Bulletin de la S. M. F.

Armand Borel

Andre Haefliger

La classe d'homologie fondamentale d'un espace analytique

Bulletin de la S. M. F., tome 89 (1961), p. 461-513

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1961__89__461_0>

Bull. Soc. math. France,
89, 1961, p. 461 à 513.

LA CLASSE D'HOMOLOGIE FONDAMENTALE D'UN ESPACE ANALYTIQUE ;

PAR

ARMAND BOREL
(Princeton)

ET

ANDRÉ HAEFLIGER
(Genève).

On sait qu'une variété analytique complexe de dimension complexe n possède une classe d'homologie fondamentale de dimension $2n$, liée à son orientation naturelle, et que toute variété analytique réelle (ou même topologique) a une classe fondamentale mod 2. Notre but ici est de démontrer qu'il en est de même pour un espace analytique quelconque, complexe ou réel, de mettre en relations l'intersection de cycles analytiques d'une variété analytique avec l'intersection de leurs classes d'homologie ([1]), et d'établir quelques liens entre le réel et le complexe.

Pour éviter le recours à la triangulation ou à des propriétés de rétraction locale, nous utiliserons la théorie de l'homologie des espaces localement compacts de [2]. Toutes les propriétés des groupes d'homologie au sens de [2] dont nous avons besoin sont rappelées au paragraphe 1. Les plus utiles pour notre propos sont la nullité de ces groupes en dessus de la dimension topologique et l'existence d'une suite exacte liant l'homologie d'un espace, d'un sous-espace fermé et de l'ouvert complémentaire. Ces

([1]) Dans le cas analytique complexe, il s'agit là de résultats « bien connus », qui ont été souvent utilisés, et qu'on déduit classiquement du théorème de triangulation des espaces analytiques. L'existence d'une classe fondamentale mod 2 pour un ensemble algébrique réel a été conjecturée par THOM, qui en a donné aussi une esquisse de démonstration dans [22]. C'est du reste cette question qui est à l'origine du présent article.

groupes vérifient les axiomes d'Eilenberg-Steenrod et coïncident sur les variétés avec les groupes d'homologie singulière.

Bien que nous n'ayons à considérer que des espaces localement analytiques, il est commode d'introduire une notion générale de variété à singularités et de classe d'homologie fondamentale d'un tel espace; un espace X sera dit être de type VS_n s'il est de dimension n et s'il contient un fermé F de dimension $\leqq n-1$ dont le complémentaire est une variété de dimension (pure) n. Une classe d'homologie fondamentale de X sur l'anneau de coefficients K, est alors un élément de $H_n(X; K)$ qui induit en chaque point de X-F un générateur du n-ième groupe d'homologie locale en ce point. Le paragraphe 2 est consacré à quelques remarques générales sur ces notions, qui montrent en particulier que le problème de l'existence d'une classe fondamentale est essentiellement de nature locale (pour autant que X-F soit orientable).

Le paragraphe 3 démontre l'existence d'une classe fondamentale entière (resp. mod 2) pour un espace analytique complexe (resp. localement analytique réel). Elle est immédiate si l'ensemble des points singuliers est de codimension $\geqq 2$, ce qui a toujours lieu dans le cas complexe. Lorsque X est un germe d'ensemble analytique réel irréductible, on se ramène à ce cas en appliquant au complexifié de X le théorème de normalisation d'Oka (ou simplement la normalisation affine si X est algébrique).

Dans le paragraphe 4, on attache à chaque composante propre de l'intersection de deux cycles analytiques X, Y d'une variété analytique complexe V un entier $i(X.Y, C)$, par considération de la classe d'homologie de $X \cap Y$, et l'on montre que $i(X.Y, C)$ vérifie les propriétés caractéristiques du symbole d'intersection en géométrie algébrique ([23], app. III). Il s'ensuit en particulier que si V est projective, l'application qui associe à chaque cycle X sa classe d'homologie $h(X)$ est un homomorphisme de l'anneau de Chow de $A(V)$ de V dans $H_*(V; Z)$.

Le paragraphe 5 considère une variété projective non singulière V définie sur les réels et l'application qui associe à un cycle X de dimension complexe s la classe d'homologie $\rho(X) \in H_s(V^0; Z_2)$ de la partie réelle de X, où V^0 est la partie réelle de V, et donne notamment une condition suffisante pour que ρ induise un isomorphisme de $H_*(V; Z_2)$ sur $H_*(V^0; Z_2)$ diminuant le degré de moitié. Le point essentiel est le fait que si X et Y sont des cycles de V se coupant proprement, alors $\rho(X.Y) = \rho(X).\rho(Y)$, ce qui est démontré plus généralement lorsque V est une variété analytique complexe dont V^0 est la partie réelle en un sens convenable (5.1-5.8).

Le paragraphe 6 est consacré à deux applications. L'une établit une assertion de Thom concernant le polynôme en classes de Stiefel-Whitney attaché à un type de singularité S et le polynôme en classes de Chern attaché au type de singularité complexifié de S (6.2). Dans 6.3 et 6.4, on montre que si X admet une décomposition cellulaire dont les cellules ont une classe fondamentale, alors ces classes fondamentales, forment une base de l'homologie de X, et dans 6.5 on décrit une classe d'espaces homogènes algébriques possédant des décompositions cellulaires et auxquels on peut appliquer les résultats du paragraphe 5.

Enfin, le paragraphe 7 apporte quelques compléments à [2], qui sont utilisés dans ce travail, et concernent surtout le cap-produit.

1. Homologie des espaces localement compacts.

Ce paragraphe énumère les propriétés des groupes d'homologie dont nous aurons besoin, et fixe les notations. Son contenu sera souvent utilisé sans référence.

1.1. — K désigne toujours un anneau principal (qui pourrait en fait être de Dedekind, mais seuls les cas où K est l'anneau $\mathbf{Z}$ des entiers ou un corps nous intéresseront); $\mathbf{Z}_p$ (p premier), $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$ sont comme d'habitude le corps des entiers mod p, des nombres rationnels, réels et complexes respectivement.

On rappelle qu'une famille de supports Φ sur un espace topologique X est un ensemble de fermés de X ayant les deux propriétés suivantes : si A, $B \in \Phi$, alors $A \cup B \in \Phi$; si $A \in \Phi$ et si B est fermé dans A, alors $B \in \Phi$. Elle est dite paracompactifiante si de plus tout élément de Φ est paracompact et possède un voisinage appartenant à Φ ([10], chap. I, § 2.5 et 3.2).

Dans la suite, les espaces topologiques sont toujours supposés localemen compacts.

1.2. — Soient X un espace, $\mathcal{S}$ un faisceau de K-modules sur X et Φ une famille de supports sur X. On note $H_i^\Phi(X; \mathcal{S})$ [resp. $H^i_\Phi(X; \mathcal{S})$] le i-ième groupe d'homologie (resp. de cohomologie) de X, à coefficients dans $\mathcal{S}$ et à supports dans Φ, au sens de [2] (resp. [10]), et $H_*^\Phi(X; \mathcal{S})$ [resp. $H^*_\Phi(X; \mathcal{S})$] est la somme directe des $H_i^\Phi(X; \mathcal{S})$ [resp. $H^i_\Phi(X; \mathcal{S})$]. Ce sont des K-modules. Comme d'habitude on écrit aussi K pour le faisceau constant $X \times K$. Dans ce travail, nous n'aurons essentiellement à considérer que l'homologie et la cohomologie à coefficients dans K. Dans la notation précédente on supprime Φ si Φ est l'ensemble des fermés de X, on remplace Φ par c ou $c(X)$ si Φ est la famille des compacts de X, et Φ par F si Φ est l'ensemble des fermés d'un sous-espace fermé F de X. En particulier, si F est réduit à un point $x \in X$, $H_i^x(X; K)$ désignera ici le i-ième groupe d'homologie de X à supports dans x. Ce n'est pas en général le $i^{\text{ième}}$ groupe d'homologie locale en x (*voir* plus bas) qui sera noté $\mathcal{H}_i(X; K)_x$; sur ce point nous nous écartons donc de la notation de [1] et [2].

On a $H^i(X; \mathcal{S}) = 0$ si $i \leqq -1$ et $H_i(X; \mathcal{S}) = 0$ si $i \leqq -2$. Si X est un polyèdre fini, $H_i(X; K)$ est le i-ième groupe d'homologie simpliciale de X et si Y est un sous-complexe de X, $H_i(X - Y; K)$ s'identifie au i-ième groupe d'homologie simpliciale relative de X mod Y ([2], § 5).

1.3. — Pour tout entier i, on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_c^{i+1}(X; K), K) \to H_i(X; K) \to \mathrm{Hom}(H_c^i(X; K), K) \to 0.$$

Elle montre en particulier que $H_{-1}(X; K)$ est nul si $H_c^0(X; K)$ est libre, ce qui a lieu notamment lorsque X est localement connexe (et aussi lorsque X possède une base dénombrable des ouverts, d'après un résultat non publié de F. Raymond). La forme bilinéaire sur $H_i(X; K) \times H_c^i(X; K)$ définie par l'homomorphisme de $H_i(X; K)$ dans $\mathrm{Hom}(H_c^i(X; K), K)$ sera notée $\langle a, b \rangle [a \in H_i(X; K), b \in H_c^i(X; K)]$. Si K est un corps, elle est non dégénérée.

Si X est somme de sous-espaces disjoints $X_\alpha (\alpha \in I)$, $H_c^*(X; K)$ est la somme directe des modules $H_c^*(X_\alpha; K)$, et la suite exacte ci-dessus montre donc que $H_*(X; K)$ s'identifie au *produit direct* des modules $H_*(X_\alpha; K)$.

1.4. — $H_i(X; \mathcal{S})$ est défini comme le groupe dérivé du module des sections d'un certain faisceau différential gradué $\mathcal{C}_H(X; \mathcal{S})$ ([2], § 3); si U est ouvert dans X, la restriction des sections définit un homomorphisme naturel

$$j_*^{XU} : \quad H_*^\Phi(X; \mathcal{S}) \to H_*^{\Phi \cap U}(U; \mathcal{S}).$$

Si Ψ est une famille de supports contenant Φ, l'inclusion de $\Gamma_\Phi(C_H(X; \mathcal{S}))$ dans $\Gamma_\Psi(\mathcal{C}_H(X; \mathcal{S}))$ définit un homomorphisme de $H_*^\Phi(X; \mathcal{S})$ dans $H_*^\Psi(X; \mathcal{S})$ qu'on appellera un homomorphisme d'agrandissement de la famille des supports.

Le faisceau dérivé de $\mathcal{C}_H(X; K)$ est le *faisceau d'homologie locale* $\mathcal{H}(X; K)$ *de* X et sa fibre $\mathcal{H}_*(X; K)_x$ en un point x est le *groupe d'homologie locale de* X *en* x. On a

$$\mathcal{H}_i(X; K)_x = \lim \mathrm{dir}(H_*(U; K), j_*^{UV}),$$

où U parcourt les voisinages ouverts de x.

L'homomorphisme j_*^{UX} est transposé de l'homomorphisme

$$j_{XU}^* : \quad H_c^*(U; K) \to H_c^*(X; K)$$

et 1.3 est compatible avec j_{XU}^*, j_*^{XU} en un sens évident. Comme les suites exactes commutent aux limites inductives, on en déduit en particulier qu'il y a une suite exacte

$$0 \to \lim \mathrm{dir}\, \mathrm{Ext}(H_c^{i+1}(U; K), K) \to \mathcal{H}_i(X; K)_x \to \lim \mathrm{dir}\, \mathrm{Hom}(H_c^i(U; K), K) \to 0.$$

Par définition, $H_*^\Phi(X; K) = H_*(\Gamma_\Phi(\mathcal{C}_H(X; K)))$; il existe donc un homomorphisme naturel

$$(1) \qquad H_*^\Phi(X; K) \to H_\Phi^0(X; \mathcal{H}_*(X; K)) = \Gamma_\Phi(\mathcal{H}_*(X; K)).$$

En le composant avec l'homomorphisme $\Gamma_\Phi(H_*(X;\ K)) \to H_*(X;\ K)_x$ qui associe à une section sa valeur en $x \in X$, on obtient donc un homomorphisme

(2) $$\mu_x : H_*^\Phi(X;\ K) \to H_*(X;\ K)_x \qquad (x \in X).$$

1.5. — Soient X, Y des espaces, $f : X \to Y$ une application continue Φ, Ψ des familles de supports sur X et Y respectivement. Si $f(\Phi) \subset \Psi$ et si la restriction de f à tout $F \in \Phi$ est une application propre, alors f induit un homomorphisme $f_{*\Phi,\Psi}$ ou f_* de $H_*^\Phi(X;\ K)$ dans $H_*^\Psi(Y;\ K)$, préservant les degrés. Si $g : Y \to Z$ est une application continue de Y dans un espace Z, et si $g_{*\Psi,\Theta}$ est définie, alors $(g \circ f)_{*\Phi,\Theta}$ l'est, et est égale à $g_{*\Psi,\Theta} \circ f_{*\Phi,\Psi}$. Soient V un ouvert de Y et $U = f^{-1}(V)$. Si $f_{*\Phi,\Psi}$ est définie alors $f_{*\Phi\cap U,\Psi\cap V} : H_*^{\Phi\cap U}(U;\ K) \to H_*^{\Psi\cap V}(Y;\ K)$ l'est aussi, et l'on a

$$f_{*\Phi\cap U,\Psi\cap V} \circ j_*^{XU} = j_*^{YV} \circ f_{*\Phi,\Psi}.$$

Toute application continue $f : X \to Y$ induit un homomorphisme $f_* : H_*^c(X;\ K) \to H_*^c(Y;\ K)$. Si f est propre, elle définit un homomorphisme $f_* : H_*(X;\ K) \to H_*(Y;\ K)$. L'inclusion d'un sous-espace fermé F de X dans X induit un homomorphisme $i_{*FX} : H_*^{\Phi\cap F}(F; K) \to H_*^\Phi(X;\ K)$ pour toute famille de supports Φ sur X. Si Φ est l'ensemble des fermés de F, cet homomorphisme est un isomorphisme au moyen duquel on identifiera souvent $H_*(F;\ K)$ avec $H_*^F(X;\ K)$. La famille Φ étant de nouveau quelconque, le module $H_*^\Phi(X;\ K)$ s'identifie à la limite directe des modules $H_*(F;\ K)$, par rapport aux homomorphismes d'inclusion, F parcourant Φ([2]; 3.3). On a l'axiome d'homotopie sous la forme suivante ([2], 4.3 et 4.4). Si f, $g : X \to Y$ sont homotopes, alors

$$f_* = g_* : \quad H_*^c(X;\ K) \to H_*^c(Y;\ K).$$

Soient I l'intervalle unité, $F : X \times I \to Y$ une application propre et f, g les restriction de F à $X \times (0)$ et $X \times (1)$ respectivement. Alors

$$f_* = g_* : \quad H_*(X;\ K) \to H_*(Y;\ K).$$

1.6. — Soit F un sous-espace fermé de X et soit $U = X - F$. Alors on a une suite exacte ([2], § 3.8)

$$\ldots \to H_i(F;\ K) \xrightarrow{i_{*FX}} H_i(X;\ K) \xrightarrow{j_*^{XU}} H_i(U;\ K) \to H_{i-1}(F;\ K) \to \ldots.$$

1.7. — Supposons que X soit réunion d'une famille localement finie de sous-espaces fermés $X_\alpha (\alpha \in I)$, et soit Y l'espace somme des X_α. Alors les injections $i_\alpha : X_\alpha \to X$ définissent une application $\mu : Y \to X$ qui est évidemment continue et propre. Comme $H_*(Y;\ K)$ est le produit direct des modules $H_*(X_\alpha;\ K)$ (*cf.* 1.3) on en déduit un homomorphisme

$$\mu_* : \quad \coprod_{\alpha \in I} H_*(X_\alpha;\ K) \to H_*(X;\ K),$$

dont la restriction à un nombre fini de facteurs $X_\alpha (\alpha \in J)$ est la somme des applications $i_{\alpha *} (\alpha \in J)$. L'image a d'un élément $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ s'appellera la somme (infinie, localement finie) des éléments a_α. Si U est un ouvert de X ne rencontrant qu'un nombre fini de X_α, on a

$$j_*^{XU}(a) = \sum_{\alpha \in I} j_*^{XU} \circ i_{*X_\alpha, X}(a_\alpha),$$

somme qui a un sens puisqu'elle ne comprend qu'un nombre fini de termes non nuls, vu l'hypothèse faite sur U. Cette opération de somme infinie, localement finie, est visiblement compatible avec la restriction à un ouvert et avec les applications continues.

1.8. — Supposons que X soit réunion de deux sous-espaces fermés A, B et soit $C = A \cap B$. Alors on a une suite exacte (la suite de Mayer-Vietoris) :

$$\ldots \xrightarrow{\partial} H_n(C; K) \xrightarrow{\alpha} H_n(A; K) + H_n(B; K) \xrightarrow{\beta} H_n(X; K) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(C; K) \rightarrow \ldots,$$

où $\alpha = i_{*C,A} - i_{*C,B}$, $\beta = i_{*A,X} + i_{*B,X}$ ([2], 3.10).

1.9. — Il existe un accouplement, le cap-produit

$$\cap : \quad H_s^\Phi(X; K) \times H_\Psi^l(X; K) \rightarrow H_{s-l}^{\Phi \cap \Psi}(X; K),$$

compatible avec la restriction à un ouvert et l'agrandissement des familles de supports, vérifiant

$$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cup c) \qquad [a \in H_s^\Phi(X; K),\ b \in H_\Psi^l(X; K),\ c \in H_\Theta^u(X; K)],$$

les deux membres de cette égalité étant envisagés comme des éléments de $H_{s-l-u}^{\Phi \cap \Psi \cap \Theta}(X; K)$ (*voir* appendice). En particulier, $H_*^\Phi(X; K)$ est un module à droite sur l'anneau $H_\Phi^*(X; K)$.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Soient Φ, Φ' (resp. Ψ, Ψ') des familles de supports sur X (resp. Y). Supposons que $f(\Phi) \subset \Psi$, $f(\Phi') \subset \Psi'$, $f^{-1}(\Psi') \subset \Phi'$ et que la restriction de f à tout $F \in \Phi$ soit une application propre. Alors

$$f_* : \quad H_*^\Phi(X; K) \rightarrow H_*^\Psi(Y; K), \qquad H_*^{\Phi \cap \Phi'}(X; K) \rightarrow H_*^{\Psi \cap \Psi'}(Y; K),$$
$$f^* : \quad H_{\Psi'}^*(Y; K) \rightarrow H_{\Phi'}^*(X; K)$$

sont définies (pour f^*, *voir* [10], II, 4.16), et l'on a

$$(1) \qquad f_*(a \cap f^* b) = f_* a \cap b \qquad [a \in H_s^\Phi(X; K),\ b \in H_{\Psi'}^l(X; K)],$$

les deux membres de cette égalité faisant partie de $H_{s-l}^{\Psi \cap \Psi'}(Y; K)$, (*voir* § 7).

1.10. — On note $\dim_K X$ la dimension cohomologique de X, relativement à K. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\dim_K X \leqq n$;

(ii) pour toute famille paracompactifiante Φ et tout faisceau $\mathcal{S}$ de K-modules, on a $H_\Phi^{n+1}(X;\mathcal{S}) = 0$;

(iii) pour tout ouvert $U \subset X$, on a $H_c^{n+1}(U; K) = 0$.

Elles entraînent la nullité de $H^i_\Phi(X;\mathcal{S})$ et $H^i_c(U; K)$ pour tout $i \geqq n+1$. [*Voir* [1], exp. I, ou GROTHENDIECK, *Tohoku math. J.*, t. 9, 1957; dans [1] on ne considère que les familles contenant tous les points de X, mais l'extension mentionnée ici est immédiate, puisque $H_\Phi^*(X;\mathcal{S}) = H_\Phi^*(U;\mathcal{S})$, U étant l'ensemble des points contenus dans Φ.] Si X est séparable métrique, de dimension classique n, alors $\dim_K X \leqq n$ pour tout K. On a $\dim_K Y \leqq \dim_K X$ si Y est un sous-espace localement compact de X. $\mathrm{Dim}_K X$ est la borne supérieure des dimensions des sous-espaces compacts de X et a un caractère local : $\dim_K X \leqq n$ si et seulement si tout point est contenu dans un ouvert de dimension $\leqq n$.

Supposons $\dim_K X \leqq n$. Alors, vu 1.3 et 1.4, on a

$$(1)\qquad H_i(X; K) = \mathcal{H}_i(X; K)_x = 0 \qquad (i \geqq n+1,\ x \in X).$$

De plus l'homomorphisme naturel

$$(2)\qquad \Delta : \quad H_n(X; K) \to H^0(X; \mathcal{H}_n(X; K))$$

(*cf.* 1.4) est un isomorphisme, quelle que soit la famille de supports Φ ([2], 7.3).

1.11. — Supposons que X soit une variété de dimension n. (En fait, ce qui suit vaut lorsque X est une variété cohomologique ou homologique relativement à K, [2], § 7). Alors $\dim_K X = n$, $\mathcal{H}_i(X; K) = 0$ pour $i \neq n$, et $\mathcal{H}_n(X; K)$ est localement isomorphe au faisceau constant $X \times K$; le faisceau $\mathcal{H}_n(X; K)$ est le *faisceau d'orientation* de X et sera noté $\mathcal{C}$. Il est constant si et seulement si X est orientable. Une *orientation* de X est le choix d'un isomorphisme de $\mathcal{C}$ sur $X \times K$. On a pour tout entier i et toute famille Φ de supports un isomorphisme canonique (la dualité de Poincaré), compatible avec la restriction à un ouvert

$$\Delta : \quad H_i^\Phi(X; K) \to H_\Phi^{n-i}(X; K).$$

Il existe un et, à un isomorphisme unique près, un seul faisceau $\mathcal{C}'$ tel que $\mathcal{C} \otimes \mathcal{C}'$ soit le faisceau constant $X \times K$ ([2], 7.7). Si $K = Z$, Z_2 ou si X est orientable, les seuls cas intéressants pour la suite, alors $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$.

