}^i-u_{n_i-1}^i)},$$

$a_n\in E$ et $|a_n|\to 0$ quand $n\to\infty$; de plus, $|f|=\sup_{n\in\mathbf{N}^s}|a_n|$.

Corollaire 2. — *Avec les hypothèses du corollaire 1, soit f une fonction définie sur $\prod_{i=1}^{s} u^i(\mathbf{N})$ et à valeurs dans E; posons*

$$a_{n_1,\ldots,n_s}=P_{n_1}(u_{n_1})\ldots P_{n_s}(u_{n_s})\sum_{j_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{j_s=0}^{n_s}\frac{f(u_{j_1}^1, \ldots, u_{j_s}^s)}{P'_{n_1+1}(u_{j_1}^1)\ldots P'_{n_s+1}(u_{j_s}^s)}.$$

Pour que f soit prolongeable en une fonction continue sur $M^1\times\ldots\times M^s$ et à valeurs dans E, il faut et il suffit que $|a_{n_1,\ldots,n_s}|\to 0$ quand $(n_1, \ldots, n_s)\to+\infty$.

Le corollaire 2 sera démontré si nous prouvons que les coefficients $a_{n_1,\ldots,n_s}$ associés à une fonction continue par le corollaire 1 sont donnés par la formule du corollaire 2.

Pour $s = 1$, nous l'avons déjà montré, la démonstration par récurrence sur s se fait immédiatement par le même procédé.

Exemple. — Comme nous l'avons déjà remarqué, la suite des entiers naturels est très bien répartie dans $\mathbf{Z}_p$: les polynômes $\mathbf{Q}_n$ associés sont les coefficients binomiaux

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+1)}{n'}$$

Les « coefficients d'interpolation » a_n d'une fonction f définie sur les entiers naturels sont

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k),$$

car ici, $P_n(u_n) = n!$ et $P'_{n+1}(u_j) = j!\,(-1)^{n-j}(n-j)!$. On retrouve donc les théorèmes 1 et 2 de [15] comme cas particulier du théorème 1.

Plus généralement, soient (comme en 2.3.4) K une extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, $s = [K; \mathbf{Q}_p]$, A l'anneau de valuation de K et $\omega_1, \ldots, \omega_s$ une « base d'entiers » de A, c'est-à-dire une base du $\mathbf{Z}_p$-module A.

Tout $x \in A$ s'écrit donc de façon unique

$$x = x_1\omega_1 + \ldots + x_s\omega_s, \qquad \text{où} \quad x_i \in \mathbf{Z}_p.$$

Appliquons les résultats du paragraphe 7 à $A = \mathbf{Z}_p^s$, avec la suite des entiers naturels comme suite u^i dans chaque $\mathbf{Z}_p$. On obtient immédiatement :

Soit $x = x_1\omega_1 + \ldots + x_s\omega_s$ la décomposition d'un entier x de K sur la base $\omega_1, \ldots, \omega_s$ de A. Toute fonction f continue sur A et à valeurs dans un espace de Banach E sur K admet une décomposition unique

$$f(x) = \sum_{(n_1, \ldots, n_s) \geq 0} a_{n_1 \ldots n_s} \binom{x_1}{n_1} \cdots \binom{x_s}{n_s}$$

telle que

$$- a_{n_1, \ldots, n_s} \in E, \qquad |a_{n_1, \ldots, n_s}| \to 0 \quad \textit{quand} \ (n_1, \ldots, n_s) \to \infty$$

$$|f| = \sup_{(n_1, \ldots, n_s) \in \mathbf{N}^s} |a_{n_1, \ldots, n_s}|,$$

$$- a_{n_1, \ldots, n_s} = \sum_{j_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{j_s=0}^{n_s} (-1)^{n-j} \binom{n_1}{j_1} \cdots \binom{n_s}{j_s} f(j_1\omega_1 + \ldots + j_s\omega_s)$$

[où $n - j = n_1 + \ldots + n_s - (j_1 + \ldots + j_s)$].

Remarquons que la série ci-dessus n'est pas la série d'interpolation sur la « suite très bien répartie produit » définie au paragraphe 2.3.4, dont l'expression est sensiblement moins simple.

CHAPITRE III.

Fonctions analytiques.

8. Fonctions analytiques : définitions et notations.

Soient $a \in K$ et $R > 0$, nous noterons $D_{a,R}$ (ou D) le disque de centre a et de rayon R

$$D = \{ x \in K \mid |x - a| \leqq R \}.$$

Nous supposerons toujours R choisi de telle sorte qu'il existe $\rho \in K$, avec $|\rho| = R$.

Définition AS. — *Une fonction $f \in \mathcal{C}(D, K)$ est strictement analytique sur D s'il existe une série entière*

$$\tilde{f}_a(X) \in K[[X]] \quad (^2),$$

convergente pour $|X| \leqq R$, et telle que pour $x \in D$,

$$f(x) = \tilde{f}_a(x - a).$$

Nous noterons $A(D)$ l'espace des fonctions strictement analytiques sur D. Soit $f \in A(D)$ et soit

$$\tilde{f}_a(X) = \sum_{n \geqq 0} a_n X^n / \rho^n$$

la série de Taylor de f au point a : $|a_n| \to 0$ quand $n \to \infty$ et l'application

$$f \to |f| = \sup_{n \geqq 0} |a_n|$$

définit une norme sur $A(D)$ (norme de la convergence uniforme sur le disque de centre a et de rayon R de la clôture algébrique de K) satisfaisant à la condition (N). Les fonctions $x \to \left(\dfrac{x}{\rho}\right)^n$ constituent une base normale « naturelle » de cet espace.

Définition AL. — *Soit M une partie de K, une fonction $f \in \mathcal{C}(M, K)$ est* **localement analytique** *sur M si :*

quel que soit $x \in M$, il existe un disque $D_x \ni x$ et de rayon non nul tel que la restriction de f à $D_x \cap M$ soit prolongeable en une fonction analytique stricte sur D_x.

---

(2) Rappelons que $K[[X]]$ désigne l'anneau des séries entières formelles à coefficients dans K.

Supposons que M soit un compact, et soit f localement analytique sur M; l'ensemble des D_x, où x parcourt M constitue un recouvrement ouvert de M dont on peut extraire un recouvrement fini $\{D_{x_1}, \ldots, D_{x_N}\}$. Soit R_i le rayon de D_{x_i}, posons

$$|\pi|^h = \inf_{i=1,\ldots,N} (R_i);$$

f est alors prolongeable en une fonction strictement analytique sur tout disque de rayon $|\pi|^h$ rencontrant M.

Définition ALh. — *Soit M un compact de K : une fonction localement analytique sur M est* **analytique d'ordre** h *sur M si, quel que soit x dans M, on peut choisir un disque D_x associé à x par la définition* **AL,** *dont le rayon soit au moins égal à $|\pi|^h$ Nous noterons $A_h(M)$ l'espace des fonctions analytiques d'ordre h sur M.*

REMARQUES :

— Toute fonction localement analytique sur M (compact) y est analytique d'au moins un ordre h_0. L'ensemble des fonctions localement analytiques sur M est $\bigcup_{h \geqq h_1} A_h(M)$, h_1 pouvant être choisi arbitrairement puisque

$$A_h(M) \subset A_{h+1}(M).$$

— Une fonction strictement analytique sur un disque D de rayon $|\pi|^{h_0}$ y est analytique de tous ordres $h \geqq h_0$.

DÉFINITION Ch. — *Un compact M de K est cerclé d'ordre h s'il est réunion de disques de rayon $|\pi|^h$.*

Soit M un compact de K et soit M_h le plus petit compact cerclé d'ordre h contenant M : M_h est la réunion des disques de rayon $|\pi|^h$ rencontrant M.

Si $f \in A_h(M)$, f admet au moins un prolongement $\tilde{f} \in A_h(M_h)$ (en général ce prolongement n'est pas unique).

PROPOSITION 8. — *Si M n'a pas de points isolés, la restriction $\tilde{f} \to f$ ci-dessus définie est une bijection de $A_h(M)$ sur $A_h(M_h)$.*

Nous avons déjà remarqué que cette restriction est surjective. Il reste à montrer que le prolongement $f \to \tilde{f}$ est unique, c'est-à-dire que $f = 0 \Rightarrow \tilde{f} = 0$.

Soit D un disque de rayon $|\pi|^h$ rencontrant M : Card $(D \cap M)$ n'est pas fini, donc si $f = 0$, $\tilde{f}$ a une infinité de zéros dans D. Or on sait ([20], [21]) qu'une fonction non nulle strictement analytique sur un disque fermé n'y a qu'un nombre fini de zéros, d'où la proposition ([3]).

Nous supposerons dans ce paragraphe et au paragraphe 9 que h est un entier fixé et M un compact cerclé d'ordre h : ces résultats seront appliqués à un compact régulier non discret, qui est sans points isolés, et les espaces $A_h(M)$ et $A_h(M_h)$ sont alors isomorphes, la norme sur $A_h(M)$ étant définie par cet isomorphisme et la définition ci-dessous.

DÉFINITION : NORME DE $A_h(M)$. — *Soient M un compact cerclé d'ordre h, $D_1, \ldots, D_N$ des disques disjoints de rayon $|\pi|^h$ recouvrant M. A $f \in A_h(M)$ nous associerons :*

— *$f_i = f \mid D_i$, et $|f|_i$ la norme de f_i dans $A(D_i)$;*

— *$|f| = \sup_i |f|_i$, qui sera la norme de f dans $A_h(M)$. Ceci munit $A_h(M)$ d'une structure* **d'espace de Banach satisfaisant à la condition (N).**

$A_h(M)$ s'identifie algébriquement à la somme directe $\sum_{i=1}^{N} A(D_i)$ et la norme ci-dessus définie est la norme naturelle d'une somme directe d'espaces de Banach.

Lorsque exceptionnellement plusieurs espaces $A_h(M)$ correspondant à des valeurs différentes de h interviendront, nous noterons $|f|_h$ la norme de $A_h(M)$.

9. Bases d'un espace $A_h(M)$. Interpolation.

M désigne dans ce paragraphe un compact régulier de K, cerclé d'ordre h (h est fixé), et de diamètre 1. Cette dernière convention est destinée à alléger les notations : on passe au diamètre quelconque par homothétie.

Les entiers $N_0 = 1, \ldots, N_h$ sont associés à la valuation

$$v(x, y) = \frac{1}{v(\pi)} v(y - x)$$

induite sur M par la valuation de K ([4]).

Ce paragraphe est essentiellement consacré à la démonstration du

Théorème 2. — *Soit u une suite à valeurs dans un compact M défini comme ci-dessus. Posons*

$$P_n(X) = (X - u_0) \ldots (X - u_{n-1}).$$

([3]) h étant fixé, la conclusion de la proposition reste vraie en supposant seulement que M n'a pas de points « isolés d'ordre h », c'est-à-dire que tout disque de rayon â $|\pi|^h$ rencontrant M le rencontre en une infinité de points.

([4]) Lorsque M sera seulement régulier de diamètre 1, au paragraphe 10, les entiers $N_h, \ldots, N_0$ associés à M seraient aussi ceux associés à M_h, ce qui permet de faire ici sans inconvénient l'hypothèse « cerclé d'ordre h ».

(*a*) *Pour qu'il existe des constantes s_n telles que $(P_n/s_n)_{n\geqq 0}$ soit une base normale de $A_h(M)$, il faut et il suffit que u soit* **bien répartie d'ordre** *h dans M;*

(*b*) *Alors* $|s_n| = |\pi|^{\lambda_n}$ *où* $\lambda_n = \sum_{k=1}^{h}\left[\dfrac{n}{N_h}\right]$.

