LAQUIÈRE

Note sur la géométrie des quinconces

Bulletin de la S. M. F., tome 7 (1879), p. 85-92
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1879__7__85_1>

Note sur la Géométrie des quinconces; par M. Laquière.

(Séance du 28 mars 1879.)

Le *Bulletin* de 1878 contient divers articles fort intéressants de MM. Lucas, Laisant et de Polignac sur cette Géométrie, qui n'est autre, à proprement parler, que la peinture graphique de la théorie des nombres, à laquelle elle semble appelée à rendre les mêmes services que la Géométrie pure, ou le raisonnement sur les figures, rend à l'Algèbre ordinaire.

Cette Note, sans rien apprendre de nouveau sur la question, a pour objet de relier entre eux les travaux précités, en montrant que les résultats obtenus découlent d'une sorte de principe unique, qui, simplifiant les démonstrations, en rend à peu près le tout évident. En dégageant la démonstration des élégantes vérités dues à nos savants confrères de tout élément emprunté au calcul, quelle qu'en soit d'ailleurs la simplicité, nous croyons la mettre mieux en harmonie avec le sujet, qui n'est autre, nous le répétons, qu'une question particulière de la Géométrie pure (ou loi des formes concrètes et visibles), la branche représentative de la théorie des nombres, question particulière correspondante dans la théorie des grandeurs abstraites ou numériques.

En prenant comme unité de longueur le côté a d'une case dans l'échiquier indéfini, et la direction des deux côtés d'une case déterminée comme axes coordonnés, les sommets des diverses cases seront tous les points à coordonnées entières. Par suite, les couples de solutions entières de l'équation indéterminée $f(x, y) = 0$ seront les coordonnées des points de rencontre de la courbe $f = 0$ avec les sommets de l'échiquier (ou des quinconces). Il est tout d'abord évident que les inclinaisons sur les axes de toute droite inscrite dans l'échiquier (c'est-à-dire joignant deux sommets de quinconces) seront commensurables, et, réciproquement, que toute inclinaison commensurable sera parallèle à une droite inscriptible dans les quinconces. Il en est de même, ainsi que l'ont démontré les articles précités, et qu'il va être appliqué d'ailleurs ci-après, de l'inclinaison de deux telles droites l'une sur l'autre. On peut d'ailleurs substituer aux sommets de cases leurs centres, ou encore considérer à la fois centres et sommets comme les *points* ou *sommets* d'un même système de quinconces, en diminuant de moitié l'unité de longueur.

Observons en premier lieu que toute droite à inclinaison commensurable sur les axes coordonnés, partant d'un sommet de quinconce, passe par une série de sommets ayant pour coordonnées, par rapport au premier pris pour origine, les équimultiples du numérateur et du dénominateur de la fraction irréductible exprimant l'inclinaison.

Complétons cette observation en remarquant que, une droite étant inscrite dans les quinconces, si on la prolonge de segments égaux à elle-même, tous les segments successifs seront également inscrits dans les quinconces; qu'enfin une droite de même longueur que la droite inscrite, et qui lui sera menée normalement par un des sommets, sera également inscrite dans les quinconces, puisque ses projections sur les axes, étant simplement permutées de longueur, aboutissent également à des sommets de quinconces. Il en résultera que les quinconces nouveaux construits sur un côté inscrit dans les premiers quinconces ont tous leurs sommets en des sommets du premier système.

Toute droite à inclinaison commensurable sur une droite inscrite dans le premier système de quinconces passe elle-même par une série de sommets des quinconces construits sur celle-ci, et par suite de sommets des quinconces du système primitif.

Soit un système A de quinconces dont la base a, dirigée suivant la droite A, est prise pour unité de longueur. Une droite B, d'inclinaison commensurable irréductible $\frac{m}{n}$, est l'alignement de sommets distants entre eux de $b = a\sqrt{m^2 + n^2}$. Le système B de quinconces construits sur la base b, en grandeur et position, a tous ses sommets faisant partie des sommets du système A, les surfaces des cases ou quinconces étant a^2 et $a^2(m^2+n^2)$ dans les deux systèmes. De même, si l'on considère une troisième droite C, d'inclinaison commensurable irréductible $\frac{p}{q}$ sur B, une longueur $c=b\sqrt{p^2+q^2}$ dirigée suivant c, ayant un sommet commun avec a et b, sera la base d'un système de quinconces de surface

$$b^2(p^2+q^2)=a^2(m^2+n^2)(p^2+q^2),$$

dont les sommets font partie de ceux du système B, et par suite de ceux du système A. Par conséquent, la droite C a sur la droite A une inclinaison commensurable, et l'on retrouve par le raisonnement géométrique cette base de la théorie des quinconces que : *Si deux angles ont leurs tangentes commensurables, il en est de même de l'angle égal à leur somme ou à leur différence.* La valeur de l'inclinaison du second côté du deuxième angle sur le premier du premier angle s'obtient du reste, sans intermédiaire, par l'évaluation des projections sur les deux axes des quinconces du premier système a, de la droite d'inclinaison $\frac{p}{q}$ sur le côté b du second système de quinconces incliné de $\frac{m}{n}$ sur le côté a.