X est localement connexe, donc $H^0(X; K)$ s'identifie canoniquement à la somme directe des anneaux $H^0(X_\alpha; K)$, où X_α parcourt les composantes connexes de X, anneaux qui sont eux-mêmes canoniquement isomorphes à K. Soient ι_α l'élément neutre de $H^0(X_\alpha; K)$ et $\iota = \sum_\alpha \iota_\alpha$. Alors $\Delta^{-1}(\iota)$ est un élément bien déterminé de $H_n(X; \mathcal{E}')$ la *classe fondamentale de X*. Si X est orientable et orientée, alors $\Delta^{-1}(\iota)$ s'identifie à un élément de $H_n(X; K)$, la *classe fondamentale de la variété orientée X*, qui sera souvent noté $[X]$. Par l'isomorphisme Δ, la classe $[X]$ peut s'envisager comme une section de $\mathcal{E}$ qui induit en chaque point $x \in X$ un générateur (de K-module) de la fibre en x. Soit $x_\alpha \in X_\alpha$. Alors $[X]$ est déterminée par ses valeurs aux points x_α; réciproquement, si X est orientable, tout choix de générateurs dans les fibres $\mathcal{E}_{x_\alpha}$ correspond à une orientation. Lorsque $K = Z_2$, X est toujours orientable sur K et admet exactement une orientation.

Si X est une variété et Φ est paracompactifiante, $H_i^\Phi(X; K)$ s'identifie au $i^{\text{ième}}$ groupe d'homologie singulière, à supports dans Φ. Cela résulte de la dualité de Poincaré en homologie singulière ([4], exp. XX, § 3), du théorème de dualité rappelé ci-dessus, et du fait que si X est une variété, ou plus généralement un espace *HLC*, $H_\Phi^i(X; K)$ est canoniquement isomorphe au $i^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie singulière, à supports dans Φ ([4], exp. XX, § 1).

1.12. — Supposons X orientée. Alors l'isomorphisme Δ^{-1} est le cap-produit avec $[X]$. Soient $a \in H_i^\Phi(X; K)$, $b \in H_j^\Psi(X; K)$. Leur produit d'intersection sera noté $a.b$. Par définition

$$a.b = \Delta^{-1}(\Delta a \cup \Delta b);$$

c'est un élément de $H_{i+j-n}^{\Phi \cap \Psi}(X; K)$ ($n = \dim_K X$). On a aussi $a.b = a \cap \Delta b$. Ce produit est associatif et anticommutatif (*cf.* § 7), et compatible avec l'agrandissement des familles de supports.

Supposons que a et b contiennent des cycles a', b' dont les supports A et B ont une intersection de dimension sur K strictement plus petite que $i+j-n$. Alors $a.b = 0$. En effet, on peut envisager a et b comme des éléments de $H_i^A(X; K)$ et $H_i^B(X; K)$, donc $a.b$ comme un élément de $H_{i+j-n}^{A \cap B}(X; K)$. Mais (*cf.* 1.5) ce dernier groupe s'identifie à $H_{i+j-n}(A \cap B; K)$, qui est nul si $\dim_K A \cap B < i+j-n$ (1.10).

2. Définition et propriétés générales de la classe fondamentale.

2.1. Définition d'un espace de type VS_n. — Un ouvert d'un espace topologique de dimension n sera dit *épais* si son complémentaire est de dimension $\leq n-1$.

Un espace de type VS_n (variété de dimension n avec singularités) est un espace localement compact de dimension n possédant un ouvert épais homéomorphe à une variété de dimension n (c'est-à-dire dont toutes les composantes connexes sont de dimension n).

Soit X de type VS_n. Les points au voisinage desquels X est homéomorphe à $\mathbf{R}^n$ forment un ouvert épais X_R dont le complémentaire sera noté X_S. Les points de X_R (resp. X_S) sont les points réguliers (resp. singuliers) de X.

Cette notion est de caractère local. Tout ouvert de dimension n d'un espace de type VS_n est de type VS_n. Si un espace localement compact X possède un recouvrement par des ouverts U_i $(i \in I)$ de type VS_n, il est lui-même de type VS_n; en effet, $X_R = \bigcup_{i \in I} U_{iR}$ et $X_S \cap U_i = U_{iS}$ $(i \in I)$; l'ensemble X_S est bien de $\dim_Z \leq n - 1$ puisque chacun de ses points possède un voisinage de $\dim_Z \leq n - 1$ (*cf.* 1.10).

Le produit d'un espace de type VS_n par un espace de type VS_m est un espace de type VS_{n+m}.

On définit de même la notion d'espace de type VS_n sur l'anneau principal K. C'est un espace localement compact X de $\dim_K$ égale à n et possédant un ouvert épais homéomorphe à une variété cohomologique sur K de dimension n ([2], § 7). X_R est alors l'ensemble des points possédant un voisinage homéomorphe à une variété cohomologique de $\dim_K$ égale à n, et $X_S = X - X_R$. Les remarques faites ci-dessus sont encore valables, compte tenu du fait qu'un produit de variétés cohomologiques est une variété cohomologique (*cf.* [1], I, 4.10 *a*). Un espace de type VS_n est « de type VS_n sur K » quel que soit K.

2.2 Définition de la classe fondamentale. — Soit X un espace de type VS_n sur K. Une classe d'homologie fondamentale pour X, à coefficients dans K, est un élément de $H_n(X; K)$ dont l'image dans le groupe d'homologie locale $\mathcal{H}_n(X; K)_x$ par l'homomorphisme μ_x de 1.4 (2) est un générateur de ce groupe pour tout point régulier x.

On verra ci-dessous qu'un élément de $H_n(X; K)$ est une classe fondamentale s'il satisfait à la condition précédente en tout point d'un ensemble épais, ou même simplement d'un ensemble rencontrant chaque composante connexe de X_R. Par exemple, si X est un ensemble analytique ou algébrique, il suffira de vérifier cette condition aux points simples.

Il est clair qu'une classe fondamentale définit un isomorphisme du faisceau constant $X_R \times K$ sur $\mathcal{H}_n(X_R; K)$. Pour que X admette une classe fondamentale à coefficients dans K, il est donc nécessaire que X_R soit orientable relativement à K (*cf.* 1.10); cette condition est évidemment suffisante lorsque X est une variété.

La restriction à un ouvert U de dimension n de X d'une classe fondamentale de X est évidemment une classe fondamentale de U.

2.3. Proposition. — *Soient X un espace de type VS_n sur K et U un ouvert épais de X. Alors X possède au plus une classe fondamentale dont la restriction à U soit donnée. Si $K = \mathbf{Z}_2$, X possède au plus une classe fondamentale. Si U possède une classe fondamentale et si $\dim_K (X - U) \leq n - 2$, alors X possède une classe fondamentale dont la restriction à U est la classe fondamentale donnée.*

En effet, dans la suite exacte (*cf.* 1.6) :

$$H_n(X-U;\,K)\to H_n(X;\,K)\xrightarrow{j} H_n(U;\,K)\to H_{n-1}(X-U;\,K),$$

le premier terme est nul puisque $\dim_K(X-U)\leq n-1$, donc j est injectif. De plus, si $K=\mathbf{Z}_2$, on sait que la variété $X_R\cap U$ ne possède qu'une classe fondamentale; comme $X_R\cap U$ est aussi un ensemble épais, cela établit la deuxième assertion. Enfin, si $\dim_K(X-U)\leq n-2$, alors le dernier terme de la suite exacte est aussi nul, donc j est un isomorphisme.

Remarque. — Si U est un ouvert épais, connexe formé de points réguliers, et si X possède une classe fondamentale, alors $H_n(X;\,K)\simeq K$ et $j_n : H_n(X;\,K)\to H_n(U;\,K)$ est un isomorphisme. En effet, j_n est injectif comme on l'a vu. D'autre part, comme U est connexe, orientable, l'application $\mu_x : H_n(U;\,K)\to \mathcal{H}_n(U;\,K)_x$ [*cf.* 1.4 (2)] est un isomorphisme. Puisque $\mathcal{H}_n(U;\,K)$ s'identifie à $\mathcal{H}_n(X;\,K)_x$, et que $\mu_x\circ j_n$ est surjectif par définition de la classe fondamentale, il s'ensuit bien que j_n est surjective.

2.4. Corollaire. — *Soient X un espace de type VS_n sur K, A un sous-ensemble de X_R rencontrant chaque composante connexe de X_R, et $c\in H_n(X;\,K)$. Pour que c soit une classe fondamentale il faut et il suffit que sa valeur en tout point $x\in A$ soit un générateur de $\mathcal{H}_n(X;\,K)_x$, et c est complètement déterminée par ses valeurs aux points de A.*

Cela résulte de 2.3 et du fait que, $\mathcal{H}_n(X_R;\,K)$ étant localement isomorphe à $X_R\times K$, l'ensemble des points $x\in X_R$ où une section de ce faisceau est égale à un générateur de $\mathcal{H}_n(X;\,K)_x$ est ouvert et fermé dans X_R.

2.5. Proposition. — *Soient X et Y des espaces de type VS_n sur K et f une application propre de X dans Y. Supposons que Y_R contienne un ouvert U rencontrant chaque composante de Y_R et tel que f soit un homéomorphisme de $f^{-1}(U)$ sur U, et soit $c\in H_n(X,\,K)$ une classe fondamentale de X. Alors f_*c est une classe fondamentale de Y.*

Puisque f est propre, f_*c est défini (*cf.* 1.5). La proposition résulte de 2.4 et du fait que f_* commute avec les restrictions à $f^{-1}(U)$ et U.

2.6. Corollaire. — *Soit X un espace de type VS_n sur K. Supposons que $X=\bigcup_{i\in I} X_i$ est une réunion localement finie de sous-espaces fermés X_i et que $X_i\cap X_j$ soit contenu dans X_S quels que soient $i,j\in I$, $i\neq j$, ce qui entraîne que X_i est de type VS_n sur K ou que $\dim_K X_i<n$. Soit $c_i\in H_n(X_i;\,K)$ une classe fondamentale de X_i si $\dim_K X_i=n$, l'élément nul sinon. Alors la somme des c_i (cf. 1.7) est une classe fondamentale de X.*

Soit Y l'espace somme des X_i. Le module $H_*(X;\,K)$ s'identifie au produit direct des modules $H_*(X_i;\,K)$ d'après 1.4. Il est clair que Y est de type VS_n sur K et que $(c_i)_{i\in I}$ en est une classe fondamentale. Le corollaire résulte alors de 1.7 et de 2.5.

2.7. Proposition. — *Soit* $(U_i)_{i\in I}$ *un recouvrement ouvert d'un espace* X *de type* VS_n *sur* K *et soit* $J\subset I$ *l'ensemble des* i *pour lesquels* $\dim_K U_i = n$:

(*a*) *Si pour tout* $i\in J$, U_i *possède une classe fondamentale* c_i *sur* K *et si* c_i *et* c_j *ont même restriction à* $U_i\cap U_j$ $(i, j\in J)$, *alors* X *possède une classe fondamentale dont la restriction à* U_i *est* c_i $(i\in J)$.

(*b*) *Si* $K=\mathbf{Z}_2$ *et si* U_i $(i\in J)$ *possède une classe fondamentale sur* K, *alors* X *possède une classe fondamentale sur* K.

Posons $c_i = 0$ si $i\notin J$, $i\in I$. Vu 1.10 (2), 2.3 et l'hypothèse, les sections de $\mathcal{H}_n(X; K)$ définies dans $U_i\cap U_j$ par c_i et c_j $(i, j\in I)$ coïncident. Elles définissent alors une section de $\mathcal{H}_n(X; K)$ sur X, donc un élément de $H_n(X; K)$ (*cf.* 1.10), qui a évidemment les propriétés requises.

2.8 Les nos 2.8 à 2.10 ont pour but de mettre en relation la notion algébrique d'orientation d'un espace vectoriel sur R avec la notion topologique d'orientation de V considéré comme une variété, et de fixer les conventions d'orientation. Ils ne prétendent pas apporter du nouveau au lecteur.

Convention d'orientation. — Soit V un espace vectoriel sur $\mathbf{R}$ de dimension n. Une orientation de V est déterminée par une base de V, deux bases définissant la même orientation si le déterminant de la matrice de passage d'une base à l'autre est positif.

La *somme* ordonnée $A+B$ de deux sous-espaces vectoriels orientés A et B de V, tels que $A\cap B=0$, est munie de l'orientation déterminée par une base dont les premiers vecteurs forment une base de A et les derniers une base de B.

Un sous-espace vectoriel B *complémentaire* d'un sous-espace vectoriel orienté A de l'espace vectoriel orienté V est orienté de sorte que l'orientation donnée de V soit la somme de celle de A et de celle de B.

Enfin si A et B sont deux sous-espaces vectoriels orientés de V orienté tels que $A+B=V$, *l'intersection* $C=A\cap B$ est orientée de la manière suivante : soient $(a_1, \ldots, a_r)$ et $(b_1, \ldots, b_s)$ des bases définissant l'orientation de sous-espaces complémentaires de A et B respectivement, alors la base $(a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s)$ définit l'orientation d'un sous-espace complémentaire de C.

Soit V un espace vectoriel complexe de dimension n. Considéré comme un espace vectoriel réel (de dimension $2n$), il est muni d'une orientation naturelle : si $e_1, \ldots, e_n$ est une base de V sur $\mathbf{C}$, la base $e_1, ie_1, \ldots, e_n, ie_n$ définira l'orientation naturelle de V. Les conventions précèdentes appliquées à des sous-espaces vectoriels complexes de V munis de l'orientation naturelle redonnent toujours l'orientation naturelle.

2.9. Classe fondamentale associée à une orientation d'un espace vectoriel. — Soit $c \in H_1(\mathbf{R}, \mathbf{Z})$ la classe fondamentale de la droite $\mathbf{R}$ telle que, dans la suite exacte associée au segment $I = [0, 1]$ et à sa frontière (*cf.* 1.6), le bord de la restriction de c à $]0, 1[$ soit $[1] - [0]$, où $[1]$ et $[0]$ désignent les générateurs canoniques de l'homologie des points 1 et 0. Soit $c^\star$ le générateur de $H_0^1(\mathbf{R}, \mathbf{Z})$ tel que $c \cap c^\star$ soit le générateur canonique de $H_0^0(\mathbf{R}, \mathbf{Z})$.

Soit p_k la projection de $\mathbf{R}^n$ sur $\mathbf{R}$ associant à un point sa $k^{\text{ième}}$ coordonnée. D'après la formule de Künneth, $p_1^\star(c^\star) \cup p_2^\star(c^\star) \cup \ldots \cup p_n^\star(c^\star)$ est un générateur $c_n^\star$ de $H_0^n(\mathbf{R}^n, \mathbf{Z})$. L'élément c_n de $H_n(\mathbf{R}^n, \mathbf{Z})$ défini par $c_n \cap c_n^\star = 1$ [générateur canonique de $H_0^0(\mathbf{R}^n, \mathbf{Z})$] sera par définition la classe fondamentale de $\mathbf{R}^n$ associée à l'orientation naturelle de $\mathbf{R}^n$ (définie par sa base canonique).

Soient h et h' des isomorphismes de $\mathbf{R}^n$ sur un espace vectoriel V; les éléments $h_\star(c_n)$ et $h'_\star(c_n)$ sont égaux ou opposés suivant que les orientations de V images par h et h' de l'orientation naturelle de $\mathbf{R}^n$ coïncident ou non. La classe fondamentale de V orienté par h sera par définition $h_\star(c_n)$.

2.10. Étant donné un sous-espace vectoriel W orienté, de dimension r, d'un espace vectoriel V on notera $w \in H_r(W; \mathbf{Z})$ sa classe fondamentale, $w^\star$ l'élément de $H_0^r(W; \mathbf{Z})$ tel que $w \cap w^\star$ soit le générateur canonique de $H_0^0(W; \mathbf{Z})$, $i_{\star W}$ l'isomorphisme de $H_\star(W; \mathbf{Z})$ sur $H_\star^W(V, \mathbf{Z})$ induit par l'injection i_W de W dans V. Soit W' un supplémentaire et soit p_W (resp. $p_{W'}$) la projection de V sur W (resp. W') paralléle à W' (resp. W). Si l'on oriente W' et l'on munit V de l'orientation somme des orientations de W et W', alors il résulte de 2.9 et de la règle de Künneth que

$$(1) \qquad v^\star = p_W^\star(w^\star) \cup p_{W'}^\star(w'^\star).$$

Proposition. — *Soient A et B deux sous-espaces vectoriels orientés de l'espace vectoriel réel orienté V, de dimensions r et s, qui engendrent V. Alors :*

(*a*) *Si $A \cap B = 0$ et si l'orientation de V est la somme des orientations de A et B, on a*

$$i_A^\star \Delta i_{\star B} b = a^\star, \qquad i_B^\star \Delta i_{\star A} a = (-1)^{r.s} b^\star.$$

(*b*) *Si $C = A \cap B$ est orienté suivant la convention de* 2.8, *on a*

$$i_{\star A}(a) . i_{\star B}(b) = i_{\star C}(c).$$

On désignera par 1 le générateur canonique de $H_0^0(A; \mathbf{Z})$ ou de $H_0^0(V; \mathbf{Z})$ et par $[V]$ la classe fondamentale de V. On a

$$1 = a \cap a^\star = a \cap i_A^\star . p_A^\star(a^\star),$$

puisque $p_A \circ i_A$ est l'identité, d'où, vu **1.9**,

$$1 = i_{*A} 1 = i_{*A}(a \cap i_A^* p_A^*(a^*)) = i_{*A} a \cap p_A^*(a^*),$$
$$1 = ([V] \cap \Delta i_{*A}(a)) \cap p_A(a^*) = [V] \cap (\Delta i_{*A}(a) \cup p_A^*(a^*)).$$

D'autre part, (1) donne

$$[V] \cap (p_A^*(a^*) \cup p_B^*(b^*)) = 1,$$

d'où

$$\Delta i_{*A} a = (-1)^{rs} p_B^* b^*, \tag{2}$$
$$i_B^* \Delta i_{*A} a = (-1)^{rs} i_B^* p_B^* b^* = (-1)^{rs} b^*.$$

On démontre de même

$$\Delta i_{*B} b = p_A^* a^* \tag{3}$$

et la première égalité de (a).

Pour établir (b) supposons V orienté, et soient A', B' des complémentaires de A et B respectivement, orientés suivant (**2.8**), et $C' = A' + B'$. Comme $p_{A'} \circ i_{C'}$ et $p_{B'} \circ i_{C'}$ sont les projections de C' sur A' et B', parallèles à B' et A', on a d'après (1)

$$c'^* = i_{C'}^*(p_{A'}^* a'^* \cup p_{B'}^* b'^*),$$

d'où, vu (a) et (2)

$$(-1)^{t(n-t)} \Delta i_{*C} c = (-1)^{r(n-r)+s(n-s)} (\Delta i_{*C} a \cup \Delta i_{*B} b)$$

($t = \dim C$), ou encore,

$$\Delta i_{*C} c = \Delta i_{*A} a \cup \Delta i_{*B} b,$$

ce qui équivaut à (b).

2.11. Proposition. — *Soient A et B des espaces de type VS_n et VS_m sur K possédant des classes fondamentales a et b respectivement sur K. Le produit $A \times B$ est alors de type VS_{n+m} sur K et possède une classe fondamentale sur K.*

Soient $\alpha \in \mathrm{Hom}\,(H_c^n(A;\, K),\, K)$ et $\beta \in \mathrm{Hom}\,(H_c^m(B;\, K);\, K)$ les éléments déterminés par a et b respectivement (*cf.* **1.3**). Si l'on identifie par la formule de Künneth $H_c^n(A;\, K) \otimes H_c^m(B;\, K)$ à $H_c^{m+n}(A \times B;\, K)$, l'élément $\gamma = \alpha \otimes \beta$ appartient à $\mathrm{Hom}\,(H_c^{n+m}(A \times B;\, K),\, K)$ et détermine par **1.3** un élément unique c de $H_{m+n}(A \times B;\, K)$, car $H_c^{m+n+1}(A \times B;\, K) = 0$. Cet élément c est la classe fondamentale cherchée. Pour le voir, il suffit de le vérifier pour la restriction de c à tout ouvert de la forme $U \times V$, où U et V sont des ouverts connexes contenus dans A_R et B_R respectivement. Soient a_0, b_0 et c_0 les restrictions de a, b et c à U, V et $U \times V$ respectivement, et soient α_0, β_0 et γ_0 les classes associées comme plus haut par **1.3** à a_0, b_0 et c_0 respectivement. Par hypothèse, a_0 et b_0 sont des générateurs des groupes auxquels ils appartiennent; il en est donc de même de α_0 et β_0 et de γ_0 qui s'identifie par la règle de Künneth à $\alpha_0 \otimes \beta_0$; donc c_0 est aussi un générateur de $H_{n+m}(U \times V;\, K)$.

Si A_R et B_R sont des variétés topologiques, U et V homéomorphes à des espaces numériques et si $K = \mathbf{Z}$, il est aisé de vérifier à l'aide de 2.10 que l'orientation de $U \times V$ déterminée par c est la somme de l'orientation de U et de celle de V déterminée par a et b respectivement.

2.12. Corollaire. — *Soit E un espace fibré localement trivial dont la base A est de type VS_n sur K et la fibre B de type VS_m sur K. Supposons que A possède une classe fondamentale a sur K et B une classe fondamenmentale b sur K invariante par le groupe de structure. Alors E possède une classe fondamentale* **c**.

Soit p la projection de E sur A et (U_i) un recouvrement ouvert de A tel que $p^{-1}(U_i) = U_i \times B$. Par la proposition précédente, on construit une classe fondamentale c_i dans $p^{-1}(U_i)$; l'hypothèse que le groupe structural laisse a invariante entraîne que c_i et c_j coïncident aux points réguliers de $p^{-1}(U_i \cap U_j)$; Il suffit alors d'appliquer 2.6.

2.13. Caractérisation de la classe fondamentale d'une variété plongée. — Soit V une variété de classe C^k (k entier ≥ 0, ou $k = \infty$, ω) de dimension q et soit X un sous-espace fermé de V de type VS_n. On dira que X est *bien plongé* en un point $x \in X$ s'il existe un voisinage U de x dans V et des coordonnées locales d'origine x valables dans U, telles que $X \cap U$ soit le plan $x_i = 0$ $(n+1 \leq i \leq q)$. Le plan P défini par $x_j = 0$ $(1 \leq j \leq n)$ sera appelé *plan tranverse* en x. Supposons V orientée, et soit Δ l'isomorphisme de dualité dans V (*cf.* 1.11); soit r^* l'homomorphisme de $H^*_X(V;\, K)$ dans $H^*_x(P;\, K)$ induit par l'injection de P dans V.