La démonstration nécessite plusieurs lemmes, et de nombreuses notations : nous appellerons E l'espace $A_h(M)$.

Nous noterons $\alpha_1, \ldots, \alpha_{N_h}$ des représentants de $M/\pi^h M$, et $D_1, \ldots, D_{N_h}$ les disques de centres α_i et de rayon $|\pi|^h$: $D_i = V_h(\alpha_i)$.

Si $f \in E$, f_i est la restriction de f à D_i, $\bar{f}$ est l'image de f dans $\bar{E}$ et $\bar{f}_i$ la restriction de $\bar{f}$ à D, c'est-à-dire l'image de f_i dans $\overline{A(D_i)}$. L'indice i désigne toujours un entier compris entre 1 et N_h.

Le lemme 6 fournit une base « naturelle » de $\bar{E}$, et des sous-espaces $\bar{E}_0, \ldots, \bar{E}_m, \ldots$ dont E est réunion.

Les lemmes 7 et 8 donnent des évaluations des normes $|P_n|$ et $|P_n|_i$ compte tenu de la répartition de u.

Les lemmes 9 et 10 permettent d'affirmer qu'« il suffit que u soit bien répartie d'ordre h », les lemmes 11, 12 et 13 montrent que cette condition est nécessaire.

LEMME 6. — *Soient* $(\chi_{m,i}(x))_{\substack{m\geqq 0\\ i=1,\ldots,N_h}}$ *les fonctions*

$$\chi_{m,i}(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{x-\alpha_i}{\pi^h}\right)^m & \text{si } x \in D_i, \\ 0 & \text{si } x \notin D_i. \end{cases}$$

Alors $(\chi_{m,i})_{\substack{m\geqq 0\\ i=1,\ldots,N_h}}$ *est une base normale de E.*

En effet, i étant fixé, $(\chi_{m,i})_{m\geqq 0}$ est une base normale de l'image canonique de $A(D_i)$ dans la somme directe $E = \sum_{j=1}^{N_h} A(D_j)$.

Nous noterons $\bar{E}_m$ *le sous-espace de* $\bar{E}$ *engendré par* $(\bar{\chi}_{k,i})_{\substack{i=1,\ldots,N_k\\ k=0,\ldots,m}}$.

Alors $\bar{E}_m$ est de dimension $(m+1)N_h$ sur k, $\bar{E}_{m+1} \supset \bar{E}_m$, et $\bar{E} = \bigcup_{m\geqq 0} \bar{E}_m$.

LEMME 7. — *Soit* $P_n(X) = (X-u_0)\ldots(X-u_{n-1})$, *associé à une suite u :*

$$|P_n|_i = |\pi|^{\lambda_{n,i}}, \qquad \text{où} \quad \lambda_{n,i} = \sum_{k=1}^{h} \nu(\alpha_i, n, k).$$

Posons $P_n(\alpha_i + \pi^h Y) = \sum_{j=0}^{n} a_j Y^j$. On a, par définition, $|P_n|_i = \sup_{j=0,\ldots,n} |a_j|$, et l'on sait ([17] ou [18]) que

$$\sup_{j=0,\ldots,n} |a_j| = \sup_{y\in\mathcal{C}} \left| \sum_{j=0}^{n} a_n y^n \right|,$$

où $\mathcal{C}$ désigne l'anneau de valuation du complété de la fermeture algébrique de K. Par conséquent,

$$|P_n|_i = \sup_{x\in\alpha_i+\pi^h\mathcal{C}} |P_n(x)|.$$

Or, pour $x \in \alpha_i + \pi^h \mathcal{C}$,

$$\prod_{|x-u_j|>\pi_h} |x - u_j| = \prod_{|\alpha_i-u_j|>\pi^h} |\alpha_i - u_j| = |\pi|^{\lambda_2},$$

où

$$\lambda_2 = \sum_{k=1}^{h=1} k(\nu(\alpha_i, n, k) - \nu(\alpha_i, n, k+1))$$

(les indices j des u_j sont dans $[0, \ldots, n-1]$).

Donc

$$|P_n|_i = |\pi|^{\lambda_2} \sup_{x\in\alpha_i+\pi^h\mathcal{C}} \left(\left| \prod_{\substack{u_j\in V_h(\alpha_i),\\ j<n}} (x - u_j) \right| \right).$$

Or le corps résiduel de $\mathcal{C}$ est infini : on peut donc choisir x de telle sorte que

$$x \in \alpha_i + \pi^h \mathcal{C},$$
$$u_j \in V^h(\alpha_i) \Rightarrow v(x - u_j) = h\, v(\pi).$$

Donc

$$\sup_{x\in\alpha_i+\pi^h\mathcal{C}} \left| \prod_{\substack{u_j\in V_h(\alpha_i)\\ j<n}} (x - u_j) \right| = |\pi|^{h\nu(\alpha_i,n,h)} \quad \text{et} \quad |P_n|_i = |\pi|^{\lambda_2 + h\nu(\alpha_i,n,h)},$$

ce qui démontre le lemme.

NOTATIONS. — Nous associerons à la suite u :

— *les entiers* $\mu_n = \inf_i \lambda_{n,i}$;

— *les polynômes* $R_n(X) = \pi^{-\mu_n} P_n(X)$.

Alors, par définition des R_n et compte tenu du lemme 7, on a

$$|R_n| = 1,$$
$$|R_n|_i = 1 \iff \lambda_{n,i} = \mu_n.$$

LEMME 8 :

$$|R_n|_i = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{dg}(\overline{R}_{n,i}) = \nu(\alpha_i, n, h).$$

En effet, soit

$$R_n(X) = \sum_{k=0}^{n} r_k \left(\frac{X - \alpha_i}{\pi^h}\right)^k.$$

Alors $|R_n|_i = 1 \Leftrightarrow \sup_{j=0,\ldots,n} |r_h| = 1$. Soit $m = \nu(\alpha_i, n, h)$: m est le nombre des zéros de $\sum_{k=0}^{n} r_k Y^k$ situés dans $\mathfrak{C}$.

Le lemme s'en déduit en considérant le polygône de Newton de ce polynôme, ou ce qui revient au même, en remarquant qu'il existe deux polynômes

$$S(Y) = s_0 + s_1 Y + \ldots + s_{m-1} Y^{m-1} + Y^m \in A[Y]$$

et

$$T(Y) = t_0 + \pi T_1(Y), \qquad \text{où} \quad |t_0| = 1 \quad \text{et} \quad T_1(Y) \in A[Y],$$

et tels que

$$\sum_{k=0}^{n} r_k Y^k = S(Y)\, T(Y).$$

Il suffit alors d'effectuer le produit ST pour constater que $|r_m| = 1$ et $j > m \Rightarrow |r_j| < 1$, ce qui démontre le lemme.

LEMME 9. — *Soit u bien répartie d'ordre h dans M; alors, pour $m \geqq 0$:*

(*a*) $n < (m+1) N_h \Rightarrow \overline{R}_n \in \overline{E}_m$;

(*b*) $\mu_n = \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{n}{N_k}\right]$;

(c) $\{\overline{R}_n\}_{n<(m+1)N_h}$ *est une base de* $\overline{E}_m$.

Démontrons le lemme par récurrence sur M.

Pour $m = 0$, nous considérons des valeurs de $n < N_h$.

Or, si u est bien répartie d'ordre h, S_{N_h} satisfait à la condition $\mathfrak{T}_{N_h}$. Donc

$$\inf_{x \in M} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \nu(x, n, k) \right) = \sum_{k \geqq 1} \left[\frac{n}{N_k}\right] = \inf \left(\sum_{k=1}^{h} \nu(\alpha_i, n, k) \right),$$

puisque l'ensemble E_n construit dans la proposition 3 est alors réunion de disques de rayon $|\pi|^h$.

Donc, pour $n < N_h$, $\mu_n = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{n}{N_h}\right]$. De plus, pour $n < N_h$, il existe i tel que $\nu(\alpha_i, n, h) = 0$, et

$$\nu(\alpha_i, n, h) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{n,i} > \mu_n, \qquad \text{donc} \quad \overline{R}_{n,i} = 0,$$

ce qui démontre (*a*).

Il reste à montrer que $\overline{R}_0, \ldots, \overline{R}_{N_h-1}$ constituent une base de $\overline{E}_0$: soit i_j la permutation de $[1, \ldots, N_h]$ définie par $D_{i_j} \ni u_{j-1}$.

La matrice exprimant $\overline{R}_0, \ldots, \overline{R}_{N_h-1}$ sur les $\overline{\chi}_{0,i_j}$ rangés dans l'ordre $i_1, i_2, \ldots, i_{N_h}$ est triangulaire et a des unités sur la diagonale, car

$$|P_j(u_j)| = |P_j| \qquad \text{et} \qquad |P_j(u_k)| < |P_j| \quad \text{pour } k < j.$$

Ce qui achève de démontrer le lemme pour $m = 0$.

Cas général. — Nous dirons que N_h éléments de $\overline{E}_m$ sont une « base supplémentaire à $\overline{E}_{m-1}$ » si la réunion de ces éléments et d'une base de $\overline{E}_{m-1}$ est une base de $\overline{E}_m$.

Posons $R_{mN_h+j} = R_j^m R_{mN_h}$ $(j = 0, \ldots, N_h - 1)$ et notons μ_j^m, $\lambda_{j,i}^m$, ... les constantes attachées aux polynômes R_j^m : les polynômes R_j^m sont associés à la suite $u^{(m)}$, $u^{(m)}(j) = u_{mN_h+j}$, dont on sait (corollaire 2 de la proposition 3) qu'elle est bien répartie d'ordre h.

Donc les $\overline{R}_j^m$ sont dans $\overline{E}_0$, ils en constituent une base, et

$$\mu_j^{(m)} = \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{j}{N_k}\right].$$

D'autre part, quel que soit i et pour $k \leq h$,

$$\nu(\alpha_i, mN_h, k) = m\frac{N_h}{N_k},$$

donc, quel que soit i,

$$\lambda_{mN_h,i} = \sum_{k=1}^{h} m\frac{N_h}{N_k} = \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{mN_h}{N_k}\right] = \mu_{mN_h}.$$

Donc, pour $n = mN_h + j$, $0 \leq j < N_h$, et $k \leq h$,

$$\nu(\alpha_i, n, k) = m\frac{N_h}{N_k} + \nu^{(m)}(\alpha_i, j, k),$$

$$\lambda_{n,i} = \sum_{k=1}^{h} m\frac{N_h}{N_k} + \mu_j^m = \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{n}{N_k}\right].$$

De plus, quel que soit i,

$$\nu(\alpha_i, mN_h, h) = m,$$

donc $\overline{R}_{mN_h} \in \overline{E}_m$ et $\overline{R}_{mN_h,i}$ est de degré m quel que soit i.

Alors, pour $n < (m+1)N_h$, $\overline{R}_n$ est le produit de $\overline{R}_{mN_h} \in \overline{E}_m$ par un élément de $\overline{E}_0$, c'est-à-dire une fonction constante sur les disques D_i, donc $\overline{R}_n \in \overline{E}_m$.

De plus, en remarquant que $\chi_{m,j} \times \chi_{0,i} = \delta_{i,j}\, \chi_{m,j}$ (où $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et 1 si $i = j$), on voit que les composantes des $\overline{R}_n (mN_h \leqq n < (m+1)N_h)$ sur les $\overline{\chi}_{m,i}$ forment, comme celles des $\overline{R}_j^m$ une matrice triangulaire dont la diagonale est constituée d'unités (car $\overline{R}_{mN_h}$ a toutes ses composantes non nulles sur les $\overline{\chi}_{m,i}$) : les fonctions $(\overline{R}_{mN_h}, \ldots, \overline{R}_{(m+1)N_h-1})$ forment donc une « base supplémentaire à $\overline{E}_{m-1}$ », ce qui démontre le lemme par récurrence sur m.