D'après la construction ci-dessus expliquée, le côté b, inscrit dans les quinconces a, c'est-à-dire *ayant ses deux extrémités en deux sommets de ces quinconces,* le plus court possible, s'obtiendra si m et n sont premiers entre eux, comme hypoténuse du triangle rectangle des coordonnées égales à na et ma. De même le côté c, inscrit dans les quinconces b, aura qb et pb pour projections sur la droite B et sa perpendiculaire. On a donc pour projections, sur les axes des quinconces primitifs a, les valeurs

$$qna - pma,$$

$$qma + pna,$$

$$\text{Inclinaison } (c,\ a) = \frac{qm+pn}{qn-pm}.$$

Nous dirons que les systèmes de quinconces b et c (c'est-à-dire construits sur les côtés b et c en grandeur et position) sont dérivés successifs du système a, et le système c est dérivé du système b.

Les diverses propriétés mises en lumière dans les articles que nous avons cités au début de cette Note deviennent désormais évidentes :

1° *Le carré d'une droite quelconque inscrite dans l'échiquier est commensurable,* puisque chacune des projections de la droite est elle-même commensurable, par suite également leurs carrés et la somme de ces derniers.

2° *Le produit d'une somme de deux carrés par une somme de deux autres carrés est toujours une somme exacte de deux carrés :*

$$(m^2 + n^2)(p^2 + q^2) = s^2 + t^2.$$

On peut toujours supposer m et n d'une part, p et q de l'autre, premiers entre eux, en faisant au préalable disparaître de l'équation les carrés des diviseurs communs qui affecteraient également comme coefficients les deux membres. Cela posé, $b = a\sqrt{m^2 + n^2}$ est inscrit dans l'échiquier de base a; de même, $c = b\sqrt{p^2 + q^2}$ est inscrit dans l'échiquier b dérivé de a. Par conséquent,

$$c = a\sqrt{m^2 + n^2}\,\sqrt{p^2 + q^2}$$

est inscrit dans l'échiquier a, et ses projections s' et t' sur les axes de celui-ci sont des multiples entiers as et at de la base a, ce qui démontre le théorème.

Nous terminerons en montrant que la considération pure de l'échiquier permet d'arriver aux conclusions de M. de Polignac sur les solutions entières de l'équation indéterminée $ax + by = c$, sans l'emploi de la mosaïque à dalles rectangulaires, qui complique la question plutôt qu'il ne la simplifie. Faisons auparavant quelques remarques, évidentes d'ailleurs sur simple énoncé, qui compléteront les éléments de la Géométrie de l'échiquier dans l'ordre d'idées que nous avons adopté.

Toute droite inscrite dans les quinconces est, au point de vue de sa direction seule (abstraction faite de sa longueur), inscriptible dans tout système de quinconces dérivé du premier.

Deux droites inscrites dans un système de quinconces ont entre elles une inclinaison commensurable, l'une d'elles pouvant être prise comme base d'un système dérivé du premier dans lequel la seconde serait inscriptible. En effet, de même que les sommets de tous les systèmes de quinconces dérivés successifs d'un système primitif font partie des sommets de ce dernier, de même, si pour un instant, laissant de côté la dimension des côtés, on ne se préoccupe que de leur direction, on pourra dire que le système primitif fait également partie d'un quelconque de ceux qui en sont dérivés; un renversement d'échelles entre les bases des deux systèmes permettrait, en effet, de déduire la construction du système primitif du système dérivé supposé construit, en montrant que sur l'alignement de ses sommets sur le côté issu d'un sommet commun se trouve une série de sommets des quinconces primitifs considérés.

Deux côtés inscrits dans un système de quinconces peuvent donc, au point de vue de leurs directions, être considérés comme inscriptibles dans un système quelconque de quinconces dérivés du premier, et en particulier de celui qui a l'un des deux côtés pour base.

Si l'on mène par l'un des sommets de quinconces une droite quelconque à inclinaison commensurable irréductible $\frac{m}{n}$ sur la base a, une longueur $a\sqrt{m^2+n^2}$ de cette oblique sera la base d'un système dérivé de quinconces dont tous les sommets feront partie du système primitif, mais avec un groupement $\frac{1}{m^2+n^2}$ fois moins serré.