Proposition. — *On conserve les notations précédentes. On suppose que X possède une classe fondamentale* $\mathbf{c} \in H_n(X;\, K)$ *qu'on identifie à un élément de $H^X_n(V;\, K)$ (cf. 1.5). Alors :*

(*a*) *$r^*\Delta c$ est un générateur de $H^{q-n}_x(P;\, K)$.*

(*b*) *Si $K = \mathbf{Z}$, l'orientation donnée de U est la somme (prise dans cet ordre) de l'orientation de $X \cap U$ associée à c et de l'orientation de P associée à $r^*\Delta c$.*

Réciproquement, supposons que X soit bien plongé en tous les points d'un ensemble A rencontrant chaque composante connexe de X_R, et soit **c** *un élément de $H^X_n(V;\, K)$ tel que $r^*\Delta c$ soit un générateur de $H^{q-n}_x(P;\, K)$ pour tout point $x \in A$, P étant un plan transverse en x. Alors* **c**, *vu comme un élément de $H_n(X;\, K)$, est une classe fondamentale de X.*

Cette proposition résulte du fait que Δ commute avec la restriction à U et qu'on peut alors appliquer 2.10; on tient compte de plus de 2.4 pour la réciproque.

2.14. Application transverse. — Soient V, W des variétés de classe C^k et $f : V \to W$ une application de classe C^k. Soit Y un sous-espace fermé de W, de type VS_n. On dira que f est *transverse à* Y *en* $v \in f^{-1}(Y_R)$ si l'espace Y est bien plongé dans W en $f(v)$ (*cf.* 2.13) et si l'espace tangent $W_{f(v)}$ à W en $f(v)$ est engendré par $f(V_v)$ et par l'espace tangent à Y en $f(v)$. On sait que dans ce cas l'image réciproque X par f d'un voisinage assez petit de $f(v)$ dans Y est une sous-variété dont la codimension est égale à la codimension de Y dans W. Plus précisément, on peut trouver des coordonnées locales (x_i) $(1 \leqq i \leqq s)$ et $(y_j)(1 \leqq j \leqq t)$ dans V et W, d'origines respectives v et $f(v)$, ayant les propriétés suivantes : X est représenté par les équations $x_i = 0$ $(i \geqq s - t + n + 1)$, Y par les équation $y_j = 0$ $(j \geqq n + 1)$, et f est un homéomorphisme du plan tranverse $x_i = 0$ $(i \leqq s - t + n)$ sur le plan transverse $y_j = 0$ $(j \leqq n)$.

2.15. Proposition. — *Soient* V (*resp.* W) *une variété de classe* C^k *de dimension* s (*resp.* t) *et* f *une application de classe* C^k *de* V *dans* W. *Soit* Y *un sous-espace fermé de* W *qui soit de type* VS_n *et qui soit bien plongé* (2.13) *en tout point d'un ensemble épais* U *dans* Y. *Supposons que* f *soit transverse à* Y *en tout point de* $f^{-1}(U)$ *et que* $\dim_Z f^{-1}(Y - U) < s - t + n$. *Alors* $X = f^{-1}(Y)$ *est un espace de type* VS_m, *avec* $m = s - t + n$. *Si* V *et* W *sont orientées relativement à un anneau de coefficients* K *et si* Y *possède une classe fondamentale* $[Y]$, *alors* X *possède une classe fondamentale* $[X]$ *telle que*, i *et* j *désignant les injections de* X *et* Y *dans* V *et* W *respectivement*, *on ait*

$$\Delta i_*[X] = f^* \Delta j_*[Y]. \tag{4}$$

[Dans cette proposition, les familles Φ et Ψ de supports dans V et W sont telles que $f^{-1}(\Psi) \subset \Phi$, $X \in \Phi$ et $Y \in \Psi$. Si Φ et Ψ sont les familles des fermés contenus dans X et Y, $[X]$ est déterminé d'une manière unique par (4).]

Les faits rappelés en 2.14 montrent que $f^{-1}(U)$ est une variété de dimension m, donc X est de type VS_m.

Soit $f^* : H^*_Y(W; K) \to H^*_X(V; K)$. La classe unique $[X]$ telle que $i_*[X] = \Delta^{-1} f^* \Delta j_*[Y]$ est la classe fondamentale cherchée en vertu de 2.4 et de 2.13.

Remarque. — Soit $K = \mathbf{Z}$. En utilisant 2.10, on voit que les orientations définies par $[X]$ et $[Y]$ sont telles que les orientations des plans transverses (*cf.* 2.8) en v et $f(v)$ se correspondent par f.

3. Existence de la classe fondamentale d'un espace analytique.

3.1. — On notera $d(A_a)$ la dimension complexe d'un germe d'ensemble analytique complexe A en un point a de $\mathbf{C}^m$ (*cf.* [5], exp. VI; [19], déf. 3.2 et 3.3). Par $\dim_{\mathbf{Z}} A_a$ on entendra la dimension cohomologique sur $\mathbf{Z}$

au voisinage de a d'un ensemble analytique de $\mathbf{C}^m$ induisant le germe A_a en a. On sait que $\dim_{\mathbf{Z}} A_a = 2.d(A_a)$. Rappelons-en brièvement une démonstration : on procède par récurrence sur $d(A)_a$. Si a est un *point simple*, alors A_a est par définition le germe en a d'une variété analytique complexe de dimension complexe $d(A_a)$. Sinon, un ensemble analytique A induisant A_a en a est la réunion d'un ensemble analytique S tel que $d(S_a) < d(A_a)$ ([19], lemma 3.11), et d'une variété complexe de dimension complexe $d(A_a)$. Comme cette dernière est réunion dénombrable de fermés, on peut appliquer le théorème somme de la théorie de la dimension.

Il s'ensuit que, si X est un espace analytique complexe (au sens de [20]) de dimension complexe $d(X) = n$, $d(X)$ étant la borne supérieure des dimensions des germes de X en ses différents points, alors $\dim_{\mathbf{Z}} X = 2n$, et réciproquement. Les points simples de X forment un ouvert épais dont le complémentaire est de dimension sur $\mathbf{Z}$ au plus égale à $2n-2$. Donc X est de type VS_{2n} et, en vertu de 2.3, on a le théorème suivant :

3.2. Théorème. — *Un espace analytique complexe X de dimension complexe n possède une et une seule classe fondamentale entière induisant l'orientation naturelle en chaque point simple.*

3.3. — Nous utiliserons à plusieurs reprises le fait que *l'ensemble des points simples d'un espace analytique complexe X irréductible est connexe.* Rappelons que ceci résulte de ce que la normalisation $\tilde{X}$ de X (définie comme l'espace des germes irréductibles de X, *cf.* [5] et [19], 6.11) est connexe si et seulement si X est irréductible et que le sous-ensemble de $\tilde{X}$ qui se projette sur l'ensemble de points singuliers de X ne sépare pas X (*cf.* [19], th. 6.9). Il s'ensuit plus généralement que le complémentaire $X - F$ d'un sous-ensemble analytique F est connexe. En effet, l'ensemble U des points simples de X est dense dans X, donc $U - (F \cap U)$ est dense dans $X - F$. Mais U est une variété analytique connexe et $F \cap U$ est un sous-ensemble analytique de U; donc $U - (F \cap U)$ est connexe (*cf.* [19], th. 2.2) et son adhérence l'est aussi.

Proposition. — *Soit X un espace analytique irréductible de dimension complexe n. Alors $H_{2n}(X; \mathbf{Z})$ est isomorphe à $\mathbf{Z}$ et est engendré par la classe fondamentale. Si X est non compact, $H^c_{2n}(X; \mathbf{Z}) = 0$* ([2]).

Soient S l'ensemble des points singuliers de X et $U = X - S$. On a vu que $\dim_{\mathbf{Z}} S \leq 2n-2$. La première assertion résulte alors du fait que U est connexe et de l'isomorphisme $H_{2n}(X; \mathbf{Z}) = H_{2n}(U; \mathbf{Z})$ (*cf.* 2.3). Vu 1.10, cet isomorphisme signifie que l'homomorphisme de restriction $\Gamma(\mathcal{H}_{2n}(X; \mathbf{Z})) \to \Gamma(\mathcal{H}_{2n}(U; \mathbf{Z}))$ est un isomorphisme. Comme U est connexe, orientable, $\mathcal{H}_{2n}(U; \mathbf{Z})$ est le faisceau constant $U \times Z$; par conséquent, une

([2]) La deuxième assertion répond à une question de K. Stein.

section de $\mathcal{H}_{2n}(X; \mathbf{Z})$ qui est nulle en un point de U est identiquement nulle. Si maintenant X n'est pas compact, alors U n'est pas relativement compact et la remarque précédente montre que $\Gamma_c(\mathcal{H}_{2n}(X; \mathbf{Z})) = 0$. D'après 1.10, cela équivaut à la deuxième assertion.

3.4. Relation avec le courant associé à un sous-ensemble analytique. — Soit X un sous-ensemble analytique M de dimension complexe m, les composantes irréductibles de X ayant la même dimension complexe q.

D'après P. LELONG [15] (*cf.* aussi G. de RHAM [18]), on peut associer à X un courant fermé T de M dont la valeur sur toute forme différentielle φ à support compact ne rencontrant pas les points singuliers de X est l'intégrale de φ sur la sous-variété des points simples de X.

La classe d'homologie de M représentée par X est par définition l'image de la classe fondamentale de X par l'homomorphisme $i_* : H_*(X) \rightarrow H_*(M)$ induit par l'injection de X dans M.

PROPOSITION. — *La classe de cohomologie de M représentée par le courant T associé à X est la classe duale à la classe d'homologie de M représentée par X et réduite en coefficients réels.*

Si X est non singulier, la proposition est essentiellement démontrée dans G. de RHAM [17]. Le cas général se ramène à celui-ci. Soit S l'ensemble des points non simples de X; le courant T_0 associé à $X_0 = X - S$, dans $M_0 = M - S$ est la restriction de T à M_0. Ainsi la classe de cohomologie de M_0 représentée par T_0 est la restriction à M_0 de la classe de cohomologie de M représentée par T. De même la classe duale à X_0 dans M_0 est la restriction à M_0 de la classe duale à X dans M (*cf.* 2.13); donc sa réduction en coefficients réels est la classe de T_0. Comme $\dim_{\mathbf{Z}} S \leqq \dim_{\mathbf{Z}} X - 2$, l'application de restriction $H_{2n-2q}(M) \rightarrow H_{2n-2q}(M_0)$ est un isomorphisme, ce qui établit la proposition.

Le cas analytique réel. — Pour établir l'analogue de 3.2 dans le cas réel, nous aurons besoin de quelques propriétés des germes d'ensembles analytiques réels que nous rassemblons dans les deux numéros qui suivent.

3.5. — Soit A_a le germe d'un ensemble analytique réel A de $\mathbf{R}^q$ en un point a de $\mathbf{R}^q$ et soit A_a^c son complexifié (*cf.* [7], p. 91). Par définition $d(A_a) = d(A_a^c)$. Comme en 3.1, on définit $\dim_{\mathbf{Z}} A_a$ comme étant la dimension sur $\mathbf{Z}$ de A au voisinage de a. On sait ([7], prop. 9) que les composantes irréductibles de A_a^c sont les complexifiées des composantes irréductibles de A_a. Si A_a est irréductible, il existe un ensemble analytique réel $A' \subset A$, avec $d(A'_a) < d(A_a)$, tel que dans tout voisinage U suffisamment petit de a, $A - A'$ soit une sous-variété analytique réelle non vide de dimension égale à $d(A_a)$ (*cf.* [7], prop. 10); l'ensemble $U - U \cap A'$ est formé des points simples de U. Le germe A_a étant de nouveau non nécessairement irréductible, cela entraîne comme en 3.1 que $\dim_{\mathbf{Z}} A_a = d(A_a)$ et que tout voisinage suffisamment petit de a dans A est un espace de type VS_n, avec $n = d(A_a)$.

Soit B_a un germe d'ensemble analytique complexe de $\mathbf{C}^q$ en a. Sa « partie réelle » $B_a \cap \mathbf{R}^q$ sera notée B_a^0; c'est un germe analytique réel. Évidemment $(B_a^0)^c \subset B_a$, et si $B_a = A_a^c$, alors $B_a^0 = A_a$. Des résultats précités on déduit immédiatement que

$$\dim_{\mathbf{Z}}(B_a^0) \leqq d(B_a),$$

et que si B_a est irréductible, il y a égalité si et seulement si B_a est le complexifié de B_a^0.

3.6. **Normalisation.** — On note H_q l'anneau des séries entières convergentes au voisinage de l'origine a de $\mathbf{R}^q$, à coefficients réels.

Soit A_a un germe analytique réel irréductible au point a. L'idéal I des éléments de H_q qui s'annulent sur A_a est premier et l'anneau quotient $E = H_q/I$ est d'intégrité. Soient K le corps des fractions de E et F la clôture intégrale de E dans K.

Considérons $\mathbf{R}^q$ plongé canoniquement dans $\mathbf{C}^q$. Répétons les mêmes constructions en remplaçant A_a par son complexifié A_a^c, le corps des réels par celui des complexes et utilisons les mêmes notations en ajoutant l'indice supérieur c. Les isomorphismes suivants sont canoniques : $H_q^c = H_q \otimes \mathbf{C}$, $E^c = E \otimes \mathbf{C}$, $F^c = F \otimes \mathbf{C}$ et H_q, E et F sont identifiés à des sous-anneaux de H_q^c, E^c et F^c respectivement.

L'anneau $E^c = H_q^c/I^c$ est un anneau analytique ([5], exp. VIII *bis*), engendré analytiquement par les images u_i $(1 \leqq i \leqq q)$ des fonctions coordonnées $z_i \in H_q^c$ de $\mathbf{C}^q$. L'anneau F^c est aussi un anneau analytique et un E^c-module de type fini (*cf.* [5], exp. X, th. 1 et exp. VII, th. 1; [19], th. 6.10). Il admet donc un système fini de générateurs $v_1, v_2, \ldots, v_s$, qu'on peut choisir dans F et tels que $u_i = v_i$ $(1 \leqq i \leqq q)$. On a donc $F = H_s/J$ et $F^c = H_s^c/J^c$, où J et J^c sont des idéaux premiers de H_s et H_s^c respectivement.

Soit B (resp. B^c) un ensemble analytique dans un ouvert de $\mathbf{R}^s$ (resp. $\mathbf{C}^s$) dont le germe B_b (resp. B_b^c) à l'origine b de $\mathbf{R}^s$ (resp. $\mathbf{C}^s$) est défini par l'annulation de J (resp. J^c). Soit A (resp. A^c) un ensemble analytique dans $\mathbf{R}^q$ (resp. $\mathbf{C}^q$) induisant le germe A_a (resp. A_a^c) en a. On peut supposer que A et B sont les parties réelles de A^c et B^c respectivement. Le transposé de l'inclusion φ^c de E^c dans F^c est le germe d'une application analytique ψ^c de B^c dans A^c définie au voisinage de b et qui envoie le point de coordonnées $(z_i)_{1 \leqq i \leqq s}$ sur le point de coordonnées $(z_j)_{1 \leqq j \leqq q}$. L'application ψ^c est donc définie par des équations réelles et sa restriction ψ à B est une application d'un voisinage de b dans A.

Le lemme suivant s'appuie essentiellement sur le théorème d'Oka affirmant l'existence de la normalisation.

Lemme. — *Avec les notations précédentes, il existe des voisinages X et Y de a et b dans A et B respectivement tels que :*

1° *X et Y sont des espaces de type VS_n avec $n = d(A_a)$ et* $\dim_{\mathbf{Z}} Y_S \leqq n-2$.

2° *Ψ définit une application propre de Y dans X; l'espace X possède un ouvert épais U, non vide, contenu dans X_R, tel que Ψ soit un homéomorphisme de $\Psi^{-1}(U)$ sur U.*

Soit $\tilde{A}^c$ l'espace des germes irréductibles de A^c en ses différents points, muni de sa topologie et de sa projection naturelle μ sur A^c (*cf.* [5], exp. VII); l'espace $\tilde{A}^c$ est localement compact et la projection μ est propre (*cf.* [19], th. 6.9). D'après le théorème d'Oka ([19], th. 7.2), l'espace $\tilde{A}^c$ peut être muni d'une structure d'espace analytique normal de sorte que la projection μ soit holomorphe; l'anneau local en un point $\tilde{a}$ de $\tilde{A}^c$ est la clôture intégrale de l'anneau local du germe irréductible $\tilde{a}$ de A^c au point $\mu(\tilde{a})$. L'espace $\tilde{A}^c$ muni de la projection μ est appelé la normalisation de A.

Ainsi l'anneau local de $\tilde{A}^c$ au point $\tilde{a}$ correspondant au germe de A^c en a est isomorphe à l'anneau local F^c de B^c en b; les germes de ces cspaces en ces points sont donc isomorphes. Il en résulte qu'en prenant des voisinages convenables X^c et Y^c assez petits de a et b dans A^c et B^c, on peut considérer que (Y^c, Ψ^c) est la normalisation de X^c. Si X^c est choisi assez petit, Y^c et X^c sont des espaces analytiques de dimension $n = d(A_a)$. Les points non simples de Y^c forment un sous-ensemble analytique S de dimension complexe $\leqq n-2$ (*cf.* [5], exp. XI, th. 2; [19], th. 7.4).

Soient Y et X les parties réelles de Y^c et X^c; ce sont des espaces de type VS_n (*cf.* 3.5). De plus S contient la complexification du sous-ensemble analytique des points non simples de Y; il en résulte que $\dim_{\mathbf{Z}} Y_S \leqq n-2$, ce qui est notre première assertion.

Il est clair que la restriction Ψ à Y de l'application propre Ψ^c est aussi propre. Soit x un point simple de X; c'est aussi un point simple de X^c (*cf.* [7], p. 92); son image réciproque par Ψ^c est un point simple unique Comme Ψ^c est définie par des équations réelles, ce point doit aussi appartenir à Y, et il est aussi simple sur Y. Ainsi, U désignant l'ouvert épais de points simples de X, l'application Ψ est un homéomorphisme de $\Psi^{-1}(U)$ sur U, ce qui prouve 2°.

3.7. Théorème. — *Soit X un espace de type VS_n. On suppose que tout point de X possède un voisinage homéomorphe à un sous-ensemble analytique réel de dimension $\leqq n$ d'un ouvert d'un espace numérique. Alors X possède une et une seule classe fondamentale* mod 2.

Vu 2.7, il suffit de voir que, dans un ensemble analytique réel, tout point a un voisinage qui possède une classe fondamentale mod 2. Puisqu'un germe d'ensemble analytique réel A_a est réunion finie de germes irréductibles, on peut se borner, d'après 2.6, au cas d'un germe irréductible. Il suffit donc de montrer que l'espace X du lemme précédent possède une classe fondamentale, donc, vu 2.5, que Y a une classe fondamentale; ceci résulte de l'inégalité $\dim_{\mathbf{Z}} Y_S \leqq n-2$ et de 2.3.

3.8. — Disons qu'un espace X de type VS_n est localement algébrique réel si tout point $x \in X$ possède un voisinage homéomorphe à un sous-ensemble algébrique réel de dimension $\leqq n$ d'un ouvert d'un espace numérique. X vérifie en particulier l'hypothèse de 3.7 et possède donc une et une seule classe fondamentale mod 2. Cependant, on peut donner de ce fait une démonstration directe analogue à la précédente, mais dans laquelle le théorème de normalisation d'Oka est remplacé par la normalisation d'un ensemble algébrique affine irréductible, qui est de nature élémentaire. Nous voulons la décrire ici brièvement, car ce cas est en fait le seul que nous rencontrerons dans les applications.

On utilisera les analogues suivants des résultats de 3.5 qui sont démontrés dans [24] ou bien résultent directement des résultats de [24].

(*) Soit $X \subset \mathbf{R}^m$ un ensemble algébrique réel et soit X^c son complexifié. Alors les composantes irréductibles de X sont les parties réelles des composantes irréductibles de X^c, donc X est réunion d'un nombre fini de composantes irréductibles, et X est irréductible si et seulement si X^c l'est. Soit Y un sous-ensemble algébrique de $\mathbf{C}^m$, défini sur $\mathbf{R}$, i.e. par des équations polynomiales à coefficients réels, et soit $Y^0 = Y \cap \mathbf{R}^m$ sa partie réelle. Alors

$$\dim_{\mathbf{Z}} Y^0 \leqq d(Y) = 2^{-1}.\dim_{\mathbf{Z}} Y.$$

Supposons Y irréductible. Alors il y a égalité si et seulement si $(Y^0)^c = Y$, et Y^0 est alors irréductible.

Soit X un espace de type VS_n qui soit localement algébrique réel. Nous voulons montrer qu'il possède une et une seule classe fondamentale mod 2. D'après 2.7, la question est locale, et il suffit de considérer le cas où X est un ouvert d'un ensemble algébrique d'un espace numérique, donc aussi où X est un ensemble algébrique affine de dimension n de $\mathbf{R}^m$. 2.6 et (*) montrent alors qu'on peut supposer X, donc X^c, irréductible. Soit E l'anneau des coordonnées de X, c'est-à-dire le quotient H/I de l'anneau des polynômes à coefficients réels en les coordonnées de $\mathbf{R}^m$ par l'idéal I de E. Alors $E^c = (H/I) \otimes C$ s'identifie à l'anneau des coordonnées de X^c. Soit F la clôture intégrale de E dans son corps des fractions. Alors $F^c = F \otimes C$ est la clôture intégrale de E^c dans son corps des fractions. On sait (*cf.* par exemple [14], V, § 1) que E^c est l'anneau de coordonnées d'une variété algébrique affine irréductible normale $Y \subset \mathbf{C}^q$, définie sur $\mathbf{R}$, et qu'il existe une application birationnelle partout définie $\mu : Y \to X^c$, définie sur $\mathbf{R}$, ayant les propriétés suivantes : μ est surjective, propre, l'image réciproque de tout point $x \in X$ est formée d'un nombre fini de points, μ est un homéomorphisme birégulier de $\mu^{-1}(U)$ sur U, où U est l'ensemble des points simples de X^c. Compte tenu de (*), on voit que μ est une application propre de $Y^0 = (Y \cap \mathbf{R}^m)$ dans X, et qu'il existe un ouvert épais U^0 de X tel que μ soit un homéomorphisme de $\mu^{-1}(U^0)$ sur U^0. De plus Y_S^0 est contenu dans la partie réelle de l'ensemble Z des points singuliers de Y. Mais, Y étant normale, on a $d(Z) \leqq n-2$([14], p. 122) donc, vu (*), $\dim_{\mathbf{Z}} Y_S^0 \leqq n-2$. L'existence de la classe fondamentale résulte alors de 2.3 et 2.5.