LEMME 10. — *Si u est bien répartie d'ordre h dans M, les polynômes*

$$P_n(x) = \pi^{-\lambda_n} P_n(X), \qquad où \quad \lambda_n = \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{n}{N_h}\right]$$

forment une base normale de E.

En effet, cela résulte immédiatement du lemme 9 et de la condition (Q).

LEMME 11. — *Soit $(S_n)_{n \geqq 0}$ une suite de polynômes tels que*

$$\operatorname{dg} S_n = n, \qquad S_n = \frac{1}{s_n} X^n + \ldots.$$

Si $(S_n)_{n \geqq 0}$ est une base normale de E, alors

$$|s_n| = |\pi|^{\lambda_n}, \qquad \text{où} \quad \lambda_n = \sum_{h=1}^{h} \left[\frac{n}{N_k}\right].$$

En effet, soit $(R_n)_{n \geqq 0}$ la base normale de E associée à une suite u bien répartie d'ordre h.

Posons $R_n = \frac{1}{r_n} X^n + \ldots$, alors $|r_n| = |\pi|^{\lambda_n}$. Soit $(a_{i,j})_{\substack{i \geqq 0 \\ j \geqq 0}}$ la matrice exprimant $(S_n)_{n \geqq 0}$ sur la base $(R_n)_{n \geqq 0}$: elle est triangulaire et doit être à coefficients entiers et inversible pour que $(S_n)_{n \geqq 0}$ soit une base normale, donc pour $n \geqq 0$, $|a_{n,n}| = 1$, d'où

$$|s_n| = |r_n| = |\pi|^{\lambda_n}.$$

Lemme 12. — *Pour qu'il existe des constantes s_n telles que $(P_n/s_n)_{n\geqq 0}$ soit une base normale de E, il est nécessaire que, quel que soit $n \geqq 0$,*

$$|P_n| = |\pi|^{\lambda_n}, \qquad où \quad \lambda_n = \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{n}{N_h}\right].$$

Soit, en effet, $|P_n| = |\pi|^{\mu_n}$, où $\mu_n = \inf_i \lambda_{n,i}$; si $S_n = (P_n/s_n)_{n\geqq 0}$ est une base normale, $|S_n| = 1$, donc nécessairement

$$|s_n| = |P_n| = |\pi|^{\mu_n}, \qquad \text{or} \quad P_n(X) = X^n + \ldots,$$

et l'on obtient le lemme 12 en appliquant le lemme 11.

Lemme 13. — *Un polynôme de degré $< N_h$ a même norme dans $A_h(M)$ que dans $\mathcal{C}(M, K)$.*

Soit, en effet, u une suite bien répartie d'ordre h, Q_n et R_n les polynômes associés : pour $n < N_h$,

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{n}{N_k}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{N_k}\right] = \frac{1}{v(\pi)} v(P_n(u_n)).$$

Donc $R_n = \varepsilon_n Q_n$, où ε_n est une unité. Soit alors P un polynôme de degré $< N_h$

$$P = \sum_{k=0}^{N_h-1} a_k R_k = \sum_{j=0}^{N_h-1} b_j Q_j,$$

et

$$|P|_h = \sup_k |a_k|, \qquad |P|_{\mathcal{C}} = \sup_j |b_j|$$

[où $|P|_{\mathcal{C}}$ désigne la norme de P dans $\mathcal{C}(M, K)$], or $a_k = \frac{1}{\varepsilon_k} b_k$, d'où le lemme.

Lemme 14. — *Pour qu'on ait, quel que soit $n \geqq 0$,*

$$|P_n| = |\pi|^{\lambda_n}, \qquad avec \quad \lambda_n = \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{n}{N_k}\right],$$

il faut que u soit bien répartie d'ordre h.

Nous allons montrer le lemme par récurrence sur l'entier $m = \left[\frac{n}{N_h}\right]$. Soit d'abord $m = 0$, alors $0 \leqq n < N_h$. Donc, d'après le lemme 13, il est nécessaire que pour $n < N_h$ on ait

$$\inf_{x \in M} v_n(x) = \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{n}{N_k}\right] = \sum_{k=1}^{+\infty} \left[\frac{n}{N_k}\right].$$

D'après la proposition 3 *bis*, ceci entraîne que $S_{N_h} = \{u_0, \ldots, u_{N_h-1}\}$ satisfait à $\mathcal{P}_{N_h}$. Soit maintenant $m > 0$, posons, comme au lemme 9, $n = mN_h + j$, $0 \leqq j < N_h$ et $P_n = P_{mN_h} \times P_j^{(m)}$ où $P_j^{(m)}$ est le « polynôme P_j » associé à la suite $u^{(m)} : j \rightsquigarrow mN_h + j$. Alors quel que soit α_i,

$$\sum_{k=1}^{h} \nu(\alpha_i, mN_h, k) = m \sum_{k=1}^{h} \frac{N_h}{N_k},$$

donc

$$\lambda_{n,i} = m \sum_{k=1}^{h} \frac{N_h}{N_k} + \lambda_{j,i}^{(m)},$$

et l'on doit avoir

$$\inf_i \lambda_{j,i}^{(m)} = \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{j}{N_k}\right] \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq j < N_h;$$

nous venons de montrer que ceci entraîne $\{u_0^{(m)}, \ldots, u_{N_h-1}^{(m)}\}$ satisfait à $\mathcal{P}_{N_h}$. Ceci étant vrai quel que soit m, u est bien répartie d'ordre h et le lemme est démontré.

Le théorème est donc démontré, en voici trois corollaires :

COROLLAIRE 1. — *Soient u une suite à valeurs dans M et*

$$P_n(X) = (X - u_0) \ldots (X - u_{n-1}).$$

Pour $h \geqq 1$, soit $R_{n,h}(X) = \frac{1}{s_{n,h}} P_n$ un polynôme proportionnel à P_n ayant une norme égale à 1 dans $A_h(M)$:

(a) « u est bien répartie d'ordre h_0 dans M » $\Leftrightarrow$ « pour tout $h \leqq h_0$, $(R_{n,h})_{n \geqq 0}$ est une base normale de $A_h(M)$ »;

(b) « u est très bien répartie dans M » $\Leftrightarrow (R_{n,h})_{n \geqq 0}$ est une base normale de $A_h(M)$, quel que soit $h \geqq 0$;

(c) si u est bien répartie d'ordre h dans M, on a

$$v(s_{n,h}) = v(\pi) \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{n}{N_k}\right].$$

COROLLAIRE 2. — *Soient u une suite très bien répartie dans M et $(a_n)_{n \geqq 0}$ une suite de scalaires : la série $\sum_{n \geqq 0} a_n P_n(X)$ représente une fonction analytique d'ordre h sur M si et seulement si*

$$v(a_n) + v(\pi) \sum_{k=1}^{h} \left[\frac{n}{N_k}\right] \to +\infty \qquad \textit{quand} \quad n \to +\infty.$$

COROLLAIRE 3. — *Soit M un compact régulier de K, alors, pour $h \geqq 0$;*

(*a*) *L'injection canonique de $A_h(M)$ dans $A_{h+1}(M)$ est complètement continue;*

(*b*) *L'injection canonique de $A_h(M)$ dans $\mathcal{C}(M, K)$ est complètement continue.*

En effet, reprenons les notations du corollaire 1 et soient $(R_{n,h})_{n \geqq 0}$ et $(R_{n+1,h})_{n \geqq 0}$ les bases normales de $A_h(M)$ et $A_{h+1}(M)$ associées à une suite u très bien répartie dans M : la matrice représentant l'opérateur d'injection sur ces bases est diagonale et les coefficients $a_{n,n} = \frac{s_{n,h+1}}{s_{n,h}}$ de cette diagonale tendent vers zéro quand n tend vers l'infini, d'où le (*a*). De plus, l'injection de $A_h(M)$ dans $\mathcal{C}(M, K)$ se factorise en

$$A_h(M) \to A_{h+1}(M) \to \mathcal{C}(M, K),$$

la seconde injection ci-dessus est évidemment continue, le produit est donc complètement continu, d'où le (*b*).

10. **Rayon de convergence.**

Soit f une fonction localement analytique sur M : à tout $x \in M$, associons le rayon de convergence $\rho_x(f)$ de la série de Taylor de f en x. M étant compact,

$$\rho(f) = \inf_{x \in M} \rho_x(f)$$

est non nul, comme nous l'avons remarqué au paragraphe 8.

Le corollaire 2 du théorème 2 nous permet, étant donnée une fonction continue f dont on connaît la série d'interpolation sur une suite très bien répartie u, de déterminer le plus petit entier h tel que f soit analytique d'ordre h sur M, c'est-à-dire l'entier h tel que

$$|\pi|^{h-1} > \rho(f) \geqq |\pi|^h.$$

Nous allons maintenant préciser la valeur de $\rho(f)$ à l'aide de cette même série d'interpolation. De plus, nous pourrons dire si les séries de Taylor de f convergent ou non sur les circonférences $|x - y| = \rho$ pour $x \in M$ et $y \in \Omega$. Il nous faut pour cela fixer quelques notations :

Définitions. — *Soit $f(X) = \sum_{n \geqq 0} a_n X_n$ une série entière et soit ρ son rayon de convergence, nous appellerons* « **rayon d'analyticité de f** » *l'un des couples :*

— $(\rho, +)$ (*aussi noté* ρ^+) *si* $|a_n| \rho^n \to 0$;

— $(\rho, -)$ (*aussi noté* ρ^-) *sinon.*

[Si ρ est une puissance rationnelle de p, le rayon d'analyticité $(\rho, +)$ correspond à la convergence dans un « disque fermé » de rayon ρ de la fermeture algébrique et $(\rho, -)$ à la convergence dans le « disque ouvert ». Si ρ n'est pas une puissance rationnelle de p, la circonférence $|x| = \rho$ de la fermeture algébrique est vide, et la distinction entre ρ^+ et ρ^- ne correspond plus à un domaine de convergence : elle précise cependant l'ordre de croissance des $|a_n|$.]

Les couples $(\rho, \varepsilon) \in R \times [+, -]$ sont ordonnés de façon évidente : $(\rho, \varepsilon) \leqq (\rho', \varepsilon')$ si $\rho \leqq \rho'$ ou $\varepsilon \leqq \varepsilon'$ lorsque $\rho = \rho'$.

Si α est un nombre réel, et (ρ, ε) un couple, nous noterons $\alpha \subset (\rho, \varepsilon)$ si $(\alpha, +) \leqq (\rho, \varepsilon)$.

Soit f une fonction localement analytique sur le compact M, et soient ρ_x le rayon de convergence de la série de Taylor $\tilde{f}_x$ de f en $x \in M$ et (ρ_x, ε_x) son rayon d'analyticité. Alors, nous dirons que :

$\rho_M(f) = \inf\limits_{x \in M} \rho_x$ *est le* **rayon de convergence de f sur M** *et que*

$(\rho_M, \varepsilon)(f) = \inf\limits_{x \in M} (\rho_x, \varepsilon_x)$ *est le* **rayon d'analyticité de f sur M,**

Théorème 3. — *Soit u une suite très bien répartie dans un compact régulier M de K. A une suite de scalaires $(a_n)_{n \geqq 0}$ nous associerons la série*

$$f(X) = \sum_{n \geqq 0} a_n P_n(X), \qquad \text{où} \quad P_n(X) = (X - u_0) \ldots (X - u_{n-1}).$$

Posons

$$\sigma_h = \frac{1}{N_1} + \ldots + \frac{1}{N_h} \quad (\sigma_0 = 0); \qquad \sigma = \lim_{h \to +\infty} \sigma_h$$

(éventuellement $\sigma = +\infty$) et $\gamma = \underline{\lim} \dfrac{v(a_n)}{n}$ (éventuellement $\gamma = -\infty$).