De même que le second système dérive du premier en multipliant l'unité de surface par (m^2+n^2) et variant l'orientation de $\frac{m}{n}$, de même le système primitif peut être considéré comme dérivant du second par la variation $-\frac{m}{n}$ d'orientation, et la réduction de l'unité de longueur, base, dans le rapport de $\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

De l'équation indéterminée $ax+by=c$.

Résoudre graphiquement l'équation $ax+by=c$ en nombres entiers revient uniquement à chercher les sommets des quinconces à base unité situés sur la droite représentée en coordonnées cartésiennes par l'équation ci-dessus, deux côtés de quinconces étant pris pour axes.

Il n'y a donc qu'à construire la droite par ses coordonnées à l'origine $\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$ et à rechercher sur la droite ainsi posée les sommets de cases de l'échiquier indéfini, à côtés pris pour unité, qui s'y trouvent.

Et d'abord, si $a = \mathrm{D}a'$, $b = \mathrm{D}b'$, D étant le plus grand commun diviseur de a et b, les projections de la longueur inscrite de cette droite, ou distance de deux sommets consécutifs solutions, sont b' sur l'axe des X et a' sur l'axe des Y, l'inclinaison sur l'axe des X étant $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$.

Si donc x_1 et y_1 représentent un couple de valeurs correspondantes de x et de y, solutions entières, la série des couples de valeurs solutions sera évidemment, en montant pour y,

$$\begin{array}{llllll} y_1, & y_1 + a', & y_1 + 2a', & y_1 + 3a', & \ldots, & y_1 + na', \\ x_1, & x_1 - b', & x_1 - 2b', & x_1 - 3b', & \ldots, & x_1 - nb', \end{array}$$

et de même, en descendant pour y,

$$\begin{array}{llll} y_1 - a', & y_1 - 2a', & \ldots, & y_1 - na', \\ x_1 + b', & x_1 + 2b', & \ldots, & x_1 + nb'. \end{array}$$

Le tout est ramené à trouver un couple de solutions, par exemple, comme M. de Polignac, la plus petite valeur entière de y, qui sera, je suppose, y_1, la valeur de x_1 étant du reste positive ou négative suivant les valeurs relatives des coefficients de l'équation.

La construction géométrique de la droite d'appui des sommets solutions nous donnera, sans observations préalables, la règle trouvée par M. de Polignac.

Les segments sous-tendus sur l'axe des X et celui des Y par la droite $ax + by = c$ sont

$$\mathrm{OA} = \frac{c}{a} \quad \text{et} \quad \mathrm{OB} = \frac{c}{b}.$$

Soient S et T les sommets de quinconces successifs sur l'axe des X entre lesquels tombe le point A; la longueur SA sera la fraction qui complète la valeur de $\frac{c}{a}$ en l'ajoutant au plus grand entier OS qu'elle contienne. C'est ce que nous appellerons, avec M. de Polignac, $R\left(\frac{c}{a}\right)$, le reste de la division de c par a.

Soient I l'un quelconque des sommets solutions et H la projection de I sur OA. La similitude des triangles IHA et BOA donne

$$HA = HI\frac{b}{a} = \beta\frac{b}{a},$$

en désignant par β le nombre entier valeur de y correspondante. Il en résulte que

$$R\left(\frac{\beta b}{a}\right) = R\left(\frac{c}{a}\right),$$

d'où la règle générale suivante :

Diviser par a les multiples successifs entiers de b. Ceux qui donneront un reste égal à celui de la division de c par a auront pour coefficient de multiplicité β les valeurs entières de y solutions de l'équation. Les valeurs α correspondantes de x s'en déduiront sans peine.

Soit $y_1\, x_1$ le couple des valeurs correspondant à la plus petite valeur positive y_1 de y; le nombre des solutions positives sera, d'après ce qui a été dit plus haut, égal à $(n+1)$ si l'on désigne par n le plus grand entier satisfaisant à l'inégalité

$$x_1 - nb' > 0 \quad \text{ou bien} \quad n < \frac{x_1}{b'}.$$

Le nombre des solutions entières est alors d'une unité supérieur au plus grand entier contenu dans le quotient de x_1 par b', ou, en employant la notation de M. de Polignac,

$$N = \left[\frac{x_1}{b'}\right] + 1.$$

Cette expression revient à celle donnée par lui; en effet,

$$\frac{x_1}{b'} = \frac{c - by_1}{ab'} = \frac{c - by_1}{a'b} = \frac{\frac{c}{b} - y_1}{a'},$$

d'où

$$N = \left(\frac{\left[\frac{c}{b}\right] - y_1}{a'} \right) + 1,$$

expression que l'on trouve également à la simple inspection de la figure ci-dessus, le nombre des solutions étant d'une unité supérieur au plus grand nombre de fois que l'on peut ajouter a' à y sans dépasser OB, soit le plus grand entier $\left[\frac{c}{b}\right]$ contenu dans OB, puisque les valeurs successives de y croissent de a'.