4. Intersection de sous-ensembles analytiques complexes.

4.1. **Rappel.** — Soit V un espace analytique irréductible, de dimension complexe n. Tout sous-ensemble analytique X de V admet une représentation minimale comme réunion de sous-ensembles analytiques irréductibles X, ses composantes irréductibles, qui forment un recouvrement localement fini de X. Inversement toute réunion localement finie de sous-ensembles analytiques irréductibles de V est un sous-ensemble analytique de V. La dimension $d(X)$ d'un sous-ensemble analytique X est le maximum des dimensions de ses composantes irréductibles. Sa codimension est $n - d(X)$. On dira que X est de dimension pure p si chaque composante irréductible de X est de dimension p.

L'intersection de deux sous-ensembles analytiques X et Y de V est un sous-ensemble analytique. Si X et Y sont irréductibles de codimensions respectives p et q, alors toute composante irréductible de $X \cap Y$ contenant un point simple de V est de codimension au plus $p+q$.

4.2. **Le groupe des cycles analytiques de** V. — Soit V un espace analytique et soit $(X_i)_{i \in I}$ l'ensemble des sous-ensembles analytiques irréductibles de V. Le groupe $\mathfrak{Z}(V)$ des cycles analytiques de V est le groupe commutatif dont les éléments sont les combinaisons linéaires formelles $Z = \sum_{i \in I} n_i X_i$ à coefficients entiers, dans lesquelles les X_i pour lesquels $n_i \neq 0$ forment une famille localement finie dans V. Ces éléments X_i sont les composantes de Z. Le support $|Z|$ de Z est le sous-ensemble analytique réunion des composantes de Z. Un cycle Z est homogène de dimension p si toutes ses composantes sont de dimension p.

Tout sous-ensemble analytique irréductible X de V, de dimension p, représente une classe d'homologie $h(X) \in H_{2p}^X(V;\, Z)$. C'est l'image, par l'homomorphisme induit par l'inclusion de X dans V, de la classe fondamentale de X (*cf.* 3.2). Si $Z = \sum n_i X_i$ est un cycle analytique de V, alors $h(Z) \in H_*^{|Z|}(V;\, Z)$ désignera la somme $\sum n_i h(X_i)$ au sens de 1.7. Si Φ est une famille de supports sur V contenant $|Z|$, on notera $h^\Phi(Z)$ l'image de $h(Z)$ par l'homomorphisme d'agrandissement des supports. En particulier, $h^V(Z)$ est l'image de $h(Z)$ dans $H_*(V;\, Z)$. Il est clair que si $(Z_j)_{j\in J}$ est une famille de cycles analytiques dont les supports forment une famille localement finie, on a, en posant $|Z| = \bigcup_{j\in J} |Z_j|$,

$$h^{|Z|}\left(\sum_{j\in J} Z_j\right) = \sum_{j\in J} h(Z_j);$$

par conséquent, l'application $Z \to h^V(Z)$ est un homomorphisme de $\mathfrak{Z}(V)$ dans $H_*(V; \mathbf{Z})$.

4.3. Lemme. — *Soit X un espace analytique de dimension pure p et soient X_λ ses composantes irréductibles. L'application qui fait correspondre à une famille d'éléments $a_\lambda \in H_{2p}(X_\lambda; \mathbf{Z})$ leur somme $\sum a_\lambda$ (cf. 1.7) est un isomorphisme j de $\prod_\lambda H_{2p}(X_\lambda; \mathbf{Z})$ sur $H_{2p}(X; \mathbf{Z})$.*

Pour tout λ, soit X'_λ le complémentaire de la réunion des composantes irréductibles de X distinctes de X_λ; soit X' la réunion des X'_λ. On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_{2p}(X; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\varphi} & H_{2p}(X'; \mathbf{Z}) \\ \uparrow{\scriptstyle j} & & \uparrow{\scriptstyle j'} \\ \prod_\lambda H_{2p}(X_\lambda; \mathbf{Z}) & \xrightarrow{\Pi\varphi_\lambda} & \prod_\lambda H_{2p}(X'_\lambda; \mathbf{Z}), \end{array}$$

où j' est défini comme j, et où φ et φ_λ sont les homomorphismes de restriction. Il est clair que j' est bijectif, car les X'_λ sont ouverts et fermés disjoints dans X'; de même φ et φ_λ sont bijectifs car $\dim_{\mathbf{Z}}(X_\lambda - X'_\lambda) \leq \dim_{\mathbf{Z}}(X - X') \leq 2p - 2$. Donc j est un isomorphisme.

4.4. **Définition de la multiplicité d'intersection.** — Soient X et Y des sous-ensembles analytiques de dimension pure de l'espace analytique irréductible V. On dira qu'une composante irréductible C de $X \cap Y$ est propre si elle contient un point simple de V et si $\operatorname{codim} C = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y$.

Soient C_λ $(\lambda \in I)$ les composantes propres de $X \cap Y$, M leur réunion, N la réunion des composantes non propres de $X \cap Y$, et $p = d(C_\lambda)$. Comme $\dim_{\mathbf{Z}}(M \cap N) \leq 2p - 2$, la suite exacte de Mayer-Vietoris (1.8), (1.5) et (1.10) montrent que $H_{2p}^{|X|\cap|Y|}(V; \mathbf{Z})$ est isomorphe à la somme directe $H_{2p}^M(V; \mathbf{Z}) \oplus H_{2p}^N(V; \mathbf{Z})$. Vu 4.3, on a donc un isomorphisme canonique

$$\prod_{\lambda\in I} H_{2p}^{C_\lambda}(V; \mathbf{Z}) \oplus H_{2p}^N(V; \mathbf{Z}) = H_{2p}^{|X|\cap|Y|}(V; \mathbf{Z}).$$

Tout élément $c \in H_{2p}^{|X|\cap|Y|}(V;\mathbf{Z})$ s'écrit d'une et d'une seule manière comme somme (au sens de 1.7)

$$c=\sum_{\lambda\in I} c_\lambda + n \qquad [c_\lambda \in H_{2p}^{C_\lambda}(V;\mathbf{Z}),\ n\in H_{2p}^{N}(N;\mathbf{Z})].$$

Supposons d'abord que V soit une variété analytique complexe connexe. L'intersection $h(X).h(Y)$ des classes d'homologie représentées par X et Y est un élément de $H_{2p}^{|X|\cap|Y|}(V;\mathbf{Z})$; vu 3.3, sa composante dans $H_{2p}^{C_\lambda}(V;\mathbf{Z})$ est un multiple entier de $h(C_\lambda)$. Cet entier est par définition la *multiplicité de la composante* (propre) C_λ *dans l'intersection de* X et Y. Il sera noté $i(X.Y,\ C_\lambda)$. Lorsque V est un espace analytique irréductible, on définit $i(X.Y,\ C_\lambda)$ comme étant la multiplicité d'intersection $i(X'.Y',\ C'_\lambda)$, où X', Y' et C'_λ sont les intersections de X, Y et C_λ avec l'ouvert des points simples de V. Comme $h(X).h(Y)=h(Y).h(X)$, on a

$$i(X.Y,\ C_\lambda)=i(Y.X,\ C_\lambda) \qquad (\lambda\in I).$$

Il résulte immédiatement de la définition que si X_μ (resp. Y_ν) sont les composantes irréductibles de X (resp. Y) qui contiennent une composante propre C_λ de $X\cap Y$, on a

$$i(X.Y,\ C_\lambda)=\sum_{\mu,\nu} i(X_\mu.Y_\nu,\ C_\lambda).$$

4.5. Proposition. — *Soit U un voisinage ouvert d'un point x, simple sur V, d'une composante irréductible propre C de l'intersection de deux sous-ensembles X et Y purement dimensionnels. Soit $C_U(x)$ une composante irréductible propre de $C\cap U$ contenant x. Alors*

$$i(X.Y,\ C)=i((X\cap U).(Y\cap U),\ C_U(x)).$$

Ceci résulte du fait que l'application h commute avec la restriction à U, et montre que la notion de multiplicité d'intersection est *locale*.

Cette proposition pourrait tout aussi bien se formuler en termes de germes irréductibles de X, Y, et C au point x et des classes d'homologie locale qu'ils représentent.

4.6. **Intersection des cycles.** — Soient X et Y des sous-ensembles analytiques irréductibles de V. Si toutes les composantes irréductibles C_λ de $X\cap Y$ sont propres, l'intersection des cycles X et Y sera par définition le cycle $X.Y=\sum_\lambda i(X.Y,\ C_\lambda)\,C_\lambda$. L'intersection de deux cycles analytiques est définie par linéarité si l'intersection de chaque composante du premier avec chaque composante du second est définie.

Lorsque V est sans singularités, et que Z_1 et Z_2 sont deux cycles de V dont l'intersection $Z_1 . Z_2$ est définie, on a

$$h^{|Z_1| \cap |Z_2|}(Z_1 . Z_2) = h(Z_1) . h(Z_2).$$

C'est vrai lorsque Z_1 et Z_2 sont irréductibles d'après la définition de la multiplicité d'intersection (4.4); c'est donc aussi vrai par linéarité dans le cas général.

Propriétés de l'intersection.

4.7. **Associativité.** — Soit X, Y, Z trois sous-ensembles analytiques de dimension pure d'un espace analytique irréductible V et soit C une composante propre de $X \cap Y \cap Z$, c'est-à-dire que C contient un point simple de V et que

$$\operatorname{codim} C = \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Z;$$

soient C_λ les composantes de $X \cap Y$ contenant C, et C_μ celles de $Y \cap Z$ contenant C. Pour tout λ, C_λ est une composante propre de $X \cap Y$ et C une composante propre de $C_\lambda \cap Z$; pour tout μ, C_μ est une composante propre de $Y \cap Z$ et C une composante propre de $X \cap C_\mu$. En effet

$$\operatorname{codim} C \leqq \operatorname{codim} C_\lambda + \operatorname{codim} Z \leqq \operatorname{codim} X + \operatorname{codim} Y + \operatorname{codim} Z;$$

on a donc égalité; de même pour μ. On a la *formule d'associativité* :

$$\sum_\lambda i(X . Y, C_\lambda)\, i(C_\lambda . Z, C) = \sum_\mu i(X . C_\mu, C)\, i(Y . Z, C_\mu),$$

et la valeur commune des deux membres sera notée $i(X . Y . Z, \mathrm{C})$.

En effet, d'après 4.5, il suffit de vérifier la formule dans l'ouvert complémentaire de la réunion des points singuliers de V et de toutes les composantes de $X \cap Y$ et $Y \cap Z$ ne contenant pas C; elle découle alors immédiatement de l'associativité du produit d'intersection des classes d'homologie.

4.8. **Critère de multiplicité 1.** — Supposons qu'une composante propre C de l'intersection de deux sous-ensembles analytiques de dimension pure X et Y de V contienne un point qui soit simple à la fois sur V, X et Y et où les espaces tangents à X et Y sont transversaux (c'est-à-dire engendrent l'espace tangent à V). Alors $i(X . Y, C) = 1$.

On peut en effet trouver un voisinage de ce point et des coordonnées locales dans U telles que $X \cap U$ et $Y \cap U$ soient représentés par des sous-espaces linéaires transversaux; le critère est alors une conséquence de 2.10 et 4.5.

4.9. **Formule de projection.** — Soient V et W des espaces analytiques irréductibles, X un sous-ensemble analytique de dimension pure de V, et Y

un sous-ensemble analytique de dimension pure de $V \times W$ dont l'image $p(Y)$ par la projection $p : V \times W \to V$ soit un sous-ensemble analytique de V. On suppose que $p(Y)$ possède un ouvert épais U dont le complémentaire dans $p(Y)$ soit analytique, qui rencontre X, et tel que p soit un isomorphisme de $p^{-1}(U) \cap Y$ sur U. Soit C un sous-ensemble analytique irréductible de Y contenant un point simple de $V \times W$, rencontrant $p^{-1}(U)$ et tel que $p(C)$ soit analytique. Alors C est une composante propre de $(X \times W) \cap Y$ si et seulement si $p(C)$ est une composante propre de $X \cap p(Y)$ et l'on a dans ce cas la *formule de projection* :

$$i(X.p(Y), p(C)) = i((X \times W).Y, C). \tag{1}$$

Vu 4.5, l'égalité à démontrer est de caractère local. On peut donc supposer V et W sans singularité et, après avoir remplacé V par le complémentaire de $p(Y) - U$, on peut admettre que p est un isomorphisme de Y sur $p(Y)$. La classe duale à $h(X \times W)$ dans $V \times W$ est l'image par p^* de la classe duale ξ à $h(X)$ dans V (*cf.* 2.15). Or, d'après 1.9, on a

$$(p_* h(Y)) \cap \xi = p_*(h(Y) \cap p^* \xi),$$

ce qui, vu 1.12, peut s'écrire

$$(p_* h(Y)).h(X) = p_*(h(Y)).h(X \times W).$$

Comme p applique Y homéomorphiquement sur $p(Y)$, on a

$$p_*(h(Y)) = h(p(Y)) \qquad \text{et} \qquad p_*(h(C)) = h(p(C)),$$

et (1) résulte alors de la définition du symbole i.

4.10. **Point d'intersection isolé.** — Soient X un sous-ensemble analytique dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$, de dimension pure p, L un $(n-p)$-plan et P un point isolé de $X \cap L$. On peut alors trouver un voisinage ouvert connexe U de P tel que $U \cap X \cap L = P$, et une famille de $(n-p)$-plans L_t, parallèles à L, dépendant continûment d'un paramètre réel $t(0 \leqq t \leqq 1)$, tels que :

(1) $L_0 = L$;

(2) L_1 coupe transversalement X dans U;

(3) l'intersection de $X \cap U$ avec la réunion F des L_t est un compact;

(cela résulte aisément des théorèmes 3 et 4 de [11]). Nous voulons montrer que *$i(X.L, P)$ est égal au nombre r des points d'intersections de X avec L_1 contenus dans U.*

Soit Φ la famille des fermés de $F \cap U$. Écrivons λ_0, λ_1, ξ pour $h(L_0 \cap U)$, $h(L_1 \cap U)$ et $h(X \cap U)$. Ce sont donc des classes d'homologie de U, à supports dans la famille des fermés de $L_0 \cap U$, $L_1 \cap U$ et $X \cap U$ respectivement. Soient encore $(\lambda_i.\xi)^c$, l'image de $\lambda_i.\xi (i = 0, 1)$ dans le $0^{\text{ième}}$ groupe d'homologie à supports compacts $H_0^c(U)$ de U. Évidemment $(\lambda_i.\xi)^c = (\lambda_i^\Phi.\xi)^c (i = 0, 1)$.

Mais, en vertu de l'axiome d'homotopie (*cf.* 1.5), on a $\lambda_0^\Phi = \lambda_1^\Phi$, donc $(\lambda_0 . \xi)^c = (\lambda_1 . \xi)^c$. Le groupe $H_0^c(U; Z)$ est cyclique infini, et engendré par un élément η qui est la classe d'homologie de tout point de U. Par suite $(\lambda_i . \xi)^c = i(X . L, P) . \eta$ et $(\lambda_1 . \xi)^c = r . \eta$, d'où l'égalité annoncée.

4.11. Image directe d'un cycle. — Toute application analytique f propre d'un espace analytique V dans un espace analytique W induit un homomorphisme $f_{\mathfrak{Z}}$ de $\mathfrak{Z}(V)$ dans $\mathfrak{Z}(W)$ défini de la manière suivante. L'image de tout sous-ensemble analytique X de V est un sous-ensemble analytique $f.X$ de W et $d(f.X) \leq d(X)$ (*cf.* [16], th. 20). Supposons que X soit irréductible de dimension p; alors $f_* h(X) \in H_{2p}^{fX}(W; Z)$ est zéro si $d(fX) < p$ vu 1.10 (1) et un multiple δ positif de $h(fX)$ si $d(fX) = p$ vu 3.3. Par définition $f_{\mathfrak{Z}}(X)$ sera le cycle zéro dans le premier cas et le cycle $\delta(f.X)$ dans le second; $f_{\mathfrak{Z}}$ se définit par linéarité pour tout cycle de V.

Il résulte de la définition que, pour tout cycle Z de V, on a

$$f_* h(Z) = h^{f|Z|}(f_{\mathfrak{Z}}(Z)).$$

Remarquons que, pour définir $f_{\mathfrak{Z}}(Z)$, il suffit de supposer que la restriction de f au support de Z est propre.

4.12. Image inverse d'un cycle. — Soit f une application analytique d'un espace analytique V de dimension pure n dans un espace analytique W de dimension pure m. Soit F le graphe de f dans $V \times W$ et soit $\mathfrak{Z}_f(W)$ le sous-groupe de $\mathfrak{Z}(W)$ engendré par les sous-ensembles irréductibles X de W tels que $(V \times X) . F$ soit défini; soit alors $f_{\mathfrak{Z}}^{-1} X$ le cycle de V image du cycle $(V \times X) . F$ par l'isomorphisme canonique de F sur V; c'est un cycle homogène positif de codimension égale à celle de X et de support $f^{-1}(X)$. Par linéarité on définit alors un homomorphisme $f_{\mathfrak{Z}}^{-1}$ de $\mathfrak{Z}_f(W)$ dans $\mathfrak{Z}(V)$.

Lorsque V et W sont des variétés analytiques, on a pour tout cycle $Z \in \mathfrak{Z}_f(W)$,

$$(1) \qquad \Delta h(f_{\mathfrak{Z}}^{-1} Z) = f^* \Delta h(Z).$$

Soient en effet p et q les projections de $V \times W$ sur V et W respectivement et f^0 l'application $v \to (v, f(v))$ de V sur F. D'après 2.15, on a $\Delta h(q_{\mathfrak{Z}}^{-1} Z) = q^* \Delta h(Z)$; comme $h(F) = f_*^0([V])$, la définition de $f_{\mathfrak{Z}}^{-1} Z$ et 1.9 donnent alors

$$p_* f_*^0 h(f_{\mathfrak{Z}}^{-1} Z) = p_*(f_*^0([V]) \cap q^* \Delta h(Z)) = p_* f_*^0([V]) \cap f^{0*} q^* \Delta h(Z)),$$

d'où, puisque $p \circ f^0$ est l'identité et que $f = q \circ f^0$,

$$h(f_{\mathfrak{Z}}^{-1} Z) = [V] \cap f^* \Delta h(Z),$$

ce qui équivaut à (1).

4.13. Classe d'homologie d'un diviseur. — Soit D un diviseur positif sur une variété complexe V; D peut être défini par un ensemble $(f_i)_{i\in I}$ de fonctions holomorphes f_i définies sur les ouverts U_i d'un recouvrement de V, telles que sur $U_i \cap U_j$, $i, j \in I$, $f_{ij} = f_i/f_j$ soit une fonction holomorphe ne prenant pas la valeur zéro. Les f_{ij} sont les fonctions de transition d'un fibré vectoriel $[D]$ de rang 1 sur V : $[D]$ est le quotient de l'espace somme $\sum_i U_i \times \mathbf{C}$ par la relation d'équivalence qui identifie $(x_i, y_i) \in U_i \times \mathbf{C}$ avec $(x_j, y_j) \in U_j \times \mathbf{C}$ si $x_i = x_j$ et $y_i = f_{ij} y_j$. Les graphes $(x, f_i(x))$ des fonctions f_i se recollent dans $[D]$ et définissent une section holomorphe f de $[D]$. D'autre part les équations locales $f_i = 0$ définissent un sous-ensemble analytique $|D|$ de codimension 1; $|D|$ est le support d'un cycle analytique Z_D : si x est un point simple de $|D|$, la multiplicité de la composante irréductible de $|D|$ contenant x est l'ordre du zéro d'une fonction $f_i \in D$ en x.

Proposition. — *La classe d'homologie de V représentée par le cycle Z_D d'un diviseur D est duale à la classe de Chern du fibré vectoriel $[D]$ associé à D.*

Soit en effet s la section nulle de $[D]$ et posons $V_0 = s(V)$. La classe de Chern c de $[D]$, définie comme la première obstruction à construire une section de $[D]$ partout différente de zéro est aussi l'image par s^* de la classe duale à V_0 dans $[D]$: $c = s^*\Delta h(V_0)$ (*cf.* [21]). Comme f est homotope à s, on a aussi $c = f^*\Delta h(V_0)$. D'après 4.12, il suffit de vérifier que $Z_D = f_{\mathfrak{Z}}^{-1}(V_0)$, ce qui résulte de la définition de Z_D.

4.14. Équivalence analytique. — Soient Z_1 et Z_2 deux cycles analytiques sur une variété analytique V. On dira que Z_1 et Z_2 sont analytiquement équivalents dans V s'il existe une variété analytique connexe W, un cycle analytique Z dans $V \times W$ et deux points $w_1, w_2 \in W$ tels que les cycles $(V \times w_1).Z$ et $(V \times w_2).Z$ soient définis et aient Z_1 et Z_2 pour images par la projection naturelle de $V \times W$ sur V.

Proposition. — *Soient Z_1, Z_2 deux cycles analytiquement équivalents de la variété analytique V. Alors $h^V(Z_1) = h^V(Z_2)$.*

Soient p et q les projections de $V \times W$ sur V et W respectivement et soit Φ la famille des fermés de $V \times W$ auxquels la restriction de p est propre. La projection q induit un homomorphisme q^* de la cohomologie à supports compacts de W dans la Φ-cohomologie de $V \times W$. Vu 2.15, les classes de cohomologie duales de $h^\Phi(V \times w_1)$ et $h^\Phi(V \times w_2)$ sont les images par q^* des classes duales à w_1 et w_2 dans W. Elles sont donc égales, ce qui entraîne

$$p_*(h^\Phi(V \times w_1).h^\Phi(Z)) = p_*(h^\Phi(V \times w_2).h^\Phi(Z))$$

et la proposition résulte de 4.6 et 4.11.

4.15. Cas de la géométrie algébrique. — Soit V une variété algébrique complexe. Si X et Y sont des sous-ensembles algébriques, $i(X.Y, C)$ a la même valeur que le coefficient d'intersection de la théorie des intersections en géométrie algébrique car ce dernier est complètement caractérisé par les propriétés 4.7 à 4.10 ([23], appendix III).

Supposons V non singulière. Soit $A(V)$ le groupe des classes d'équivalence rationnelle de cycles algébriques de V. Comme deux cycles rationnellement équivalents sont aussi analytiquement équivalents, 4.2 et 4.14 montrent que $Z \to h^V(Z)$ induit un homomorphisme $h_*: A(V) \to H_*(V; \mathbf{Z})$. Un morphisme propre de V dans une variété algébrique non singulière W induit un homomorphisme $f_*: A(V) \to A(W)$ et l'on a, $h_* f_* = f_* h_*$ vu 4.11.