(*a*) *La série f définit une* **fonction localement analytique** *sur M si et seulement si*

$$\gamma + \sigma v(\pi) > 0 \qquad (\gamma > -\infty \; si \; \sigma = +\infty).$$

(*b*) $\gamma + v(\pi)\sigma_h > 0 \quad \Rightarrow \quad f \in A_h(M)$.

(*c*) $\gamma + v(\pi)\sigma_h < 0 \quad \Rightarrow \quad f \notin A_h(M)$.

(*d*) *Si $\gamma + v(\pi)\sigma > 0$, soit h_0 l'entier défini par*

$$\gamma + v(\pi)\sigma_{h_0} \geqq 0 > \gamma + v(\pi)\sigma_{h_0-1} \qquad (h_0 = 0 \text{ si } \gamma \geqq 0).$$

Posons

$$m = N_{h_0}(\gamma + v(\pi)\sigma_{h_0}),$$

alors

$$\rho(f) = |\pi|^{h_0} \times |p|^{-m} = \rho$$

est le rayon de convergence de f et son **rayon d'analyticité** *est*

$$\rho^+ \quad si\ v(a_n) - n\gamma \to +\infty \qquad quand \quad n \to +\infty,$$
$$\rho^- \quad sinon.$$

(*a*), (*b*) et (*c*) se déduisent immédiatement des corollaires précédents car, si

$$\varphi_{n,h} = v(a_n) + v(\pi)\sum_{k=1}^{h}\left[\frac{n}{N_k}\right],$$

nous savons, d'après le corollaire 2 du théorème 1, que

$$f \in A_h(M) \iff \varphi_{n,h} \to +\infty \qquad \text{quand} \quad n \to +\infty.$$

Or,

$$(n-1)\,\sigma_h - h \leq \sum_{k=1}^{h}\left[\frac{n}{N_k}\right] \leq n\sigma_h.$$

Donc

$$f \in A_h(M) \iff n\sigma_h v(\pi) + v(a_n) \to +\infty,$$

ce qui donne (*a*), (*b*) et (*c*).

Soient K' une extension finie de K et π' son uniformisante : M est un compact régulier de K' et si f est localement analytique sur M, il existe h' tel que f soit analytique d'ordre h' sur le compact $M'_{h'}$, cerclé d'ordre h' défini par M dans K'. Nous désignerons provisoirement par $A_h(M)_K$ l'espace $A_h(M)$ défini au paragraphe 8 : c'est l'espace des fonctions dont le rayon d'analyticité sur M est supérieur ou égal à $|\pi|^h$.

Plus précisément, si h_0 est défini comme en (*d*) dans l'énoncé,

$$(|\pi|^{h_0-1}, -) \supset (\rho, \varepsilon)_M(f) \supset (|\pi|^{h_0}, +)$$

et f est analytique d'ordre h' sur K' si et seulement si

$$(\rho, \varepsilon)_M(f) \supset (|\pi'|^{h'}, +).$$

Soit h'_0 le plus petit ordre d'analyticité de f dans M relativement à K

$$|\pi|^{h_0-1} > |\pi'|^{h'_0} \geq |\pi|^{h_0}.$$

Posons

$$\alpha = |\pi'|^{h'_0}\,|\pi|^{-h} : \quad 1 \leq \alpha < |\pi|^{-1}.$$

Notons $|\ \ |'$ la norme d'un élément de $A_{h'}(M)_{K'}$: on a, d'après le lemme 7,

$$|P_n|' = \alpha^{[n/N_{h_0}]} \times |P_n|,$$

donc, $f \in A_{h'}(M)_K$ équivaut à

$$v(a_n) + (v(\pi)\sigma_{h_0} + (h'_0 v(\pi') - h_0 v(\pi))\frac{n}{N_{h_0}} \to +\infty.$$

Soit, en posant $m = N_{h_0}(\gamma + v(\pi)\sigma_{h_0})$,

$$f \in A_{h'_0}(M) \quad \Rightarrow \quad m + \frac{\operatorname{Log}\alpha}{\operatorname{Log}|p|} \geqq 0$$

et

$$m + \frac{\operatorname{Log}\alpha}{\operatorname{Log}|p|} > 0 \quad \Rightarrow \quad f \in A_{h'_0}(M).$$

Soit encore,

$$\{(|\pi|^{h_0}, +) \subset (\rho, \varepsilon)_M(f)\}$$
$$\Leftrightarrow \quad \left\{\left(\frac{\operatorname{Log}\alpha}{\operatorname{Log}|p|} + m\right)n + (v(a_n) - n\gamma)N_{h_0} \to +\infty\right\}.$$

D'où

$$\sup\left\{\alpha \,\middle|\, (|\pi|^{h_0}\alpha, +) \subset (\rho, \varepsilon)_M(f)\right\} = |p|^{-m},$$

soit

$$\rho = |\pi|^h |p|^{-m} \quad \text{et} \quad \varepsilon = + \quad \Leftrightarrow \quad v(a_n) - n\gamma \to +\infty,$$

ce qui démontre (d).

Appliquons le théorème 3 au cas où $M = \mathbf{Z}_p$, $K = \mathbf{Q}_p$ et $u_n = n$, nous obtenons le corollaire 1 et le corollaire 2.

COROLLAIRE 1. — *Soit* $(a_n)_{n\geqq 0}$ *une suite de nombres de* $\mathbf{Q}_p$ *et soit*

(1) $$f(X) = \sum_{n\geqq 0} a_n . n! \binom{X}{n}.$$

(a) *La série* (1) *représente une fonction continue sur* $\mathbf{Z}_p$ *si et seulement si*

$$v(a_n) + v(n!) \to +\infty \quad \textit{quand} \quad n \to +\infty.$$

(b) *La série* (1) *représente une fonction localement analytique sur* $\mathbf{Z}_p$ *si et seulement si*

$$\underline{\lim} \frac{v(a_n)}{n} > -\frac{1}{p-1}.$$

(c) *La série* (1) *représente une fonction analytique d'ordre* h *sur* $\mathbf{Z}_p$ *si et seulement si*

$$v(a_n) + \frac{n}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^h}\right) \to +\infty.$$

(d) *Soit* h *le plus petit entier tel que*

$$m_h = p^h\left(\underline{\lim}\frac{v(a_n)}{n} + \frac{p-1}{1}\left(1 - \frac{p^h}{1}\right)\right)$$

soit positif ou nul, alors le rayon de convergence de f est

$$\rho(f) = |p|^{h-m_h} = p^{m_h-h},$$

et son rayon d'analyticité est :

— $(p^{m_h-h})^+$ si $v(a_n) - n\,\underline{\lim}\,\dfrac{v(a_n)}{n} \to +\infty$;

— $(p^{m_h-h})^-$ *sinon.*

Il suffit, en effet, de remarquer qu'ici $N_h = p^h$,

$$\sigma_h = \frac{1}{p} + \ldots + \frac{1}{p^h} = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^h}\right) \qquad \text{et} \qquad \sigma = \frac{1}{p-1}.$$

COROLLAIRE 2. — *Soit $(b_n)_{n \geqq 0}$ une suite de nombres de $\mathbf{Q}_p$ tendant vers zéro lorsque $n \to +\infty$,* et soit

$$f(x) = \sum_{n \geqq 0} b_n \binom{x}{n}$$

la fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$ associée.

(*a*) *La fonction f est localement analytique sur $\mathbf{Z}_p$ si et seulement si*

$$\underline{\lim}\,\frac{v(b_n)}{n} > 0.$$

(*b*) *La fonction f est analytique d'ordre h sur $\mathbf{Z}_p$ si et seulement si*

$$v(b_n) - v\left(\left[\frac{n}{p^h}\right]!\right) \to +\infty \qquad \textit{quand} \quad n \to +\infty.$$

(*c*) *Soit h le plus petit entier tel que*

$$m_h = p^h\left(\underline{\lim}\,\frac{v(b_n)}{n} - \frac{1}{p^h(p-1)}\right) \geqq 0,$$

alors

$$\rho(f) = p^{m_h-h}$$

et le rayon d'analyticité de f est

$$(p^{m_h-h})^+ \quad \textit{si} \;\; v(b_n) - n\,\underline{\lim}\,\frac{v(b_n)}{n} \to +\infty \qquad \textit{quand} \quad n \to +\infty$$

et

$$(p^{m_h-h})^- \quad \textit{sinon.}$$

COROLLAIRE 3. — *Soit $(b_n)_{n \geqq 0}$ une suite de nombres de $\mathbf{Q}_p$ tendant vers zéro lorsque $n \to +\infty$, et soit $f(x) = \sum_{n \geqq 0} b_n \binom{x}{n}$ la fonction continue associée.*

(*a*) *f est localement analytique sur* $\mathbf{Z}_p$ *si et seulement si*

$$\overline{\lim}\, | b_n |^{\frac{1}{n}} < 1.$$

(*b*) *f est analytique d'ordre h sur* $\mathbf{Z}_p$ *si et seulement si*

$$\left| b_n \Big/ \left(\left[\frac{n}{p^h} \right] \right) ! \right| \to 0.$$

(*c*) *Soit h le plus petit entier tel que f soit analytique d'ordre h alors*

$$\rho(f) = | p |^h \times 1/\overline{\lim} \left\{ \left| b_n \Big/ \left[\frac{n}{p^h} \right] ! \right|^{\frac{p^h}{n}} \right\} \quad (^5).$$

11. Une base particulière.

Soient $\alpha_0, \ldots, \alpha_{N_h - 1}$ une suite finie satisfaisant à $\mathcal{T}_{N_h}$: la suite définie par

$$u_i = \alpha_i \qquad \text{pour} \quad i < N_h,$$
$$u_i = u_{i-N_h} \qquad \text{pour} \quad i \geqq N_h$$

est très bien répartie d'ordre h dans M.

En reprenant les notations du théorème 2, la base normale de $A_h(M)$ $(R_n)_{n \geqq 0}$ associé à u satisfait à la relation

$$R_{i+N_h} = R_{N_h} R_i.$$

Notons R le polynôme R_{N_h} et soit $n = mN_h + r$, $0 \leqq r < N_h$, on a alors

$$R_n = R^m R_r.$$

De plus, nous avons montré au lemme 13 que des polynômes de degré strictement inférieur à N_h ont même norme dans $\mathcal{C}(M, K)$ que dans $A_h(M)$.

Notons $| f |_{\mathcal{C}}$ la norme de $f \in \mathcal{C}(M, K)$ dans $\mathcal{C}(M, K)$, et $| g |_h$ la norme de $g \in A_h(M)$ dans $A_h(M)$.