Si V est non singulière et quasi projective, $A(V)$ est un anneau (l'anneau de Chow de V) et, vu 4.6, h_* est un homomorphisme d'anneaux. Un morphisme f de V dans une variété quasi projective non singulière W induit un homomorphisme $f_{\mathfrak{J}}^{-1}: A(W) \to A(V)$ et 4.12 implique qu'on a $f^0 h_* = h_* f_{\mathfrak{J}}^{-1}$, où $f^0 = \Delta^{-1} f^* \Delta$ est l'homomorphisme inverse (Umkehrungshomomorphismus) de Hopf.

4.16. Cas de la géométrie analytique. — On peut aussi, suivant le modèle de la géométrie algébrique, faire une théorie de l'intersection des cycles analytiques d'un espace analytique, et montrer que le symbole d'intersection $i(X.Y, C)$ est complètement caractérisé par les propriétés 4.7 à 4.10. Comme nous n'en ferons pas usage, nous nous contentons d'énoncer ce fait « bien connu », pour lequel nous ne pouvons malheureusement pas fournir de référence. Remarquons simplement que la démonstration consiste essentiellement à faire voir que tout symbole $i(X.Y, C)$ est égal à une multiplicité d'intersection ponctuelle du type considéré en 4.10, ce qui montre en particulier que *$i(X.Y, C)$ est toujours un entier* > 0; et que les principaux pas de cette réduction seront répétés dans la démonstration de 5.3.

5. Intersection de sous-ensembles analytiques réels.

5.1. — Soit V une *complexification* d'une variété analytique réelle V^0 de dimension n. On entend par là que V est une variété analytique complexe de dimension complexe n, dont V^0 est une sous-variété analytique réelle, ayant les propriétés suivantes :

(i) Pour tout point $x^0 \in V^0$, on peut trouver des coordonnées locales $z^1, \ldots, z^n$ dans un voisinage U de x^0 telles que $V^0 \cap U$ soit défini par l'annulation des parties imaginaires des z^i; un tel système de coordonnées sera appelé réel.

(ii) V^0 est l'ensemble des points fixes d'une involution J de V qui est antiholomorphe, c'est-à-dire telle que si f est une fonction holomorphe dans un ouvert W, alors la fonction conjuguée de $f(Jw)$ $(w \in W)$ est holomorphe dans JW.

Soit X un sous-ensemble analytique de V. Alors $\overline{X} = JX$ est aussi un sous-ensemble analytique, irréductible si X l'est. La partie réelle X^0 de X est le sous-ensemble $X \cap V^0$ de V^0, et est égale à la partie réelle de $\overline{X}$. D'après 3.5, $\dim_{\mathbf{Z}} X^0 \leq d(X)$.

Supposons X *irréductible*. Si $X \neq \overline{X}$; alors $d(X \cap \overline{X}) < d(X)$, donc

$$\dim_{\mathbf{Z}} X^0 = \dim_{\mathbf{Z}} (X \cap \overline{X})^0 < d(X).$$

Si X est de dimension pure, est égal à $\overline{X}$, et $\dim_{\mathbf{Z}}(X^0) = d(X)$, alors l'ensemble des points de X^0 qui sont simples sur X forment un ensemble épais dans X^0, et sont simples sur X^0. En effet, soit S le sous-ensemble analytique des points singuliers de X. Alors $d(S) < d(X)$, donc $\dim_{\mathbf{Z}} S^0 < \dim_{\mathbf{Z}} X^0$, ce qui montre que X^0 contient au moins un point simple de X. Notre assertion résulte donc du fait que si $x \in X^0$ est simple sur X, alors X^0 est au voisinage de x une variété analytique réelle de dimension égale à $d(X)$ ([7]).

5.2. — Soit ρ l'application qui associe à un ensemble analytique irréductible X de V l'image dans $H_p^{X^0}(V; \mathbf{Z}_2)$ de la classe fondamentale de X^0 si $p = \dim_{\mathbf{Z}} X^0 = d(X)$, l'élément nul de $H_*^{X^0}(V; \mathbf{Z}_2)$ si $\dim_{\mathbf{Z}} X^0 < d(X)$. L'application ρ s'étend par linéarité au groupe $\mathfrak{Z}(V)$ des cycles de V : au cycle $Z = \sum_i n_i X_i$ de composantes X_i et de support $|X| = \bigcup_i X_i$, on associe la somme localement finie $\sum n_i \rho(X_i)$ (1.7), qui est un élément de $H_*^{X^0}(V; \mathbf{Z}_2)$. Vu 5.1, cette application est nulle sur les ensembles irréductibles non invariants par J. Nous en considérerons sa restriction au groupe $\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V)$ des cycles analytiques de V qui sont invariants par J. De même qu'en 4.2, on voit que, Φ étant une famille de supports sur V, ρ est un homomorphisme (de groupes commutatifs) dans $H_*^{\Phi \cap V^0}(V^0; \mathbf{Z}_2)$ du sous-groupe des éléments de $\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V)$ ayant leur support dans Φ.

5.3. Théorème. — *Soient X, Y deux cycles analytiques de V invariants par J dont l'intersection est définie. Alors*

$$\rho^{|X \cap Y|^0}(X.Y) = \rho(X).\rho(Y). \tag{1}$$

Montrons tout d'abord que les deux membres de (1) sont nuls si $X = Z + \overline{Z}$ avec Z irréductible, $Z \neq \overline{Z}$. On a $\rho(X) = 0$ d'après 5.1 et la définition de ρ, donc

$$\rho(X).\rho(Y) = 0.$$

D'autre part

$$\rho(X.Y) = \rho(Z + \overline{Z}.Y) = \rho(Z.Y + \overline{Z.Y}) = 2\rho(Z.Y) = 0.$$

Comme $\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V)$ est engendré par les sous-ensembles analytiques irréductibles invariants par J et par les cycles $Z+\overline{Z}$, où Z est irréductible, on pourra se borner au cas où X et Y sont invariants par J et irréductibles. $X\cap Y$ est donc de dimension pure $s=a+b-n[a=d(X),\ b=d(Y),\ n=d(V)]$. Supposons tout d'abord que $\dim_{\mathbf{Z}}(X\cap Y)^0<s$. Alors on a $\dim_{\mathbf{Z}} C_i^0<s$ pour chaque composante irréductible C_i de $X.Y$, donc $\rho(X.Y)=0$ par définition. Comme $\rho(X)\in H_a(V^0;\mathbf{Z}_2)$, $\rho(Y)\in H_b(V^0;\mathbf{Z}_2)$, le deuxième membre est aussi nul d'après **1.12**. Compte tenu de **5.1**, nous sommes donc ramenés au cas où X et Y sont irréductibles, invariants par J, où $\dim_{\mathbf{Z}}(X\cap Y)^0=d(X\cap Y)=s$, et donc où les points réels de $X\cap Y$ qui sont simples sur $X\cap Y$ forment un ensemble épais de $(X\cap Y)^0$.

5.4. — Montrons qu'il suffit de vérifier (1) au voisinage de chaque point réel simple de $X\cap Y$. Supposons donc que pour tout point réel P de $X\cap Y$ il existe un voisinage U tel que

$$\rho((X\cap U).(Y\cap U))=\rho(X\cap U).\rho(Y\cap U).$$

Soit J_U l'homomorphisme de restriction $H_*^{\Phi}(V^0;\mathbf{Z}_2)\to H_*^{\Phi\cap U^0}(U^0;\mathbf{Z}_2)$. Pour tout cycle Z, on a $\rho(Z\cap U)=j_U\rho(Z)$ (pour Φ convenable), d'où

$$\begin{aligned} j_U\rho(X.Y)&=\rho((X\cap U).(Y\cap U))=\rho(X\cap U).\rho(Y\cap U)\\ &=j_U\rho(X).j_U\rho(Y)=j_U(\rho(X).\rho(Y)). \end{aligned}$$

Ainsi, $\rho(X.Y)$ et $\rho(X).\rho(Y)$, vus comme éléments de $H_s((X\cap Y)^0;\mathbf{Z}_2)$ par l'isomorphisme de **1.5**, induisent la même classe d'homologie locale en tout point d'un ouvert épais de $(X\cap Y)^0$. Vu **1.6**, **1.10**(1) et **1.10**(2), ils coïncident.

Nous allons tout d'abord vérifier (1) dans trois cas particuliers au voisinage d'un point réel simple $P\in X\cap Y$.

5.5. — Supposons que X et Y se coupent transversalement en P. En se restreignant à un voisinage U assez petit de P invariant par J et en introduisant des coordonnées locales réelles convenables dans U, on est ramené au cas où X et Y sont les intersections d'un ouvert U' de $\mathbf{C}^n$ avec des sous-espaces affines, définis par des équations réelles, se coupant transversalement au point réel P, donc aussi en tout autre point de $C=X\cap Y$. On a alors $X.Y=C$ d'après **4.8**. D'autre part, X^0 et Y^0 sont des sous-espaces affines transversaux de $\mathbf{R}^n$ car ils sont définis par les mêmes équations que X et Y, d'où $\rho(X).\rho(Y)=\rho(C)$, vu **2.10**, ce qui établit (1) au voisinage de P.

5.6. — Supposons que P soit un point isolé de $X\cap Y$, simple sur $X\cap Y$ et sur Y. A l'aide d'une carte locale réelle, on peut se ramener au cas où X est un ensemble analytique de dimension p dans un ouvert connexe U de $\mathbf{C}^n$, $U\cap\mathbf{R}^n=U^0$ étant aussi connexe, et où Y est l'insersection de U avec un sous-espace linéaire L de dimension $n\text{-}p$ coupant X au seul point réel P, X et L

étant définis par des équations réelles. On peut trouver une famille de $(n-p)$-plans L_l définis par des équations réelles jouissant des mêmes propriétés que dans 4.10.

Comme dans 4.10, toutes les classes d'homologie de dimension o étant considérées à support les compacts de U^0, on montre que

$$\rho(X).\rho(X) = \rho(X).\rho(L_1).$$

Comme L_1 coupe transversalement X, 3.3 et 3.4 entraînent

$$\rho(X.L_1) = \rho(X).\rho(L_1).$$

Il reste donc à vérifier que $\rho(X.L) = \rho(X.L_1)$. Comme $X.L = i(X.L, P)\,P$, $\rho(X.L)$ est égal à $i(X.L, P)$ fois le générateur de $H_0^c(U^0; \mathbf{Z}_2)$; d'autre part (4.8), $\rho(X.L_1)$ est égal à r^0 fois le générateur de $H_0^c(U^0; \mathbf{Z}_2)$, où r^0 est le nombre des points réels de $X \cap L_1$; or r^0 est congru mod 2 au nombre r des points de $X \cap L_1$, car les points non réels sont conjugués deux à deux. D'après 4.10, $i(X.L, P)$ est égal à r, donc congru mod 2 à r^0.

3.7. — Supposons que P soit un point réel simple de Y et $X \cap Y$. A l'aide de coordonnées locales convenables au voisinage de P, on se ramène au cas où Y et $X \cap Y = C$ sont des sous-espaces linéaires dans un ouvert de $\mathbf{C}^n$ (X et Y étant définis par des équations réelles et $P \in \mathbf{R}^n$). Soit alors L un plan de $\mathbf{C}^n$ défini par des équations réelles, de codimension égale à la dimension s de C et coupant transversalement C en P. L'élément $\rho(X).\rho(Y)$ de $H_s^{C^0}(\mathbf{R}^n; \mathbf{Z}_2)$ est un multiple k du générateur $\rho(C)$. De $\rho(X).\rho(Y) = k\rho(C)$, on déduit

$$\rho(X).\rho(Y).\rho(L) = k\rho(C).\rho(L)$$

et d'après 3.3,

$$\rho(X).\rho(Y.L) = k\rho(C.L).$$

En vertu de 3.6, on a

$$\rho(X.Y.L) = k\rho(P) \qquad \text{ou} \qquad i(X.Y.L, P)\rho(P) = k\rho(P);$$

or

$$i(X.Y.L, P) = i(X.Y, C)\,i(C.L, P) = i(X.Y, C)$$

en vertu de 4.7, 4.8, d'où $i(X.Y, C) = k \bmod 2$. Donc

$$\rho(X.Y) = \rho(X).\rho(Y).$$

En vertu de 3.4, le théorème est démontré si Y est non singulier.

3.8. — Nous passons maintenant au cas mentionné à la fin de 3.3.

Le produit $V \times V$ et une complexification de $V^0 \times V^0$ et la diagonale D de $V \times V$ coupe $V^0 \times V^0$ suivant la diagonale. Soient p_1 et p_2 les projections de $V^0 \times V^0$ sur le premier et le deuxième facteur. Nous allons montrer d'abord que

$$p_{1*}[\rho(X \times Y).\rho(D)] = \rho(X).\rho(Y).$$

Les deux cycles $X \times V$ et $V \times Y$ se coupent transversalement suivant $X \times Y$; d'après 3.3, $\rho(X \times Y) = \rho(X \times V).\rho(V \times Y)$. D'autre part, Δ désignant l'isomorphisme de dualité, on a (*cf.* 2.15)

$$\Delta\rho(X \times V) = p_1^* \Delta\rho(X) \qquad \text{et} \qquad \Delta\rho(V \times X) = p_2^* \Delta\rho(Y).$$

Donc

$$\begin{aligned} p_{1*}[\rho(X \times Y).\rho(D)] &= p_{1*}[\rho(X \times V).\rho(V \times Y).\rho(D)] \\ &= p_{1*}[\rho(D) \cap (p_1^* \Delta\rho(X) \cup p_2^* \Delta\rho(Y))]. \end{aligned}$$

Si d est l'application diagonale $V^0 \to V^0 \times V^0$, on sait que

$$d^*[p_1^* \Delta\rho(X) \cup p_2^* \Delta\rho(Y)] = \Delta\rho(X) \cup \Delta\rho(Y);$$

de plus $\rho(D)$ est l'image par d_* de la classe fondamentale $[V^0]$ de V^0; en appliquant la formule (1) de 1.9, on a donc

$$p_{1*}[\rho(X \times Y).\rho(D)] = p_{1*}\, d_*[[V^0] \cap (\Delta\rho(X) \cup \Delta\rho(Y))],$$

et comme $p_1 \circ d$ est l'identité, ceci donne $\rho(X).\rho(Y)$.

D'autre part (3.7) : $\rho(X \times Y).\rho(D) = \rho[(X \times Y).D]$. Or on a

$$(1) \qquad (X \times Y).D = \sum_\lambda i(X.Y,\, C_\lambda)\, C_\lambda^D,$$

où les C_λ sont les composantes irréductibles de $X \cap Y$ et les C_λ^D leurs images par l'application diagonale; de plus $p_{1*}\rho(C_\lambda^D) = \rho(C_\lambda)$. Donc

$$p_{1*}[\rho(X \times Y).\rho(D)] = \sum_\lambda i(X.Y,\, C_\lambda)\rho(C_\lambda) = \rho(X.Y),$$

C. Q. F. D.

Rappelons comment se démontre la formule (1). Tout d'abord par 4.8,

$$X \times Y = (X \times V).(V \times Y).$$

Ainsi, vu 4.7 et 4.8,

$$\begin{aligned} i[(X \times Y).D,\, C_\lambda^D] &= i[(X \times V).(V \times Y).D,\, C_\lambda^D] \\ &= i[(X \times V).Y^D,\, C_\lambda^D]\, i[(V \times Y).D,\, Y^D]; \end{aligned}$$

or $i[(V \times Y).D.Y^D] = 1$ par 4.8 et $i[(X \times V).Y^D,\, C_\lambda^D] = i(X.Y,\, C_\lambda)$ par 4.9, ce qui démontre (1).

5.9. REMARQUE. — Il résulte de ce théorème que si X et $Y \in \mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V)$ sont irréductibles et si $\dim_{\mathbf{Z}}(X^0) < d(X)$, alors toute composante propre C de $X \cap Y$ telle que $\dim_{\mathbf{Z}}(C^0) = d(C)$ a une multiplicité paire. En effet, on peut supposer que $X.Y$ est défini (en enlevant au besoin les composantes non propres); d'après le théorème; $\rho(X).\rho(Y) = \rho(X.Y)$, et comme $\rho(X) = 0$, on a

$$\rho(X.Y) = 0,$$

d'où notre assertion.

5.10. — Soit $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ l'espace projectif complexe de dimension n considéré comme une complexification de l'espace projectif réel $\mathbf{P}_n(\mathbf{R})$. Soit V une sous-variété algébrique localement fermée non singulière de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ qui soit une complexification de sa partie réelle $V^0 = V \cap \mathbf{P}_n(\mathbf{R})$; cela signifie que l'adhérence $\overline{V}$ de V coïncide avec l'adhérence $\overline{V^0}$ de V^0 au sens de la topologie de Zariski de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$ et que $\overline{V} - V$ est un ensemble algébrique défini sur $\mathbf{R}$ [en d'autres termes, tout polynôme qui s'annule sur V^0 s'annule aussi sur V, $\overline{V} - V$ est invariant par l'involution $z \to \bar{z}$ de $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$].

Une *sous-variété* X de V *définie* sur $\mathbf{R}$ est un sous-ensemble algébrique de V défini par des équations réelles et qui est irréductible sur $\mathbf{R}$.

Les *cycles algébriques de V définis sur* $\mathbf{R}$ entiers (ou mod 2) sont les combinaisons linéaires formelles à coefficients entiers (ou mod 2) d'un nombre fini de sous-variétés de V définies sur $\mathbf{R}$. Ils forment un groupe abélien noté $\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V)$ [ou $\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V; \mathbf{Z}_2)$].

Une *sous-variété réelle* X de V^0 est un sous-ensemble de X de V^0 tel que son adhérence $\overline{X}$ dans V (au sens de la topotogie de Zariski) est irréductible et que $\overline{X} \cap V^0 = X$; on dira que $\overline{X}$ est la *complexification* de X. On remarquera que X est un espace de type VS_p, où $p = d(X)$. Les *cycles algébriques réels de* V^0 sont les combinaisons linéaires formelles à coefficients les entiers mod 2 d'un nombre fini de sous-variétés réelles de V^0. Ils forment un groupe abélien noté $\mathfrak{Z}(V^0; \mathbf{Z}_2)$.

L'application faisant correspondre à toute sous-variété réelle de V^0 sa complexification induit un homomorphisme γ de $\mathfrak{Z}(V^0; \mathbf{Z}_2)$ dans $\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V; \mathbf{Z}_2)$. Inversement l'application faisant correspondre à toute sous-variété X de V définie sur $\mathbf{R}$ le cycle réel $X^0 = X \cap V^0$ si X est la complexification de X^0 [ou ce qui revient au même si $\dim_{\mathbf{Z}} X^0 = d(X)$], et zéro dans le cas contraire, induit un homomorphisme α de $\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V; \mathbf{Z}_2)$ sur $\mathfrak{Z}(V^0; \mathbf{Z}_2)$. Il est clair que $\alpha \circ \gamma$ est l'identité.

5.11. Intersection des cycles algébriques réels. — On dira qu'une composante irréductible C de l'intersection de deux sous-variétés réelles X de Y de V^0 est propre si toutes les composantes irréductibles de $\gamma(X) \cap \gamma(Y)$ contenant C sont propres. Ceci implique en particulier que

$$\dim_{\mathbf{Z}} C \leqq \dim_{\mathbf{Z}} X + \dim_{\mathbf{Z}} Y - n.$$

La *multiplicité $i(X.Y,\ C)$ de la composante propre C* de $X \cap Y$ sera par définition l'entier mod 2 congru à $i(\gamma(X).\gamma(Y),\ \gamma(C))$ si $\gamma(C)$ est une composante propre de $\gamma(X) \cap \gamma(Y)$, et zéro dans le cas contraire. Si toutes les composantes C_λ de $X \cap Y$ sont propres, l'intersection des cycles X et Y sera par définition le cycle réel $X.Y = \sum_\lambda i(X.Y,\ C_\lambda)\, C_\lambda$; l'intersection de deux cycles réels, lorsqu'elle a un sens, se définit par linéarité.

PROPOSITION. — *L'homomorphisme* $\alpha : \mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V;\ \mathbf{Z}_2) \to \mathfrak{Z}(V^0;\ \mathbf{Z}_2)$ *est multiplicatif: si X et $Y \in \mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V;\ \mathbf{Z}_2)$ sont tels que $X.Y$ soit défini, alors $\alpha(X).\alpha(Y)$ est défini et $\alpha(X.Y) = \alpha(X).\alpha)Y)$.*

La proposition découle immédiatement de la définition de $X.Y$ si X et Y sont les complexifications de leur partie réelle. Lorsque X et Y sont irréductibles et que X n'est pas la complexification de sa partie réelle X^0, alors $\dim_{\mathbf{Z}} X^0 < d(X)$ et $\alpha(X) = 0$; d'autre part toute composante C de $X \cap Y$ qui est la complexification de sa partie réelle C^0 [donc telle que $\dim_{\mathbf{Z}} C^0 = d(C)$] a une multiplicité paire d'après 5.9 (on pourrait aussi le vérifier directement en se ramenant à des intersections isolées); donc $0 = \alpha(X.Y) = \alpha(X).\alpha(Y)$.

La théorie de l'intersection des cycles réels peut se développer comme celle des cycles algébriques complexes; on y démontre la formule d'associativité (conséquence du fait que α est multiplicatif), le critère de multiplicité 1, etc.

REMARQUE : — On peut construire sur ce même modèle une théorie de l'intersection mod 2 des ensembles C-analytiques d'une variété analytique réelle V^0 (au sens de [3]); les germes d'ensembles analytiques complexes au voisinage de V^0 dans une complexification de V joueront le même rôle que les cycles algébriques complexes.

5.12. Classes d'homologie représentées par des cycles algébriques. — Soit r l'homomorphisme $\mathfrak{Z}(V^0;\ \mathbf{Z}_2)$ dans $H_*(V^0;\ \mathbf{Z}_2)$ faisant correspondre à toute sous-variété réelle X de V^0 de dimension p la classe d'homologie mod 2 de V^0 qu'elle représente: $r(X)$ est l'image par l'homomorphisme induit par l'inclusion de X dans V^0 de la classe fondamentale mod 2 de X.