On a alors la proposition suivante :

Proposition 9. — *Soit* $\{\alpha_0, \ldots, \alpha_{N_h}\}$ *satisfaisant à* $\mathcal{T}_{N_h}$, *posons*

$$R(X) = \pi^{-\lambda_{N_h}} (X - \alpha_0) \ldots (X - \alpha_{N_h - 1}),$$

ou

$$\lambda_{N_h} = N_h \left(\frac{1}{N_1} + \ldots + \frac{1}{N_h} \right).$$

---

(5) **Ce résultat est analogue à celui de [11] que J. Hily a montré par des méthodes tout à fait différentes.**

Toute fonction $f \in A_h(M)$ admet une représentation unique de la forme

$$f = \sum_{m \geqq 0} f_m R'^m,$$

où :

(*a*) *f_m est un polynôme de degré inférieur ou égal à $N_h - 1$;*

(*b*) $|f_h| = \sup_{m \geqq 0} |f_m|_h = \sup_{m \geqq 0} |f_m|_{\mathcal{C}}$;

(*c*) *De plus, si $F_k = \sum_{m=0}^{k} f_m R^m$ et si $g^{(m)}(\alpha_i)$ désigne la dérivée $m^{\text{ième}}$ de g au point α_i, on a, pour $m \geqq 0$,*

$$f_m(\alpha_i) = (f^{(m)}(\alpha_i) - F^{(m)}_{m-1}(\alpha_i)) / R'(\alpha_i)^m.$$

En effet, (*a*) et (*b*) sont des applications immédiates du théorème 2 et du lemme 13.

Remarquons qu'une série convergente dans $A_h(M)$ peut y être « dérivée terme à terme » puisque, si $f \in A_h(M)$, $|f'|_h \leqq |f|_h$ et que, par conséquent, si F_k est une suite telle que $|f - F_k|_h \to 0$ quand $k \to +\infty$, il en est de même pour $|f' - F'_k|_h$.

Or, il est immédiat que pour $q < m$, $(R^m)^{(q)}(\alpha_i) = 0$, donc $f - F_k$ est nulle aux points α_i, ainsi que ses k premières dérivées, en particulier on a

$$f^{(k)}(\alpha_i) = F^{(k)}_{k-1}(\alpha_i) + (f_k R^k)^{(k)}(\alpha_i),$$

or

$$(f_k R^k)^{(k)}(\alpha_i) = f_k(\alpha_i)\,(R'(\alpha_i))^k,$$

d'où le (*c*).

Corollaire 1. — *Soient $\tilde{f}_{\alpha_i}(X) = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,i} \frac{(X - \alpha_i)}{m!}$, $i = 0, \ldots, N_h - 1$, les séries de Taylor d'une fonction $f \in A_h(M)$ aux points α_i.*

On a, avec les notations de la proposition 9,

$$f_m(X) = \sum_{k=0}^{N_h - 1} b_{m,k} R_k(X),$$

où

$$b_{m,k} = \frac{1}{m!} R'_{k+1}(\alpha_k) \left(\sum_{j=0}^{k} \frac{f^{(m)}(\alpha_j) - F^{(m)}_{m-1}(\alpha_j)}{R'_{k+1}(\alpha_j)\,(R'(\alpha_j))^m} \right).$$

Cette formule résulte immédiatement de l'interpolation des valeurs $f_m(\alpha_i)$ données au (*c*) de la proposition 9.

12. Fonctions analytiques de plusieurs variables.

12.1. Notations.

Nous utiliserons des notations classiques analogues à celles de ([20], § 9).

$X = (X_1, \ldots, X_s)$ est un ensemble de s indéterminées.

$K[[X]]$ est l'anneau des séries formelles entières à s indéterminées et à coefficients dans K.

Soient

$$a = (a_1, \ldots, a_s) \in K^s,$$
$$R = (R_1, \ldots, R_s) \in \mathbf{R}^s,$$

choisi de telle sorte que pour tout i, il existe $\rho_i \in K$, avec $|\rho_i| = R_i$.

Le disque (ou polydisque) D de centre a et de rayon R est

$$D = \{ x = (x_1, \ldots, x_s) \in K^s \,|\, |x_i - a_i| \leq R_i,\ i = 1, \ldots, s \}.$$

— $R \leq R' \Leftrightarrow R_i \leq R'_i,\ i = 1, \ldots, s$;

— $R < R' \Leftrightarrow R_i < R'_i,\ i = 1, \ldots, s$ et il existe i_0 tel que $R_{i_0} < R'_{i_0}$;

— $n = (n_1, \ldots, n_s) \in \mathbf{N}^s$ et X^n désigne le monome $X_1^{n_1} \ldots X_s^{n_s}$.

Si $R = (R_1, \ldots, R_s)$ et $\rho_i \in K$ et est tel que $|\rho_i| = R^i$, nous noterons

$$\frac{X}{\rho} = \frac{X_1}{\rho_1} \cdots \frac{X_s}{\rho_s}.$$

Alors l'espace $A(D)$ des fonctions strictement analytiques sur D s'identifie aux fonctions sommes, pour $X \in D$, des séries

$$f = \sum_{n \in \mathbf{N}^s} a_n \left(\frac{X - a}{\rho} \right)^n, \qquad \text{où} \quad |a_n| \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty,$$

qu'on munit de la norme

$$f \to |f| = \sup_{n \in \mathbf{N}^s} |a_n|.$$

Ceci étant posé, les espaces $A_h(M)$ (où $M = M_1 \times \ldots \times M_s$), se définissent exactement comme pour une variable, h désignant évidemment un multi-indice $(h_1, \ldots, h_s)$.

Alors

$$A_h(M) \simeq A_{h_1}(M_1) \hat{\otimes} A_{h_2}(M_2) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} A_{h_s}(M_s),$$

comme il résulte immédiatement de **PTT 1** et **2**.

Étant données s suites u^i à valeurs dans M_i, nous noterons $u = (u_1^1, \ldots, u^s)$ l'application de $\mathbf{N}^s$ dans M

$$n = (n_1, \ldots, n_s) \to (u_{n_1}^1, \ldots, u_{n_s}^s).$$

Nous supposerons que M est régulier et nous dirons que u est bien répartie d'ordre h dans M si u^i est bien répartie d'ordre h_i dans M_i.

Nous noterons $P_n(X) = P_{n_1}(X_1) \ldots P_{n_s}(X_s)$.

12.2. **Théorème** 2 *bis.* — *Soit $u = (u^1, \ldots, u^s)$ pour qu'il existe des constantes $s_n \in K$ et telles que $\left(\frac{P_n}{s_n}\right)_{n \in \mathbf{N}^s}$ soit une base normale de $A_h(M)$ il faut et il suffit que u soit bien répartie d'ordre h dans M.*

Alors

$$s_n| = |\pi|^{\lambda_n}, \qquad \text{où} \quad \lambda_{(n_1, \ldots, n_s)} = \sum_{i=1}^{s} \left(\sum_{k_i=1}^{h_i} \left[\frac{n_i}{N^i_{k_i}} \right] \right).$$

Ce théorème se déduit du théorème 2 moyennant les remarques suivantes :

— La condition est suffisante, car

$$A_h(M) \simeq A_{h_1}(M_1) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} A_{h_s}(M_s)$$

et l'on applique **PTT 2**;

— La condition est nécessaire, car la suite $\left(\frac{p^i_k}{s^i_k}\right)_{k \geq 0}$ définie par

$$P^i_k = P_{n_{i,k}}, \qquad \text{où} \quad n_{i,k} = (0, \ldots, 0, k, 0, \ldots, 0)$$

et

$$s^i_k = s_{n_{i,k}} \qquad (k \text{ étant la } i^{\text{ième}} \text{ composante de } n_{i,k})$$

est nécessairement une base normale de $A_{h_i}(M_i)$ qui s'identifie au sous-espace

$$A_i = 1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} A_{h_i}(M_i) \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} 1 \quad \text{de } A_h(M).$$

12.3. **Fonctions analytiques à valeurs dans un espace de Banach.**

Soit E un espace de Banach [satisfaisant ou non à la condition (N)] et soit $E[[X]]$ l'espace vectoriel des séries entières formelles à coefficients dans E, $[X = (X_1, \ldots, X_s)$, s fixé].

Soient D_0 le disque de centre O et de rayon $1 = (1, \ldots, 1)$ et $E(D_0)$ l'espace des fonctions strictement analytiques sur D_0 à valeurs dans E, c'est-à-dire des fonctions qui sont somme sur D d'une série appartenant à $E[[X]]$ et convergeant sur D.

Alors $E(D_0) = E \hat{\otimes} A[D_0]$, d'après **PTT 1.**

Supposons que E soit de dimension au moins égale à 1.

Pour $x \in E$, $x = 0$, posons

$$v(x) = \frac{\operatorname{Log}|x|}{\operatorname{Log}|p|} \qquad \text{et} \qquad v(0) = +\infty.$$

Avec ces conventions, les théorèmes 2, 3 et 2 *bis* et les corollaires 1 et 2 restent valables, leur démonstration commune se réduisant à l'identification de $E_h(M)$, espace des fonctions analytiques d'ordre h sur M et à valeurs dans E, avec $E \hat{\otimes} A_h(M)$. Il est clair que chaque fois que le terme « base normale de $A_h(M)$ » intervient, il faut le remplacer par « tel que toute $f \in E_h(M)$ soit de façon unique, etc. » comme en **PTT 1.**

Chapitre IV.

Applications.

13. Sommes de séries de Laurent.

Dans tout ce paragraphe U désigne la circonférence unité de $\mathbf{Q}_p$ et p un nombre premier différent de 2.

Nous avons montré (§ 2.3.5) qu'étant donné $\alpha \in U$, la suite $n \to \alpha^n$ est très bien répartie dans U à la condition nécessaire et suffisante que

— $\bar{\alpha}$ soit un générateur de $(\mathbf{Z}/(p))^\star$;

— $v(\alpha^{p-1} - 1) = 1$.

Nous désignerons ici par α un élément satisfaisant à ces conditions. Il résulte immédiatement du théorème 1 que toute fonction continue sur U peut être représentée de façon unique comme somme d'une série

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n (1 - x)\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right), \tag{1}$$

où

$$|b_n(1-\alpha^n)(1-\alpha^{n-1}) \cdots (1-\alpha)| \to 0.$$

Parmi les fonctions continues sur U, le théorème 3 nous permet de caractériser celles qui sont localement analytiques et de déterminer leur rayon d'analyticité.

Nous allons caractériser les séries (1) dont la somme est développable en série de Laurent convergente sur U : une condition nécessaire pour une telle fonction est d'avoir un rayon d'analyticité 1^-, autrement dit,

$$\underline{\lim} \frac{v(b_n)}{n} = 0.$$

La proposition 10 nous fournira cette caractérisation.

13.1. Définitions.

Soit $\mathcal{L}$ l'anneau des séries formelles restreintes, à coefficients dans $\mathbf{Q}_p$ (on passe aux espaces de Banach des séries à coefficients dans un espace de Banach, par produit tensoriel topologique) : $\mathcal{L}$ est l'ànneau des séries

$$f(X) = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n X^n,$$

où $|a_n| \to 0$ quand $n \to \infty$, muni de la norme

$$|f| = \sup_{n \in \mathbf{Z}} |a_n|$$

qui en fait un espace de Banach sur $\mathbf{Q}_p$, satisfaisant à la condition (N).

Soit $f \in \mathcal{L}$, f définit une fonction continue sur U

$$x \to \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n x^n;$$

on a donc une injection canonique de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$, soit L l'image de $\mathcal{L}$ par cette injection.

Si $f \in L$, nous noterons :

$|f|_L$ la norme de l'image réciproque de f dans $\mathcal{L}$;

$|f|_{\mathcal{C}}$ la norme de f dans $\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$.

L'espace $\mathcal{L}$ est somme directe des deux espaces

$$\mathcal{L}^+ = \{ f(X) \in \mathcal{L} \mid a_n = 0 \quad \text{pour } n < 0 \},$$
$$\mathcal{L}^- = \{ f(X) \in \mathcal{L} \mid a_n = 0 \quad \text{pour } n \geqq 0 \}.$$

Nous noterons L^+ (resp. L^-) l'image de $\mathcal{L}^+$ (resp. $\mathcal{L}^-$) dans $\mathcal{C}(U)$ et si $f \in L$, nous poserons

$$f = f^+ + f^-, \qquad \text{où} \quad f^+ \in L^+ \quad \text{et} \quad f^- \in L^-,$$

cette décomposition étant d'ailleurs unique.

13.2. **Proposition 10.** — *Soit $(a_n)_{n \geqq 1}$ une suite tendant vers zéro, nous lui associerons les fonctions*

$$(1) \qquad f(x) = \sum_{n \geqq 1} \frac{a_n}{x^n}, \qquad f(x) \in L^-,$$

$$(2) \qquad \varphi(x) = x \sum_{n \geqq 1} a_n \frac{(x-\alpha)\ldots(x-\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^{n-1})}, \qquad \varphi(x) \in \mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p).$$

Alors :

(a) La série d'interpolation de f sur la suite α^n est

$$(3) \qquad f(x) = \sum_{k \geqq 0} \varphi\left(\frac{1}{\alpha^k}\right)(1-x)\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha^{k-1}}\right);$$

(*b*) *La correspondance entre f et φ définie par ces formules est un isomorphisme isométrique de L^- sur $\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$.*

Nous allons d'abord montrer que les formules (1) et (2) définissent un isomorphisme isométrique de L^- sur $\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$: il suffit pour cela de montrer que l'ensemble des polynômes

$$A_n(x) = x\frac{(x-\alpha)\ldots(x-\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^{n-1})} \qquad (n \geq 1)$$

est une base normale de $\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$: en effet, s'il en est ainsi, les applications $f \to (a_n)_{n\geq 0}$ [resp. $\varphi \to (a_n)_{n\geq 0}$] sont des isomorphismes isométriques de L^- [resp. $\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$] sur l'espace des suites tendant vers zéro.

Or, les polynômes $(A_n(x)/x)_{n\geq 1}$ constituent la base normale de $\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$ associée à la suite $u_n = \alpha^{n+1}$ (visiblement très bien répartie dans U); de plus, dans $\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$, la multiplication par la fonction « $x \to x$ » est un isomorphisme isométrique de $\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$ sur lui-même, et transforme une base normale en base normale. Il reste donc à montrer que f et φ sont liées par la formule (3).

Soient $(d_{n,k})_{\substack{n\geq 0\\k\geq 1}}$, les coefficients définis par

$$\frac{1}{x^k} = \sum_{n\geq 0} d_{n,k}(1-x)\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right),$$

(3) sera démontré si nous prouvons que, quelle que soit la suite $(a_k)_{k\geq 1}$ tendant vers zéro, et quel que soit $n < 1$,

$$\varphi\left(\frac{1}{\alpha^n}\right) = \sum_{k\geq 1} d_{n,k}a_k.$$

Or ceci résulte de ce que $d_{n,k} = A_k\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)$, ce qui se voit par exemple en remarquant que l'identité

$$\frac{1}{x^k} - 1 = (1-x)\left(\frac{1}{x} + \ldots + \frac{1}{x^k}\right) \qquad \text{pour} \quad k \geq 1,$$

entraîne que

$$d_{n,1} = \frac{1}{\alpha}d_{n-1,1} \qquad (n \geq 1),$$

$$d_{n,k} = \frac{1}{\alpha^k}d_{n-1,k} + d_{n,k-1} \qquad (n \geq 1,\ k \geq 2),$$

ce qui avec $d_{0,k} = 1$ pour tout $k \geq 1$, détermine les coefficients $d_{n,k}$: or il est immédiat que $d_{n,k} = A_k\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)$ satisfait à ces relations, ce qui démontre la proposition.

Corollaire 1. — *Pour que la fonction*

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} b_n(1-x)\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$$

appartienne à L^-, il faut et il suffit qu'il existe une fonction continue $\varphi\in\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$ telle que

$$b_n=\varphi\left(\frac{1}{\alpha^n}\right).$$

Alors les coefficients de la série de Laurent dont f est la somme

$$f(x)=\sum_{n\geq 1} a_{-n}x^{-n}$$

sont définis par

$$\varphi(x)=x\sum_{n\geq 0} a_{-n}\frac{(x-\alpha)\ldots(x-\alpha^{n-1})}{(1-\alpha)\ldots(1-\alpha^{n-1})}.$$

Corollaire 2. — *Pour que la fonction*

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} b_n(1-x)\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$$

appartienne à L, il faut et il suffit qu'il existe une fonction continue $\varphi\in\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$ telle que

$$\left|b_n-\varphi\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)\right|\to 0 \qquad \textit{quand} \quad n\to+\infty.$$

En effet, si φ est associée à f^- par la proposition 9, les coefficients $b_n-\varphi\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)$ sont associés à f^+, donc tendent vers zéro.

Nous savons caractériser les fonctions de L^+; cependant, la propriété suivante fournit une correspondance entre fonctions de L^+ assez analogue à l'isomorphisme de L^- sur $\mathcal{C}$ défini par la proposition 10.

Proposition 11. — *Soient $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite tendant vers zéro, $f(x)=\sum_{n\geq 0} a_nx^n$ la fonction de L^+ associée, et $(b_n)_{n\geq 0}$ la suite des coefficients d'interpolation de f*

$$f(x)=\sum_{n\geq 0} b_n(1-x)\,1-\frac{x}{\alpha}\Big)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right).$$

La fonction $\psi(x)\in L^+$ associée à la suite $(b_n)_{n\geq 0}$,

$$\psi(x)=\sum_{n\geq 0} b_nx^n$$

a pour série d'interpolation sur la suite $\frac{1}{\alpha^n}$:

$$\psi(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (1-x)(1-\alpha x) \ldots (1-\alpha^{n-1} x).$$

La correspondance $f \leftrightarrow \psi$ *ainsi définie est un isomorphisme isométrique de* L^+ *sur lui-même.*

Cette proposition se démontre par un calcul très élémentaire : si $(c_{n,k})_{\substack{k \geq 0 \\ n \geq 0}}$ sont les coefficients définis par

$$x^n = \sum_{k \geq 0} c_{n,k} (1-x) \ldots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{k-1}}\right),$$

alors on montre par récurrence que

$$c_{n,k} = \frac{(\alpha^n - 1) \ldots (\alpha^n - \alpha^{k-1})}{(1-\alpha) \ldots (1-\alpha^k)}.$$

Il en résulte que $|c_{n,k}| \leq 1$, puisque c'est, à une puissance de α près, la valeur en un point de U du polynôme $\mathbf{Q}_k$ associé à la suite α^n.

On a donc

$$b_k = \sum_{n \geq 0} c_{n,k} a_n = \sum_{n \geq k} c_{n,k} a_n$$

et

$$\psi(x) = \sum_{k \geq 0} b_k x^k = \sum_{n \geq 0} a_n \left(\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} x^k \right),$$

avec

$$\sum_{k=0}^{n} c_{n,k} x^k = (1-x)(1-\alpha x) \ldots (1-\alpha^{n-1} x),$$

d'où la proposition.

14. **Limites uniformes de séries de Laurent.**

Étant donnée une série d'interpolation

(1) $$f(x) = \sum_{n \geq 0} b_n (1-x)\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right) \cdots \left(1 - \frac{x}{\alpha^{n-1}}\right),$$

nous venons de montrer que $b_n = \varphi\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)$, où $\varphi \in \mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$ équivaut à $f \in L^-$. En particulier,

$$f \in L^- \quad \Rightarrow \quad \sup_{n \geq 0} |b_n| = |\varphi|_{\mathcal{C}} = |f|_L.$$

Réciproquement, quelles sont les fonctions données par la série (1) et telles que $|b_n|$ soit borné ?

Proposition 12. — *Soit L_0 la boule unité de L : $L_0 = \{ f \in L \mid |f|_L \leqq 1 \}$ et soit $\overline{L}_0$ son adhérence dans $\mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions continues sur U qui y sont limites uniformes de sommes de séries de Laurent.*

Une fonction f donnée par la série (1) appartient à $\overline{L}_0$ si et seulement si

$$\sup_{n \geqq 0} |b_n| \leqq 1.$$

Corollaire. — *Toute fonction de $\overline{L}_0$ a sur U un rayon d'analyticité au moins égal à 1^-.*

Notons L_0^+ (resp. L_0^-) la boule unité de L^+ (resp. L^-) et $\overline{L}_0^+$ (resp. $\overline{L}_0^-$) l'adhérence dans $\mathcal{C}$ de L_0^+ (resp. L_0^-).

Lemme 15. — *Si la fonction f donnée par (1) appartient à $\overline{L}_0^-$, alors*

$$\sup_{n \geqq 0} |b_n| \leqq 1.$$

Soit f donnée par (1) et soit (f_k) une suite d'éléments de L_0^-. Notons φ_k la fonction continue associée à f_k par la proposition 10.

Alors

$$f_k(x) = \sum_{n \geqq 0} \varphi_k\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)(1-x)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right).$$

Si $f \in \overline{L}_0^-$, on peut choisir la suite f_k de telle sorte que $|f - f_k|_{\mathcal{C}} \to 0$ quand $k \to +\infty$. Or,

$$|f - f_k|_{\mathcal{C}} = \sup_{n \geqq 0} \left| \left(b_n - \varphi_k\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)\right)(1-\alpha^n)\ldots(1-\alpha) \right|.$$

Pour un indice n fixé, on a donc $\left| b_n - \varphi_k\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\right| \to 0$. Or

$$|\varphi_k|_{\mathcal{C}} = |f_k|_L \leqq 1, \qquad \text{donc} \quad \left|\varphi_k\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)\right| \leqq 1, \qquad \text{et ainsi} \quad |b_n| \leqq 1.$$

Réciproquement, soit f donné par (1) avec $\sup_{n \geqq 0} |b_n| \leqq 1$. On peut choisir une suite de fonctions $\varphi_k(x) \in \mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$ et telle que

— $|\varphi_k|_{\mathcal{C}} \leqq 1$;

— $\varphi_k\left(\frac{1}{\alpha^j}\right) = b_j$ pour $j = 0, \ldots, k$; par exemple, en prenant pour φ_k une fonction constante par morceaux, ou un polynôme.

Soit $f_k(x) \in L_0^-$ associée à φ_k par la proposition 10 :

$$f_k(x) = \sum_{n \geq 0} \varphi_k\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)(1-x)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right).$$

On a alors

$$|f-f_k|_U = \sup_{n\geq 0}\left|(b_n - \varphi_k\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)(1-\alpha^n)\ldots(1-\alpha)\right|$$
$$= \sup_{n\geq k}\left|(b_n - \varphi_k\left(\frac{1}{\alpha^n}\right)(1-\alpha^n)\ldots(1-\alpha)\right|,$$

soit

$$|f-f_k|_U \leq |(1-\alpha^k)\ldots(1-\alpha)|.$$

Donc $|f-f_k|_U \to 0$, et $f \in \bar{L}_0^-$.

LEMME 16. — $\bar{L}_0^+ = \bar{L}_0^-$.