Désignons encore par h (resp. ρ) les homomorphismes de $\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V;\ \mathbf{Z}_2)$ dans $H_*(V;\ \mathbf{Z}_2)$ [resp. $H_*(V^0;\ \mathbf{Z}_2)$] faisant correspondre à toute sous-variété X de V définie sur $\mathbf{R}$ la classe d'homologie $h(X)$ (*cf.* 4.2), réduite mod 2, et à support tous les fermés de V [resp. la classe $\rho(X)$ (*cf.* 5.2) à support les fermés de V^0].

On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V;\ \mathbf{Z}_2) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, "\rho"] & H_*(V;\ \mathbf{Z}_2) \\
\mathfrak{Z}(V^0;\ \mathbf{Z}_2) \arrow[r, "r"] \arrow[u, shift left=3, "\gamma"'] & H_*(V^0;\ \mathbf{Z}_2)
\end{tikzcd}$$

A part γ, tous les homomorphismes considérés sont multiplicatifs (*cf.* 4.6, 5.3 et 5.11).

Soit $A_{\mathbf{R}}(V)$ le groupe des classes d'équivalence rationnelle sur $\mathbf{R}$ de cycles de V définis sur $\mathbf{R}$. Rappelons que deux cycles Z_1 et $Z_2 \in \mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V)$ sont dits rationnellement équivalents sur $\mathbf{R}$ s'il existe un cycle Z défini sur $\mathbf{R}$ dans $V \times \mathbf{C}$ tels que $(V \times 1).Z$ et $(V \times 0).Z$ soient définis et que leurs images par la projection naturelle sur V soient égales respectivement à $Z_1 - Z_2$ et à o.

L'homomorphisme h est compatible avec la relation d'équivalence rationnelle (*cf.* 4.15); il en est de même pour ρ (et donc pour r) :

5.13. Proposition : — *Soient Z_1 et Z_2 deux cycles de V rationnellement équivalents sur* $\mathbf{R}$. *Alors les classes d'homologie* mod 2, $\rho(Z_1)$ *et* $\rho(Z_2)$ *de V^0 (à support les fermés de V^0) sont égales.*

La démonstration est analogue à celle de 4.14. Soient p et q les projections de $V^0 \times \mathbf{R}$ sur V^0 et $\mathbf{R}$ respectivement ($\mathbf{R}$ étant canoniquement plongé dans $\mathbf{C}$) et soit Φ la famille des fermés de $V^0 \times \mathbf{R}$ tels que la restriction de p à chacun d'eux soit propre. Les classes $\rho^{\Phi}(V \times 1)$ et $\rho^{\Phi}(V \times 0)$ sont égales car elles sont duales aux images par q^* des classes duales aux points 1 et o dans $\mathbf{R}$ (2.15). Comme

$$\rho^{\Phi}((V \times i).Z) = \rho^{\Phi}((V \times i)).\rho(Z) \qquad (i = 1, 0)$$

d'après 5.3, il résulte que

$$p_* \rho^{\Phi}((Z_1 - Z_2) \times 1) = \rho(Z_1 - Z_2) = 0.$$

Chow a montré [9] qu'étant donnés deux cycles Z_1 et $Z_2 \in \mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V; \mathbf{Z}_2)$, il est toujours possible de trouver un cycle Z_2' rationnellement équivalent à Z_2 sur $\mathbf{R}$ tel que $Z_1 . Z_2'$ soit défini. Il en résulte en particulier que les images de h, ρ ou r sont des sous-anneaux de $H_*(V; \mathbf{Z}_2)$ et $H_*(V^0; \mathbf{Z}_2)$ respectivement.

5.14. Proposition.

(1) *Supposons que toute classe d'homologie* mod 2 *de dimension paire de V, à support compact, puisse être représentée par un cycle algébrique défini sur* $\mathbf{R}$ *(à support compact). Alors h s'annule sur le noyau de ρ.*

(2) *V^0 étant connexe, supposons que toute classe d'homologie* mod 2 *de V^0, à support compact, puisse être représentée par un cycle algébrique réel (à support compact). Alors ρ s'annule sur le noyau de h.*

Démonstration.

(1) Soit $Z \in \mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V; \mathbf{Z}_2)$ un cycle homogène de dimension p tel que $\rho(Z) = 0$; pour montrer que $h(Z) = 0$, il suffit de vérifier que l'intersection de $h(Z)$ avec toute classe d'homologie à supports compacts, de dimension

$2n-2p$, de V est nulle. Soient $C\in\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V;\mathbf{Z}_2)$ un cycle à support compact homogène de dimension $2n-2p$ et $h(C)$ la classe d'homologie à supports compacts qu'il représente. D'après Chow [9], il existe un cycle Z' rationnellement équivalent à Z sur $\mathbf{R}$ tel que $Z'.C$ soit défini. On a $h(Z)=h(Z')$ (*cf.* 4.15), il suffit donc de prouver que $h(Z').h(C)=0$. Or

$$\rho(Z').\rho(C)=\rho(Z'.C),$$

les deux membres étant des classes à supports compacts (*cf.* 5.3); comme $0=\rho(Z)=\rho(Z')$ (*cf.* 5.13), on a $\rho(Z'.C)=0$. Cela signifie que le nombre des points réels de $Z'.C$, comptés avec leur multiplicité, est pair; puisque $Z'.C$ est invariant par l'involution, il s'ensuit qu'il est formé d'un nombre pair de points; comme V est connexe, cela entraîne que $h(Z'.C)=0$, d'où $h(Z').h(C)=0$.

(2) Soit $Z\in\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V;\mathbf{Z}_2)$ un cycle homogène de dimension p tel que $h(Z)=0$; soit C^0 un cycle réel compact de dimension $n-p$ et soit C sa complexification. Il faut prouver que $\rho(Z).\rho(C)=0$. Il est possible de trouver un cycle Z' rationnellement équivalent à Z sur $\mathbf{R}$ tel que $\mathbf{Z}'.C$ soit défini. Comme $h(\mathbf{Z}')=h(\mathbf{Z})=0$, on a

$$h(Z'.C)=h(Z').h(C)=0,$$

les deux membres étant à support compact. Il en résulte comme dans (1) que $\rho(Z'.C)=0$ (on a supposé V^0 connexe); donc

$$0=\rho(Z'.C)=\rho(Z').\rho(C)=\rho(Z).\rho(C).$$

5.15. **Conséquences.** — La conclusion de (1) signifie qu'en faisant correspondre à la classe d'homologie représentée par un cycle réel de V^0 la classe d'homologie mod 2 représentée par sa complexification, on définit un homomorphisme multiplicatif de $r[\mathfrak{Z}_*(V^0;\mathbf{Z}_2)]$ dans $H_*(V;\mathbf{Z}_2)$ doublant les dimensions.

La conclusion de (2) signifie qu'en faisant correspondre à la classe d'homologie mod 2 représentée par un cycle Z de V défini sur $\mathbf{R}$ la classe d'homologie représentée par sa partie réelle $\alpha(Z)$, on définit un homomorphisme multiplicatif de $h_*(\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V;\mathbf{Z}_2))$ dans $H_*(V^0;\mathbf{Z}_2)$ divisant les dimensions par deux.

En particulier, on a la

PROPOSITION. — *Supposons que toute classe d'homologie mod 2 de V (resp. V^0), à support compact ou non, peut être représentée par un cycle algébrique* de *V défini sur* $\mathbf{R}$ (*resp. un cycle réel de V^0*). *Alors l'application faisant correspondre à un cycle réel de V^0 sa complexification induit un isomorphisme d'anneaux de $H_*(V^0,\mathbf{Z}_2)$ sur $H_*(V,\mathbf{Z}_2)$ doublant les dimensions.*

5.16. **Exemple des variétés grassmaniennes.** — Soit $\tilde{G}_{n,N}$ la grassmanienne complexe des n-plans passant par l'origine de $\mathbf{C}^N$; c'est une variété algébrique définie sur $\mathbf{R}$, sa partie réelle s'identifiant à la grassmanienne $G_{n,N}$ des n-plans de $\mathbf{R}^N$. L'application faisant correspondre à un n-plan ses coordonnées plückériennes est un plongement défini sur $\mathbf{R}$ de $\tilde{G}_{n,N}$ dans un espace projectif.

Il est bien connu (*cf.* par exemple [8]) que toute classe d'homologie mod 2 de $\tilde{G}_{n,N}$ ou de $G_{n,N}$ peut être représentée par une combinaison linéaire de variétés de Schubert définies sur $\mathbf{R}$. Les hypothèses de la proposition précédente sont donc vérifiées. De plus la classe de Stiefel-Whitney universelle $w_i \in H^i(G_{n,N}; \mathbf{Z}_2)$ et la classe de Chern universelle $c_i \in H^{2i}(\tilde{G}_{n,N}; \mathbf{Z})$ sont duales à des variétés de Schubert représentées par le même symbole, ce qui prouve que la seconde est la complexification de la première.

On a donc un isomorphisme d'anneaux de $H_*(G_{n,N}; Z_2)$ sur $H_*(\tilde{G}_{n,N}; Z_2)$ qui envoie la classe duale à W_i sur la classe duale à C_i réduite mod 2.

5.17. Supposons les hypothèses de 5.14 (2) vérifiées et soit $B(V) \subset H^*(V; \mathbf{Z}_2)$ l'image de $h_*(\mathfrak{Z}_{\mathbf{R}}(V; \mathbf{Z}_2))$ par la dualité de Poincaré. C'est une sous-algèbre, et, vu 5.14, $\sigma^* = \Delta \circ \rho \circ h^{-1} \circ \Delta^{-1}$ est un homomorphisme multiplicatif de $B(V)$ dans $H^*(V^0; \mathbf{Z}_2)$, qui divise les dimensions par 2. Puisqu'il est multiplicatif, on a $\sigma^*(\mathrm{Sq}^{2i} x) = \mathrm{Sq}^i \sigma^*(x)$ pour $x \in B(V)$ de degré $2i$. On peut se demander si l'on n'a pas plus généralement

$$\sigma^*(\mathrm{Sq}^{2j} x) = \mathrm{Sq}^j \sigma^*(x) \qquad [x \in B(V);\ j \geq 0]. \tag{1}$$

Il résultera de 5.19 que cela est vrai si $x = \Delta h(X)$, où X peut être représentée par une combinaison linéaire de sous-variétés non singulières, définies sur $\mathbf{R}$. Même si cette hypothèse faite sur X est restrictive (ce que nous ignorons), la validité de (1) en général semble plausible, mais nous ne savons pas l'établir. En vertu des résultats connus, (1) est vraie dans les grassmanniennes, ou aussi dans les variétés de drapeaux considérées à la fin de 6.5.

5.18. Soient X une variété projective non singulière définie sur $\mathbf{R}$, E un fibré vectoriel de rang p défini sur $\mathbf{R}$, de base X. Nous suivons les constructions et notations de [12]. Soient donc $P(E)$ le fibré en espaces projectifs associé à E, L_E le fibré linéaire de rang 1 sur $P(E)$, et $\xi_E \in A(P(E))$ la classe fondamentale de L_E ([12], p. 138 et 140). Les classes de Chern $c_i(E) \in A^{2i}(X)$ de E sont caractérisées par l'égalité

$$\sum_{i=0}^{i=p} c_i(E)\, \xi_E^{p-i} = 0, \qquad c_0(E) = [X]. \tag{1}$$

Nous *admettrons* ici que

$$(2)\qquad c_i(E)\in A^{i2}_{\mathbf{R}}(X)\quad (i=0,\ \ldots,\ p),\ \xi_E\in A_{\mathbf{R}}(P(E))\quad (^3).$$

Soient maintenant E^0, $P(E_0)$ et L^0_E les parties réelles de E, $P(E)$ et L_E respectivement. $P(E^0)$ est donc le fibré en espaces projectifs réels associé au fibré vectoriel réel E, et L^0_E le fibré de groupe structural $\mathbf{R}^*$ de base $P(E^0)$. Un raisonnement analogue à 4.13 montre que $\rho_*(\xi_E)$ est duale à la classe caractéristique $\mu\in H^1(P(E^0);\mathbf{Z}_2)$ de L^0_E. D'après la formule de Hirsch-Wu (4), les classes de Stiefel-Whitney, $w_i(E)\in H^i(X^0;\mathbf{Z}_2)$ de E^0 sont caractérisées par

$$(3)\qquad \sum_{i=0}^{i=p} w_i(E^0)\,.\,\mu^{p-i}=0,\qquad w_0(E^0)=1.$$

D'après 5.3 et 5.13, l'égalité (1) entraîne

$$(4)\qquad \sum_{i=0}^{i=p} \rho_*(c_i(E))\,\rho_*(\xi_{\mathrm{E}})^{p-i}=0$$

ce qui, vu (3), montre par dualité que $\rho_*(c_i(E))=\Delta^{-1}w_i(E_0)$, donc prouve la

PROPOSITION. — *Soit E un fibré vectoriel algébrique de rang p défini sur* **R** *dont la base est une variété quasi projective non singulière X, et soient $c_i(E)$ les classes de Chern de E, vues comme classes d'équivalence rationnelle sur* **R**. *Alors $\Delta\rho_*(c_i(E))$ est la $i^{\text{ième}}$ classe de Stiefel-Whitney du fibré partie réelle de E.*

5.19. Soient X une sous-variété non singulière définie sur **R**, d'une variété quasi projective non singulière V définie sur **R**, et E le fibré normal à X dans V. La partie réelle E^0 de E est le fibré normal à la partie réelle X^0 de X dans la partie réelle V^0 de V.

PROPOSITION. — *Soit c_i la $i^{\text{ième}}$ classe de Chern du fibré normal à X dans V, réduite* mod 2, *et soit j_* ; $A_{\mathbf{R}}(X)\to A_{\mathbf{R}}(V)$ l'homomorphisme induit par l'injection j de X dans V. Alors on a*

$$\mathrm{Sq}^{2i}\,\Delta h(X)=\Delta h_*(j_*(c_i)),\qquad \mathrm{Sq}^i\,\Delta\rho(X)=\Delta\rho_*(j_*(c_i)).$$

(3) Cette assertion sera certainement justifiée lorsque quelqu'un aura pris la peine de faire la théorie des classes de Chern en géométrie algébrique « avec corps de base » (ou avec « schéma de base »). Comme il s'agit ici de remarques incidentes, dont le reste de ce travail ne dépend pas, nous ne chercherons pas à justifier (2).

(4) Cette formule peut se démontrer à partir du théorème de multiplication de Whitney exactement comme CHERN l'a fait pour l'analogue cohomologique de (1) [On the characteristic classes of complex sphere bundles and algebraic varieties, *Amer. J. of Math.*, t. 75, 1953, p. 565-597].

Désignons en effet par ν et par ν^0 les classes mod 2 duales à $h(X)$ et $\rho(X)$, par $w_{2i} \in H^{2i}(X; \mathbf{Z}_2)$ et $w_i^0 \in H^i(X^0; \mathbf{Z}_2)$ les classes de Stiefel-Whitney de E et E_0 $(i = 0, 1, \ldots)$, et par j_* et j_*^0 les homomorphismes de Gysin associés aux injections $j : X \to V$ et $j^0 : X^0 \to V^0$. D'après THOM [21], on a

$$\mathrm{Sq}^{2i}\nu = j_*(w_{2i}), \qquad \mathrm{Sq}^i \nu^0 = j_*^0(w_i^0).$$

La proposition résulte donc du fait que w_{2i} est la réduction mod 2 de la $i^{\text{ième}}$ classe de Chern et de la proposition précédente.

6. Applications.

Singularités complexes et réelles.

6.1. Nous reprenons les définitions et notations des exposés 7 et 8 de [6]. Ainsi $L_{n,p}^r$ (resp. $\tilde{L}_{n,p}^r$) est l'espace des jets d'ordre r à l'origine de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) des applications différentiables (resp. holomorphes) de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^p$ (resp. $\mathbf{C}^n$ dans $\mathbf{C}^p$) appliquant origine sur origine; L_m^r (resp. $\tilde{L}_m^r$) est le groupe des jets d'ordre r à l'origine O de $\mathbf{R}^m$ (resp. $\mathbf{C}^m$) des isomorphismes différentiables (resp. analytiques complexes) de voisinages de l'origine sur voisinages de l'origine laissant fixe O. Remarquons que $\tilde{L}_{n,p}^r$ est l'espace affine des suites de p polynômes à coefficients complexes à n variables, de degré $\leq r$, et sans terme constant; sa partie réelle est $L_{n,p}^r$; le groupe $\tilde{L}_m^r$ est formé des suites de m polynômes complexes à m variables de degré $\leq r$, sans terme constant, la matrice des termes de degré 1 étant non singulière; sa partie réelle est L_m^r. Enfin $\tilde{L}_n^r \times \tilde{L}_p^r$ agit algébriquement sur $\tilde{L}_{n,p}^r$ (par la loi de composition des jets, c'est-à-dire par changement de variables); cette action est algébrique, définie sur $\mathbf{R}$; sa restriction à la partie réelle est l'action de $L_n^r \times L_p^r$ sur $L_{n,p}^r$.

Un *type de singularité* réelle ou complexe est défini par une sous-variété algébrique réelle S ou complexe $\tilde{S}$ de $L_{n,p}^r$ ou $\tilde{L}_{n,p}^r$, invariante par $L_n^r \times L_p^r$ ou $\tilde{L}_n^r \times \tilde{L}_p^r$.

Soit G_m la variété grassmanienne des m-plans passant par l'origine d'un espace numérique réel de grande dimension N, et soit V_m la variété de Stiefel des m-repères de cet espace numérique. Le fibré $V_n \times V_p$ de base $G_n \times G_p$ est un espace universel pour le groupe $L_n^1 \times L_p^1$ (pour une certaine dimension).

Identifions L_m^1 au sous-groupe de L_m^r des jets d'ordre r des automorphismes linéaires de $\mathbf{R}^m$; ainsi $L_n^1 \times L_p^1$ agit algébriquement sur $L_{n,p}^r$. Soit alors $E_{n,p}^r$ le fibré associé à $V_n \times V_p$ de fibre $L_{n,p}^r$ et soit S_E le sous-fibré de fibre S.

En remplaçant le corps $\mathbf{R}$ par $\mathbf{C}$, la même construction donne un espace fibré algébrique $\tilde{E}_{n,p}^r$ défini sur $\mathbf{R}$ de base $\tilde{G}_n \times \tilde{G}_m$ (produit des grassmaniennes complexes) dont la partie réelle est $E^r_{n,p}$. De même $\tilde{S}$ définit un sous-fibré $\tilde{S}_{\tilde{E}}$ de fibre $\tilde{S}$, défini sur $\mathbf{R}$ si et seulement si S l'est.

La fibre $L^r_{n,p}$ est un espace numérique; la projection de $E^r_{n,p}$ sur $G_n \times G_p$ induit donc un isomorphisme pour la cohomologie, par lequel nous identifions $H^*(E^r_{n,p})$ et $H^*(G_n \times G_p)$. Le sous-fibré E_S est une sous-variété algébrique réelle qui représente donc une classe d'homologie mod 2. Sa classe duale est donc exprimée (N étant supposé assez grand) comme un polynôme $P_S(W_i, W'_j)$ dans les classes de Stiefel-Whitney, W_i de G_n et W'_j de G_p, appelé le *polynôme universel* associé au type de singularité S.

Le même argument dans le cas complexe associe à $\tilde{S}$ un polynôme universel $P_{\tilde{S}}(C_i, C'_j)$ à coefficients entiers dans les classes de Chern C_i de $\tilde{G}_n$ et C'_j de $\tilde{G}_p$.

6.2. Théorème. — *Soit $P_S(W_i, W'_j)$ le polynôme universel associé au type de singularité réelle S et soit $P_{\tilde{S}}(C_i, C'_j)$ le polynôme universel associé au type de singularité complexe $\tilde{S}$, où $\tilde{S}$ est le complexifié de S. Alors $P_S(W_i, W'_j)$ s'obtient à partir de $P_{\tilde{S}}(C_i, C'_j)$ par réduction* mod 2 *des coefficients et remplacement de C_i par W_i et C'_j par W'_j.*

Comme $\tilde{S}_{\tilde{E}}$ est la complexification de S_E, le théorème est une conséquence de 5.15 et 5.16, si l'on peut vérifier qu'il existe un plongement défini sur $\mathbf{R}$ de $\tilde{E}^r_{n,p}$ dans un espace projectif. Or le fibré vectoriel $E^r_{n,p}$ est naturellement plongé dans l'espace fibré en espaces projectifs obtenu en complétant chaque fibre par son hyperplan à l'infini. Il suffit donc de montrer que si V est un fibré algébrique défini sur $\mathbf{R}$, de fibre $\mathbf{P}_n(\mathbf{C})$, groupe structural $\mathbf{GL}(n, \mathbf{C})$, base une variété projective non singulière B, alors X admet un plongement projectif défini sur $\mathbf{R}$. Or X admet un plongement projectif sur $\mathbf{C}$ d'après [13], th. 8, donc aussi un plongement projectif défini sur $\mathbf{R}$ ([14], chap. VI, cor. 3).

Décompositions cellulaires.

6.3. — Dans la suite, nous appellerons *décomposition cellulaire* d'un espace localement compact X une partition de X en sous-espaces X_i $(i \in I)$, ayant les propriétés suivantes :

(i) $(X_i)_{i\in I}$ est un recouvrement localement fini de X, par des sous-espaces disjoints, homéomorphes à des espaces numériques.

(ii) X_i est ouvert dans son adhérence $\overline{X}_i$ et $\overline{X}_i - X_i$ est réunion d'un nombre fini de X_j de dimensions $< \dim X_i$.

Les sous-espaces $\overline{X}_i$ sont les *cellules* de la décomposition envisagée, les X_i en sont les « cellules ouvertes ». Il est clair que $\overline{X}_i$ est de type VS_{n_i} $(n_i = \dim X_i)$; si X est de dimension finie, alors X est de type VS_n

($n = \max \dim X_i$) et la réunion des X_i de dimension n est un ensemble épais de points réguliers.

6.4. Proposition. — *Soit X un espace de type VS_n admettant une décomposition cellulaire $(X_i)_{i\in I}$. Supposons que $\overline{X}_i$ possède une classe fondamentale c_i sur l'anneau K pour tout $i\in I$. Alors :*

(a) *$H_*(X;\, K)$ s'identifie au produit direct des K-modules monogènes libres engendrés par les classes c_i.*

(b) *Si $\overline{X}_i$ est compact ($i\in I$), $H^c_*(X;\, K)$ s'identifie au K-module libre ayant comme base les classes c_i.*

Dans la démonstration, l'homologie est à coefficients dans K.