Soit, en effet, f_k une suite d'éléments de $\bar{L}_0^+$,

$$f_k(x) = \sum_{n\geq 0} b_{n,k}(1-x)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right),$$

où $b_{n,k} \to 0$ quand $n \to +\infty$ et

$$\sup_{n\geq 0}|b_{n,k}| = |f_k|_L \leq 1.$$

Supposons que cette suite converge dans $\mathcal{C}$ vers une fonction $f \in \mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p)$, alors

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} b_n(1-x)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right)$$

et, exactement comme au lemme 15,

$$|b_n - b_{n,k}| \to 0 \quad \text{quand } k \to +\infty, \qquad \text{donc} \quad \sup_{n\geq 0}|b_n| \leq 1.$$

Réciproquement, si $\sup_{n\geq 0}|b_n| \leq 1$, soit

$$f_n(x) = \sum_{k\geq 0}^{n} b_k(1-x)\ldots\left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right),$$

alors $f_n \in L_0^+$ et $|f-f_n| \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Nous allons résumer ci-dessous les renseignements que nous avons obtenus sur une fonction continue sur U, donnée par sa série d'interpolation, en remarquant que les constantes associées à un compact M qui interviennent dans le théorème 3 sont ici

$$\begin{aligned}\sigma_h &= \frac{1}{N_1}+\ldots+\frac{1}{N_h}\\ &= \frac{1}{p-1}+\frac{1}{p(p-1)}+\ldots+\frac{1}{p^{h-1}(p-1)}=\frac{p}{(p-1)^2}\left(1-\frac{1}{p^h}\right),\\ \sigma &= \frac{p}{(p-1)^2}.\end{aligned}$$

Proposition 13. — *Soit $(b_n)_{n\geqq 0}$ une suite et soit*

$$f(x)=\sum_{n\geqq 0} b_n(1-x)\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right).$$

(*a*) $f\in\mathcal{C}(U,\mathbf{Q}_p)\Leftrightarrow |b^n(\alpha^n-1)\ldots(\alpha-1)|\to 0$;

(*b*) $f\in L^+\Leftrightarrow |b_n|\to 0$, *alors* $|f|_L=\sup\limits_{n\geqq 0}|b_n|$;

(*c*) $b_n=\varphi\left(\dfrac{1}{\alpha^n}\right)$, où $\varphi\in\mathcal{C}(U,\mathbf{Q}_p)\Leftrightarrow f\in L^-$, *alors* $|f|_L=|\varphi|_{\mathcal{C}}$;

(*d*) $v(b_n)\geqq 0\Leftrightarrow f\in\bar{L}_0$;

(*e*) $\underline{\lim}\,\dfrac{v(b_n)}{n}>-\dfrac{p}{(p-1)^2}\Leftrightarrow$ *f localement analytique sur U;*

(*f*) *Soit* $\gamma=\underline{\lim}\,\dfrac{v(b_n)}{n}>-\dfrac{p}{(p-1)^2}$ *et soit h défini par*

$$-\frac{p}{(p-1)^2}\left(1-\frac{1}{p^h}\right)\leqq\gamma<-\frac{p}{(p-1)^2}\left(1-\frac{1}{p^{h-1}}\right).$$

Posons $m=(p-1)p^{h-1}\gamma+\dfrac{1}{(p-1)}(p^h-1)$, *le rayon de convergence de f sur U est* $\rho=p^{-h}p^m$ *et son rayon d'analyticité est :*

ρ^+ si $v(b_n)+n\gamma\to+\infty$;

ρ^- *sinon.*

De plus, si nous notons $\mathcal{A}_{1^-}(U)$ l'espace des fonctions ayant un rayon d'analyticité au moins égal à 1^-, nous avons les injections canoniques suivantes, celles dont on sait qu'elles sont complètement continues sont notées « cc » :

$$\begin{tikzcd} A_0(U)=L_0^+ \arrow[dr, "cc"] & & & & & \\ & \bar{L}^0 \arrow[r] & \mathcal{A}_{1^-}(U) \arrow[r] & A_1(U) \arrow[r, "cc"] & \underset{h>1}{A_h(U)} \arrow[r, "cc"] & \mathcal{C}(U,\mathbf{Q}_p). \\ L_0^- \arrow[ur] & & & & & \end{tikzcd}$$

15. Logarithme.

Comme au paragraphe 14, nous nous plaçons dans $\mathbf{Q}_p$, où $p \neq 2$. Soit α une unité de $\mathbf{Z}_p$: cherchons à définir sur la circonférence unité U de $\mathbf{Q}_p$ un logarithme à base α, c'est-à-dire une fonction $L_\alpha(x)$ satisfaisant à

$$\mathbf{L}\ \begin{cases} L_\alpha(x) \in \mathcal{C}(U, \mathbf{Q}_p), \\ L_\alpha(\alpha^n) = n \quad \text{quel que soit } n \geqq 0 \end{cases}$$

Proposition 14. — *Les conditions* **L** *définissent le logarithme à base* α *si et seulement si* $(\alpha^n)_{n\geqq 0}$ *est très bien répartie dans* U, *alors*

$$(1) \qquad L_\alpha(x) = \sum_{n\geqq 1} \frac{1}{1-\alpha^n}(1-x)\left(1-\frac{x}{\alpha}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{\alpha^{n-1}}\right).$$

Plus généralement, si $\alpha \in U$, $\alpha^{p-1} \neq 1$ *et si* $\overline{(\alpha)}$ *est l'adhérence du groupe cyclique engendré par* α, *la série* (1) *converge dans* $\mathcal{C}(\overline{(\alpha)}, \mathbf{Q}_p)$ *et définit la représentation continue* L_α *du groupe multiplicatif* $\overline{(\alpha)}$ *sur le groupe additif* $\mathbf{Z}_p$ *telle que* $L_\alpha(\alpha) = 1$.

Montrons d'abord que, quel que soit $\alpha \in U$, $\alpha^{p-1} \neq 1$, la série (1) est telle que

$$L_\alpha(\alpha^n) = n,$$

c'est-à-dire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^n-1}{\alpha^k-1}(1-\alpha^{n-1})\ldots(1-\alpha^{n-k+1}) = n, \qquad \text{pour } n \geqq 1.$$

Pour $n=1$, on a évidemment $\dfrac{\alpha-1}{\alpha-1} = 1$; de plus,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha^n-1}{\alpha_k-1}(1-\alpha^{n-1})\ldots(1-\alpha^{n-k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\alpha^{n-1}-1}{\alpha^k-1}(1-\alpha^{n-2})\ldots(1-\alpha^{n-k})$$
$$= \sum_{k=1}^{n-1} \alpha^{n-k}(1-\alpha^{n-1})(1-\alpha^{n-k+1}) + (1-\alpha^{n-1})\ldots(1-\alpha) = 1.$$

La fonction définie sur $(\alpha^n)_{n\geqq 0}$ par $L_\alpha(\alpha^n) = n$ a donc comme coefficients d'interpolation sur cette suite, avec les notations du corollaire 2 du théorème 1 (§ 6.2)

$$a_n = (1-\alpha^{n-1})\ldots(1-\alpha).$$

Donc

$$v(a_n) \geqq \left[\frac{n}{p-1}\right] \qquad \text{et} \qquad |a_n| \to 0.$$

Or nous avons montré au paragraphe 2.3.5 que α^n est très bien répartie dans $\overline{(\alpha)}$: ceci démontre que la série (1) converge dans $\mathcal{C}(\overline{(\alpha)}, \mathbf{Q}_p)$, sa somme définissant évidemment la représentation continue de $\overline{(\alpha)}$ sur $\mathbf{Z}_p$ puisque c'est une fonction continue représentant le semi-groupe $(\alpha^n)_{n\geq 0}$ sur N.

En particulier, soit ζ une racine $(p-1)$-ième de l'unité : pour tout α tel que $\zeta \in \overline{(\alpha)}$, on a nécessairement

$$\mathrm{Log}_\alpha(\zeta) = 0, \qquad \text{puisque} \quad (p-1)\,\mathrm{Log}_\alpha(\zeta) = \mathrm{Log}_\alpha(1) = 0.$$

De plus, toute représentation continue φ de U sur $\mathbf{Z}_p$ est telle que l'ensemble $\varphi^{-1}(0)$ soit l'ensemble des racines de l'équation $X^{p-1} = 1$: cherchons à prolonger à U le logarithme usuel, défini sur $1 + p\mathbf{Z}_p$ par

$$\mathrm{Log}\, X = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{(X-1)^n}{n}.$$

On sait que ce logarithme est tel que

$$\mathrm{Log}(\exp p) = \mathrm{Log}\left(\sum_{n\geq 0} \frac{p^n}{n!}\right) = p.$$

Soit ζ une racine primitive $(p-1)$-ième de 1 et soit $\alpha_0 = \zeta \exp p$: la fonction $L_{\alpha_0}(x)$ définie ci-dessus satisfait alors pour tout $x \in 1 + p\,\mathbf{Z}_p$ à

$$L_{\alpha_0}(x) = \frac{1}{p}\,\mathrm{Log}\, x,$$

Puisqu'elle satisfait à cette relation sur l'ensemble $\{\alpha_0^{(p-1)n}\}_{n\geq 0}$ qui est dense dans $1 + p\mathbf{Z}_p$. De plus, tout prolongement continu sur U de la fonction $\mathrm{Log}\, x$ est de ce type, et nous avons le corollaire :

Corollaire 1. — *Tout prolongement continu sur U de la représentation de $1 + p\mathbf{Z}_p$ sur $p\mathbf{Z}_p$ définie par la série logarithme est une fonction*

$$\frac{1}{p} L_{\alpha_0}(x) = \sum_{n\geq 1} (1-x)\left(1 - \frac{x}{\alpha_0}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\alpha_0^{n-1}}\right)\frac{1}{1-\alpha_0^n},$$

et une telle série définit un prolongement du logarithme si $\alpha_0 = \zeta \exp p$, où ζ est une racine primitive $(p-1)$-ième de 1.

Remarquons qu'un tel logarithme a, d'après le (*f*) de la proposition 14, un rayon d'analyticité 1^- comme on peut s'y attendre compte tenu des propriétés de translation du logarithme.

16. Exponentielle.

16.1. Fonction α^x.

Soit α une unité de Ω (complété de la clôture algébrique de $\mathbf{Q}_p$) : cherchons à prolonger en une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$ l'application $n \to \alpha^n$.

Si une telle fonction α^x existe, on a nécessairement

$$\alpha^x = \sum_{n\geq 0} a_n \binom{x}{n} \qquad \text{avec} \quad |a_n| \to 0$$

et

$$a_n = \sum_{k\geq 0} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \alpha^k = (\alpha - 1)^n.$$

Donc une fonction continue α^x sur $\mathbf{Z}_p$ existe si et seulement si $v(\alpha - 1) > 0$. En appliquant le corollaire 2 du théorème 3 nous obtenons la proposition :

Proposition 15. — *Pour que l'application $n \to \alpha^n$ de $\mathbf{Z}_p$ dans Ω soit prolongeable en une fonction α^x continue sur $\mathbf{Z}_p$, il faut et il suffit que $v(\alpha^x - 1) > 0$, on a alors*

(*a*) $\alpha^x = \sum_{n\geq 1} (\alpha - 1)^n \binom{x}{n}$;

(*b*) *α^x est localement analytique sur $\mathbf{Z}_p$;*

(*c*) *Si h est le plus petit entier tel que $v(\alpha - 1) \geq \frac{1}{p^{h(p-1)}}$, le rayon d'analyticité de α^x sur $\mathbf{Z}_p$ est (p^{m-h}), où $m = p^h v(\alpha - 1) - \frac{1}{p-1}$.*

On retrouve ici le résultat classique sur les unités distinguées : α^x est analytique stricte sur $\mathbf{Z}_p$ si $v(\alpha - 1) > \frac{1}{p-1}$ (*cf.*, par exemple, [6]). (Remarquons que α n'est pas supposé algébrique sur $\mathbf{Q}_p$.)