Soit $J\subset I$ l'ensemble des indices j pour lesquels $\dim X_j = n$, et soit Y la réunion des $X_j\,(j\in J)$; ces derniers sont disjoints, homéomorphes à R^n, donc (1.3)

$$(1)\qquad H_n(Y) = \prod_{j\in J} H_n(X_j), \qquad H_q(Y) = 0 \quad (q\neq n).$$

Comme $\overline{X}_j$ possède une classe fondamentale, la restriction

$$H_n(\overline{X}_j)\to H_n(X_j)$$

est un isomorphisme (2.3, remarque). Vu **1.7**, il s'ensuit que l'application $H_n(X)\to H_n(Y)$ est surjective. L'espace $X - Y$ étant de dimension $\leq n-1$, la suite exacte d'homologie de $X \bmod X - Y$ montre alors

$$(2)\qquad H_n(X) = H_n(Y), \qquad H_q(X) = H_q(X - Y) \quad (q\neq n).$$

Comme les $X_i\,(i\in I,\ i\notin J)$ forment une décomposition cellulaire de $X - Y$, on en déduit (a) par récurrence sur n.

Supposons maintenant $\overline{X}_i$ compact pour tout $i\in I$. Soit $\Phi = c(X)\cap Y$ la famille de supports sur Y formée des intersections de Y avec les compacts de X. Évidemment, Φ est l'ensemble des fermés de Y qui ne rencontrent qu'un nombre fini de $X_j\,(j\in J)$, d'où

$$H^\Phi_n(Y) = \sum_{j\in J} H_n(X_j), \qquad H^\Phi_q(Y) = 0 \quad (q\neq n).$$

L'assertion (b) se démontre alors comme (a), à l'aide de la suite exacte [**7.10**, (1)]

$$\ldots \to H^c_m(X - Y) \to H^c_m(X) \to H^\Phi_m(Y) \to H^c_{m-1}(X - Y) \to \ldots.$$

Cas particuliers. — Si X est un espace analytique complexe, et les $\overline{X}_i$ sont les sous-ensembles analytiques, alors la proposition s'applique pour tout K, vu 3.2. Soit $K = \mathbf{Z}_2$. D'après 3.7, la proposition s'applique si les

$\overline{X}_i$ sont localement analytiques réels, ou encore (2.5) s'il existe pour chaque $i \in I$ une application propre $f_i : M_i \to \overline{X}_i$ d'un espace localement analytique réel M_i dans $\overline{X}_i$ qui soit un homéomorphisme de $f_i^{-1} X_i$ sur X_i. Un exemple de ce cas est fourni par les décompositions cellulaires de J. H. C. Whitehead des variétés de Stiefel.

6.5. Espaces homogènes algébriques. — A titre d'illustration, nous décrivons ici sans donner de démonstrations des espaces homogènes algébriques admettant une décomposition cellulaire. Nous supposons le lecteur familier avec la théorie des groupes semi-simples ([5]).

Soit G un groupement semi-simple réel, linéaire connexe, non compact et soit $G = K.A.N$ une décomposition d'Iwasawa de G, où K est compact maximal, A commutatif formé de matrices diagonalisables et N nilpotent simplement connexe formé de matrices à valeurs propres toutes égales à 1. Soient encore M et M^* le centralisateur et le normalisateur de A dans K. Alors $W = M^*/M$ est un groupe fini. Notons g_w un représentant de $w \in W$ dans M^*. D'après le lemme de Bruhat, G est réunion des doubles classes $Ng_w AN$, qui sont deux à deux disjointes; de plus, il existe un sous-groupe connexe N_w de N tel que $Ng_w AN = N_w g_w AN$ et que tout élément de $Ng_w AN$ s'écrive d'une seule manière comme produit $xg_w ay$ ($x \in N_w$, $y \in N$, $a \in A$). Soient alors $X = G/U$, où U est le produit semi-direct $M.A.N$ et $\pi : G \to X$ la projection canonique. On a aussi $X = K/M$, donc X est compact. Il résulte alors de théorèmes généraux sur les groupes algébriques que X est une variété projective réelle, sur laquelle G opère par des transformations projectives et que les orbites $X_w = N.\pi(g_w) = N_w.\pi(g_w)$ des points $\pi(g_w)$ sous l'action de N forment une décomposition cellulaire de X, dont les adhérences topologiques $\overline{X}_w$ sont des ensembles algébriques réels.

On peut généraliser : soient θ le système des racines simples de l'algèbre de Lie g de G, par rapport à l'algèbre de Lie a de A, pour l'ordre défini par N. θ contient donc r éléments, $r = \dim A$. Pour tout sous-ensemble I de θ, désignons par a_I la sous-algèbre de a sur laquelle les racines $\alpha \in I$ s'annulent, par A_I le sous-groupe correspondant de A_I, M et M_I^* le centralisateur et le normalisateur de A_I dans K et $U_I = M_I.A.N$. Alors

$$X_I = G/U_I = K/M_I.$$

On montre que X_I admet un plongement projectif réel, sur lequel G opère par des transformations projectives, que les orbites de N forment une décomposition cellulaire, et que leurs adhérences sont des ensembles algébriques réels. Ces cellules sont en correspondance biunivoque avec les

([5]) *Voir*, par exemple, *Séminaire Sophus Lie*, t. 1, 1954-1955. Pour le lemme de Bruhat, *cf.* HARISH-CHANDRA, On a lemma of F. Bruhat, *J. Math. pures et appl.*, Série 9, t. 35, 1956, p. 203-210.

classes de restes de W mod le sous-groupe W_I engendré par les symétries aux plans $\alpha = 0$. Vu 6.4 ces cellules forment une base de l'homologie mod 2 de X_I. Si I est vide, on retrouve l'espace $X = G/U$.

Ces décompositions sont les analogues réels des décompositions cellulaires analytiques complexes bien connues des espaces homogènes algébriques projectifs complexes des groupes de Lie semi-simples complexes (6).

Supposons maintenant que dim A soit égale au rang de G. Cela équivaut à dire que G est une « forme normale réelle » de sa complexification G^c au sens de E. Cartan. Alors A^c est un sous-groupe de Cartan de G^c, M^{*c}/M^c est le groupe de Weyl de G^c et $B^c = A^c.N^c$ est un sous-groupe connexe résoluble maximal de G^c. On a $G^c/B^c = L/T$ où L est compact maximal dans G^c et T est un tore maximal de L. On déduit alors du lemme de Bruhat dans le cas analytique complexe que les orbites de N^c dans G^c/B^c forment une décomposition cellulaire; de plus G^c/B^c est une complexification de X, les cellules ont comme parties réelles les cellules X_w considérées plus haut. Alors 5.15 et 6.3 montrent que ρ est un isomorphisme de $H_*(X^c; \mathbf{Z}_2)$ sur $H_*(X; \mathbf{Z}_2)$ diminuant les degrés de moitié.

Toujours sous l'hypothèse dim A = rang G, on peut également complexifier X_I et sa décomposition cellulaire. M_I^c est alors le centralisateur de A_I dans G^c, $M_I^c \cap L$ s'identifie au centralisateur Z_I d'un tore de L, et

$$G^c/U_I^c = L/Z_I$$

est une complexification de X_I, admettant une décomposition cellulaire, formée des orbites de N^c, qui est la complexification de la décomposition cellulaire de X_I mentionnée plus haut, et 5.15 s'applique. L'exemple classique est celui où $G = \mathbf{SL}(n, \mathbf{R})$, $K = \mathbf{SO}(n)$, N est le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures à valeurs propres égales à 1, et A le sous-groupe des matrices diagonales de valeurs propres positives, de déterminant 1. Alors $G^c = \mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$, $L = \mathbf{U}(n)$, B^c est le groupe des matrices triangulaires, et $r = n - 1$. L'espace X_I (resp. X_I^c) est la variété des drapeaux réels non orientés

$$F(d_1, \ldots, d_k, n) \text{ [resp. complexes } F^c(d_1, \ldots, d_k, n)]$$
$$(1 \leqq d_1 \leqq \ldots \leqq d_k \leqq n-1;\ k = 1, \ldots, n-1).$$

$F(d_1, \ldots, d_k, n)$ [resp. $F^c(d_1, \ldots, d_k, n)$] est donc l'ensemble des systèmes de k sous-espaces emboîtés de $\mathbf{R}^n$ (resp. $\mathbf{C}^n$) de dimensions respectives $d_1, \ldots, d_k$. Si I est vide, on retrouve les variétés de drapeaux usuelles (type 1, 2, ..., $n - 1$). Si I comprend $n - 2$ éléments, on retrouve les grassmanniennes, etc.

---

(6) *Voir*, par exemple, Borel (Armand), Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups, *Proc. Nat. Acad. Sc. U. S, A.*, t. 40, 1954, p. 1147-1151. Ces espaces sont également décrits dans : Borel-Hirzebruch, Characteristic classes and homogeneous spaces I, *Amer. J. of Math.*, t. 80, 1958, p. 458-538 (en particulier § 14) ou dans : Tits, Sur certaines classes d'espaces homogènes de groupes de Lie, *Acad. royale Belg. Mém.*, Cl. Sc., t. 29, 1955, n° 3, 268 pages (en particulier chapitre III).

7. Appendice : le cap-produit.

Ce paragraphe apporte quelques compléments à [2]. Nous supposons ce dernier connu du lecteur et en utilisons librement les notations.

7.1 Le cap-produit. — Soit $\mathcal{F}^*$ une résolution de K sur X, qui soit un faisceau c-mou d'algèbres différentielles graduées, unitaires, sans torsion. $\mathcal{F}^*$ est donc aussi c-fin ([10], II, 3.7). On peut prendre pour $\mathcal{F}^*$ par exemple le faisceau des germes de cochaînes d'Alexander-Spanier ou la résolution canonique simpliciale $\mathcal{F}^*(X; K)$ de [10], II, 6.4. Le produit dans $\mathcal{F}^*$ sera noté $\cup$. Pour toute famille Φ de supports, $\Gamma_\Phi(\mathcal{F}^*)$ est une algèbre différentielle graduée sans torsion. Si $\mathcal{F}^*$ est Φ-mou, Φ étant paracompactifiante, ou si $\mathcal{F}^*$ est flasque, alors $H^*(\Gamma_\Phi(\mathcal{F}^*)) = H^*_\Phi(X; K)$, et le produit induit par $\cup$ dans $H^*(X; K)$ est le cap-produit.

Soit U un ouvert de X. On définit une application bilinéaire.

$$\cap : \quad D(\mathcal{F}^*)_s(U) \times \Gamma_c(\mathcal{F}^t \mid U) \to D(\mathcal{F}^*)_{s-t}(U)$$

par la formule

$$(a \cap b)(z) = a(b \cup z) \qquad [a \in D(\mathcal{F}^*)_s(U),\ b \in \Gamma_c(\mathcal{F}^* \mid U),\ z \in \Gamma_c(\mathcal{F}^* \mid U)].$$

Cet accouplement est compatible avec la restriction à un ouvert, donc définit aussi un accouplement de $D(\mathcal{F}^*)_s$ et $\mathcal{F}^t$ à $D(\mathcal{F}^*)_{s-t}$ et par linéarité, un accouplement de $D(\mathcal{F}^*)$, $\mathcal{F}^*$ à $D(\mathcal{F}^*)$. Il a les propriétés suivantes :

$$(1) \qquad a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cap c \qquad [a \in D(\mathcal{F}^*),\ b \in \mathcal{F}^*,\ c \in \mathcal{F}^*],$$

$$(2) \qquad d(a \cap b) = da \cap b + (-1)^s a \cap db \qquad [a \in D(\mathcal{F}^*)_s,\ b \in \mathcal{F}^*].$$

En effet,

$$\begin{aligned}(a \cap (b \cup c))(z) &= a((b \cup c) \cup z) = a(b \cup (c \cup z)) \\ &= (a \cap b)(c \cup z) = ((a \cap b) \cap c)(z),\end{aligned}$$

quel que soit $z \in \mathcal{F}^*$, d'où (1). D'autre part, on a par définition ([2], 2.4) :

$$(3) \qquad (df)(z) = d(f(z)) + (-1)^{r+1} f(dz) \qquad [f \in D(\mathcal{F}^*)_r,\ z \in \mathcal{F}^*],$$

donc en particulier

$$\begin{aligned}(4) \quad & (d(a \cap b))(z) = d((a \cap b)(z)) + (-1)^{s-t+1} (a \cap b)(dz), \\ & d((a \cap b)(z)) = d(a(b \cup z)) = (da)(b \cup z) + (-1)^s a(d(b \cup z)), \\ & d((a \cap b)(z)) = (da \cap b)(z) + (-1)^s a(db \cup z) + (-1)^{s+t} a(b \cup dz), \\ (5) \quad & d((a \cap b)(z)) = (da \cap b)(z) + (-1)^s (a \cap db)(z) + (-1)^{s+t} (a \cap b)(dz),\end{aligned}$$

et (2) résulte de (4) et (5). L'accouplement $\cap$ définit aussi une application bilinéaire de $\Gamma_\Phi D(\mathcal{F}^*)) \times \Gamma_\Psi(\mathcal{F}^*)$ dans $\Gamma_{\Phi \cap \Psi}(D(\mathcal{F}^*))$ quelles que soient les familles de supports, qui, vu (2), passe à l'homologie, et donne lieu à une application bilinéaire

$$H_s(\Gamma_\Phi(D(\mathcal{F}^\star))) \times H^t(\Gamma_\Psi(\mathcal{F}^\star)) \to H_{s-t}(\Gamma_{\Phi\cap\Psi}(D(\mathcal{F}^\star)))$$

vérifiant

$$(6)\qquad \begin{cases} a\cap(b\cup c) = (a\cap b)\cap c \\ [a\in H_s(\Gamma_\Phi(D(\mathcal{F}^\star))),\ b\in H^t(\Gamma_\Psi(\mathcal{F}^\star)),\ c\in H^u(\Gamma_\Theta(\mathcal{F}^\star))]. \end{cases}$$

7.2. Théorème. — *Soit $\mathcal{F}^\star(X;\, K)$ la résolution canonique simpliciale de K sur X de* [10], chap. II, 6.4. *La construction précédente appliquée à $\mathcal{F}^\star(X;\, K)$ définit un accouplement, le cap-produit,*

$$\cap\ :\ H_s^\Phi(X;\, K) \times H_\Psi^t(X;\, K) \to H_{s-t}^{\Phi\cap\Psi}(X;\, K),$$

quels que soient $s,\, t\in \mathbf{Z}$ et les familles de supports, Φ, Ψ. On a

$$a\cap(b\cup c) = (a\cap b)\cap c \qquad [a\in H_t^\Phi(X;\, K),\ b\in H_\Psi^s(X;\, K),\ c\in H_\Theta^t(X;\, K)].$$

Le cap-produit est compatible avec la restriction à un ouvert et avec l'agrandissement des familles de supports.

Dans cet énoncé on a admis implicitement que $\mathcal{F}^\star(X;\, K)$ est un faisceau d'algèbres différentielles graduées unitaires, ce qui résulte de [10], II, 6.4 (les formules de multiplication et de différentiation étant les mêmes que pour les cochaînes d'Alexander-Spanier). Comme $\mathcal{F}^\star(X;\, K)$ est flasque (*loc. cit.*) on a $H^\star(\Gamma_\Psi(\mathcal{F}^\star(X;\, K))) = H_\Psi^\star(X;\, K)$ d'après [10], II, th. 4.7.1 et $H_\star^\Phi(X;\, K) = H_\star(\Gamma_\Phi(D(\mathcal{F}^\star(X;\, K))))$ d'après [2], 3.5, donc 7.2 résulte de 7.1.

7.3. Remarque. — Soit de nouveau $\mathcal{F}^\star$ la résolution c-molle de K considérée en 7.1. On a encore $H_\star^\Phi(X;\, K) = H(\Gamma_\Phi(D(\mathcal{F}^\star)))$ par [2], 3.5. Si Ψ est *paracompactifiante*, on a aussi

$$(7)\qquad H_\Psi^\star(X;\, K) = \mathrm{H}(\Gamma_\Psi(\mathcal{F}^\star)),$$

d'après [10], II, 4.7.1, donc 7.1 donne lieu à un cap-produit entre $H_\star^\Phi(X;\, K)$ et $H_\Psi^\star(X;\, K)$. Ce cap-produit est le même que celui de 7.2; autrement dit, le cap-produit ne change pas si l'on remplace $\mathcal{F}^\star$ par une autre résolution $\mathcal{G}^\star$ de K qui soit aussi un faisceau c-mou d'algèbres différentielles graduées unitaires. En effet, on a des homomorphismes évidents $\mathcal{F}^\star \to \mathcal{F}^\star \otimes \mathcal{G}^\star$ et $\mathcal{G}^\star \to \mathcal{F}^\star \otimes \mathcal{G}^\star$; d'autre part $\mathcal{F}^\star \otimes \mathcal{G}^\star$ est une résolution de K, qui est aussi un faisceau d'algèbres différentielles graduées unitaires c-fin, puisque les facteurs le sont. Il suffit donc d'établir l'indépendance annoncée lorsqu'il existe un homomorphisme (de faisceaux différentiels gradués d'algèbres) $\mu : \mathcal{F}^\star \to \mathcal{G}^\star$, ce qui est immédiat. En effet, la construction de 7.1, faite à partir de $\mathcal{F}^\star$ et de $\mathcal{G}^\star$ est évidemment compatible avec μ; d'autre part l'homomorphisme $H^*(\Gamma_\Psi(\mathcal{F}^*)) \to H^*(\Gamma_\Psi(\mathcal{G}^*))$ est un isomorphisme d'après [10], II, th. 4.6.2, et la démonstration de 3.5 (*b*) dans [2] montre qu'il en est de même pour $H(\Gamma_\Phi(D(\mathcal{G}^*))) \to H(\Gamma_\Phi(D(\mathcal{F}^*)))$.

Il est plausible que dans le cas général où Ψ n'est pas supposée paracompactifiante, le cap-produit ne change pas si l'on remplace $\mathcal{F}^*(X; K)$ par une résolution flasque d'algèbres différentielles unitaires, mais nous ne savons pas le démontrer.

7.4. Soient M un sous-espace fermé de l'espace Z, $\mathcal{S}$ une résolution par des faisceaux c-mous de K sur Z. L'homomorphisme de restriction $\Gamma_c(\mathcal{S}) \to \Gamma_c(\mathcal{S} \mid M)$ sera noté $i^0_{Z,M}$. Il est surjectif, son transposé

$$i_0^{M,Z}: \quad D(\Gamma_c(\mathcal{S} \mid M)) \to D(\Gamma_c(\mathcal{S}))$$

est injectif, et l'image de $i_0^{M,Z}$ est l'ensemble des éléments de $D(\Gamma_c(\mathcal{S}))$ dont le support est dans M([2], § 2.4). On a

$$H_*(M; K) = H(D(\Gamma_c(\mathcal{S} \mid M))), \qquad H_*(Z; K) = H(D(\Gamma_c(\mathcal{S}))),$$

et $i_0^{M,Z}$ induit l'homomorphisme $i_*^{M,Z}$ associé à l'inclusion $M \to Z$([2], 3.5, remarque).

Étant donné un faisceau $\mathcal{A}$ sur Z, on note $\mathcal{C}^*(Z; \mathcal{A})$ le faisceau des germes de sections (continues ou non) de $\mathcal{A}$ ([10], II, 4.3).

Soit $f: X \to Y$ une application continue, et soient $\mathcal{B}$ un faisceau sur Y, $f^*\mathcal{B}$ son image réciproque sur X ([10], II, 1.12). Il résulte immédiatement des définitions qu'on a une inclusion $f^*(\mathcal{C}^*(Y; \mathcal{B})) \to \mathcal{C}^*(X; f^*\mathcal{B})$. Comme la résolution canonique simpliciale de [10] est obtenue en itérant le foncteur $\mathcal{A} \to \mathcal{C}^*(Z; \mathcal{A})$, il s'ensuit que f induit un homomorphisme

$$f^*: \quad \mathcal{F}^*(Y; K) \to \mathcal{F}^*(X; K),$$

donc aussi un homomorphisme

$$f^0: \quad \Gamma_c(\mathcal{F}^*(Y; K)) \to \Gamma(\mathcal{F}^*(X; K))$$

et plus généralement, si Φ, Ψ sont des familles de supports sur X et Y respectivement telles que $f^{-1}(\Psi) \subset \Phi$, un homomorphisme

$$f^0: \quad \Gamma_\Psi(\mathcal{F}^*(Y; K)) \to \Gamma_\Phi(\mathcal{F}^*(X; K)).$$

Si les éléments de $\Gamma_\Psi(\mathcal{F}^q(Y; K))$ et $\Gamma_\Phi(\mathcal{F}^q(X; K))$ sont interprétés comme des fonctions sur Y^{q+1} et X^{q+1} respectivement ([10], II, 6.4 (b)), on a

$$(f^0\varphi)(x_0, \ldots, x_q) = \varphi(f(x_0), \ldots, f(x_q)) \qquad [\varphi \in \Gamma_\Psi(\mathcal{F}^q(Y; K))],$$

comme dans le cas des cochaînes d'Alexander-Spanier. En particulier, f_0 est multiplicatif.

Il résulte aisément des théorèmes d'unicité que f^0 induit, par passage aux groupes dérivés, l'homomorphisme $f^*: H^*_{\Psi}(Y; K) \to H^*_{\Phi}(X; K)$ associé à f. Plus généralement, soient $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ des résolutions flasques de K sur X et Y (ou des résolutions respectivement Φ-molles et Ψ-molles si Φ, Ψ sont paracompactifiantes) pour lesquelles il existe un homomorphisme $\alpha: f^*\mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}$, alors l'homomorphisme induit de

$$H(\Gamma_{\Psi}(\mathfrak{Y})) = H^*_{\Psi}(Y; K) \qquad \text{dans} \quad H(\Gamma_{\Phi}(\mathfrak{X})) = H^*_{\Phi}(X; K)$$

est f^*.

7.5 THÉORÈME. — *Soient $f: X \to Y$ une application continue*, Φ, Φ' (resp. Ψ, Ψ') *des familles de supports sur X* (resp. Y), *telles que la restriction de f à tout élément de Φ soit une application propre et que $f(\Phi) \subset \Psi$, $f(\Phi \cap \Phi') \subset \Psi \cap \Psi'$ et $f^{-1}(\Psi') \subset \Phi'$. Alors on a*

$$(8) \qquad f_*(a \cap f^*b) = (f_*a) \cap b \qquad [a \in H^{\Phi}_*(X, K),\ b \in H^*_{\Psi'}(Y; K)].$$

Dans cet énoncé, on a utilisé implicitement le fait que, sous les conditions indiquées, f induit des homomorphismes

$$H^{\Phi}_*(X; K) \to H^{\Psi}_*(Y; K) \qquad H^{\Phi \cap \Phi'}_*(X; K) \to H^{\Psi \cap \Psi'}_*(Y; K)$$

(*voir* [2], 3.5), ainsi qu'un homomorphisme

$$f^*: \quad H^*_{\Psi'}(Y; K) \to H^*_{\Phi'}(X; K),$$

comme on l'a rappelé ci-dessus. Soit $M \in \Phi$ et soit $M' = f(M)$. On a un homomorphisme naturel

$$(f|M)^0: \quad \Gamma_c(\mathcal{F}^*(Y; K)|M') \to \Gamma_c(\mathcal{F}^*(X; K)|M),$$

tel que

$$(9) \qquad (f|M)^0 \circ i^0_{Y, M'} = i^0_{X, M} \circ f^0,$$

(notations de 7.4), et dont le transposé est un homomorphisme

$$(f|M)_0: \quad D(\Gamma_c(\mathcal{F}^*(X; K)|M)) \to D(\Gamma_c(\mathcal{F}^*(Y; K)|M')).$$

Si $N \in \Phi$ contient M, il est clair que $(f|M)_0$ et $(f|N)_0$ sont compatibles avec l'inclusion ; comme d'autre part

$$\Gamma_{\Phi}(D(\mathcal{F}^*(X; K))) = \bigcup_{F \in \Phi} D(\Gamma_c(\mathcal{F}^*(X; K)|F)),$$

$$\Gamma_{\Psi}(D(\mathcal{F}^*(Y; K))) = \bigcup_{G \in \Psi} D(\Gamma_c(\mathcal{F}^*(Y; K)|G))$$

([2], 2.4), on en déduit un homomorphisme

$$f_0: \quad \Gamma_{\Phi}(D(\mathcal{F}^*(X; K))) \to \Gamma_{\Psi}(D(\mathcal{F}^*(Y; K)))$$

qui, vu (9), vérifie

(10) $$f_0 \circ i_0^{M,X} = i_0^{M',Y} \circ (f|M)_0 \qquad [M \in \Phi,\ M' = f(M)].$$

L'homomorphisme dérivé de f_0 s'identifie à l'application

$$f_* : \quad H_*^{\Phi}(X;\ K) \to H_*^{\Psi}(Y;\ K)$$

introduite dans [2], 3.5. On peut évidemment faire des remarques analogues pour $\Phi \cap \Phi'$ et $\Psi \cap \Psi'$. Pour établir (8), il suffit de démontrer

(11) $$f_0(a \cap f^0 b) = (f_0 a) \cap b \qquad [a \in \Gamma_\Phi(D(\mathcal{F}^*(X;K))),\, b \in \Gamma_{\Psi'}(\mathcal{F}^*(Y;K))].$$

(i) Supposons tout d'abord que f soit propre et que Φ soit l'ensemble des fermés de X. Alors f_0 est l'homomorphisme transposé de

$$f^0 : \quad \Gamma_c(\mathcal{F}^*(Y;\ K)) \to \Gamma_c(\mathcal{F}^*(X;\ K)).$$

Par conséquent, pour tout $z \in \Gamma_c(\mathcal{F}^*(Y;\ K))$, on a

$$(f_0(a \cap f^0 b))(z) = (a \cap f^0 b)(f^0 z),$$

d'où, par définition du cap-produit,

$$(f_0(a \cap f^0 b))(z) = a(f^0(b \cup z)) = (f_0 a)(b \cup z) = (f_0 a \cap b)(z),$$

ce qui établit (8) dans le cas particulier envisagé.

Cette démonstration vaut naturellement aussi lorsque $\mathcal{F}^*(Y;K)$ et $\mathcal{F}^*(X;K)$ sont remplacées par des résolutions $\mathcal{Y}$, $\mathcal{X}$ c-molles de K pour lesquelles il existe un homomorphisme $f^*\ \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$.

(ii) Prouvons maintenant (8) dans le cas général. Soit M le support de a, et soit $M' = f(M)$. On pourra appliquer (i) en particulier aux inclusions $M \to X$, $M' \to Y$ et à $(f|M) : M \to M'$. On peut écrire

$$a = i_0^{M,X} a' \qquad [a' \in D(\Gamma_c(\mathcal{F}^*(X;\ K)|M))],$$

donc

$$f_0(a \cap f^0 b) = f_0(i_0^{M,X} a' \cap f^0 b).$$

Vu (i) et (9), (10), on a

$$i_0^{M,X} a' \cap f^0 b = i_0^{M,X}(a' \cap i_{X,M}^0 . f^0 b) = i_0^{M,X}(a' \cap (f|M)^0 i_{Y,M'}^0(b)),$$
$$f_0(i_0^{M,X} a' \cap f^0 b) = f_0 . i_0^{M,X}(a' \cap (f|M)^0 . i_{Y,M'}^0(b)),$$
$$f_0(i_0^{M,X} a' \cap f^0 b) = i_0^{Y,M'} . (f|M)_0(a' \cap (f|M)^0 . i_{Y,M'}^0(b)).$$

Appliquant (i) à $(f|M)_0$, puis à l'inclusion $M' \to Y$, on en tire

$$f_0(a \cap f^0 b) = i_0^{M',Y}((f|M)_0 a' \cap i_{Y,M'}^0(b)),$$
$$f_0(a \cap f^0 b) = i_0^{M',Y} . (f|M)_0(a') \cap b,$$

d'où finalement, vu (10),

$$f_0(a \cap f^0 b) = (f_0 . i_0^{M,X}(a') \cap b) = (f_0 a) \cap b.$$

7.6. Proposition. — *Soient $\mathcal{F}^\star(X; K)$ la résolution simpliciale canonique de K sur X, $\mathcal{A}$ un faisceau sur X et Φ une famille paracompactifiante de supports sur X. Alors :*

(i) $H_\Phi^\star(X; \mathcal{A}) = H(\Gamma_\Phi(\mathcal{F}^\star(X; K) \otimes \mathcal{A}))$.

(ii) *Si $\mathcal{A}$ est sans torsion et si* $\dim_K X < \infty$, *on a*

$$H_\star^\Phi(X; \mathcal{A}) = H(\Gamma_\Phi(D(\mathcal{F}^\star(X; K)) \otimes \mathcal{A})).$$

Il résulte visiblement de la définition de $\mathcal{F}^\star(X; K)$ que ce dernier est sans torsion, par conséquent $\mathcal{F}^\star(X; K) \otimes \mathcal{A}$ est une résolution de $\mathcal{A}$. Soit $\mathcal{K} = \mathcal{C}(X; K)$ le faisceau des germes de sections (continues ou non) du faisceau constant $X \times K$. Il est évidemment flasque, donc ([10], II, 3.5) Φ-mou pour toute famille paracompactifiante Φ. Il est immédiat que $\mathcal{F}^\star(X; K)$, et $\mathcal{F}^\star(X; K) \otimes \mathcal{A}$ sont des $\mathcal{K}$-modules, donc sont Φ-mous ([10], II, th. 3.7.1). L'assertion (i) est alors conséquence du théorème 4.7.1 de [10], chap. II.

Il existe un homomorphisme de $\mathcal{F}^\star(X; K)$ dans la résolution canonique injective $\mathcal{C}^\star(X; K)$ de K introduite dans [2], d'où des homomorphismes

$$\alpha: \quad \mathcal{C}_H(X; K) = D(\mathcal{C}^\star(X; K)) \rightarrow D(\mathcal{F}^\star(X; K)),$$
$$\alpha': \quad \mathcal{C}_H(X; K) \otimes \mathcal{A} \rightarrow D(\mathcal{F}^\star(X; K)) \otimes \mathcal{A}.$$

α induit un isomorphisme de faisceaux dérivés ([2], 3.3(b)). Si $\mathcal{A}$ est sans torsion, alors on a, par la règle de Künneth :

$$\mathcal{H}(\mathcal{C}_H(X; K) \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{H}(\mathcal{C}_H(X; K)) \otimes \mathcal{A},$$
$$\mathcal{H}(D(\mathcal{F}^\star(X; K)) \otimes \mathcal{A}) = \mathcal{H}(D(\mathcal{F}^\star(X; K))) \otimes \mathcal{A},$$

donc α' induit aussi un isomorphisme des faisceaux dérivés. D'autre part, $D(\mathcal{F}^\star(X; K))$ est aussi un K-module, donc $D(\mathcal{F}^\star(X; K)) \otimes \mathcal{A}$ est Φ-fin. De même $\mathcal{C}_H(X; K) \otimes \mathcal{A}$ est Φ-fin ([2], 3.1). (ii) est donc un cas particulier du théoréme 4.6.2 de [10], chap. II.

7.7. — Nous voulons maintenant étendre la définition du cap-produit dans certains cas où les coefficients forment un faisceau. Il est à espérer que cette extension est possible dans le cas général et que les restrictions faites ci-dessous ne sont dues qu'à une insuffisance technique. Elle n'est pas utilisée dans le présent travail

Soient $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ des faisceaux sur X. Il est clair que 7.1 donne aussi lieu à une application

$$(D(\mathcal{F}^\star) \otimes \mathcal{L}) \times (\mathcal{F}^\star \otimes \mathcal{M}) \rightarrow D(\mathcal{F}^\star) \otimes \mathcal{L} \otimes \mathcal{M},$$

vérifiant (1), (2), d'où une application bilinéaire

$$H_s(\Gamma_\Phi(D(\mathcal{F}^\star)\otimes\mathcal{L}))\times H^t(\Gamma_\Psi(\mathcal{F}^\star\otimes\mathcal{M}))\to H_{s-t}(\Gamma_{\Phi\cap\Psi}(D(\mathcal{F}^\star)\otimes\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}))$$

qu'on appellera aussi le cap-produit. A l'aide de 7.6, on en tire tout de suite le

Théorème. — *Soient $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ des faisceaux sans torsion sur X, Φ, Ψ, Θ des familles de supports sur X. On suppose :*

(i) $\mathcal{L}=X\times K$, *ou bien* Φ *paracompactifiante et* $\dim_K X<\infty$;
(ii) $\mathcal{M}=X\times K$, *ou bien* Ψ *paracompactifiante;*
(iii) $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}=X\times K$ *ou bien* $\Phi\cap\Psi$ *paracompactifiante et* $\dim_K X<\infty$.
Alors il existe un accouplement, le cap-produit

$$\cap:\quad H_s^\Phi(X;\mathcal{L})\times H_\Psi^t(X;\mathcal{M})\to H_{t-s}^{\Phi\cap\Psi}(X;\mathcal{L}\otimes\mathcal{M})\qquad (s,\, t\in\mathbf{Z})$$

qui est compatible avec l'agrandissement des familles de supports et avec les homomorphismes de faisceaux de coefficients. Si de plus :

(iv) $\mathcal{N}=X\times K$ *ou bien* Θ *est paracompactifiante;*
(v) $\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}=X\times K$ *ou bien* $\Psi\cap\Theta$ *est paracompactifiante;*
(vi) $\mathcal{L}\otimes\mathcal{M}\otimes\mathcal{N}=X\times K$ *ou bien* $\Phi\cap\Psi\cap\Theta$ *est paracompactifiante et* $\dim_K X<\infty$, *alors on a*

$$(a\cap b)\cap c=a\cap(b\cup c)\qquad [a\in H_s^\Phi(X;\mathcal{L}),\ b\in H_\Psi^t(X;\mathcal{M}),\ c\in H_\Theta^u(X;\mathcal{N})].$$

7.8. — Dans ce numéro et le suivant, X désigne une variété homologique ou cohomologique [2], § 7 sur K, de dimension (cohomologique sur K) égale à n, $\mathcal{T}=\mathcal{H}_n(X;K)$ le faisceau d'orientation de X, et $\mathcal{T}'$ un inverse de $\mathcal{T}$. Le faisceau $\mathcal{T}'$ est donc localement isomorphe à $X\times K$ et l'on a un isomorphisme de $\mathcal{T}\otimes\mathcal{T}'$ sur $X\times K$([2], 7.7). Pour tout entier q, tout faisceau $\mathcal{L}$ sur X et toute famille de supports Φ, paracompactifiante si $\mathcal{L}\neq X\times K$, la dualité de Poincaré définit un isomorphisme

$$\Delta:\quad H_q^\Phi(X;\mathcal{L})\to H_\Phi^{n-q}(X;\mathcal{T}\otimes\mathcal{L}),$$

donc aussi un isomorphisme

$$\Delta:\quad H_q^\Phi(X;\mathcal{T}'\otimes\mathcal{L})\to H_\Phi^{n-q}(X;\mathcal{L}).$$

Si X est orientable, ou bien paracompacte, on a en particulier un isomorphisme

$$\Delta:\quad H_n(X;\mathcal{T}')\to H^0(X;K)$$

et $\Delta^{-1}(1)$, [1 étant élément neutre de $H^\star(X;K)$] est la classe fondamentale de X.

7.9. Théorème. — *On conserve les notations de 7.8. On suppose X orientable ou bien paracompacte et l'on pose $\xi=\Delta^{-1}(1)$. Soient $\mathcal{L}$ un faisceau sans torsion sur X, et Φ une famille de supports, qui est para-*

compactifiante si $\mathcal{L}$, $\mathcal{G} \neq X \times K$. *Alors pour tout entier* q, $a \to \xi \cap a$ *est un isomorphisme de* $H^q_\Phi(X; \mathcal{L})$ *sur* $H^\Phi_{n-q}(X; \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L})$; *son inverse est* Δ.

Soit ξ' un cycle de $\Gamma(D(\mathcal{F}^\star(X; K)) \otimes \mathcal{G}')$ représentant ξ; l'application $a \to \xi' \cap a$ est un homomorphisme

$$\alpha: \quad \mathcal{F}^q(X; K) \otimes \mathcal{L} \to D(\mathcal{F}^\star(X; K))_{n-q} \otimes \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L}.$$

On pose $\mathcal{B}^q = D(\mathcal{F}^\star(X; K))_{n-q}$ et l'on munit $\mathcal{B} = \sum \mathcal{B}^q$ de la différentielle $(-1)^n d$, où d est la différentielle de $D(\mathcal{F}^\star(X; K))$; l'application α peut alors s'envisager comme une application de $\mathcal{F}^\star(X; K) \otimes \mathcal{L}$ dans $\mathcal{B}^\star \otimes \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L}$ qui conserve le degré et qui commute aux différentielles vu **7.1** (2) et le fait que ξ' est un cycle. On a, puisque $\mathcal{L}$ et $\mathcal{G}'$ sont sans torsion :

$$\mathcal{H}(\mathcal{F}^\star(X; K) \otimes \mathcal{L}) \simeq \mathcal{L},$$
$$\mathcal{H}(\mathcal{B}^\star \otimes \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L}) \simeq \mathcal{H}(\mathcal{B}^\star) \otimes \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{L}.$$

Il s'ensuit immédiatement que α induit un isomorphisme des faisceaux dérivés, donc ([**10**], II, t. **4**.6.2), α induit un isomorphisme

$$\alpha^\star: \quad H^\star(\Gamma_\Phi(\mathcal{F}^\star(X; K) \otimes \mathcal{L})) \to H^\star(\Gamma_\Phi(\mathcal{B}^\star \otimes \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L})).$$

d'où la première assertion.

Soit $\mathcal{S}^\star$ une résolution flasque de $\mathcal{B}^\star \otimes \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L}$, et soit $\beta : \mathcal{B}^\star \otimes \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L} \to \mathcal{S}^\star$ l'augmentation. Il résulte de la démonstration du théorème de dualité ([**2**], **7**.3) et des remarques faites dans [**10**], II, § **4**.5 que Δ est l'homomorphisme composé

$$H^\Phi_{n-q}(X; \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L}) = H^q(\Gamma_\Phi(\mathcal{B}^\star \otimes \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L})) \xrightarrow{\mu} H^q(\Gamma_\Phi(\mathcal{S}^\star)) \xrightarrow{\nu} H^q_\Phi(X; \mathcal{L}),$$

où μ est défini par β et où ν est l'identification canonique. Il s'ensuit que le composé

$$H^q(\Gamma_\Phi(\mathcal{F}^\star(X; K) \otimes \mathcal{L})) \to H^\Phi_{n-q}(X; \mathcal{G}' \otimes \mathcal{L}) \to H^q_\Phi(X; \mathcal{L})$$

est l'identification canonique, d'où la deuxième assertion.

7.10. Remarques sur [**2**].

(a) Dans l'énoncé de 7.3, il faut ajouter « and if Tor $(\mathcal{H}_*(X; K)_x, \mathcal{S}_x) = 0$ $(x \in X)$ » après « paracompactifying ». Dans (3), remplacer $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$, et dans (4), remplacer $(p, q \geq 0)$ par $(p < 0$ ou $q < 0)$.

(b) La suite exacte d'homologie 3.8 vaut aussi avec une famille de supports. Plus précisément on a la

Proposition. — *Soient* F *un sous-espace fermé de* X, $U = X - F$, *et* Φ *une famille de supports sur* X. *Alors on a une suite exacte*

$$(1) \quad \ldots \to H^{\Phi|F}_q(F; K) \to H^\Phi_q(X; K) \to H^{\Phi|U}_q(U; K) \to H^{\Phi|F}_{q-1}(F; K) \to \ldots.$$

En effet soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}_H(X; K)$ le faisceau fondamental pour l'homologie de X ([2], § 3). Alors $\mathcal{C} \mid U$ est le faisceau fondamental pour U. La restriction définit un homomorphisme $\rho : \Gamma_\Phi(\mathcal{C}) \rightarrow \Gamma_{\Phi \cap U}(\mathcal{C} \mid U)$. Montrons qu'il est surjectif. Soit donc c une section de $\mathcal{C}$ sur U, à support dans $L \cap U$ où $L \in \Phi$. Comme c est nulle dans $U - (L \cap U)$ il est clair qu'il existe une section c' de $\mathcal{C}$ sur $U \cup (X - L)$ qui est égale à c sur U et est nulle sur $X - L$. Comme $\mathcal{C}$ est flasque, cette section se prolonge en une section c_1 sur X, dont le support est contenu dans L, donc dans Φ, d'où notre assertion. Si N est le noyau de r on a donc une suite exacte

$$0 \rightarrow N \rightarrow \Gamma_\Phi(\mathcal{C}) \rightarrow \Gamma_{\Phi \cap U}(\mathcal{C} \mid U) \rightarrow 0. \tag{2}$$

Mais $H_*(N) = H_*^{\Phi \mid F}(F; K)$ d'après ([2], 3.5, Remark); pour obtenir (1), il suffit donc de prendre la suite exacte d'homologie associée à (2).

BIBLIOGRAPHIE

[1] Borel (Armand). — *Seminar on transformation groups.* — Princeton, Princeton University Press, 1960 (*Annals of Mathematics Studies*, 46).

[2] Borel (F.) and Moore (J. C.). — Homology theory for locally compact spaces, *Mich. math. J.*, t. 7, 1960, p. 137-159.

[3] Bruhat (F.) et Whitney (H.). — Quelques propriétés fondamentales des ensembles analytiques réels, *Comment. Math. Helvet.*, t. 33, 1959, p. 132-160.

[4] Cartan (Henri). — Cohomologie des groupes, suite spectrale, faisceaux, 2e édition, *Séminaire Cartan*, t. 3, 1950-1951. — Paris, Secrétariat mathématique, 1955 (multigraphié).

[5] Cartan (Henri). — Variétés analytiques complexes et fonctions automorphes, *Séminaire Cartan*, t. 6, 1953-1954.

[6] Cartan (Henri). — Quelques questions de topologie, *Séminaire Cartan*, t. 9, 1956-1957. — Paris, Secrétariat mathématique, 1958 (multigraphié).

[7] Cartan (Henri). — Variétés analytiques réelles et variétés analytiques complexes, *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 77-100.

[8] Chern (S. S.). — *Topics in differential geometry.* — Princeton, Institute for advanced Study, 1951 (multigraphié).

[9] Chow (W. L.). — On equivalence classes of cycles in an algebraic variety, *Annals of Math.*, t. 64, 1956, p. 450-472.

[10] Godement (Roger). — *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* — Paris, Hermann, 1958 (*Act scient. et ind.*, 1252; *Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg*, 13).

[11] Grauert (H.) und Remmert (R.). — Komplexe Räume, *Math. Annalen*, t. 136, 58, p. 245-318.

[12] Grothendieck (Alexander). — La théorie des classes de Chern, *Bull. Soc. math. France*, t. 86, 1958, p. 137-154.

[13] Kodaira (K.). — On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties), *Annals of Math.*, t. 60, 1954, p. 28-48.

[14] Lang (Serge). — *Introduction to algebraic geometry.* — New-York, Interscience Publishers, 1958 (*Interscience Tracts in pure and applied Mathematics*, 5).

[15] Lelong (Pierre). — Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. math. France*, t. 85, 1957, p. 239-262.

[16] Remmert (R.). — Projektionen analytischer Mengen, *Math. Annalen*, t. 130, 1956, p. 410-441.

[17] DE RHAM (Georges). — *Variétés différentiables, formes, courants, formes harmoniques.* — Paris, Hermann, 1955 (*Act. scient. et ind.*, 1222; *Publ. Inst. math. Univ. Nancago*, 3).

[18] DE RHAM (Georges). — On currents in an analytic complex manifold, *Seminars on analytic functions*, t. 1, p. 54-64. — Princeton, Institute for advanced Study, 1957.

[19] ROSSI (H.). — *Analytic spaces*, I and II. — Princeton University, 1960 (multigraphié).

[20] SERRE (Jean-Pierre). — Géométrie algébrique et géométrie analytique, *Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, t. 6, 1955-1956, p. 1-42.

[21] THOM (René). — Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod, *Ann. scient. Ec. Norm. Sup.*, t. 69, 1952, p. 109-181.

[22] THOM (René). — Un lemme sur les applications différentiables, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, Série, 2, t. 1, 1956, p. 59-71.

[23] WEIL (André). — *Foundations of algebraic geometry.* — New-York, American mathematical Society, 1946 (*Amer. math. Soc. Coll. Publ.*, 29).

[24] WHITNEY (H.). — Elementary structure of real algebraic varieties, *Annals of Math.*, t. 66, 1957, p. 545-556.

(Manuscrit reçu le 26 mai 1961.)

Armand BOREL,
Institute for advanced Study,
Princeton, N. J. (États-Unis).

André HAEFLIGER,
Faculté des Sciences,
Université de Genève,
Genève (Suisse).