16.2. **Prolongement de l'exponentielle à $\mathbf{Q}_p$.**

Si l'on choisit pour α la valeur $\alpha_0 = \exp p$, la fonction α^x ci-dessus définie coïncide avec $\exp px$, où $\exp x$ est défini pour $x \in p\mathbf{Z}_p$ par

$$\exp x = \sum \frac{x^n}{n!}.$$

Nous cherchons à construire une fonction continue sur $\mathbf{Q}_p$, prolongeant l'exponentielle ci-dessus et qui définisse une représentation multiplicative dans Ω du groupe additif de $\mathbf{Q}_p$.

Nous allons construire une suite de fonctions $(\varphi_\lambda)_{\overrightarrow{\lambda \geq 0}}$ à valeurs dans Ω telles que

$$(\Phi) \begin{cases} \varphi_\lambda \text{ est continue sur la boule } B_\lambda = p^{1-\lambda}\mathbf{Z}_p\,; \\ \varphi_0(x) = \exp x \text{ pour } x \in B_0 = p\mathbf{Z}_p\,; \\ \varphi_\lambda | B_{\lambda-1} = \varphi_{\lambda-1}\,; \\ \varphi_\lambda(x+y) = \varphi_\lambda(x)\,\varphi_\lambda(y). \end{cases}$$

Il est clair que si une telle suite est définie, la fonction φ définie sur $\mathbf{Q}_p$ par $\varphi \mid B_\lambda = \varphi_\lambda$, est un prolongement de la représentation exponentielle; d'autre part, tout prolongement φ de la représentation exponentielle définit canoniquement une suite : $\varphi_\lambda = \varphi \mid B_\lambda$.

Une condition nécessaire pour que (φ_λ) satisfasse à (Φ) est que, quel que soit $\lambda \geqq 1$, on ait

$$\Lambda \qquad [\varphi_\lambda(p^{1-\lambda})]^p = \varphi_{\lambda-1}(p^{2-\lambda}).$$

Toute suite $(\varphi_\lambda)_{\lambda \geqq 0}$ satisfaisant à (Φ) est donc telle que la suite des nombres

$$e_\lambda = \varphi_\lambda(p^{1-\lambda}), \qquad \text{satisfasse à} \quad e_0 = \exp p \quad \text{et} \quad e_\lambda^p = e_{\lambda-1}.$$

Réciproquement, si $(e_\lambda)_{\lambda \geqq 0}$ désigne une suite de nombres distincts et tels que

$$e_0 = \exp p,$$
$$e_\lambda^p = e_{\lambda-1},$$

alors $e_\lambda^{p^\lambda} = e_0$ et $v(e_\lambda - 1) = \frac{1}{p^\lambda}$ [car l'équation $(1 + X)^{p^\lambda} = e_0$ est une équation d'Eisenstein]. Soit K_λ l'extension de $\mathbf{Q}_p$ par $e_\lambda : K_\lambda$ est totalement ramifiée sur $\mathbf{Q}_p$ et $[K_\lambda : \mathbf{Q}_p] = p^\lambda$.

Si $x \in B_\lambda$, $x = p^{1-\lambda} y$, où $y \in \mathbf{Z}_p$ et les conditions (Φ) imposent

$$\varphi_\lambda(x) = e_\lambda^y,$$

où e_λ^y est la fonction définie à la proposition 15.

De plus, e_λ^y a sur $\mathbf{Z}_p$ le rayon d'analyticité $(p^{m_\lambda - \lambda})^-$, où

$$m_\lambda = p^\lambda \times \frac{1}{p^\lambda} - \frac{1}{p-1} = 1 - \frac{1}{p-1},$$

soit

$$m_\lambda - \lambda = 1 - \lambda - \frac{1}{p-1};$$

le rayon d'analyticité de φ_λ sur B_λ est donc

$$\left(p^{(\lambda-1)+\left(1-\lambda-\frac{1}{p-1}\right)}\right)^- = \left(p^{-\frac{1}{p-1}}\right)^-,$$

comme on pouvait aussi le remarquer compte tenu de la construction de φ_λ « par translation ». Nous résumerons cette construction par la

Proposition 16. — *Soit* $\mathbf{Q}_p = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset \Omega$ *une suite d'extensions de* $\mathbf{Q}_p$ *telles que* K_λ *soit engendrée (sur* $\mathbf{Q}_p$*) par une racine* e_λ *de l'équation* $X^{p^\lambda} = \exp p$. *La série*

$$\varphi_\lambda(x) = \sum_{n \geqq 0} (e_\lambda - 1)^n \binom{p^{\lambda-1} x}{n}$$

définit une représentation continue de la boule $B_\lambda = p^{1-\lambda}\mathbf{Z}_p$ *de* $\mathbf{Q}_p$ *dans* Ω, φ_λ *prolonge l'exponentielle et* φ_λ *admet le rayon d'analyticité* $\left(p^{-\frac{1}{p-1}}\right)^-$ *sur* B_λ.

Soit φ la représentation de $\mathbf{Q}_p$ définie par une suite K_λ; cherchons maintenant à caractériser les sous groupes fermés $\varphi(\mathbf{Q}_p)$ de Ω, associés à différentes suites K_λ.

Soit d'abord $V_\lambda = \varphi_\lambda(B_\lambda)$: V_λ est un sous-groupe ouvert et fermé de K_λ. Notons $\mathfrak{m}_\lambda$ l'idéal maximal de l'anneau de valuation A_λ de K_λ : $\mathfrak{m}_\lambda = (e_\lambda - 1) A_\lambda$. Alors $V_\lambda \subset 1 + \mathfrak{m}_\lambda$, mais $V_\lambda \neq 1 + \mathfrak{m}_\lambda$ comme on le voit par exemple en prenant l'image de V_λ dans $1 + \dfrac{\mathfrak{m}_\lambda}{\mathfrak{m}_\lambda^2}$.

Quel que soit $\alpha \in 1 + p\mathbf{Z}_p$, l'équation $X^{p^\lambda} = \alpha$ a une racine dans V_λ : en effet, si $\operatorname{Log}\alpha = \beta$, $\beta \in p\mathbf{Z}_p$, $p^{-\lambda}\beta \in B_\lambda$ et

$$\varphi_\lambda(p^{-\lambda}\beta)^{p^\lambda} = \varphi_0(\beta) = \alpha.$$

De plus, la seule racine de l'équation $X^{p^\lambda} = \alpha$ qui soit dans $1 + \mathfrak{m}_\lambda$ est dans V_λ.

Donc V_λ est exactement le sous-groupe de $1 + \mathfrak{m}_\lambda$ constitué des racines p^λ-ième des éléments de U.

Un sous-groupe multiplicatif V *de* Ω^* *est l'image de* $\mathbf{Q}_p$ *par une application exponentielle si et seulement si :*

(*a*) *quels que soient* $\alpha \in U$ *et* $\lambda \geq 1$, *l'équation* $X^{p^\lambda} = \alpha$ *a dans* V *une racine et une seule;*

(*b*) *quel que soit* $y \in V$, $v(y-1) > 0$ *et il existe un entier* n *tel que* $y^{p^n} \in \mathbf{Q}_p$.

Nous venons en effet de montrer que si φ est une application exponentielle de $\mathbf{Q}_p$ dans Ω, $\varphi(\mathbf{Q}_p)$ satisfait à ces conditions.

Réciproquement, si V satisfait aux conditions ci-dessus, on peut construire une suite φ_λ et une suite K_λ, comme à la proposition 16, en choisissant pour e_λ la racine de l'équation $X^{p^\lambda} = \exp p$ qui est dans V.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Amice (Yvette). — Séries d'interpolation sur un corps valué complet, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 256, 1963, p. 1650-1651.

[2] Amice (Yvette). — Interpolation des fonctions continues sur la boule unité d'un corps valué complet localement compact, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 256, 1963, p. 2742-2744.

[3] Amice (Yvette). — Interpolation des fonctions analytiques molles sur la boule unité d'un corps valué complet localement compact, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 256, 1963, p. 2983-2984.

[4] Bourbaki (Nicolas). — *Topologie générale*, chap. 10, 2e éd. — Hermann, Paris, 1961 (Act. scient. et ind., 1084; Éléments de Mathématique, 10).
[5] Bourbaki (Nicolas). — *Intégration*, chap. 3. — Hermann, Paris, 1952 (Act. scient. et ind., 1175; Éléments de Mathématique, 13).
[6] Chevalley (Claude). — Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux, *J. Fac. Sc. Univ. Tokyo*, Sect. 1, t. 2, 1929-1934, p. 365-476 (Thèse Sc. math., Paris, 1934).
[7] Eymard (Pierre). — Suites équiréparties dans un groupe compact, *Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres*, t. 14, 1960-1961, n° 3, 11 pages.
[8] Fleischer (I.). — Sur les espaces normés non-archimédiens, *Koninkl. nederl. Akad. van Wetensch.*, Séries A, t. 57, 1954, p. 165-168.
[9] Hewitt (E.) and Ross (K. A.). — *Abstract harmonic analysis*, Band 1. — Springer-Verlag, Berlin, 1963 (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaft, 115).
[10] Hily (Jacques). — Polynômes à valeurs entières, *Séminaire Delange-Pisot : Théorie des nombres*, t. 4, 1962-1963, n° 1, 11 pages.
[11] Hily (Jacques). — Séries d'interpolation pour les fonctions de plusieurs variables p-adiques, *C. R. Acad. Sc. Paris*, t. 256, 1963, p. 2985-2987.
[12] Kaloujnine (L.). — La structure de p-groupes de Sylow de groupes symétriques finis, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, série 3, t. 65, 1948, p. 239-276.
[13] Kaloujnine (L.). — Sur une généralisation des p-groupes de Sylow des groupes symétriques [en russe], *Acta Math. Acad. Sc. Hungar.*, t. 2, 1951, p. 197-229.
[14] Kaloujnine (L.) et Krasner (M.). — Produit complet des groupes de permutations et problèmes d'extension de groupes, I, *Acta scient. Math., Szeged*, t. 13, 1950, p. 208-230; II, t. 14, 1951, p. 39-66; III, t. 14, 1951, p. 69-82.
[15] Mahler (K.). — An interpolation series for a continuous function of a p-adic variable, *J. für reine und angew. Math.*, t. 199, 1958, p. 23-34.
[16] Monna (A.). — Sur les espaces normés non archimédiens, I, *Koninkl. nederl. Akad. van Wetensch.*, Series A, t. 59, 1956, p. 475-483; II, t. 59, 1956, p. 484-489; III, t. 60, 1957, p. 459-467; IV, t. 60, 1957, p. 468-476.
[17] Ostrowski (A.). — Ueber ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, *J. für reine und angew. Math.*, t. 149, 1919, p. 117-124.
[18] Pólya (Georg). — Ueber ganzwertige Polynome in algebraischen Zahlkörpern, *J. für reine und angew. Math.*, t. 149, 1919, p. 97-116.
[19] *Séminaire* Cartan, t. 15, 1962-1963 : *Topologie différentielle*. — Secrétariat mathématique, Paris, 1964.
[20] Schröbe (W.). — *Beiträge zur Funktionentheorie in nichtarchimedisch bewerteten Körpern* (Thèse Sc. math. Univ., Münster, 1930).
[21] Šnirelman (L.). — Sur les fonctions dans les corps normés et algébriquement fermés, *Izvestija Akad. Nauk S. S. S. R., Serija Mat.*, t. 2, 1938, p. 487-498.
[22] Serre (Jean-Pierre). — *Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques*. — Presses universitaires de France, Paris, 1962 (Institut des hautes Études scientifiques, Publications mathématiques, 12, p. 69-85).

(Manuscrit reçu le 14 novembre 1963.)

Mme Yvette Amice,
Maître de Conférence,
Faculté des Sciences,
Poitiers (Vienne).